



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 214–230

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 214–230

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230>, EDN: PVASPW

Научная статья

УДК 517.98

Распространение гармонических волн в вязкоупругих средах, описываемых моделями с дробными производными

К. А. Модестов^{1,2}, М. В. Шитикова¹✉

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

²Воронежский государственный технический университет, Россия, 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84

Модестов Константин Анатольевич, ¹старший преподаватель кафедры общей и прикладной физики; ²младший научный сотрудник Международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук им. Заслуженного деятеля науки РФ, профессора Россихина Ю. А., ModestovKA@mgsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4596-2652>, SPIN: 6850-4620, AuthorID: 635355

Шитикова Марина Вячеславовна, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики, mvs@cchgeu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>, SPIN: 5023-9854, AuthorID: 4259

Аннотация. В данной работе исследуются характеристики гармонических волн, распространяющихся в трехмерных изотропных вязкоупругих средах, с помощью обобщенных моделей Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными. Найдены асимптотические значения скоростей продольных и поперечных волн, их коэффициентов затухания и логарифмических декрементов.

Ключевые слова: вязкоупругие среды, реологические модели, дробная производная, логарифмический декремент затухания, дисперсия

Благодарности: Данные исследования проводились в рамках программы научно-исследовательских работ Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (проект № 36).

Для цитирования: Модестов К. А., Шитикова М. В. Распространение гармонических волн в вязкоупругих средах, описываемых моделями с дробными производными // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 214–230. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230>, EDN: PVASPW

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Harmonic wave propagation in viscoelastic media modelled via fractional derivative models

K. A. Modestov^{1,2}, M. V. Shitikova¹✉

¹Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavsckoye Shosse, Moscow 129337, Russia

²Voronezh State Technical University, 84 20-letiya Oktyabrya St., Voronezh 394006, Russia

Konstantin A. Modestov, ModestovKA@mgsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4596-2652>, SPIN: 6850-4620, AuthorID: 635355



Marina V. Shitikova, mvs@cchgeu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>, SPIN: 5023-9854, AuthorID: 4259

Abstract. In the present paper, harmonic waves propagating in 3D isotropic viscoelastic media are analyzed using the fractional derivative Kelvin–Voigt model, Maxwell model and standard linear solid model. Asymptotic values of the wave velocities, their coefficients of attenuation and logarithmic decrements have been found.

Keywords: viscoelastic media, rheological models, fractional derivative, logarithmic decrement of attenuation, dispersion

Acknowledgements: This research was carried out within the Scientific Programme of Moscow National Research University of Civil Engineering (project No. 36).

For citation: Modestov K. A., Shitikova M. V. Harmonic wave propagation in viscoelastic media modelled via fractional derivative models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 214–230 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230>, EDN: PVASPW

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Посвящается 75-летию профессора Л. Ю. Коссовича

Введение

Как отмечал Ю. Н. Работнов [1], в природе абсолютно упругих тел не существует. Все среды обладают в той или иной степени вязкоупругими свойствами, а их основные физико-механические свойства зависят от времени. В связи с широким применением теории вязкоупругости при исследовании поведения новых материалов и традиционных материалов теории и методам расчета вязкоупругих сред при различного рода воздействиях уделялось большое внимание [2–6].

Проблема распространения волн в вязкоупругих средах довольно сложна [5] и предполагает изучение физических эффектов, таких как дисперсия и затухание. Исследователи находят аналитические решения с помощью различных моделей вязкоупругости [3, 6], применяя в том числе и модели с производными дробного порядка [7–9]. Подробный анализ вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела, приведен в обзоре [10], а история развития этих моделей описана в работе [11].

Анализ работ, посвященных изучению распространения волн в вязкоупругих средах, свойства которых описываются различными моделями с дробными производными, показал, что в подавляющем большинстве из них рассматривались одномерные среды, т.е. продольные волны в вязкоупругих стержнях [7–9, 12–19].

Распространение плоских гармонических волн в линейной трехмерной вязкоупругой среде со слабо сингулярным ядром наследственности в виде дробноэкспоненциальной функции Ю. Н. Работнова [4] изучалось в работах [20–22], где была установлена связь особенностей ядра наследственности с соответствующей функцией распределения и проанализированы особенности поведения коэффициента затухания гармонических волн при высоких частотах. Наряду с [2], где изучены гармонические волны в трехмерных термовязкоупругих средах, было найдено, что при распространении подобных волн имеет место не только затухание, но и дисперсия (зависимость фазовой скорости от частоты).

В данной статье исследуется распространение плоских гармонических волн в трехмерных вязкоупругих средах, свойства которых описываются простейшими моделями с дробными производными, а именно: моделями Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела. Рассматриваются среды с памятью в случае, когда объемной релаксацией можно пренебречь по сравнению с релаксацией при сдвиге. При этом модели с дробными производными используются для задания зависящих от времени операторов Юнга или сдвига.



1. Определяющие соотношения для анализа характеристик продольных и поперечных волн в линейной вязкоупругости

Система уравнений, описывающая динамическое поведение линейных изотропных вязкоупругих сред, имеет вид [1, 2, 6]:

$$\sigma_{ij} = \hat{\lambda} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\hat{\mu} \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad (2)$$

где σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно, u_i — компоненты вектора перемещений, ρ — плотность среды, точка над величиной означает производную по времени, индекс после запятой указывает на пространственное дифференцирование по соответствующей координате, а $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ — зависящие от времени t операторы параметров Ламе:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} \varepsilon &= \int_0^\infty \lambda(t') \varepsilon(t - t') dt', \\ \hat{\mu} \varepsilon &= \int_0^\infty \mu(t') \varepsilon(t - t') dt'. \end{aligned}$$

Учитывая зависимость между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

и соотношения (1), уравнения движения (2) можно переписать в виде

$$\rho \ddot{u}_i = \hat{\lambda} u_{k,ki} + \hat{\mu} (u_{k,ki} + u_{i,kk}). \quad (3)$$

Будем искать решение в виде затухающей волны

$$u_i = A_i \exp \left[i\omega t - \left(\alpha + i\frac{\omega}{c} \right) x_k \nu_k \right], \quad (4)$$

где A_i , c , ω и α — амплитуда, скорость, частота и коэффициент затухания волны соответственно, ν_k — единичный вектор в направлении распространения волны, i — мнимая единица.

Подставляя соотношения (4) в уравнения движения (3), получим

$$-\rho \omega^2 A_i = \left(\alpha + i\frac{\omega}{c} \right)^2 \left[A_k \nu_k \nu_i \tilde{\lambda} + (A_i + A_k \nu_k \nu_i) \tilde{\mu} \right], \quad (5)$$

где тильда над символом некоторой физической величины означает Фурье-образ ядра его оператора

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(\omega) &= \int_0^\infty \lambda(t) e^{-i\omega t} dt, \\ \tilde{\mu}(\omega) &= \int_0^\infty \mu(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Соотношения (5) позволяют определить скорости волн c , коэффициент затухания α и логарифмический декремент δ , характеризующий затухание волны в пространстве. При этом следует различать две волны — поперечную и продольную, независимо распространяющиеся с разными скоростями c_t и c_l соответственно. В дальнейшем все характеристики поперечных волн будут записываться с нижним индексом t , а продольных волн — с индексом l .



Учитывая, что для поперечной волны $A_k \nu_k = 0$, из уравнения (5) имеем

$$\left(\alpha_t + i \frac{\omega}{c_t} \right)^2 = - \frac{\omega^2 \rho}{\tilde{\mu}}. \quad (6)$$

Умножая (5) на ν_i и учитывая, что для продольной волны $A_k \nu_k \neq 0$, получим

$$\left(\alpha_l + i \frac{\omega}{c_l} \right)^2 = - \frac{\omega^2 \rho}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}. \quad (7)$$

Известные соотношения между параметрами Ламе λ и μ и модулем всестороннего сжатия K для изотропной упругой среды [23]

$$\lambda + 2\mu = K + \frac{4}{3}\mu = \frac{3K(3K + E)}{9K - E} \quad (8)$$

на основе принципа соответствия Вольтерра могут быть переписаны для изотропной вязкоупругой среды в виде

$$\begin{aligned} \hat{M} \equiv \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} &= \hat{K} + \frac{4}{3}\hat{\mu} = \frac{3\hat{K}(3\hat{K} + \hat{E})}{9\hat{K} - \hat{E}}, \\ \tilde{M} = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} &= \tilde{K} + \frac{4}{3}\tilde{\mu} = \frac{3\tilde{K}(3\tilde{K} + \tilde{E})}{9\tilde{K} - \tilde{E}}, \end{aligned}$$

где \hat{K} — оператор всестороннего расширения-сжатия, \hat{E} — оператор модуля Юнга, \hat{M} — оператор так называемого модуля Р-волны.

Введем угол потерь

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \arg \tilde{\mu} = \arctg \left(\frac{\operatorname{Im} \tilde{\mu}}{\operatorname{Re} \tilde{\mu}} \right), \\ \varphi_l &= \arg \tilde{A} = \arctg \left(\frac{\operatorname{Im} \tilde{M}}{\operatorname{Re} \tilde{M}} \right). \end{aligned}$$

Тогда из соотношений (6) и (7) можно получить выражения для физических величин, характеризующих распространение и затухание поперечных и продольных волн в трехмерной вязкоупругой линейной среде, а именно:

комплексное волновое число

$$\begin{aligned} \tilde{k}_t &= k_{1t} + i k_{2t} = \frac{1}{i} \left(\alpha_t + i \frac{\omega}{c_t} \right) = \frac{\omega}{c_t} - i \alpha_t = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{|\tilde{\mu}|}} e^{-i \frac{\varphi_t}{2}}, \\ \tilde{k}_l &= k_{1l} + i k_{2l} = \frac{1}{i} \left(\alpha_l + i \frac{\omega}{c_l} \right) = \frac{\omega}{c_l} - i \alpha_l = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{|\tilde{M}|}} e^{-i \frac{\varphi_l}{2}}; \end{aligned}$$

скорости поперечных и продольных волн

$$c_t^2 = \frac{\omega^2}{|\tilde{k}|^2} \sec^2 \frac{\varphi_t}{2} = \frac{|\tilde{\mu}|}{\rho} \sec^2 \frac{\varphi_t}{2}, \quad (9)$$

$$c_l^2 = \frac{\omega^2}{|\tilde{k}|^2} \sec^2 \frac{\varphi_l}{2} = \frac{|\tilde{M}|}{\rho} \sec^2 \frac{\varphi_l}{2}; \quad (10)$$



коэффициенты затухания

$$\alpha_t^2 = |\tilde{k}|^2 \sin^2 \frac{\varphi_t}{2} = \frac{\omega^2 \rho}{|\tilde{\mu}|} \sin^2 \frac{\varphi_t}{2},$$

$$\alpha_l^2 = |\tilde{k}|^2 \sin^2 \frac{\varphi_l}{2} = \frac{\omega^2 \rho}{|\tilde{M}|} \sin^2 \frac{\varphi_l}{2};$$

логарифмические декременты затухания

$$\delta_t = 2\pi \frac{\alpha_t c_t}{\omega} = 2\pi \operatorname{tg} \frac{\varphi_t}{2},$$

$$\delta_l = 2\pi \frac{\alpha_l c_l}{\omega} = 2\pi \operatorname{tg} \frac{\varphi_l}{2}.$$

Для дальнейшего анализа распространения волн в вязкоупругих средах необходимо задаться конкретным видом вязкоупругих операторов.

2. Анализ распространения вязкоупругих волн с помощью моделей с дробными производными

Хорошо известно [23], что каждый изотропный упругий материал обладает только двумя независимыми константами, а все остальные выражаются через две, которые должны быть заданы или определены из экспериментов. Точно так же и в случае изотропных вязкоупругих сред, материальные свойства которых зависят от времени и описываются операторами, которые должны быть выражены через два наперед заданных (или определенных из экспериментов) оператора, используя принцип соответствия [10].

Будем считать оператор объемного расширения–сжатия \hat{K} не зависящим от времени, тем самым пренебрегая объемной релаксацией (это предположение имеет место для вязкоупругих материалов, у которых объемная релаксация намного меньше, чем релаксация при сдвиге [1]), т.е.

$$\tilde{K} = \text{const.}$$

В этом случае для дальнейшего анализа необходимо задать второй оператор. Для этого рассмотрим три простейшие модели вязкоупругости с дробными производными: обобщенную модель Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела [7, 10].

2.1. Моделирование оператора модуля сдвига с помощью моделей с дробной производной

Модель Кельвина–Фойгта

Наиболее часто оператор сдвига $\hat{\mu}$ задается с помощью модели Кельвина–Фойгта с дробной производной [10]

$$\hat{\mu} = \mu_0 [1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma], \quad (11)$$

где μ_0 — релаксированный модуль сдвига, τ_σ^μ — время ретардации при сдвиге, D^γ — дробная производная Римана–Лиувилля порядка $0 < \gamma < 1$

$$D^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^\gamma} dt',$$

при этом объемный модуль принимается постоянной величиной, равной релаксированному значению объемного модуля K_0 .

Тогда Фурье-образ ядра оператора модуля сдвига, квадрат его абсолютной величины и его аргумент принимают вид

$$\tilde{\mu} = \mu_0 [1 + (i\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma] = \mu_0 \left[1 + (\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma} \right], \quad |\tilde{\mu}|^2 = \mu_0^2 \left[1 + 2(\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + (\omega\tau_\sigma^\mu)^{2\gamma} \right],$$



$$\varphi_t = \arg \tilde{\mu} = \operatorname{arctg} \left(\frac{(\omega \tau_\sigma^\mu)^\gamma \sin \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right)}{1 + (\omega \tau_\sigma^\mu)^\gamma \cos \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right)} \right).$$

Асимптотические величины скорости поперечной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента принимают следующие значения:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = c_{t0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 0; \quad (12)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = 2\pi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \gamma \right). \quad (13)$$

Асимптотические значения скорости продольной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_l = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\mu_0 + K_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho}} = c_{l0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \quad (14)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = 2\pi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \gamma \right), \quad (15)$$

где λ_0 — релаксированное значение первого коэффициента Ламе.

Модель Максвелла

Если для описания поведения вязкоупругих тел использовать модель Максвелла, тогда оператор сдвига $\hat{\mu}$ может быть записан в виде [10]

$$\hat{\mu} = \mu_\infty \frac{(\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma D^\gamma}, \quad (16)$$

где μ_∞ — нерелаксированное значение модуля сдвига, τ_ε^μ — время релаксации при сдвиге, при этом оператор объемного модуля считается постоянной величиной, равной нерелаксированному значению объемного модуля K_∞ .

В этом случае Фурье-образ ядра оператора модуля сдвига, квадрат его абсолютной величины и его аргумент принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \mu_\infty \frac{(\omega \tau_\varepsilon^\mu)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^\mu)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}, \\ |\tilde{\mu}|^2 &= \mu_\infty^2 \frac{1}{1 + 2(\omega \tau_\varepsilon^\mu)^{-\gamma} \cos \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right) + (\omega \tau_\varepsilon^\mu)^{-2\gamma}}, \\ \varphi_t &= \arg \tilde{\mu} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right)}{(\omega \tau_\varepsilon^\mu)^\gamma + \cos \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right)} \right). \end{aligned}$$

Полученные соотношения позволяют получить следующие асимптотические значения скорости поперечной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 2\pi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \gamma \right); \quad (17)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho}} = c_{t\infty}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = 0. \quad (18)$$

Асимптотические значения скорости продольной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:



при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_l = \sqrt{\frac{K_\infty}{\rho}}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \quad (19)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\mu_\infty + K_\infty}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho}} = c_{l\infty}, \quad (20)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = 0,$$

где λ_∞ — нерелаксированное значение первого коэффициента Ламе.

Модель стандартного линейного твердого тела

Если для описания поведения вязкоупругой среды использовать модель стандартного линейного твердого тела с дробными производными одного порядка для напряжений и деформаций, тогда оператор сдвига может быть записан в виде [10]

$$\hat{\mu} = \mu_0 \frac{1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma D^\gamma}. \quad (21)$$

В этом случае Фурье-образ ядра оператора модуля сдвига, квадрат его абсолютной величины и его аргумент принимают вид

$$\tilde{\mu} = \mu_0 \frac{1 + (\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{1 + (\omega\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}, \quad |\tilde{\mu}|^2 = \mu_0^2 \frac{1 + 2(\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma \cos(\frac{\pi}{2}\gamma) + (\omega\tau_\sigma^\mu)^{2\gamma}}{1 + 2(\omega\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma \cos(\frac{\pi}{2}\gamma) + (\omega\tau_\varepsilon^\mu)^{2\gamma}},$$

$$\varphi_t = \arg \tilde{\mu} = \arctg \left\{ \frac{[(\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma - (\omega\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma] \sin(\frac{\pi}{2}\gamma)}{1 + [(\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma + (\omega\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma] \cos(\frac{\pi}{2}\gamma) + (\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma (\omega\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma} \right\}.$$

Пренебрегая объемной релаксацией, т.е. считая, что $\hat{K} = \tilde{K} = K_0 = K_\infty = K = \text{const}$, из полученных соотношений можно найти следующие асимптотические значения скорости, коэффициента затухания и логарифмического декремента для поперечной волны:

при $\omega \rightarrow 0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = c_{t0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 0; \quad (22)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \left(\frac{\tau_\sigma^\mu}{\tau_\varepsilon^\mu} \right)^{\frac{\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho}} = c_{t\infty}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = 0; \quad (23)$$

для продольной волны:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_l = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\mu_0 + K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho}} = c_{l0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \quad (24)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\mu_0 \left(\frac{\tau_\sigma^\mu}{\tau_\varepsilon^\mu} \right)^\gamma + K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho}} = c_{l\infty}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = 0. \quad (25)$$

При выводе соотношений (23) и (25) учитывалось известное для модели стандартного линейного твердого тела соотношение между временами релаксации τ_ε^μ и ретардации τ_σ^μ , порядком дробной производной γ и релаксированным μ_0 и нерелаксированным μ_∞ значениями модуля сдвига [10]

$$\frac{\mu_\infty}{\mu_0} = \left(\frac{\tau_\sigma^\mu}{\tau_\varepsilon^\mu} \right)^\gamma.$$



2.2. Моделирование оператора модуля Юнга с помощью моделей с дробной производной

Модель Кельвина – Фойгта

Самым распространенным способом задания оператора модуля Юнга в научной литературе является использование модели Кельвина – Фойгта с дробной производной. В этом случае оператор \tilde{E} имеет вид [10]

$$\hat{E} = E_0 \left[1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma \right], \quad (26)$$

или

$$\tilde{E} = E_0 \left[1 + (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma} \right],$$

где E_0 — релаксированное значение модуля Юнга, τ_σ^E — время ретардации продольной деформации.

В этом случае оператор сдвига $\hat{\mu}$ нужно выразить через оператор модуля объемного расширения $\hat{K} = K_0$ и оператор модуля Юнга \hat{E} аналогично упругому случаю:

$$\hat{\mu} = \frac{3K_0\hat{E}}{9K_0 - \hat{E}}.$$

В результате получим [10]

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \left(3\hat{E}^{-1} - \frac{1}{3}K_0^{-1} \right)^{-1} = \left\{ \frac{3}{E_0} \left[1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma \right]^{-1} - \frac{1}{3K_0} \right\}^{-1} = \frac{3K_0E_0}{9K_0 - E_0} \frac{1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma}{1 - \frac{E_0}{9K_0 - E_0} (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma}, \\ \tilde{\mu} &= 3K_0E_0 \left\{ (9K_0 - E_0) + (9K_0 - 2E_0) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega\tau_\sigma)^\gamma - E_0(\omega\tau_\sigma)^{2\gamma} + \right. \\ &\quad \left. + i9K_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega\tau_\sigma)^\gamma \right\} / \left[(9K_0 - E_0)^2 + E_0^2(\omega\tau_\sigma)^{2\gamma} - 2E_0(9K_0 - E_0)(\omega\tau_\sigma)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) \right], \\ |\tilde{\mu}|^2 &= \frac{(3K_0E_0)^2 \left[1 + 2(\omega\tau_\sigma)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + (\omega\tau_\sigma)^{2\gamma} \right]}{(9K_0 - E_0)^2 + E_0^2(\omega\tau_\sigma)^{2\gamma} - 2E_0(9K_0 - E_0)(\omega\tau_\sigma)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)}, \\ \varphi_t = \arg \tilde{\mu} &= \arctg \left[\frac{9K_0(\omega\tau_\sigma)^\gamma \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)}{9K_0 - E_0 + (9K_0 - 2E_0)(\omega\tau_\sigma)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) - E_0(\omega\tau_\sigma)^{2\gamma}} \right]. \end{aligned}$$

Тогда асимптотические значения скорости поперечной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента принимают вид:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = \sqrt{\frac{3K_0E_0}{(9K_0 - E_0)\rho}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = c_{t0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 0; \quad (27)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = \infty. \quad (28)$$

Асимптотические значения скорости продольной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} c_l &= \sqrt{\frac{3K_0(3K_0 + E_0)}{(9K_0 - E_0)\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho}} = c_{l0}, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l &= 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \end{aligned} \quad (29)$$



при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = \infty. \quad (30)$$

Модель Максвелла

В случае моделирования оператора модуля Юнга с помощью модели Максвелла с дробной производной он приобретает вид [10]

$$\hat{E} = E_\infty \frac{(\tau_\varepsilon^E)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\varepsilon^E)^\gamma D^\gamma}, \quad (31)$$

или

$$\tilde{E} = E_\infty \frac{(\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}},$$

где E_∞ — нерелаксированное значение модуля Юнга, τ_ε^E — время релаксации при растяжении-сжатии.

Тогда, зная оператор Юнга, можно найти оператор сдвига

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \frac{3K_\infty E_\infty \left[(9K_\infty - E_\infty) (\omega \tau_\varepsilon)^{2\gamma} + 9K_\infty \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma + i 9K_\infty \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma \right]}{(9K_\infty - E_\infty)^2 (\omega \tau_\varepsilon)^{2\gamma} + (9K_\infty)^2 + 18K_\infty (9K_\infty - E_\infty) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma}, \\ |\tilde{\mu}|^2 &= \frac{[3K_\infty E_\infty (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma]^2}{(9K_\infty - E_\infty)^2 (\omega \tau_\varepsilon)^{2\gamma} + (9K_\infty)^2 + 18K_\infty (9K_\infty - E_\infty) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma}, \\ \operatorname{tg}(\varphi_t) &= \frac{9K_\infty \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)}{(9K_\infty - E_\infty) (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma + 9K_\infty \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)}. \end{aligned}$$

Асимптотические значения скорости поперечной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 2\pi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\gamma\right); \quad (32)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t &= \sqrt{\frac{3K_\infty E_\infty}{(9K_\infty - E_\infty)\rho}} = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho}} = c_{t\infty}, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t &= \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Асимптотические значения скорости продольной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_l = \sqrt{\frac{K_\infty}{\rho}}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \quad (34)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l &= \sqrt{\frac{3K_\infty (3K_\infty + E_\infty)}{(9K_\infty - E_\infty)\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho}} = c_{l\infty}, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l &= \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = 0. \end{aligned} \quad (35)$$



Модель стандартного линейного твердого тела

При описании оператора модуля Юнга с помощью модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными одного порядка для напряжений и деформаций он приобретает вид [10]

$$\hat{E} = E_0 \frac{1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\varepsilon^E)^\gamma D^\gamma}, \quad (36)$$

или

$$\tilde{E} = E_0 \frac{1 + (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}.$$

В этом случае с учетом соотношений (8) и условия $K_0 = K_\infty = K = \text{const}$ Фурье-образ ядра оператора модуля сдвига, квадрат его абсолютной величины и его аргумент принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= 3KE_0 \left\{ 9K - E_0 - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^{2\gamma} - 2E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma + 9K (\omega^2 \tau_\sigma^E \tau_\varepsilon^E)^\gamma + \right. \\ &\quad \left. + 9K \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) [(\omega \tau_\sigma^E)^\gamma + (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma] + i9K \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) [(\omega \tau_\sigma^E)^\gamma - (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma] \right\} \\ &\quad \left/ \left\{ (9K - E_0)^2 + 2(9K - E_0) \left[9K (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma \right] \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[9K (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma \right]^2 \right\}, \right. \\ |\tilde{\mu}|^2 &= (3KE_0)^2 \left[(\omega \tau_\sigma^E)^{2\gamma} + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma + 1 \right] \\ &\quad \left/ \left\{ 2 \left[9K (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma \right] (9K - E_0) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[9K (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma \right]^2 + (9K - E_0)^2 \right\}, \right. \\ \varphi_t &= \arg \tilde{\mu} = \arctg \left\{ 9K \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) [(\omega \tau_\sigma^E)^\gamma - (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma] \right/ \left(9K - E_0 - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^{2\gamma} - \right. \\ &\quad \left. - 2E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma + 9K (\omega^2 \tau_\sigma^E \tau_\varepsilon^E)^\gamma + 9K \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) [(\omega \tau_\sigma^E)^\gamma + (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma] \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

Из полученных соотношений можно определить асимптотические значения скорости, коэффициента затухания и логарифмического декремента для поперечной волны:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = \sqrt{\frac{3KE_0}{(9K - E_0)\rho}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = c_{t0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 0; \quad (38)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t = \sqrt{\frac{3KE_0}{\left[9K \left(\frac{\tau_\varepsilon^E}{\tau_\sigma^E} \right)^\gamma - E_0 \right] \rho}} = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho}} = c_{t\infty}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = 0; \quad (39)$$

для продольной волны:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_l = \sqrt{\frac{3K(3K + E_0)}{(9K - E_0)\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho}} = c_{l0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \quad (40)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l = \sqrt{\frac{3K \left[3K + E_0 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\varepsilon^E} \right)^\gamma \right]}{\left[9K - E_0 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\varepsilon^E} \right)^\gamma \right] \rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho}} = c_{l\infty}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = 0. \quad (41)$$

При выводе соотношений (39) и (41) учитывалось известное для модели стандартного линейного твердого тела соотношение между временами релаксации τ_ϵ^E и ретардации τ_σ^E , порядком дробной производной γ и релаксированным E_0 и нерелаксированным E_∞ значениями модуля Юнга [10]

$$\frac{E_\infty}{E_0} = \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\epsilon^E} \right)^\gamma.$$

3. Численные исследования

На основании соотношений (9) и (10) в логарифмическом масштабе по обеим осям построены графики (рис. 1–4) зависимости скорости распространения установившихся гармонических трехмерных волн в вязкоупругих средах от частоты для рассмотренных выше моделей при четырех значениях параметра дробности γ : 0.4, 0.6, 0.8 и 1 (значение $\gamma = 1$ соответствует классическим моделям вязкоупругости). При этом рассматривается материал с релаксированным (для моделей Кельвина–Фойгта и стандартного линейного твердого тела) или нерелаксированным (для модели Максвелла) коэффициентом Пуассона, равным 0.3, исходя из чего определяется коэффициент объемного расширения-сжатия K .

Переход к безразмерным значениям скорости волн осуществляется путем деления текущего значения скорости на ее значение c_{t0} или c_{l0} при $\omega \rightarrow 0$ для модели Кельвина–Фойгта (которые, в свою очередь, определяются соотношениями (12), (27) и (14), (29)) и для модели стандартного линейного твердого тела (которые, в свою очередь, определяются соотношениями (22), (38) и (24), (40)) или на ее значение $c_{t\infty}$ или $c_{l\infty}$ при $\omega \rightarrow \infty$ для модели Максвелла (которые подсчитываются в соответствии с формулами (18), (33) и (20), (35)).

На рис. 1 приведены зависимости безразмерной скорости распространения продольных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред, модуль Юнга которых описывается моделями Кельвина–Фойгта (26), Максвелла (31) и стандартного линейного твердого тела (36) с дробными производными.

Асимптотическое поведение кривых на рис. 1 при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ для моделей Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела находится в полном соответствии с формулами (29)–(30), (34)–(35) и (40)–(41).

Все четыре графика на рис. 1 для продольных волн, построенные при различных значениях параметра дробности для модели Кельвина–Фойгта, пересекаются при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 3 ± 0.5 , для модели Максвелла — при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.89 ± 0.01 , для модели стандартного линейного твердого тела — при безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.3 ± 0.2 .

На рис. 2 приведены зависимости безразмерной скорости распространения продольных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред, модуль сдвига которых описывается моделями Кельвина–Фойгта (11), Максвелла (16) и стандартного линейного твердого тела (21) с дробными производными.

Асимптотическое поведение графиков на рис. 2 при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ для моделей Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела находится в полном соответствии с формулами (14)–(15), (19)–(20) и (24)–(25). Все четыре графика на рис. 2 для продольных волн в случае использования модели Кельвина–Фойгта пересекаются при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 2.2 ± 0.1 , для модели Максвелла — при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.82 ± 0.02 , а для стандартного линейного твердого тела — при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.3 ± 0.2 .

Из рис. 1 и 2 видно, что при фиксированном значении нерелаксированного коэффициента Пуассона $\nu_\infty = 0.3$ в модели Максвелла безразмерная скорость продольной волны c_l при $\omega \rightarrow 0$ асимптотически стремится к значению 0.8, поскольку в обоих случаях в соответствии с соотношениями (34)–(35) и (19)–(20): $c_l|_{\lim_{\omega \rightarrow 0}} = \sqrt{\frac{K_\infty}{\rho}}$ и $c_l|_{\lim_{\omega \rightarrow \infty}} = c_{l\infty} = \sqrt{\frac{3(1-\nu_\infty)K_\infty}{(1+\nu_\infty)\rho}}$,

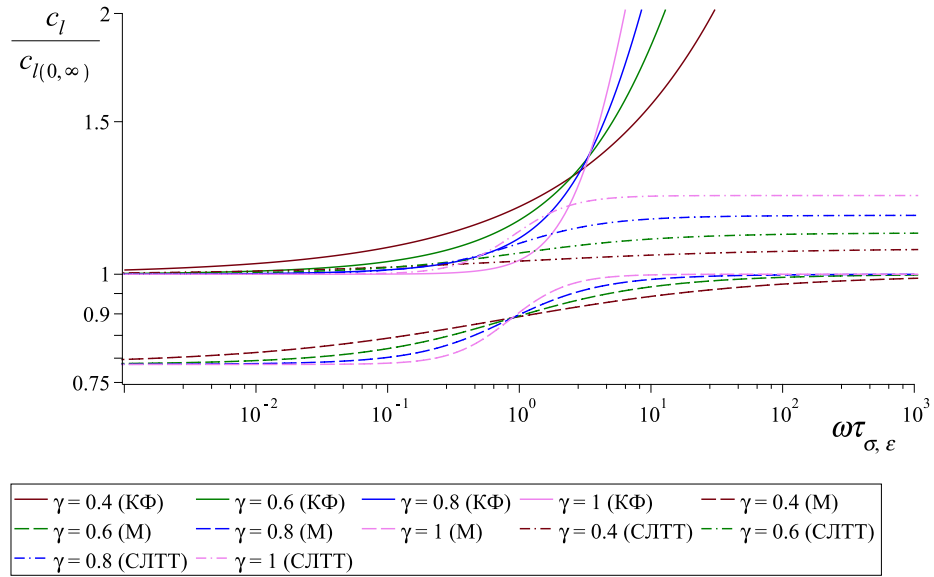


Рис. 1. Зависимость безразмерной скорости распространения продольных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред с модулем Юнга, описываемым моделями Кельвина – Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными (см. формулы (36), (26), (31) соответственно) (цвет онлайн)

Fig. 1. Dimensionless frequency dependence of the dimensionless velocity of longitudinal waves in viscoelastic media with the Young's modulus described by the Kelvin – Voigt, Maxwell and standard linear solid models with fractional derivatives (see formulas (36), (26), (31) respectively) (color online)

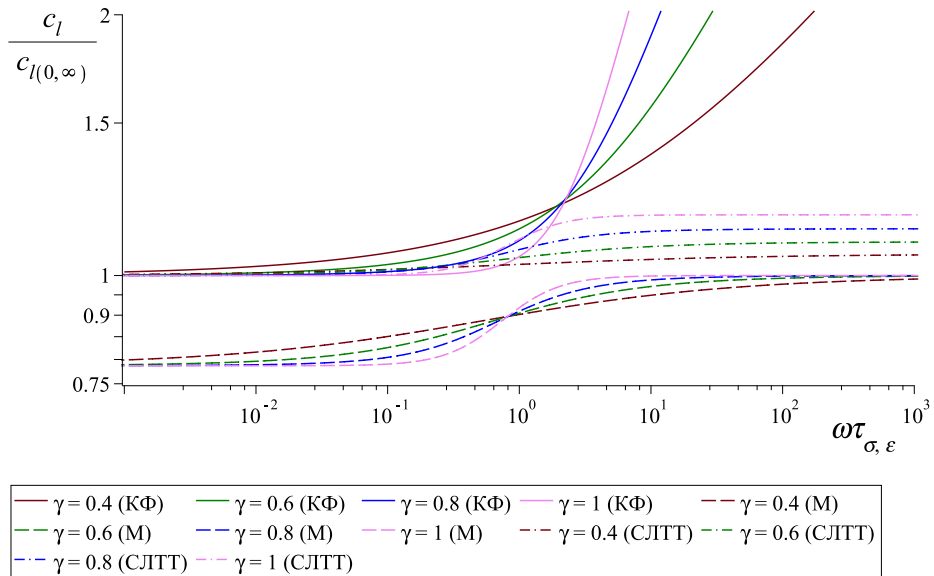


Рис. 2. Зависимость безразмерной скорости распространения продольных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред с модулем сдвига, описываемым моделями Кельвина – Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными (см. формулы (11), (16), (21) соответственно) (цвет онлайн)

Fig. 2. Dimensionless frequency dependence of the dimensionless velocity of longitudinal waves in viscoelastic media with the shear modulus described by the Kelvin – Voigt, Maxwell and standard linear solid models with fractional derivatives (see formulas (11), (16), (21) respectively) (color online)

следовательно,

$$\frac{c_l|_{\lim_{\omega \rightarrow 0}}}{c_l|_{\lim_{\omega \rightarrow \infty}}} = \sqrt{\frac{1 + \nu_{\infty}}{3(1 - \nu_{\infty})}} = \sqrt{\frac{1 + 0.3}{3(1 - 0.3)}} = \sqrt{\frac{13}{21}} \cong 0.7868.$$

Из приведенных на рис. 1 и 2 графиков видно, что параметр дробности незначительно влияет на качественное поведение продольной волны для моделей Максвелла и стандартного линейного твердого тела во всем диапазоне частот, для модели Кельвина – Фойгта — в области до точки пересечения кривых.

На рис. 3 и 4 приведены зависимости безразмерной скорости распространения поперечных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред, модуль Юнга (рис. 3) и модуль сдвига (рис. 4) которых описывается моделями Кельвина – Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными.

Асимптотическое поведение графиков на рис. 3 при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ для моделей Кельвина – Фойгта (26), Максвелла (31) и стандартного линейного твердого тела (36) находится в полном соответствии с формулами (27)–(28), (32)–(33) и (38)–(39).

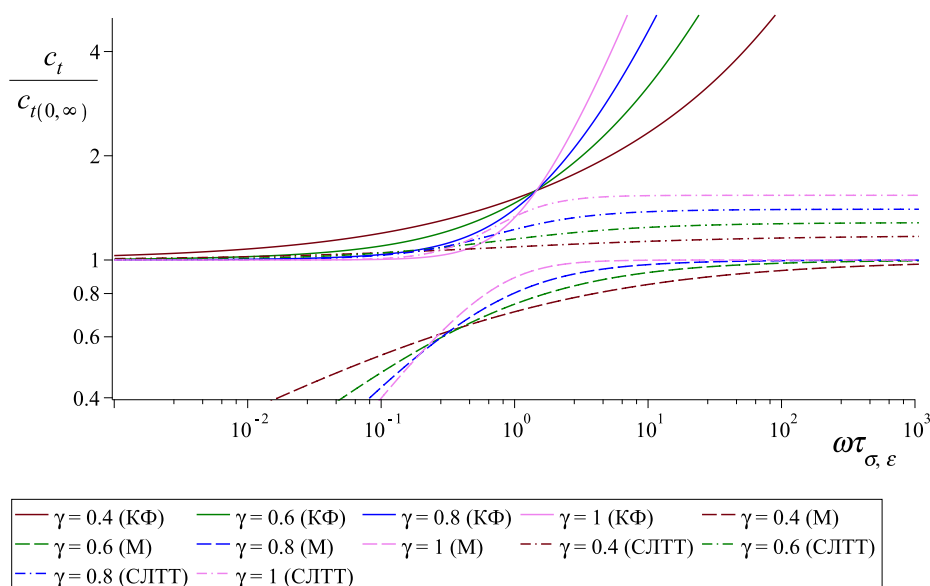


Рис. 3. Зависимость безразмерной скорости распространения поперечных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред с модулем Юнга, описываемым моделями Кельвина – Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными (см. формулы (26), (31), (36) соответственно) (цвет онлайн)

Fig. 3. Dimensionless frequency dependence of the dimensionless velocity of transverse waves in viscoelastic media with the Young's modulus described by the Kelvin – Voigt, Maxwell and standard linear solid models with fractional derivatives (see formulas (26), (31), (36) respectively) (color online)

Все четыре графика на рис. 3 для поперечных волн при использовании модели Кельвина – Фойгта для модуля Юнга пересекаются при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 1.45 ± 0.04 , для модели Максвелла — при безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.3 ± 0.1 , а для модели стандартного линейного твердого тела — при безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.25 ± 0.15 .

Асимптотическое поведение графиков на рис. 4 при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ для моделей Кельвина – Фойгта (11), Максвелла (16) и стандартного линейного твердого тела (21) находится в полном соответствии с формулами (12)–(13), (17)–(18) и (22)–(23).

Все четыре графика на рис. 4 для поперечных волн в случае модели Кельвина – Фойгта для описания модуля сдвига пересекаются при примерно равных безразмерных частотах,



находящихся в интервале 1.31 ± 0.03 , для модели Максвелла — при безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.3 ± 0.1 , а для модели стандартного линейного твердого тела — при безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.25 ± 0.15 .

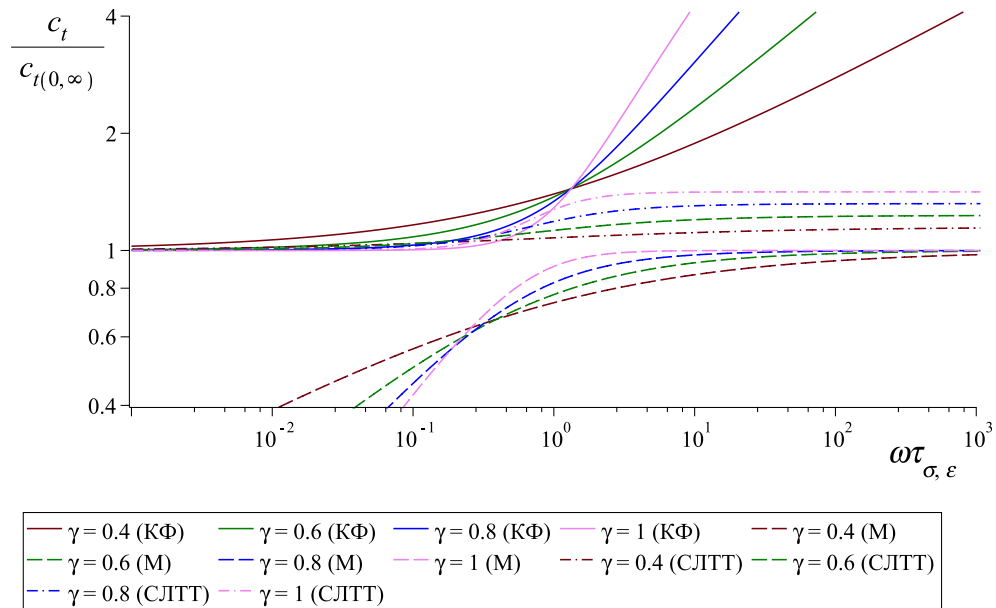


Рис. 4. Зависимость безразмерной скорости распространения поперечных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред с модулем сдвига, описываемым моделями Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными (см. формулы (11), (16), (21) соответственно)(цвет онлайн)

Fig. 4. Dimensionless frequency dependence of the dimensionless velocity of transverse waves in viscoelastic media with the shear modulus described by the Kelvin–Voigt, Maxwell and standard linear solid models with fractional derivatives (see formulas (11), (16), (21) respectively)(color online)

Из приведенных на рис. 3 и 4 графиков видно, что параметр дробности незначительно влияет на качественное поведение скорости поперечной волны для модели Максвелла в области после точки пересечения кривых, для модели Кельвина–Фойгта — в области до точки пересечения кривых, а для модели стандартного линейного твердого тела — в обеих областях.

Поскольку в моделях Максвелла и стандартного линейного твердого тела скорости волн на всем диапазоне частот принимают конечные значения, а в модели Кельвина–Фойгта их значения неограничены при $\omega \rightarrow \infty$, то первые две описывают процесс волнового, третья — диффузионно-волнового типа.

Заключение

В данной работе исследованы характеристики гармонических волн, распространяющихся в трехмерных изотропных вязкоупругих средах, с помощью моделей Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела с дробными производными, которые были использованы для описания зависящих от времени операторов Юнга и сдвига. Найдены асимптотические значения скоростей продольных и поперечных волн, их коэффициентов затухания и логарифмических декрементов. Показано, что модели Максвелла и стандартного линейного твердого тела описывают волновые процессы, а модель Кельвина–Фойгта описывает процесс диффузионно-волнового типа.



Список литературы

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Москва : Наука, 2014. 752 с.
2. *Кристensen Р.* Введение в теорию вязкоупругости. Москва : Мир, 1974. 340 с.
3. *Бленд Д.* Линейная теория вязкоупругости. Москва : Мир, 1965. 200 с.
4. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. Москва : Наука, 1977. 384 с.
5. *Локишин А. А., Суворова Ю. В.* Математическая теория распространения волн в средах с памятью. Москва : Изд-во МГУ, 1982. 151 с.
6. *Tschoegl N. W.* The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior: An introduction. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1989. 769 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-73602-5>
7. *Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.* Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // Applied Mechanics Reviews. 1997. Vol. 50, iss. 1. P. 15–67. <https://doi.org/10.1115/1.3101682>, EDN: LELUNP
8. *Mainardi F.* Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An introduction to mathematical models. London : Imperial College Press, 2010. 368 p. <https://doi.org/10.1142/p614>
9. *Holm S.* Waves with power-law attenuation. Cham : Springer, 2019. 312 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14927-7>
10. *Шитикова М. В.* Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. № 1. С. 3–40. <https://doi.org/10.31857/S0572329921060118>, EDN: QMNKYY
11. *Shitikova M. V., Krusser A. I.* Models of viscoelastic materials: A review on historical development and formulation // Giorgio I., Placidi L., Barchiesi E., Abali B. E., Altenbach H. (eds.) Theoretical analyses, computations, and experiments of multiscale materials. Cham : Springer, 2022. P. 285–326. (Advanced Structured Materials. Vol. 175). https://doi.org/10.1007/978-3-031-04548-6_14, EDN: FPAUSU
12. *Konjik S., Oparnica L., Zorica D.* Waves in fractional Zener type viscoelastic media // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2010. Vol. 365, iss. 1. P. 259–268. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.10.043>
13. *Konjik S., Oparnica L., Zorica D.* Waves in viscoelastic media described by a linear fractional model // Integral Transforms and Special Functions. 2011. Vol. 22, iss. 4–5. P. 283–291. <https://doi.org/10.1080/10652469.2010.541039>
14. *Atanacković T., Konjik S., Oparnica L., Zorica D.* Thermodynamical restrictions and wave propagation for a class of fractional order viscoelastic rods // Abstract and Applied Analysis. 2011. Vol. 2011. P. 1–32. <https://doi.org/10.1155/2011/975694>
15. *Oparnica L., Zorica D., Okuka A. S.* Fractional Burgers wave equation // Acta Mechanica. 2019. Vol. 230. P. 4321–4340. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02500-0>
16. *Коссович Л. Ю., Сухоловская М. С.* Решение задачи о нестационарных продольных волнах в тонком вязкоупругом стержне // Механика деформируемых сред : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2002. Вып. 14. С. 93–98. EDN: SCOAAAL
17. *Анофрикова Н. С., Коссович Л. Ю., Черненко В. П.* Асимптотические методы построения решений в окрестностях фронтов волн в вязкоупругом стержне при больших значениях времени // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2005, Т. 5, вып. 1. С. 82–88. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2005-5-1-82-88>, EDN: POHBVX
18. *Cottone G., Di Paola M., Zingales M.* Elastic waves propagation in 1D fractional non-local continuum // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2009. Vol. 42, iss. 2. P. 95–103. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.09.006>
19. *Brown T. S., Du S., Eruslu H., Sayas F.-J.* Analysis of models for viscoelastic wave propagation // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. 2018. Vol. 3, iss. 1. P. 55–96. <https://doi.org/10.21042/amns.2018.1.00006>
20. *Мешков С. И., Россихин Ю. А.* О распространении звуковых волн в наследственно упругой среде // Прикладная механика и техническая физика. 1968. Т. 9, № 5. С. 89–93. EDN: YLUEIH
21. *Мешков С. И., Россихин Ю. А.* О распространении звуковых волн в упруго-наследственных средах // Всесоюзный симпозиум по распространению упругих и упруго-пластических волн. Кишинев : РИО Академии наук Молдавской ССР, 1968. С. 61–62. EDN: YUICAZ



22. Мешков С. И., Россихин Ю. А. О распространении звуковых волн в вязко-упругой среде, наследственные свойства которой определяются слабосингулярными ядрами // Волны в неупругих средах : сб. ст. Кишинев : РИО Академии наук Молдавской ССР, 1970. С. 162–172. EDN: YROEGJ
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Москва : Наука, 1965. 202 с.

References

1. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, North-Holland, 1969. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 2014. 752 p.).
2. Christensen R. M. *Theory of viscoelasticity: An introduction*. New York, Academic Press, 1982. 364 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1974. 340 p.).
3. Bland D. *The theory of linear viscoelasticity*. Oxford, New York, Pergamon Press, 1960. 125 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1965. 200 p.).
4. Rabotnov Yu. N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary solid mechanics]. Moscow, Nauka, 1980. 384 p. (in Russian).
5. Lokshin A. A., Suvorova Yu. V. *Matematicheskaya teoriya rasprostraneniya voln v sredakh s pamyat'yu* [Mathematical theory of wave propagation in hereditary media]. Moscow, Moscow University Press, 1982. 151 p. (in Russian).
6. Tschoegl N. W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior: An introduction*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1989. 769 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-73602-5>
7. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids. *Applied Mechanics Reviews*, 1997, vol. 50, iss. 1, pp. 15–67. <https://doi.org/10.1115/1.3101682>, EDN: LELUNP
8. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An introduction to mathematical models*. London, Imperial College Press, 2010. 368 p. <https://doi.org/10.1142/p614>
9. Holm S. *Waves with power-law attenuation*. Cham, Springer, 2019. 312 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14927-7>
10. Shitikova M. V. Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: A review. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 1, pp. 1–33. <https://doi.org/10.3103/S0025654422010022>, EDN: TXOLIR
11. Shitikova M. V., Krusser A. I. Models of viscoelastic materials: A review on historical development and formulation. In: Giorgio I., Placidi L., Barchiesi E., Abali B. E., Altenbach H. (eds.) *Theoretical analyses, computations, and experiments of multiscale materials*. Advanced Structured Materials, vol. 175. Cham, Springer, 2022, pp. 285–326. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04548-6_14, EDN: FPAUSU
12. Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Waves in fractional Zener type viscoelastic media. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, vol. 365, iss. 1, pp. 259–268. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.10.043>
13. Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Waves in viscoelastic media described by a linear fractional model. *Integral Transforms and Special Functions*, 2011, vol. 22, iss. 4–5, pp. 283–291. <https://doi.org/10.1080/10652469.2010.541039>
14. Atanacković T., Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Thermodynamical restrictions and wave propagation for a class of fractional order viscoelastic rods. *Abstract and Applied Analysis*, 2011, vol. 2011, pp. 1–32. <https://doi.org/10.1155/2011/975694>
15. Oparnica L., Zorica D., Okuka A. Fractional Burgers wave equation. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, pp. 4321–4340. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02500-0>
16. Kossovich L. Yu., Sukholovskaya M. S. Solution of a problem about nonstationary longitudinal waves in a thin viscoelastic rod. *Mechanics of Deformable Media*, Collective volume. Saratov, Saratov State University Publ., 2002, iss. 14, pp. 93–98 (in Russian). EDN: SCOAAL
17. Anofrikova N. S., Kossovich L. Yu., Chernenko V. P. Asymptotic methods of solution construction in the vicinity of wave fronts in a viscoelastic rod at large times. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2005, vol. 5, iss. 1, pp. 82–88 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2005-5-1-82-88>, EDN: POHBVX
18. Cottone G., Di Paola M., Zingales M. Elastic waves propagation in 1D fractional non-local continuum. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2009, vol. 42, iss. 2, pp. 95–103. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.09.006>



19. Brown T. S., Du S., Eruslu H., Sayas F.-J. Analysis of models for viscoelastic wave propagation. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 2018, vol. 3, iss. 1, pp. 55–96. <https://doi.org/10.21042/amns.2018.1.00006>
20. Meshkov S. I., Rossikhin Yu. A. Propagation of acoustic waves in a hereditary elastic medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1968, vol. 9, iss. 5, pp. 589–592. <https://doi.org/10.1007/BF02614765>, EDN: YMTUFJ
21. Meshkov S. I., Rossikhin Yu. A. About the propagation of sound waves in elastic-inherited media. In: *Vsesoyuznyy simpozium po rasprostraneniyu uprugikh i uprugo-plasticheskikh voln* [All-Union symposium on the propagation of elastic and elasto-plastic waves]. Chisinau, Academy of Sciences of the Moldavian SSR, 1968, pp. 61–62 (in Russian). EDN: YUICAZ
22. Meshkov S. I., Rossikhin Yu. A. On the propagation of sound waves in a viscoelastic medium, whose inherited properties are determined by weakly singular kernels. In: *Volny v neuprugikh sredakh* [Waves in non-elastic media]. Chisinau, Academy of Sciences of the Moldavian SSR, 1970, pp. 162–172 (in Russian). EDN: YROEGJ
23. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1965. 202 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 10.08.2024

Принята к публикации / Accepted 15.11.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025