



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 203–213  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 203–213  
<https://mmi.sgu.ru>      <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-203-213>, EDN: FADHUK

Научная статья

УДК 539.3

## Задача о введении жидкости в пористый сферический композит с учётом анизотропии

Д. В. Кучеренко

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, ул. Университетская наб., д. 7–9

**Кучеренко Денис Валерьевич**, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики,  
catcher.denis@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5946-5943>, SPIN: 8184-0670, AuthorID: 1109128

**Аннотация.** Пористые сферические композиты широко встречаются как в природных объектах, так и в технических приложениях. Для описания механического поведения таких структур необходимо учитывать взаимодействие твёрдой и жидкой фаз, поскольку жидкость внутри пористого тела воспринимает и перераспределяет часть внешней нагрузки. В данной работе предложена модель сферического композита, включающего пористое ядро и упругую трансверсально-изотропную оболочку. Предложенная модель применяется для анализа напряжений и деформаций в различных режимах нагружения, включая воздействие внешнего нормального давления и введение дополнительного объёма жидкости, например, при моделировании интравитреальных инъекций в биомедицинских исследованиях. Проведённый анализ показал, что при моделировании интравитреальных инъекций и описании глазного яблока как пороупругого композита падение внутрглазного давления при увеличении степени анизотропии оказывается менее значительным, чем в случае модели с упругой оболочкой, находящейся под воздействием только внутреннего давления. Увеличение степени анизотропии оказывается более существенным для снижения давления в пористом ядре в режиме приложения внешнего нормального давления, чем при введении дополнительного объёма жидкости. В работе также исследовано влияние геометрии и механических свойств порового ядра на изменение толщины оболочки. Полученные результаты обеспечивают комплексное понимание распределения напряжений и давления жидкости, что позволяет учитывать влияние анизотропии оболочки, пористости ядра и их механических характеристик на поведение сферических композитов.

**Ключевые слова:** биомеханика, пороупругость, инъекция, склеры, стекловидное тело

**Для цитирования:** Кучеренко Д. В. Задача о введении жидкости в пористый сферический композит с учётом анизотропии // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 203–213. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-203-213>, EDN: FADHUK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Modeling fluid injection into a porous spherical composite with anisotropy

D. V. Kucherenko

St. Petersburg University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia

**Denis V. Kucherenko**, catcher.denis@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5946-5943>, SPIN: 8184-0670,  
AuthorID: 1109128



**Abstract.** Porous spherical composites are widely found both in natural objects and in technical applications. To describe the mechanical behavior of such structures, it is necessary to take into account the interaction of solid and fluid phases, since the fluid inside the porous body supports and redistributes part of the external load. This paper proposes a model of a spherical composite including a porous core and an elastic transversely isotropic shell. The developed model is applied for stress and strain analysis in different loading regimes, including the effect of external normal pressure and the injection of an additional volume of fluid, for example, when modeling intravitreal injections in biomedical research. The analysis has shown that when modeling intravitreal injections and describing the eyeball as a poroelastic composite, the drop in intraocular pressure with increasing degree of anisotropy is less significant than in the case of a model with an elastic shell under the influence of internal pressure alone. The increase in the degree of anisotropy is more significant for the pressure reduction in the porous core in the mode of external normal pressure application than the injection of additional fluid volume. The study also investigates the influence of the geometry and mechanical properties of the porous core on the variation of the shell thickness. The results obtained provide a comprehensive understanding of the stress distribution and fluid pressure, which allows to consider the influence of shell anisotropy, core porosity and their mechanical characteristics on the behavior of spherical composites.

**Keywords:** biomechanics, poroelasticity, injection, sclera, vitreous body

**For citation:** Kucherenko D. V. Modeling fluid injection into a porous spherical composite with anisotropy. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 203–213 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-203-213>, EDN: FADHUK

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Сферические композиты находят широкое применение в различных областях, от биомеханики до инженерных технологий. Например, в биомеханике глазное яблоко представляет собой сферический композит с уникальными механическими свойствами [1], а в ядерной энергетике сферические топливные элементы используются в реакторах [2]. Анализ деформации таких структур под различными нагрузками имеет ключевое значение для понимания их напряжённо-деформированного поведения и разработки новых решений в этих областях.

Особый интерес представляют пористые сферические композиты, которые благодаря своей структуре обладают исключительными механическими свойствами. Примеры из природы, такие как кораллы, демонстрируют высокую прочность и устойчивость за счёт пористой структуры [3, 4]. В инженерии такие материалы широко применяются, например, в фильтрах, катализаторах и цементных композитах, где они выполняют роль включений в матрице [5, 6]. Благодаря своей способности перераспределять нагрузки, снижать напряжения и предотвращать разрушения пористые композиты становятся важным объектом исследования. Использование пороупругих моделей позволяет более детально изучить взаимодействие твёрдой и жидкой фаз и оптимизировать механическое поведение подобных материалов.

Целью данной работы является построение математической модели сферического композита, состоящего из пористого внутреннего ядра и упругой внешней оболочки, способного учитывать взаимодействие жидкости и твёрдой фазы. Рассматриваются два режима нагружения: введение дополнительного объёма жидкости в пористое ядро и приложение нормального давления на внешнюю поверхность оболочки. Модель позволяет описать распределение напряжений, деформаций и давления жидкости, а также учесть возможное влияние жёсткости ядра и степени анизотропии оболочки.

## 1. Математическая модель пористого сферического композита

Рассмотрим задачу инъекции дополнительного объёма жидкости в пористое сферическое тело, окружённое упругой трансверсально-изотропной непроницаемой оболочкой (рис. 1).



В качестве системы отсчёта выберем сферическую систему координат  $(r, \theta, \phi)$ , помещённую в центр сферы.

При инъекции дополнительного объёма жидкости композит деформируется в радиальном направлении. Благодаря симметрии сдвиговые деформации в ядре и оболочке отсутствуют, а нормальные деформации  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\theta\theta}$  и  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$  описываются через радиальное перемещение  $u_r$ :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}.$$

Уравнение равновесия сферического элемента

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений оболочки или пористого ядра.

Для внутренней сферы-ядра будем использовать индекс «с» (core), а для оболочки — индекс «ш» (shell), причем индексы могут быть нижними или верхними.

В рамках задачи рассматриваются эффективные напряжения  $\sigma_{ij}^{\text{eff}}$ , которые характеризуют напряжённое состояние твёрдой фазы пористого материала, исключая влияние порового давления. Компоненты полного тензора напряжений пористого тела  $\sigma_{ij}^c$  представляют собой сумму эффективных напряжений и порового давления  $p$ , действующего на поровое пространство. Для описания линейного изотропного пороупругого тела используется следующая модель [7, 8]:

$$\sigma_{ij}^c = \sigma_{ij}^{\text{eff}} - Ap\delta_{ij} = 2\mu_c\varepsilon_{ij} + \lambda_c\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - Ap\delta_{ij}, \quad (2)$$

где  $\mu_c$ ,  $\lambda_c$  — параметры Ламе пористого ядра,  $A$  — коэффициент эффективных напряжений Био (для мягких тканей значение коэффициента близко к единице),  $p$  — давление жидкости в поровом пространстве,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Для трансверсально-изотропной упругой оболочки связь между напряжениями и деформациями записывается в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta}^{\text{sh}} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{sh}} \\ \sigma_{rr}^{\text{sh}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\theta\theta}^{\text{sh}} & M_{\theta\varphi}^{\text{sh}} & M_{\theta r}^{\text{sh}} \\ M_{\varphi\theta}^{\text{sh}} & M_{\varphi\varphi}^{\text{sh}} & M_{\varphi r}^{\text{sh}} \\ M_{r\theta}^{\text{sh}} & M_{r\varphi}^{\text{sh}} & M_{rr}^{\text{sh}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta}^{\text{sh}} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{\text{sh}} \\ \varepsilon_{rr}^{\text{sh}} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где модули упругости  $M_{ij}^{\text{sh}}$  выражены через  $E_{\text{sh}}$ ,  $E'_{\text{sh}}$  (модули Юнга при растяжении-сжатии в плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней) и коэффициенты Пуассона оболочки  $\nu_{\text{sh}} = \nu_{\theta\varphi}^{\text{sh}} = \nu_{\varphi\theta}^{\text{sh}}$ ,  $\nu'_{\text{sh}} = \nu_{r\varphi}^{\text{sh}} = \nu_{\varphi r}^{\text{sh}}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{\theta\theta}^{\text{sh}} = M_{\varphi\varphi}^{\text{sh}} &= \frac{E_{\text{sh}}(E'_{\text{sh}} - E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2)}{(1 + \nu_{\text{sh}})(E'_{\text{sh}} - E'_{\text{sh}}\nu_{\text{sh}} - 2E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2)}, \\ M_{\theta\varphi}^{\text{sh}} = M_{\varphi\theta}^{\text{sh}} &= \frac{E_{\text{sh}}(E'_{\text{sh}}\nu'_{\text{sh}} + E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2)}{(1 + \nu_{\text{sh}})(E'_{\text{sh}} - E'_{\text{sh}}\nu_{\text{sh}} - 2E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2)}, \\ M_{rr}^{\text{sh}} &= \frac{(E'_{\text{sh}})^2(1 - \nu_{\text{sh}})}{E'_{\text{sh}} - E'_{\text{sh}}\nu_{\text{sh}} - 2E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2}, \\ M_{r\theta}^{\text{sh}} = M_{r\varphi}^{\text{sh}} &= \frac{E'_{\text{sh}}E_{\text{sh}}\nu'_{\text{sh}}}{E'_{\text{sh}} - E'_{\text{sh}}\nu_{\text{sh}} - 2E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2}. \end{aligned}$$

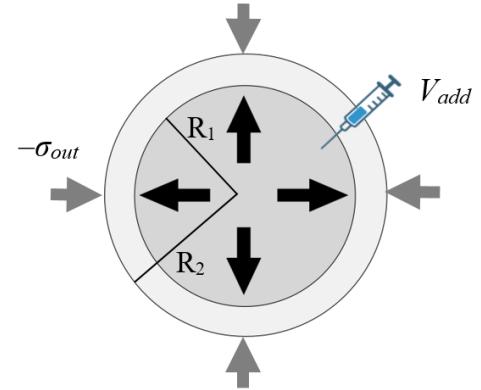


Рис. 1. Введение жидкости во внутреннюю полость сферического композита, находящегося под действием нормального внешнего давления

Fig. 1. Injection of liquid into the inner cavity of a spherical composite under external normal pressure



Приращение содержания поровой жидкости  $\zeta$  отражает изменение объёма порового пространства, вызванное инъекцией жидкости, а также влияние давления жидкости на деформацию твёрдой фазы материала [7,8]:

$$\zeta = \phi \operatorname{div} (\mathbf{u}_s - \mathbf{U}_f) = \phi (\theta_s - \theta_f),$$

где  $\mathbf{u}_s$  и  $\mathbf{U}_f$  — перемещения точек твёрдой и жидкой фаз ядра,  $\theta_s$  и  $\theta_f$  — объёмная деформация твёрдой и жидкой фаз ядра,  $\phi$  — пористость тела — доля жидкости в представительном объёме пористого тела соответствующей части композита,  $0 \leq \phi \leq 1$ .

Последнее уравнение может быть переписано в виде

$$\theta_f = \theta_s - \phi^{-1} \zeta,$$

означающее, что при отсутствии приращения содержания поровой жидкости, когда жидкость не втекает и не вытекает, объёмные деформации твёрдой и жидкой фаз совпадают.

Приращение содержания поровой жидкости также может быть переписано в виде [7]:

$$\zeta = A\theta_s + \frac{p}{M},$$

где  $M$  — модуль Био, описывающий сжимаемость пористого материала при изменении давления жидкости в условиях удержания постоянного объёма твёрдой фазы.

Рассмотрим установившийся процесс деформирования для статической задачи. Для обеспечения отсутствия потоков жидкости при  $t \rightarrow \infty$  примем, что градиент давления равен нулю. Уравнение равновесия (1) вместе с выражениями для напряжений (2) принимает вид

$$\frac{d^2 u_r^c}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r^c}{dr} - \frac{2u_r^c}{r^2} = 0. \quad (4)$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$u_r^c(r) = C_1^c r + \frac{C_2^c}{r}.$$

Так как при  $r = 0$  в выражении для перемещений точек твёрдой фазы ядра образуется сингулярность, примем, что  $C_2^c = 0$ :

$$u_r^c(r) = C_1^c r.$$

Аналогичное уравнение для трансверсально-изотропной оболочки получается путём подстановки выражений (3) в уравнение (1):

$$(u_r^{\text{sh}})^{\prime\prime} + \frac{2}{r} (u_r^{\text{sh}})' - \frac{2B_{\text{sh}}}{r^2} u_r^{\text{sh}} = 0, \quad B_{\text{sh}} = \frac{E_{\text{sh}} (\nu'_{\text{sh}} - 1)}{E'_{\text{sh}} (\nu_{\text{sh}} - 1)}. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$u_r^{\text{sh}}(r) = C_1^{\text{sh}} r^m + \frac{C_2^{\text{sh}}}{r^{m+1}}, \quad m = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 8B_{\text{sh}}}}{2}, \quad m > 0.$$

На границе между внутренним ядром и оболочкой требуется выполнение условий непрерывности радиальных перемещений и радиального компонента полного тензора напряжений:

$$\begin{aligned} u_r^c|_{r=R_1} &= u_r^{\text{sh}}|_{r=R_1}, \\ \sigma_{rr}^{\text{sh}}|_{r=R_1} &= \sigma_{rr}^c|_{r=R_1}. \end{aligned}$$



Предположим, что на внешнюю поверхность действует нормальное давление  $\sigma_{\text{out}}$ :

$$\sigma_{rr}^{\text{sh}}|_{r=R_2} = \sigma_{\text{out}}.$$

Величина приращения содержания поровой жидкости, проинтегрированная по объёму ядра, равна объёму жидкости, введённой в процессе инъекции. Это соотношение отражает баланс массы жидкости, поступающей в пористое тело, и изменений её содержания в поровом пространстве, обеспечивая связь между внешними условиями инъекции и внутренними деформационными процессами:

$$\int_{V_{\text{core}}} \zeta dV = V_{\text{add}} \Rightarrow \int_{V_{\text{core}}} \left( A\theta_s + \frac{p}{M} \right) dV = V_{\text{add}} \Rightarrow \left( 3AC_1^c + \frac{p}{M} \right) \frac{4}{3}\pi R_1^3 = V_{\text{add}},$$

где  $V_{\text{add}}$  — закачиваемый или выкачиваемый объём жидкости,  $V_{\text{core}}$  — объём пористого ядра.

## 2. Результаты и их обсуждение

Глазное яблоко можно рассматривать как сферический композит. Его внешняя оболочка, склеры, выполняет ключевую механическую функцию благодаря наличию коллагеновых волокон [9]. Она обеспечивает необходимую жёсткость и структурную устойчивость, позволяя глазу противостоять внутриглазному давлению (ВГД) и сохранять форму при движении [10]. Внутреннюю часть глаза заполняет стекловидное тело — гелеобразная субстанция, расположенная между хрусталиком и сетчаткой. Для его моделирования применяются различные подходы, включая описание в виде вязкой жидкости [11] или пороупругого материала [12].

Инtravitреальная инъекция является эффективным методом доставки лекарственных препаратов для лечения офтальмологических заболеваний [13]. Этот способ обеспечивает высокую концентрацию действующего вещества непосредственно в стекловидном теле, минимизируя системные побочные эффекты. Обычно объём инъекций составляет от 0.05 до 0.1 мл [14]. При введении жидкости общий объём глаза временно увеличивается, что вызывает значительное повышение внутриглазного давления. Даже кратковременное повышение ВГД сверх допустимых значений может нарушить кровоснабжение сетчатки и области диска зрительного нерва [15].

Для исследования биомеханических процессов, связанных с инtravitреальными инъекциями, применяются аналитические методы [1, 16] и численные подходы [17]. В большинстве исследований склеры представляется как трансверсально-изотропный материал в трёхмерной постановке [18] или описывается с использованием теории оболочек [19].

Диаметр глазного яблока у взрослого человека колеблется от 21 до 27 мм [20] при среднем значении 24 мм [21, 22]. Толщина склеры варьируется: на экваторе она минимальна и составляет 0.5 мм, тогда как в задней части глаза достигает максимального значения 1.3 мм [21]. Механические свойства склеры зависят от возраста и наличия патологий [9]. Значения окружного модуля упругости для склеры, приведённые в литературе, составляют 3 МПа [22], 14.76 МПа [23], 14.31 ± 8.56 МПа [24]. Коэффициент Пуассона варьируется в диапазоне от 0.4 до 0.48 [22]. Для расчётов принимаем модуль упругости склеры равным 14.3 МПа, а коэффициент Пуассона  $\nu_{\text{sh}} = 0.4$  [23]. При увеличении степени анизотропии оболочки (уменьшении  $E'_{\text{sh}}$ ) коэффициент Пуассона  $\nu'_{\text{sh}}$  уменьшается согласно [1].

Значение модуля Юнга ядра примем равным 60 Па [25]. Мягкие ткани, как правило, близки к состоянию несжимаемости, что обусловлено их высокой гидратацией. Наличие значительного объёма жидкости внутри тканей обеспечивает их устойчивость к изменениям объёма при внешних нагрузках, что отражается в значениях коэффициента Пуассона, приближённых к 0.5.

Полные напряжения в такой системе зависят от суммы эффективных напряжений и вклада порового давления. Высокое поровое давление, связанное с введением объёма жид-



кости, может преобладать над эффективными напряжениями, что приводит к отрицательным значениям полных напряжений, соответствующим состоянию сжатия. Если коэффициент Био  $A$  близок к 1 (пористый материал с высокой долей жидкости), вклад порового давления в полные напряжения становится особенно значительным. В табл. 1 приведены параметры, отражающие степень анизотропии оболочки и распределение напряжений в ядре при введении инъекции объёмом 0.1 мл.

Таблица 1 / Table 1

Изменение величины порового давления и полных механических напряжений  
в пористом стекловидном теле при введении инъекции 0.1 мл  
Changes in the magnitude of pore pressure and total mechanical stresses in the  
porous vitreous body during injection of 0.1 mL

Соотношение $E_{sh}/E'_{sh}$	Коэффициент Пуассона $\nu'_{sh}$	Значение порового давления, мм рт. ст.	Значение полных напряжений в ядре, мм рт. ст.
1	0.4	94	-52
2	0.3	93	-50
10	0.15	89	-43
100	0.02	84	-31
200	0.0075	82	-28

Увеличение степени анизотропии приводит к уменьшению значений порового давления ядра на 13%, в то время как полные напряжения снижаются на 46%. Это указывает на рост по модулю эффективных напряжений в твёрдой фазе ядра, при этом они остаются ограниченными значением  $p$ . Такое поведение позволяет компенсировать снижение полных напряжений, обеспечивая механическое равновесие в системе.

Моделирование глаза как пороупругого композита позволяет более подробно описать механическое равновесие, учитывая взаимодействие твёрдой и жидкой фаз. В отличие от модели упругой оболочки, находящейся под действием только внутреннего давления [1], пороупругая модель показывает, что увеличение степени анизотропии приводит к менее выраженному падению ВГД.

При рассмотрении задачи воздействия внешнего давления  $\sigma_{out}$  без введения дополнительного объёма жидкости изучено распределение напряжений в ядре при различных значениях степени анизотропии оболочки. В табл. 2 представлены результаты расчётов для внешней сжимающей нагрузки, равной 11 кПа.

Таблица 2 / Table 2

Изменение величины порового давления и полных механических напряжений  
в пористом стекловидном теле при внешней сжимающей нагрузке 11 кПа  
Variation of pore pressure and total mechanical stresses in a porous vitreous body  
under an external compressive load of 11 kPa

Соотношение $E_{sh}/E'_{sh}$	Коэффициент Пуассона $\nu'_{sh}$	Значение порового давления, мм рт. ст.	Значение полных напряжений в ядре, мм рт. ст.
1	0.4	26	-52
2	0.3	25	-50
10	0.15	21	-42
100	0.02	11	-22
200	0.0075	7	-13

Значение 11 кПа было выбрано таким образом, чтобы в изотропном случае полные напряжения для обоих режимов нагружения совпадали. Поровое давление составляет половину от полных напряжений в ядре (см. табл. 2), что указывает на равное распределение



нагрузки между твёрдой и жидккой фазами при приложении внешнего давления. Однако при введении дополнительного объёма жидкости поровое давление превышает эффективные напряжения, что свидетельствует о большей нагрузке, воспринимаемой жидккой фазой. При этом увеличение степени анизотропии приводит к более значительному снижению полных напряжений в случае  $\sigma_{\text{applied}} = 11 \text{ кПа}$ ,  $V_{\text{add}} = 0$ , по сравнению со случаем  $\sigma_{\text{applied}} = 0$ ,  $V_{\text{add}} = 0.1 \text{ мл}$ . Такое различие объясняется тем, что при равномерном внешнем давлении оболочки принимает на себя значительную часть нагрузки, эффективно перераспределяя её благодаря своей анизотропной структуре, тогда как при инъекции прилагаемые напряжения воздействуют в первую очередь непосредственно на твёрдую и жидкую фазы ядра.

На рис. 2 представлено относительное изменение толщины оболочки  $h/h_0$  в зависимости от степени её анизотропии  $E_{\text{sh}}/E'_{\text{sh}}$  для трёх различных объёмов инъекции жидкости: 0.01, 0.05 и 0.1 мл. С уменьшением объёма инъекции величина относительного изменения толщины оболочки снижается.

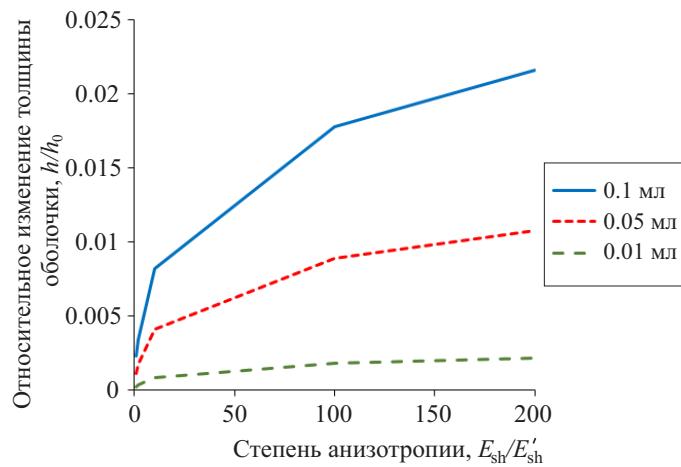


Рис. 2. Относительное изменение толщины оболочки в

зависимости от степени анизотропии и объёма инъекции

Fig. 2. Relative change in shell thickness as a function of  
the degree of anisotropy and injection volume

При увеличении степени анизотропии оболочки  $E_{\text{sh}}/E'_{\text{sh}}$  возрастает относительное изменение толщины оболочки для всех рассматриваемых объёмов инъекции. Полученные значения оказываются ниже, чем результаты, представленные в работе [1]. Это связано с тем, что в настоящей работе внутреннее ядро представлено как двухфазный материал, обладающий сопротивлением к внешним нагрузкам, что снижает степень деформации оболочки.

Для всех случаев наблюдается увеличение порового давления с ростом модуля Юнга ядра. Это объясняется тем, что более жёсткое ядро (с большим модулем Юнга) оказывает большее сопротивление изменению объёма при нагружении, что приводит к росту давления поровой жидкости.

На рис. 3 представлены зависимости давления в порах от модуля Юнга ядра для трёх различных степеней анизотропии оболочки и двух случаев толщины оболочки до деформации.

Увеличение модуля Юнга ядра и толщины оболочки приводит к росту порового давления. Для более тонкой оболочки изменения порового давления при различных степенях анизотропии менее значительны, чем для более толстой оболочки. Рост порового давления, связанный с увеличением толщины оболочки, объясняется ограничением деформаций ядра и уменьшением объёма доступного порового пространства. В результате полные напряжения в ядре становятся менее сжимающими, так как вклад давления жидкости частично компенсирует нагрузку, передаваемую на твёрдую фазу.

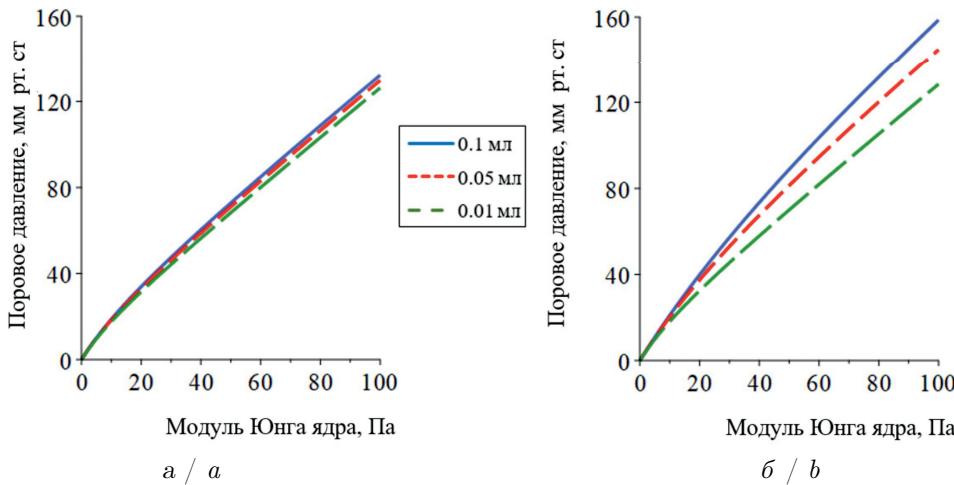


Рис. 3. Влияние величины модуля Юнга ядра на значения порового давления при  $\sigma_{\text{applied}} = 0$  кПа,  $V_{\text{add}} = 0.1$  мл и толщине оболочки до деформации 0.5 мм (а) и 2 мм (б)

Fig. 3. Influence of the Young's modulus value of the core on the values of pore pressure at  $\sigma_{\text{applied}} = 0$  kPa,  $V_{\text{add}} = 0.1$  ml and shell thickness before deformation 0.5 mm (a), and 2 mm (b)

## Заключение

В данной работе разработана модель сферического композита, включающего пористое внутреннее ядро и упругую внешнюю трансверсально-изотропную оболочку. Рассмотрены два режима нагружения: введение дополнительного объема жидкости во внутреннюю сферу и приложение распределенной нормальной нагрузки на внешнюю поверхность оболочки. Полученные результаты демонстрируют распределение полных напряжений в пористом ядре, а также значения давления жидкости в пористой среде.

Модель показала, как степень анизотропии оболочки влияет на перераспределение напряжений, изменение толщины оболочки и механическое поведение ядра. Увеличение толщины оболочки приводит к более высоким значениям порового давления при инъекции. Дальнейшее исследование будет направлено на изучение влияния скорости введения инъекции и других динамических факторов на механическое поведение композита.

## Список литературы

1. Bayär C. M., Замураев Л. А., Котляр К. Е. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутрглазного давления при интрасклеральных инъекциях // Российский журнал биомеханики. 2006. Т. 10, № 2. С. 43–49. EDN: JWTIDD
2. Powers J. J., Wirth B. D. A review of TRISO fuel performance models // Journal of Nuclear Materials. 2010. Vol. 405, iss. 1. P. 74–82. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2010.07.030>
3. Pasquini L., Molinari A., Fantazzini P., Dauphen Ya., Cuif J.-P., Levy O., Dubinsky Z., Caroselli E., Prada F., Goffredo S., Di Giosia M., Reggi M., Falini G. Isotropic microscale mechanical properties of coral skeletons // Journal of the Royal Society Interface. 2015. Vol. 12, iss. 106. Art. 20150168. <https://doi.org/10.1098/rsif.2015.0168>
4. Wu Y.-C., Lee T.-M., Chiu K.-H., Shaw S.-Y., Yang C.-Y. A comparative study of the physical and mechanical properties of three natural corals based on the criteria for bone-tissue engineering scaffolds // Journal of Materials Science: Materials in Medicine. 2009. Vol. 20. P. 1273–1280. <https://doi.org/10.1007/s10856-009-3695-3>
5. Du R., Eychmuller A. Metal-based aerogels and porous composites as efficient catalysts: Synthesis and catalytic performance // Catalysts. 2023. Vol. 13, iss. 11. Art. 1451. <https://doi.org/10.3390/catal13111451>
6. Hashin Z., Monteiro P. J. M. An inverse method to determine the elastic properties of the interphase between the aggregate and the cement paste // Cement and Concrete Research. 2002. Vol. 32, iss. 8. P. 1291–1300. [https://doi.org/10.1016/S0008-8846\(02\)00792-5](https://doi.org/10.1016/S0008-8846(02)00792-5)
7. Cheng A. H.-D. Poroelasticity. Switzerland : Springer, 2016. 877 p. (Theory and Applications of Transport in Porous Media, vol. 27.). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-25202-5>



8. *Маслов Л. Б.* Конечно-элементные пороупругие модели в биомеханике. СПб. : Лань, 2013. 236 с.
9. *Coudrillier B., Tian J., Alexander S., Myers K. M., Quigley H. A., Nguyen T. D.* Glaucoma-related changes in the mechanical properties and collagen micro-architecture of the human sclera // *PloS One*. 2015. Vol. 10, iss. 7. Art. e0131396. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0131396>
10. *Meek K. M.* The cornea and sclera // *Collagen: Structure and Mechanics* / ed. by P. Fratzl. Boston, MA : Springer US, 2008. P. 359–396. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-73906-9\\_13](https://doi.org/10.1007/978-0-387-73906-9_13)
11. *Bonfiglio A., Repetto R., Siggers J. H., Stocchino A.* Investigation of the motion of a viscous fluid in the vitreous cavity induced by eye rotations and implications for drug delivery // *Physics in Medicine & Biology*. 2013. Vol. 58, iss. 6. Art. 1969. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/58/6/1969>
12. *Ruffini A., Casalucci A., Cara C., Ethier C. R., Repetto R.* Drug distribution after intravitreal injection: A mathematical model // *Investigative Ophthalmology & Visual Science*. 2024. Vol. 65, iss. 4. Art. 9. <https://doi.org/10.1167/iovs.65.4.9>
13. *Avery R. L., Pieramici D. J., Rabena M. D., Castellarin A. A., Nasir M. A., Giust M. J.* Intravitreal bevacizumab (Avastin) for neovascular age-related macular degeneration // *Ophthalmology*. 2006. Vol. 113, iss. 3. P. 363–372. <https://doi.org/10.1016/j.ophtha.2005.11.019>
14. *Doshi R. R., Bakri S. J., Fung A. E.* Intravitreal injection technique // *Seminars in Ophthalmology*. 2011. Vol. 26, iss. 3. P. 104–113. <https://doi.org/10.3109/08820538.2010.541318>
15. *Nagel E., Vilser W., Lanzl I. M.* Retinal vessel reaction to short-term IOP elevation in ocular hypertensive and glaucoma patients // *European Journal of Ophthalmology*. 2001. Vol. 11, iss. 4. P. 338–344. <https://doi.org/10.1177/112067210101100404>
16. *Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б.* Модели механики деформируемого тела в задачах офтальмологии // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2023. Т. 10, вып. 4. С. 686–712. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.407>, EDN: UJNCGP
17. *Иомдина Е. Н., Полоз М. В.* Биомеханическая модель глазного яблока человека: описание и верификация // Математическая биология и биоинформатика. 2014. Т. 9, № 1. С. 286–295. <https://doi.org/10.17537/2014.9.286>, EDN: SIHWUT
18. *Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б., Смирнов А. Л.* Задача об осесимметричной деформации ортотропного сферического слоя в трехмерной постановке // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2016. Т. 3, вып. 3. С. 449–456. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.313>, EDN: WLSQNJ
19. *Bauer S. M., Voronkova E. B.* Nonclassical shell theories in ocular biomechanics // *Advanced Structured Materials*. 2015. Vol. 45. P. 81–97. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-02535-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-02535-3_4), EDN: UEMWQF
20. *Bekerman I., Gottlieb P., Vaiman M.* Variations in eyeball diameters of the healthy adults // *Journal of Ophthalmology*. 2014. Vol. 2014. Art. 503645. <https://doi.org/10.1155/2014/503645>
21. *Boote C., Sigal I. A., Grytz R., Hua Y., Nguyen T. D., Girard M. J. A.* Scleral structure and biomechanics // *Progress in Retinal and Eye Research*. 2020. Vol. 74. Art. 100773. <https://doi.org/10.1016/j.preteyeres.2019.100773>
22. *Иомдина Е. Н.* Механические свойства тканей глаза человека // Биомеханика: достижения и перспективы / под ред. А. К. Цатуряна, А. А. Штейна. Москва : Изд-во Московского ун-та, 2006. С. 183–200. (Современные проблемы биомеханики. Вып. 11).
23. *Иомдина Е. Н., Бауэр С. М., Комляр К. Е.* Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. Москва : Реал Тайм, 2015. 208 с.
24. *Zhang Y., Li Z., Liu L., Han X., Zhao X., Mu G.* Comparison of riboflavin/ultraviolet-A cross-linking in porcine, rabbit, and human sclera // *BioMed Research International*. 2014. Vol. 2014. Art. 194204. <https://doi.org/10.1155/2014/194204>
25. *Swindle K. E., Hamilton P. D., Ravi N.* In situ formation of hydrogels as vitreous substitutes: viscoelastic comparison to porcine vitreous // *Journal of Biomedical Materials Research Part A*. 2008. Vol. 87A, iss. 3. P. 656–665. <https://doi.org/10.1002/jbm.a.31769>

### References

1. Bauer S. M., Zamuraev L. A., Kotlyar K. E. Model of the transversely isotropic spherical layer for estimation of intraocular pressure changes after intravitreal injections. *Russian Journal of Biomechanics*, 2006, vol. 10, iss. 2, pp. 43–49 (in Russian). EDN: JWTIDD
2. Powers J. J., Wirth B. D. A review of TRISO fuel performance models. *Journal of Nuclear Materials*, 2010, vol. 405, iss. 1, pp. 74–82. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2010.07.030>



3. Pasquini L., Molinari A., Fantazzini P., Dauphen Ya., Cuif J.-P., Levy O., Dubinsky Z., Caroselli E., Prada F., Goffredo S., Di Giosia M., Reggi M., Falini G. Isotropic microscale mechanical properties of coral skeletons. *Journal of The Royal Society Interface*, 2015, vol. 12, iss. 106, art. 20150168. <https://doi.org/10.1098/rsif.2015.0168>
4. Wu Y.-C., Lee T.-M., Chiu K.-H., Shaw S.-Y., Yang C.-Y. A comparative study of the physical and mechanical properties of three natural corals based on the criteria for bone-tissue engineering scaffolds. *Journal of Materials Science: Materials in Medicine*, 2009, vol. 20, pp. 1273–1280. <https://doi.org/10.1007/s10856-009-3695-3>
5. Du R., Eychmuller A. Metal-based aerogels and porous composites as efficient catalysts: Synthesis and catalytic performance. *Catalysts*, 2023, vol. 13, iss. 11, art. 1451. <https://doi.org/10.3390/catal13111451>
6. Hashin Z., Monteiro P. J. M. An inverse method to determine the elastic properties of the interphase between the aggregate and the cement paste. *Cement and Concrete Research*, 2002, vol. 32, iss. 8, pp. 1291–1300. [https://doi.org/10.1016/S0008-8846\(02\)00792-5](https://doi.org/10.1016/S0008-8846(02)00792-5)
7. Cheng A. H.-D. *Poroelasticity. Theory and Applications of Transport in Porous Media*, vol. 27. Switzerland, Springer, 2016. 877 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-25202-5>
8. Maslov L. B. *Konechno-elementnye porouprugie modeli v biomehanike* [Finite-element poroelastic models in biomechanics]. St. Petersburg, Lan', 2013. 236 p. (in Russian).
9. Coudrillier B., Tian J., Alexander S., Myers K. M., Quigley H. A., Nguyen T. D. Glaucoma-related changes in the mechanical properties and collagen micro-architecture of the human sclera. *PLoS One*, 2015, vol. 10, iss. 7, art. e0131396. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0131396>
10. Meek K. M. The cornea and sclera. In: Fratzl P. (ed.) *Collagen: Structure and Mechanics*. Boston, MA, Springer US, 2008, pp. 359–396. [https://doi.org/10.1007/978-0-387-73906-9\\_13](https://doi.org/10.1007/978-0-387-73906-9_13)
11. Bonfiglio A., Repetto R., Siggers J. H., Stocchino A. Investigation of the motion of a viscous fluid in the vitreous cavity induced by eye rotations and implications for drug delivery. *Physics in Medicine & Biology*, 2013, vol. 58, iss. 6, art. 1969. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/58/6/1969>
12. Ruffini A., Casalucci A., Cara C., Ethier C. R., Repetto R. Drug distribution after intravitreal injection: A mathematical model. *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, 2024, vol. 65, iss. 4, art. 9. <https://doi.org/10.1167/iovs.65.4.9>
13. Avery R. L., Pieramici D. J., Rabena M. D., Castellarin A. A., Nasir M. A., Giust M. J. Intravitreal bevacizumab (Avastin) for neovascular age-related macular degeneration. *Ophthalmology*, 2006, vol. 113, iss. 3, pp. 363–372. <https://doi.org/10.1016/j.ophtha.2005.11.019>
14. Doshi R. R., Bakri S. J., Fung A. E. Intravitreal injection technique. *Seminars in Ophthalmology*, 2011, vol. 26, iss. 3, pp. 104–113. <https://doi.org/10.3109/08820538.2010.541318>
15. Nagel E., Vilser W., Lanzl I. M. Retinal vessel reaction to short-term IOP elevation in ocular hypertensive and glaucoma patients. *European Journal of Ophthalmology*, 2001, vol. 11, iss. 4, pp. 338–344. <https://doi.org/10.1177/112067210101100404>
16. Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B. Models of solid mechanics in the problems of ophthalmology. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2023, vol. 56, iss. 4, pp. 493–511. <https://doi.org/10.1134/s1063454123040039>, EDN: KFETGL
17. Iomdina E. N., Poloz M. V. Biomechanical model of the human eye: Description and verification. *Mathematical Biology and Bioinformatics*, 2014, vol. 9, iss. 1, pp. 286–295 (in Russian). <https://doi.org/10.17537/2014.9.286>, EDN: SIHWUT
18. Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B., Smirnov A. L. The three-dimensional problem of the axisymmetric deformation of an orthotropic spherical layer. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2016, vol. 49, iss. 3, pp. 277–283. <https://doi.org/10.3103/S1063454116030043>, EDN: XFPPKB
19. Bauer S. M., Voronkova E. B. Nonclassical shell theories in ocular biomechanics. *Advanced Structured Materials*, 2015, vol. 45, pp. 81–97. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-02535-3\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-02535-3_4), EDN: UEMWQF
20. Bekerman I., Gottlieb P., Vaiman M. Variations in eyeball diameters of the healthy adults. *Journal of Ophthalmology*, 2014, vol. 2014, art. 503645. <https://doi.org/10.1155/2014/503645>
21. Boote C., Sigal I. A., Grytz R., Hua Y., Nguyen T. D., Girard M. J. A. Scleral structure and biomechanics. *Progress in Retinal and Eye Research*, 2020, vol. 74, art. 100773. <https://doi.org/10.1016/j.preteyeres.2019.100773>
22. Iomdina E. N. Mechanical properties of the human eye tissues. In: Tsaturyan A. K., Stein A. A. *Biomechanics: Progress and Perspectives*. Modern Problems of Biomechanics. Vol. 11. Moscow, Moscow University Press, 2006, pp. 183–200 (in Russian).
23. Iomdina E. N., Bauer S. M., Kotlyar K. E. *Biomechanika glaza: teoretycheskie aspekty i klinicheskie*



- prilozheniya* [Biomechanics of the eye: Theoretical aspects and clinical applications]. Moscow, Real Time, 2015. 208 p. (in Russian).
- 24. Zhang Y., Li Z., Liu L., Han X., Zhao X., Mu G. Comparison of riboflavin/ultraviolet-A cross-linking in porcine, rabbit, and human sclera. *BioMed Research International*, 2014, vol. 2014, art. 194204. <https://doi.org/10.1155/2014/194204>
  - 25. Swindle K. E., Hamilton P. D., Ravi N. In situ formation of hydrogels as vitreous substitutes: viscoelastic comparison to porcine vitreous. *Journal of Biomedical Materials Research Part A*, 2008, vol. 87A, iss. 3, pp. 656–665. <https://doi.org/10.1002/jbm.a.31769>

Поступила в редакцию / Received 18.12.2024

Принята к публикации / Accepted 11.01.2025

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025