



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 246–258  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 246–258  
<https://mmi.sgu.ru>      <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-246-258>, EDN: RLHSLL

Научная статья

УДК 532.5

## Влияние тепловой нагрузки на конвекцию в системе двух бинарных смесей с фазовым переходом

И. В. Степанова

Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН, Россия, 660036, г. Красноярск,  
ул. Академгородок, д. 50/44

**Степанова Ирина Владимировна**, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник,  
stepiv@icm.krasn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4255-2762>, SPIN: 5744-4133, AuthorID: 618000

**Аннотация.** В работе рассматривается математическая модель конвективного течения в горизонтальном канале с испарением на границе раздела бинарной жидкости и газопаровой смеси, выведенная на основе уравнений Навье–Стокса в приближении Обербека–Буссинеска с учетом эффекта термодиффузии. С помощью построенного точного решения уравнений, описывающих течение, проводится апробация различных типов граничных условий для температуры на стенах канала, внутри которого находится двухслойная система сред с фазовым переходом. В качестве граничных условий может рассматриваться нагрев обеих стенок, теплоизоляция обеих стенок или комбинация этих условий. Учитывается разный характер зависимости (линейная и квадратичная) поверхностного натяжения от концентрации одного из компонентов в жидком слое. Изучено, какие из исследуемых постановок задач имеет смысл обсуждать с точки зрения анализа процесса испарения. На примере рассчитанных характеристик течения в системе «70%-й водный раствор этанола — смесь паров этанола и азота» показано, что построенное решение адекватно отражает основные признаки процесса испарения: связь скорости испарения с тепловой нагрузкой стенки канала и расходом спутного потока газа. Проведено качественное сравнение с имеющимися экспериментальными данными.

**Ключевые слова:** испарительная конвекция, бинарная смесь, уравнения термодиффузии, граничные условия, термокапиллярный эффект, интенсивность испарения

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-11-00243>).

**Для цитирования:** Степанова И. В. Влияние тепловой нагрузки на конвекцию в системе двух бинарных смесей с фазовым переходом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 246–258. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-246-258>, EDN: RLHSLL

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## The influence of thermal load on convection in a system of two binary mixtures with a phase transition

I. V. Stepanova

Institute of Computational Modeling SB RAS, 50/44 Akademgorodok, Krasnoyarsk 660036, Russia

**Irina V. Stepanova**, stepiv@icm.krasn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4255-2762>, SPIN: 5744-4133, AuthorID: 618000

**Abstract.** A mathematical model of convective flow in a horizontal channel with evaporation at the interface between a binary liquid and a gas-vapor mixture, derived on the basis of the Navier–Stokes equations in the



Oberbeck–Boussinesq approximation taking into account thermal diffusion effect is under consideration. Using the constructed exact solution of the governing equations, various types of boundary conditions for the temperature on the walls of the channel, inside which the two-layer system of media with a phase transition is located, are tested. The boundary conditions can be the following: heating of the both walls, thermal insulation of the both walls, or a combination of these conditions. The different nature of the dependence (linear and quadratic) of surface tension on the concentration of one components is taken into account. It has been studied which of the problem statements under consideration make sense to discuss from the point of view of analyzing the evaporation process. The application of the constructed solution for description of the flow in the system «70% aqueous solution of ethanol – a mixture of ethanol vapor and nitrogen» shows that the solution adequately reflects the main characteristics of the process: the relationship of the evaporation mass flow rate with the thermal load of the channel wall and flow rate of co-current gas. A qualitative comparison with available experimental data is provided.

**Keywords:** evaporative convection, binary mixture, thermal diffusion equations, boundary conditions, thermo-capillary effect, evaporation mass flow rate

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-334>).

**For citation:** Stepanova I. V. The influence of thermal load on convection in a system of two binary mixtures with a phase transition. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 246–258 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-246-258>, EDN: RLHSLL

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Теоретическое изучение процессов тепломассопереноса в условиях фазовых переходов востребовано в связи с развитием технологий жидкостного охлаждения и термостабилизации различных микроустройств. Для улучшения существующих технологий и создания новых необходим детальный анализ влияния различных факторов на характеристики испарения. Поскольку в настоящее время общая теория описания динамики двух сред, находящихся в разных агрегатных состояниях, все еще находится в разработке [1], существуют различные подходы к моделированию совместного течения систем, состоящих из рабочей жидкости и парогазовой смеси. В теоретических исследованиях, как правило, используются уравнения Навье–Стокса, дополненные уравнениями тепломассообмена и соответствующими условиями на границе раздела сред, учитывающими возникновение испарения (см., например, [2]). Для решения таких задач в полной постановке (нестационарных, существенно трехмерных, с учетом не только диффузионного, но и конвективного испарения на границе раздела) следует применять методы прямого численного моделирования, которые, как известно, требуют значительных временных и вычислительных ресурсов. Недостатком этого подхода является то, что расчеты проводятся для фиксированных параметров, снижая способность модели к прогнозированию. Другим методом исследования является использование упрощенных по сравнению с полной постановкой математических моделей, позволяющих проинтегрировать уравнения и получить решение в конечных формулах [3]. Несмотря на то, что упрощенные модели не охватывают всех факторов, влияющих на процесс, с помощью построенных точных решений можно исследовать зависимость течения от геометрии системы, граничных режимов, физических свойств используемых сред. Наиболее изученным и хорошо себя зарекомендовавшим для описания односторонних течений в неоднородно нагреваемых каналах решением уравнений тепловой конвекции является класс решений Остроумова–Бириха [4]. На их основе, например, построена иерархия моделей испарительной конвекции в системе «теплопроводная жидкость – парогазовая смесь», подробнее об этом можно прочитать в [5].

В данной работе точное решение типа Остроумова–Бириха построено для уравнений математической модели диффузионного испарения в предположении, что рабочая жидкость является бинарной смесью. Полученное решение используется для апробации гра-



ничных условий, отражающих температурный режим на стенках канала, которые могут одновременно или независимо быть теплоизолированными или нагреватьсяся. Кроме того, изучаются две зависимости поверхностного натяжения от концентрации одного из компонентов в испаряющейся жидкости: линейная и квадратичная. Полученные восемь постановок краевых задач исследуются с точки зрения их применения для прогнозирования характеристик процесса испарения. Подробное описание предположений о математической модели, построение точного решения, постановка граничных условий и анализ полученных результатов приведены в следующих разделах статьи.

## 1. Предположения о математической модели. Определяющие уравнения

Для математического моделирования процессов испарительной конвекции в системе жидкость – пар для обеих сред используются двумерные уравнения Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска, дополненные уравнениями тепломассопереноса. В уравнении диффузии легкой компоненты учитывается эффект Соре — перенос вещества вследствие изменения температуры. Считается, что обе среды несжимаемые, а изменение плотности учитывается только в члене, отвечающем за силу плавучести в уравнениях импульса. Тем самым определяющие уравнения имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p &= \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g} \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= \chi \Delta \theta, \quad c_t + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D(\Delta c + \alpha \Delta \theta), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь  $t$  обозначает время,  $\mathbf{x} = (x, y)$  — вектор координат, оператор градиента  $\nabla$  вычисляется по пространственным переменным,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\mathbf{g} = (0, -g)$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\mathbf{u}$  — вектор скорости,  $p$  — давление,  $\theta$  и  $c$  — малые отклонения температуры и массовой концентрации одного из компонентов от их средних равновесных значений. Концентрация второго компонента определяется как  $1 - c$ . Коэффициенты кинематической вязкости  $\nu$ , температуропроводности  $\chi$ , диффузии  $D$ , параметр термодиффузии  $\alpha$  и средняя плотность смеси  $\rho_0$  постоянны. В уравнениях (1) нет обозначений, определяющих, для какого слоя — жидкого или парогазового — они написаны. Это будет сделано ниже.

Предположения о математической модели рассматриваемого течения:

– считается, что течение возникает в центральной части протяженного горизонтального канала (рис. 1), ширина которого много меньше длины. Это позволяет допустить математическую идеализацию: считать, что канал не ограничен в горизонтальном направлении, а значит, все источники и стоки отнесены на бесконечность и могут быть исключены из рассмотрения;

– рассматривается установившееся однонаправленное течение. Только горизонтальная компонента скорости, зависящая от вертикальной координаты, отлич-



Рис. 1. Схема течения  
Fig. 1. Flow sketch

на от нуля. Скорости в обоих слоях малы, перепады температур и концентраций умеренные. Это позволяет считать коэффициенты переноса постоянными, а также использовать уравнения несжимаемой среды для описания течения в газопаровой смеси;

– предполагается, что плотность линейно зависит от параметров состояния (уравнение состояния в форме Обербека – Буссинеска):  $\rho = \rho_0(1 - \beta_T \theta - \beta_C c)$ , здесь  $\beta_T, \beta_C$  — коэффициенты теплового и концентрационного расширения.

Указанные ограничения позволяют вывести из (1) уравнения для нахождения характе-



ристик течения в следующей форме:

$$\begin{aligned} \nu^j u_{yy}^j &= \frac{1}{\rho_0^j} p_x^j, \quad g(\beta_T^j \theta^j + \beta_C^j c^j) = \frac{1}{\rho_0^j} p_y^j, \\ u^j \theta_x^j &= \chi^j (\theta_{xx}^j + \theta_{yy}^j), \quad u^j c_x^j = D^j (c_{xx}^j + c_{yy}^j + \alpha^j (\theta_{xx}^j + \theta_{yy}^j)). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее верхний индекс  $j = 1, 2$  обозначает принадлежность характеристики к слою: 1 — для характеристик нижнего жидкого слоя, 2 — для верхнего газопарового. Давление  $p^j$  определено с точностью до гидростатического,  $u^j$  — горизонтальная компонента вектора скорости.

Решение уравнений (2) строится в предположении, что функции температуры и концентрации в каждом слое имеют следующий вид:

$$\theta^j(x, y) = (a_2^j y + a_1^j)x + \Theta^j(y), \quad c^j(x, y) = (b_2^j y + b_1^j)x + C^j(y), \quad (3)$$

здесь  $a_i^j$ ,  $b_i^j$ ,  $i = 1, 2$ , — постоянные,  $\Theta^j(y)$ ,  $C^j(y)$  — некоторые гладкие функции, которые определяются после подстановки вида решения (3) в систему (2). Линейные зависимости функций  $\theta^j$  и  $c^j$  (3) от горизонтальной координаты  $x$  представляют собой обобщение решения Остроумова–Бириха [4] на случай описания совместного течения двух бинарных смесей.

Подставляя выражения (3) в систему (2), расщепляя полученные равенства по переменной  $x$ , получим систему дифференциальных уравнений, прямое интегрирование которой дает функции  $u^j$ ,  $\Theta^j$ ,  $C^j$  для каждого слоя:

$$u^j = \frac{U_1^j y^4}{24} + \frac{U_2^j y^3}{6} + \frac{u_0^j y^2}{2} + u_1^j y + u_2^j, \quad (4)$$

$$\Theta^j = \frac{t_1^j y^7}{42} + \frac{t_2^j y^6}{30} + \frac{t_3^j y^5}{20} + \frac{t_4^j y^4}{12} + \frac{t_5^j y^3}{6} + \frac{t_6^j y^2}{2} + \theta_0^j y + \theta_1^j, \quad (5)$$

$$C^j = \frac{q_1^j y^7}{42} + \frac{q_2^j y^6}{30} + \frac{q_3^j y^5}{20} + \frac{q_4^j y^4}{12} + \frac{q_5^j y^3}{6} + \frac{q_6^j y^2}{2} + \kappa_0^j y + \kappa_1^j. \quad (6)$$

Давление определяется из первых двух уравнений системы (2) с помощью выражений из формул (4)–(6) таким образом:

$$p^j = \rho_0^j \nu^j u_{yy}^j x + \rho_0^j g \int (\beta_T^j \Theta^j(y) + \beta_C^j C^j(y)) dy + p_0^j. \quad (7)$$

В равенствах (4)–(7) постоянные интегрирования  $u_i^j$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,  $\theta_{0,1}^j$ ,  $\kappa_{0,1}^j$ ,  $p_0^j$  пока произвольные, остальные параметры выражаются через них с использованием соотношений:

$$\begin{aligned} U_1^j &= \frac{g}{\nu^j} (\beta_T^j a_2^j + \beta_C^j b_2^j), \quad U_2^j = \frac{g}{\nu^j} (\beta_T^j a_1^j + \beta_C^j b_1^j); \\ t_1^j &= \frac{a_2^j U_1^j}{24 \chi^j}, \quad t_2^j = \frac{1}{\chi^j} \left( \frac{a_2^j U_2^j}{6} + \frac{a_1^j U_1^j}{24} \right), \quad t_3^j = \frac{1}{\chi^j} \left( \frac{a_2^j u_0^j}{2} + \frac{a_1^j U_2^j}{6} \right), \\ t_4^j &= \frac{1}{\chi^j} \left( \frac{a_1^j u_0^j}{2} + a_2^j u_1^j \right), \quad t_5^j = \frac{1}{\chi^j} \left( a_1^j u_1^j + a_2^j u_2^j \right), \quad t_6^j = \frac{a_1^j u_2^j}{\chi^j}; \\ q_1^j &= \frac{k_2^j U_1^j}{24}, \quad q_2^j = \frac{k_2^j U_2^j}{6} + \frac{k_1^j U_1^j}{24}, \quad q_3^j = \frac{k_2^j u_0^j}{2} + \frac{k_1^j U_2^j}{6}, \\ q_4^j &= \frac{k_1^j u_0^j}{2} + k_2^j u_1^j, \quad q_5^j = k_1^j u_1^j + k_2^j u_2^j, \quad q_6^j = k_1^j u_2^j, \\ k_1^j &= \frac{1}{D^j \chi^j} (b_1^j \chi^j - a_1^j D^j \alpha^j), \quad k_2^j = \frac{1}{D^j \chi^j} (b_2^j \chi^j - a_2^j D^j \alpha^j). \end{aligned}$$



## 2. Границные условия

Для определения шестнадцати постоянных интегрирования  $u_{0,1,2}^j, \theta_{0,1}^j, \kappa_{0,1}^j, p_0^j$  в выражениях (4)–(6) и четырех параметров  $a_{1,2}^j, b_{1,2}^j$  из (2) необходимо замкнуть задачу с помощью граничных условий на твердых стенках канала  $y = -h_1$  и  $y = h_2$ , а также соотношений на недеформируемой границе раздела  $y = 0$  (см. рис. 1).

### 2.1. Условия на границе раздела

Постулируются равенства скоростей и температур двух сред на границе раздела:

$$u^1(x, 0) = u^2(x, 0), \quad \theta^1(x, 0) = \theta^2(x, 0). \quad (8)$$

Кинематическое условие выполняется автоматически вследствие используемого вида вектора скорости. Разложение динамического условия на касательное и нормальное направления приводит к соотношениям

$$\rho_0^1 \nu^1 \frac{\partial u^1}{\partial y} = \rho_0^2 \nu^2 \frac{\partial u^2}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad p^1(x, 0) = p^2(x, 0). \quad (9)$$

Здесь посредством функции  $\sigma$  задается поверхностное натяжение в жидким слое. В общем случае  $\sigma$  зависит от температуры  $\theta^1$  и концентрации  $c^1$ , характер зависимости будет обсуждаться ниже.

Равенство потоков вещества выражается формулой

$$D^1 \rho_0^1 \left( \frac{\partial c^1}{\partial y} + \alpha^1 \frac{\partial \theta^1}{\partial y} \right) \Big|_{(x, 0)} = D^2 \rho_0^2 \left( \frac{\partial c^2}{\partial y} + \alpha^2 \frac{\partial \theta^2}{\partial y} \right) \Big|_{(x, 0)}. \quad (10)$$

Условие теплообмена через границу раздела имеет вид

$$\left( \lambda^1 \frac{\partial \theta^1}{\partial y} - \lambda^2 \frac{\partial \theta^2}{\partial y} \right) \Big|_{(x, 0)} = -L M, \quad (11)$$

здесь  $L$  — скрытая теплота парообразования,  $\lambda^j$  — коэффициенты теплопроводности смесей, величина

$$M = -D^2 \rho_0^2 \left( \frac{\partial c^2}{\partial y} + \alpha^2 \frac{\partial \theta^2}{\partial y} \right) \Big|_{(x, 0)} \quad (12)$$

определяет массовую скорость испарения. Необходимо отметить, что параметр  $M$  является качественной характеристикой испарительной конвекции. Положительные значения  $M$  означают, что происходит испарение с границы раздела, отрицательные соответствуют конденсации [2, 5].

В качестве еще одного условия зададим концентрацию пара на границе раздела:

$$c^2(x, 0) = C_*(1 + \epsilon(\theta^2(x, 0) - T_0)), \quad (13)$$

где  $C_*$  — концентрация насыщенного пара,  $T_0$  — средняя температура системы,  $\epsilon = L\mu/(RT_0^2)$ ,  $\mu$  — молярная масса испаряющейся компоненты,  $R$  — универсальная газовая постоянная. Соотношение (13) есть следствие линеаризации уравнения Клапейрона – Клаузиуса для давления насыщенного пара (подробнее о выводе данного условия можно прочитать в работе [7]).

### 2.2. Условия на твердых стенках

На обеих твердых стенках задаются условия прилипания:

$$u_1(-h_1) = u_2(h_2) = 0. \quad (14)$$



Считается, что через твердые стенки отсутствует поток вещества:

$$\left( \frac{\partial c^1}{\partial y} + \alpha^1 \frac{\partial \theta^1}{\partial y} \right) \Big|_{(x,-h_1)} = 0, \quad \left( \frac{\partial c^2}{\partial y} + \alpha^2 \frac{\partial \theta^2}{\partial y} \right) \Big|_{(x,h_2)} = 0, \quad (15)$$

а средняя концентрация легкой компоненты  $C_0$  в нижнем слое задана и соответствует закону:

$$\int_{-h_1}^0 c^1(x=0, y) dy = h_1 C_0. \quad (16)$$

Для функции температуры допустимы четыре типа граничных условий:

**ГУ-Д** — на обеих стенках задано распределение температуры

$$\theta^1(x, -h_1) = A_1 x + \vartheta_1, \quad \theta^2(x, h_2) = A_2 x + \vartheta_2, \quad (17)$$

здесь и далее  $A_{1,2}, \vartheta_{1,2}$  — заданные постоянные;

**ГУ-Н** — обе стенки считаются теплоизолированными

$$\frac{\partial \theta^1}{\partial y} \Big|_{(x,-h_1)} = \frac{\partial \theta^2}{\partial y} \Big|_{(x,h_2)} = 0; \quad (18)$$

**ГУ-См1** — нижняя стенка нагревается, верхняя — теплоизолирована

$$\theta^1(x, -h_1) = A_1 x + \vartheta_1, \quad \frac{\partial \theta^2}{\partial y} \Big|_{(x,h_2)} = 0; \quad (19)$$

**ГУ-См2** — нижняя стенка теплоизолирована, верхняя стенка нагревается

$$\frac{\partial \theta^1}{\partial y} \Big|_{(x,-h_1)} = 0, \quad \theta^2(x, h_2) = A_2 x + \vartheta_2. \quad (20)$$

Постоянные интегрирования в выражениях (3)–(7) находятся с помощью перечисленных граничных условий (8)–(16) и одного из условий (17)–(20). Подробное описание приведено в следующем разделе.

### 3. Построение решения

Прежде чем приступить к нахождению постоянных интегрирования, следует уточнить характер зависимости поверхностного натяжения от температуры и концентрации в касательной проекции динамического условия в (9). Считается, что для большинства жидкостей поверхностное натяжение линейно меняется с температурой. Аналогичное утверждение для концентрации не всегда верно. Например, используя экспериментальные данные из [8, 9], можно видеть, что для водных спиртовых растворов зависимость поверхностного натяжения от концентрации близка к квадратичной. Для анализа, с каким характером зависимости поверхности натяжения решение будет более точно отражать характеристики испарения, рассмотрим и линейную, и квадратичную зависимость  $\sigma$  от концентрации легкой компоненты:

$$\sigma_{lin} = \sigma_0 - \sigma_T(\theta^1 - T_0) - \sigma_C(c^1 - C_0), \quad (21)$$

$$\sigma_{quad} = \sigma_0 - \sigma_T(\theta^1 - T_0) - \sigma_{C1}(c^1 - C_0) - \sigma_{C2}(c^1 - C_0)^2. \quad (22)$$

Постоянные интегрирования находятся с учетом обоих перечисленных законов для поверхностного натяжения. Для получения системы с целью определения постоянных интегрирования  $u_{0,1,2}^j, \theta_{0,1}^j, \kappa_{0,1}^j, a_{1,2}^j, b_{1,2}^j$  следует подставить соотношения для скорости (4), температуры и концентрации (3) с учетом (5), (6) в граничные условия (8)–(16) и одно из условий (17)–(20), а затем расщепить полученные равенства по переменной  $x$ . Полная система



для определения постоянных интегрирования и ее решение целиком здесь не выписывается из-за громоздкости. Отметим лишь основные моменты.

1. В формулу (9) входит производная функции  $\sigma$  по  $x$ . Тогда, принимая во внимание формулы (3), (21), (22), получим следующие равенства:

$$\frac{\partial \sigma_{lin}}{\partial x} = -\sigma_T a_1^1 - \sigma_C b_1^1, \quad \frac{\partial \sigma_{quad}}{\partial x} = -\sigma_T a_1^1 - \sigma_C b_1^1 - 2\sigma_{C2}(b_1^1)^2 x.$$

**Замечание 1.** Поскольку соотношение в левой части равенства (9) не зависит от переменной  $x$ , то подстановка вычисленных производных функции  $\sigma$  в правую часть (9) ведет к тому, что для квадратичной зависимости поверхностного натяжения от концентрации постоянная  $b_1^1 \equiv 0$ .

2. Постоянные  $a_i^j$ ,  $b_i^j$ ,  $i, j = 1, 2$ , из (3) определяют продольные градиенты температуры и концентрации и являются важными характеристиками физического процесса. Они находятся из замкнутой системы линейных уравнений, выражения для них приведены в табл. 1 (обозначение  $\Delta = h_2\lambda^1 + h_1\lambda^2$ ). Постоянная  $b_1^1$  зануляется в случае, когда в качестве функции  $\sigma$  выбирается  $\sigma_{quad}$ . Для  $\sigma_{lin}$  эта постоянная на данном этапе остается неизвестной, как и константа  $a_1^1$  при реализации граничных условий для температуры (18).

Таблица 1 / Table 1

Постоянные  $a_i^j$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $b_1^1$ ,  $b_2^1$ ,  $b_1^2$ ,  $b_2^2$   
Constants  $a_i^j$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $b_1^2$ ,  $b_2^1$ ,  $b_2^2$

Постоянная	Граничные условия			
	ГУ-Д	ГУ-Н	ГУ-См1	ГУ-См2
$a_1^1$	$(A_1 h_2 \lambda^1 + A_2 h_1 \lambda^2)/\Delta$	—	$A_1$	$A_2$
$a_2^1$	$\lambda^2(A_2 - A_1)/\Delta$	0	0	0
$a_1^2$	$a_1^1$	$a_1^1$	$a_1^1$	$a_1^1$
$a_2^2$	$\lambda^1(A_2 - A_1)/\Delta$	0	0	0
$b_1^2$	$\epsilon C_* a_1^1$	$\epsilon C_* a_1^1$	$\epsilon C_* a_1^1$	$\epsilon C_* a_1^1$
$b_2^1$	$-\alpha^1 a_2^1$	0	0	0
$b_2^2$	$-\alpha^2 a_2^2$	0	0	0

3. Далее следует найти шесть постоянных  $u_{0,1,2}^j$ , для этого имеется пять линейных уравнений. Надо учесть, что при использовании  $\sigma_{quad}$  постоянная  $b_1^1$  известна (равна нулю), и из пяти уравнений на шесть постоянных можно найти все через, например,  $u_0^1$ . При использовании  $\sigma_{lin}$  постоянная  $b_1^1$  не определена, и указанную систему из пяти уравнений следует дополнить еще одним условием, в качестве которого естественно задать расход  $q$  в газовой фазе:

$$\int_0^{h_2} \rho_2 u_2(y) dy = q. \quad (23)$$

В этом случае все  $u_{0,1,2}^j$  можно выразить через  $b_1^1$ .

4. Заключительный этап — определение восьми постоянных  $\theta_i^j$ ,  $\kappa_i^j$ ,  $i = 0, 1$ , а также  $u_0^1$  или  $b_1^1$  в зависимости от использования формулы (21) или (22) (см. предыдущий пункт).

**Замечание 2.** При линейной зависимости поверхностного натяжения от концентрации система уравнений на постоянные интегрирования нелинейна. В результате ее решения находятся два набора констант  $u_{0,1,2}^j$ ,  $\theta_{0,1}^j$ ,  $\kappa_{0,1}^j$ . Необходимо проводить дополнительный анализ, выбирая, какой набор постоянных может привести к решению, имеющему физический смысл.



**Замечание 3.** Как было упомянуто выше, при применении формулы для поверхностного натяжения  $\sigma_{quad}$  расход газа в верхнем слое не задается, он может быть вычислен по найденной скорости в верхнем слое. Если в случае использования  $\sigma_{lin}$  задать расход  $q$  в формуле (23), полученный для квадратичного распределения поверхностного натяжения, можно показать предельный переход между одним из решений задачи для  $\sigma_{lin}$  и решением для  $\sigma_{quad}$  при прочих совпадающих параметрах задачи.

**Замечание 4.** В случае квадратичной зависимости поверхностного натяжения от концентрации подстановка полученных постоянных интегрирования в задачах (18)–(20) приводит к тому, что основная характеристика испарительного процесса — массовая скорость испарения  $M$ , которую можно найти по формуле (12), — зануляется. Тем самым указанные постановки задач не имеют физического смысла при описании фазового перехода и далее рассматриваться не могут.

**Замечание 5.** В случае линейной зависимости поверхностного натяжения от концентрации при условии отсутствия потока тепла через обе стенки (условия (18)) находятся все постоянные интегрирования, кроме  $\theta_0^j$ , для них имеется лишь равенство  $\theta_0^1 = \theta_0^2$ . Для замыкания задачи необходимо еще одно условие на функцию температуры. В качестве такого условия может выступить задание средней температуры жидкого слоя в сечении  $x = 0$  подобно интегральному условию на среднюю концентрацию (16).

5. Относительно постоянных  $p_0^j$  отметим, что второе условие из (9) с использованием равенства (7) приводит лишь к равенству  $p_0^1 = p_0^2$ , поэтому данные постоянные в функциях давления в слоях остаются неопределенными. Это достаточно распространенная ситуация для стационарных задач в гидродинамике [6].

Перечисленные замечания для наглядности сведены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Решение задач для линейной и квадратичной зависимости поверхностного натяжения от концентрации

Solution of boundary problems for linear and quadratic dependence of surface tension on concentration

$\sigma$	Расход газа $q$	Границные условия			
		ГУ-Д	ГУ-См1	ГУ-См2	ГУ-Н
$\sigma_{quad}$	Высчитывается	решение в конечных формулах	Постановки не имеют физического смысла, см. замечание 4		
$\sigma_{lin}$	Задается как входной параметр	Решение в конечных формулах, см. замечание 3		Необходимо дополнительное условие для замыкания задачи, см. замечание 5	

#### 4. Пример использования построенного решения

Для демонстрации того, как построенные решения могут описывать основные характеристики испарительной конвекции, рассмотрим двухслойную систему: водно-спиртовый раствор с концентрацией этанола 70% ( $C_0 = 0.7$ ) занимает нижний слой толщины  $h_1 = 3$  мм, газопаровая смесь, состоящая из паров испаряющегося этанола и азота, находится в верхнем слое толщины  $h_2 = 5$  мм. Физические параметры для обеих систем, использующиеся в уравнениях (2) и граничных условиях (8)–(16), приведены в табл. 3 при средней температуре системы  $T_0 = 25^\circ\text{C}$ . Данные для смесей взяты из монографии [10], статьи [2] и справочника [11]. Решение задачи будет проанализировано с учетом граничных условий для



Таблица 3 / Table 3

Физические параметры рабочих смесей  
Physical parameters of working mixtures

Параметр	Жидкая смесь	Газопаровая смесь
$\nu, \text{ м}^2/\text{с}$	$2.345 \cdot 10^{-6}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$
$\chi, \text{ м}^2/\text{с}$	$0.843 \cdot 10^{-7}$	$0.3 \cdot 10^{-4}$
$D, \text{ м}^2/\text{с}$	$4.481 \cdot 10^{-10}$	$0.135 \cdot 10^{-4}$
$\alpha, K^{-1}$	$-4.093 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
$\lambda, \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{K})$	0.245	0.02717
$\rho, \text{ кг}/\text{м}^3$	863.4	1.2
$\beta_T, K^{-1}$	$0.994 \cdot 10^{-3}$	$3.67 \cdot 10^{-3}$
$\beta_C$	0.277	-0.62
$L, \text{ Дж}/\text{кг}$	$12.938 \cdot 10^5$	-
$C_*$ ,	-	0.081
$\epsilon$	-	0.0805

температуры (17), т. е. на обеих твердых стенках задано распределение температуры:

$$\theta^1 \Big|_{y=-h_1} = A_1 x + T_0, \quad \theta^2 \Big|_{y=h_2} = 5x + T_0,$$

где  $A_1$  будет изменяться от 6 до 10 К/м. Тем самым нижняя стенка всегда более нагрета, чем верхняя. Поверхностное натяжение в формулах (21), (22) восстановлено методом наименьших квадратов по данным для водно-спиртовых растворов, приведенным в [9]. Получены следующие зависимости:

$$\sigma_{quad} = (42.14 - 0.0873 \theta^1 - 29.41 c^1 + 11.40 (c^1)^2) \text{ мН}/\text{м},$$

$$\sigma_{lin} = (37.02 - 0.0873 \theta^1 - 13.443 c^1) \text{ мН}/\text{м}.$$

Расход газа  $q$  в верхнем слое для расчетов с учетом линейной зависимости поверхностного натяжения от концентрации примем равным  $8.33 \cdot 10^{-6}$  кг/(м·с) (данные из [12]). Следует напомнить, что задача решалась в предположении, что канал бесконечен в горизонтальном направлении. Тем не менее для построения зависимостей температуры и концентрации от обеих переменных  $x$  и  $y$  необходимо задать величину, в пределах которой изменяется горизонтальная координата. Поскольку под неограниченностью длины канала подразумевается, что толщина слоя должна быть много меньше его длины, пусть  $x \in [0, L_h]$ ,  $L_h = 0.1$  м. Тогда соотношение  $(h_1 + h_2)/L_h = 0.08 \ll 1$ .

Подстановка физических и геометрических параметров в решение (4), (3) с учетом (5), (6) и граничные условия (8)–(16), (17) дает выражение для скоростей, температур и концентраций в обоих слоях. Кроме этого, можно вычислить параметр  $M$  (см. соотношения (11), (12)) – основную характеристику интенсивности испарения. С помощью полученных соотношений проследим влияние тепловой нагрузки нижней стенки канала ( $A_1$  будет меняться от 6 до 10 К/м с шагом 1 К/м) на характеристики течения на границе раздела  $y = 0$ .

В табл. 4 выписаны значения на границе раздела  $y = 0$  для функции температуры, концентраций этанола в жидкой фазе и паров этанола в газовой фазе при расчетах с поверхностным натяжением  $\sigma = \sigma_{quad}$ , в табл. 5 приведены те же величины для одного из

решений при  $\sigma = \sigma_{lin}$ . Для поверхностного натяжения  $\sigma = \sigma_{quad}$ , в табл. 5 приведены те же величины для одного из решений при  $\sigma = \sigma_{lin}$ .

Из данных, представленных в табл. 4, 5, видно, что с ростом градиента температуры на нижней стенке  $A_1$  возрастает температура и концентрация паров этанола в газе на границе раздела (второй и четвертый столбцы в табл. 4, 5). При этом концентрация этанола (третий столбец в табл. 4, 5) в слое жидкой смеси снижается.

Рост температуры на границе раздела ведет к интенсификации испарения,

Таблица 4 / Table 4

Изменение температуры, концентрации этанола и концентрации паров этанола на границе раздела

$y = 0$  при  $\sigma = \sigma_{quad}$  в зависимости от  $A_1$   
Changes in temperature, ethanol concentration, and ethanol vapor concentration at the interface  $y = 0$  at  $\sigma = \sigma_{quad}$  in dependence on  $A_1$

$A_1$	$\theta^1 = \theta^2$	$c^1$	$c^2$
6	$5.94x + 25.11$	0.70002	$0.039x + 0.0817$
7	$6.88x + 25.12$	0.6999	$0.045x + 0.0819$
8	$7.81x + 25.19$	0.6997	$0.051x + 0.0822$
9	$8.75x + 25.24$	0.6995	$0.057x + 0.0825$
10	$9.67x + 25.29$	0.6992	$0.063x + 0.0829$



что можно увидеть на рис. 2, где кривыми 1, 2 показаны зависимости величины  $M$  от градиента температуры нижней стенки  $A_1$ . Рост скорости испарения этанола с границы раздела при повышении температуры объясняет уменьшение содержания этанола в жидкой фазе и увеличение его содержания в газовой (величины  $c^1$  и  $c^2$  в табл. 4, 5). Подтверждением того, что построенное решение правильно отражает процесс испарительной конвекции, служит также и то, что скорость испарения  $M(A_1)$  и расход газа в газовой фазе  $q(A_1)$  одновременно растут при увеличении  $A_1$  (кривые 1, 3 на рис. 2), т. е. скорость обдува и интенсивность испарения находятся в прямопропорциональной зависимости.

Таблица 5 / Table 5

Изменение температуры, концентрации этанола и концентрации паров этанола на границе раздела  $y = 0$  при  $\sigma = \sigma_{lin}$  в зависимости от  $A_1$

Changes in temperature, ethanol concentration, and ethanol vapor concentration at the interface  $y = 0$  at  $\sigma = \sigma_{lin}$  in dependence on  $A_1$

$A_1$	$\theta^1 = \theta^2$	$c^1$	$c^2$
6	$5.94x + 25.10$	$4.1 \cdot 10^{-4}x + 0.6999$	$0.039x + 0.0817$
7	$6.88x + 25.14$	$3.3 \cdot 10^{-4}x + 0.6994$	$0.045x + 0.0818$
8	$7.81x + 25.18$	$2.4 \cdot 10^{-4}x + 0.6993$	$0.051x + 0.0822$
9	$8.75x + 25.23$	$1.6 \cdot 10^{-4}x + 0.6992$	$0.057x + 0.0825$
10	$9.67x + 25.28$	$0.7 \cdot 10^{-4}x + 0.6991$	$0.063x + 0.0828$

Из данных, приведенных в табл. 4, 5, видно, что расчетные значения всех параметров для  $\sigma = \sigma_{quad}$  и  $\sigma = \sigma_{lin}$  достаточно близки. При этом сравнение кривых 1, 2 на рис. 2 показывает, что решение, построенное для  $\sigma = \sigma_{quad}$ , дает более низкие значения параметра испарения  $M$  (кривая 1), чем решение, построенное для  $\sigma = \sigma_{lin}$  (кривая 2). Возможно, это связано

с тем, что задаваемое значение расхода для расчетов при линейной зависимости поверхности натяжения от концентрации выше, чем расчетные значения при квадратичной зависимости. В работе [12] имеются данные измерений величины  $M$  при испарении чистого этанола в воздухе, продуваемый с заданным расходом, демонстрирующие значения на два порядка больше представленных на рис. 2. При этом все тренды, указанные в результатах эксперимента, совпадают с тем, что показывает построенное точное решение: увеличение температуры границы раздела ведет к росту величины  $M$  и концентрации пара этанола в газопаровом слое.

Как было упомянуто выше, при использовании зависимости  $\sigma = \sigma_{lin}$  для построения решения существует еще второй набор постоянных интегрирования, при котором построенное решение удовлетворяет уравнению и граничным условиям. Анализ этого решения привел к выводу, что характеристики течения, рассчи-

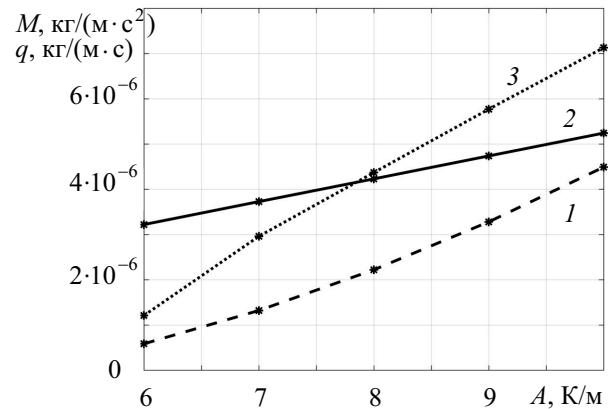


Рис. 2. Зависимость величин  $M$  и  $q$  от градиента температуры на нижней стенке  $A_1$ : кривая 1 соответствует  $M(A_1)$  для  $\sigma = \sigma_{quad}$ ; кривая 2 соответствует  $M(A_1)$  для  $\sigma = \sigma_{lin}$ ; кривая 3 соответствует  $q(A_1)$  для  $\sigma = \sigma_{quad}$

Fig. 2. Dependence of the quantities  $M$  and  $q$  on the temperature gradient at the lower wall  $A_1$ : curve 1 corresponds to  $M(A_1)$  for  $\sigma = \sigma_{quad}$ ; curve 2 corresponds to  $M(A_1)$  for  $\sigma = \sigma_{lin}$ ; curve 3 corresponds to  $q(A_1)$  for  $\sigma = \sigma_{quad}$



танные на его основе, противоречат физическому смыслу процесса испарения. Данное решение при используемых рабочих смесях, температурных режимах и геометрии области, по-видимому, является чисто математическим.

На рис. 3–5 изображены скорость в обоих слоях, поле температуры и концентраций в каждом слое при  $A_1 = 10 \text{ K/m}$  для  $\sigma = \sigma_{quad}$ . Можно видеть, что решение адекватно отражает термокапиллярный эффект: на границе раздела температура увеличивается вдоль  $y = 0$  (рис. 4), а жидкость движется в сторону уменьшения температуры и увеличения поверхностного натяжения (рис. 3). Что касается термодиффузационного эффекта, решение предсказывает, что температура растет от прямой  $x = 0$  до прямой  $x = 0.1 \text{ м}$ , как и концентрация этанола в газовом слое (рис. 4 и рис. 5, а).

Это означает, что термодиффузационный эффект отображается решением корректно. В слое с жидкой бинарной смесью максимальные значения концентрации наблюдаются в центральной области слоя (рис. 5, б), что связано с испарением этанола с границы раздела и формированием приграничной области с более

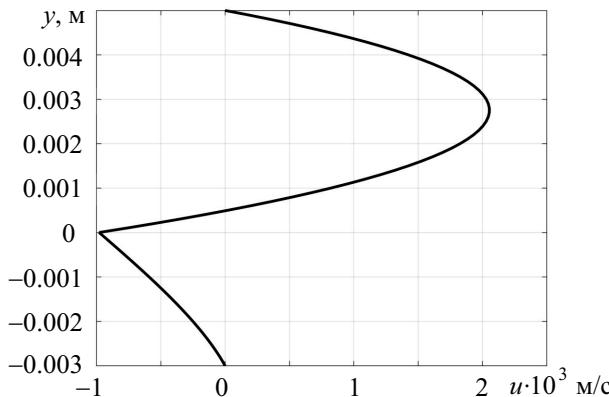


Рис. 3. Скорость течения при  $A_1 = 10 \text{ K/m}$  для  $\sigma = \sigma_{quad}$

Fig. 3. Velocity of flow at  $A_1 = 10 \text{ K/m}$  for  $\sigma = \sigma_{quad}$

низкой концентрацией. При конкуренции термодиффузии и испарения воздействие последнего проявляется сильнее.

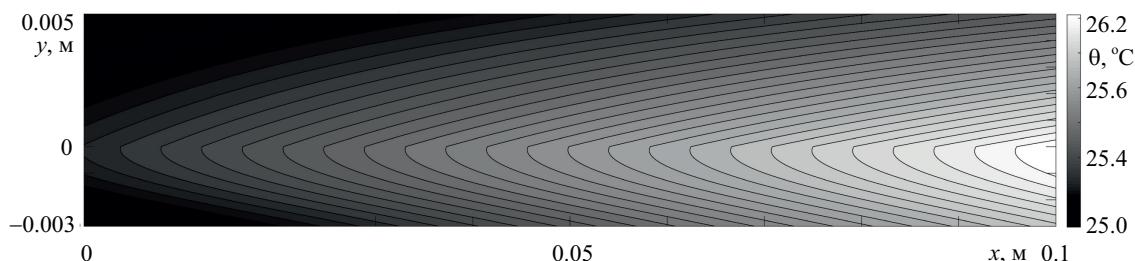


Рис. 4. Поле температур при  $A_1 = 10 \text{ K/m}$  для  $\sigma = \sigma_{quad}$

Fig. 4. Temperature field at  $A_1 = 10 \text{ K/m}$  for  $\sigma = \sigma_{quad}$

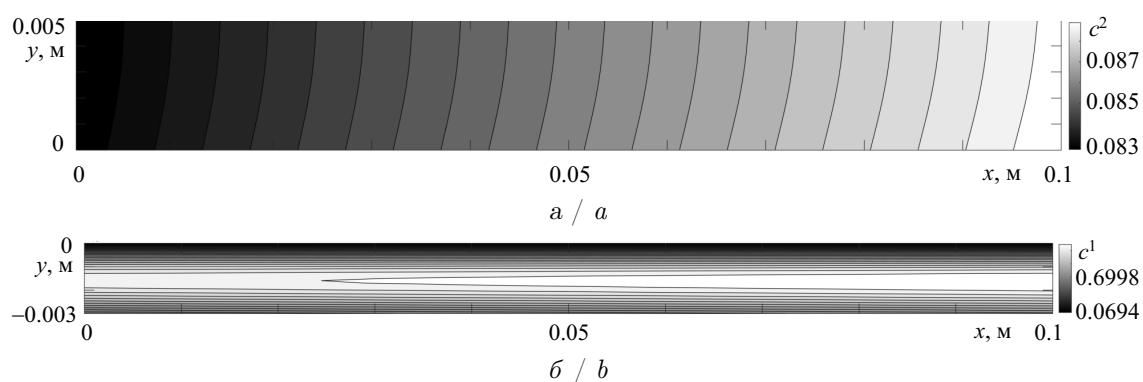


Рис. 5. Поле концентраций в верхнем (а) и нижнем (б) слоях при  $A_1 = 10 \text{ K/m}$  для  $\sigma = \sigma_{quad}$

Fig. 5. Concentration field in the upper (a) and lower (b) layers at  $A_1 = 10 \text{ K/m}$  for  $\sigma = \sigma_{quad}$



## Заключение

Проведенный в работе анализ постановок граничных условий для функции температуры при описании испарительной конвекции на границе раздела двухкомпонентной жидкости и газопаровой смеси показал, что для моделирования диффузионного испарения могут быть использованы как условия Дирихле или Неймана, так и их комбинации в случае линейной зависимости поверхностного натяжения от концентрации одного из компонентов жидкости. В случае нелинейного (квадратичного) характера зависимости поверхностного натяжения от состава испаряющейся жидкости только линейное по продольной координате распределение температуры на стенках дает физически содержательное решение задачи.

Верификация построенного решения проведена на имеющихся экспериментальных данных о характеристиках испарения чистого этанола в воздухе [12]. Показано, что решение качественно верно предсказывает рост массовой скорости испарения при увеличении тепловой нагрузки нижней стенки канала. При этом вычисления также указывают на формирование приповерхностного слоя, где концентрация испаряющегося компонента в жидком слое убывает, а в верхнем — растет за счет увеличения температуры на границе раздела. Кроме того, рассчитанные значения расхода газа в верхнем слое прямо пропорциональны скорости испарения, что подтверждает усиление испарения при интенсификации обдува. Все полученные на основе анализа построенного решения выводы согласуются с результатами экспериментов на качественном уровне. Для сравнения количественных характеристик необходимо получить данные именно о течениях бинарных смесей, которые, как известно, имеют более сложную по сравнению с однородными жидкостями структуру течения.

## Список литературы

1. Бекежсанова В. Б., Гончарова О. Н. Задачи испарительной конвекции (обзор) // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 2. С. 219–260. EDN: ORSKZP
2. Шлиомис М. И., Якушин В. И. Конвекция в двухслойной бинарной смеси с испарением // Гидродинамика. 1972. Вып. 4. С. 129–141.
3. Goncharova O. N., Hennenberg M., Rezanova E. V., Kabov O. A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer systems // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2013. Vol. 1, iss. 4. P. 317–338. <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.20>
4. Бирих Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1966. № 3. С. 69–72. EDN: FWKBOW
5. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions // Microgravity Science and Technology. 2020. Vol. 32. P. 139–154. <https://doi.org/10.1007/s12217-019-09764-0>
6. Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В. Современные математические модели конвекции. Москва : Физматлит, 2008. 368 с. EDN: UGLJZD
7. Гончарова О. Н., Резанова Е. В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 2. С. 68–79. EDN: SMGNUZ
8. Стабников В. Н., Ройтер И. М., Процюк Т. Б. Этиловый спирт. Москва : Пищевая промышленность, 1976. 273 с.
9. Vazquez G., Alvarez E., Navaza J. M. Surface tension of alcohol + water from 20 to 50° // Journal of Chemical and Engineering Data. 1995. Vol. 40, iss. 3. P. 611–614. <https://doi.org/10.1021/je00019a016>
10. Рыжков И. И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2013. 200 с. EDN: RUKUMF
11. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. Москва : Наука, 1972. 722 с.
12. Бекежсанова В. Б., Гончарова О. Н., Люлин Ю. В. Теоретическое и экспериментальное исследование течений с испарением на термокапиллярной границе раздела: особенности моделирования, анализ характеристик // Многофазные системы. 2023. Т. 18, № 3. С. 97–99. <https://doi.org/10.21662/mfs2023.3.018>, EDN: ASCVIA



## References

1. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Problems of the evaporative convection (Review). *Fluid Dynamics*, 2018, vol. 53, suppl. 1, pp. S69–S102. <https://doi.org/10.1134/S001546281804016X>, EDN: **SGIICV**
2. Shliomis M. I., Yakushin V. I. Convection in two-layer binary mixture with evaporation. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics], 1972, iss. 4, pp. 129–141 (in Russian).
3. Goncharova O. N., Hennenberg M., Rezanova E. V., Kabov O. A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer systems. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2013, vol. 1, iss. 4, pp. 317–338. <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.20>
4. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, vol. 7, iss. 3, pp. 43–44. <https://doi.org/10.1007/bf00914697>, EDN: **FWKBOW**
5. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions. *Microgravity Science and Technology*, 2020, vol. 32, pp. 139–154. <https://doi.org/10.1007/s12217-019-09764-0>
6. Andreev V. K., Gaponenko Yu. A., Goncharova O. N., Pukhnachov V. V. *Mathematical Models of Convection*. De Gruyter Studies in Mathematical Physics, vol. 5. Berlin, Boston, De Gruyter, 2020. 432 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 2008. 368 p.).
7. Goncharova O. N., Rezanova E. V. Example of an exact solution of the stationary problems of two-layer flows with evaporation at the interface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, iss. 2, pp. 247–257. <https://doi.org/10.1134/S0021894414020072>, EDN: **SKSWQZ**
8. Stabnikov V. N., Royter I. M., Protsyuk T. B. *Etylovyy spirit* [Ethyl Alcohol]. Moscow, Pishchevaya Promyshlennost, 1976. 273 p. (in Russian).
9. Vazquez G., Alvarez E., Navaza J. M. Surface tension of alcohol + water from 20 to 50°C. *Journal of Chemical and Engineering Data*, 1995, vol. 40, iss. 3, pp. 611–614. <https://doi.org/10.1021/je00019a016>
10. Ryzhkov I. I. *Termodiffuziya v smesyah: uravneniya, simmetrii, resheniya i ikh ustoychivost'* [Thermodiffusion in mixtures: Equations, symmetries, solutions and their stability]. Novosibirsk, SB RAS Publ., 2013. 200 p. (in Russian). EDN: **RUKUMF**
11. Vargaftik N. B. *Spravochnik po teplofizicheskim svoystvam gazov i zhidkostey* [Handbook on the thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow, Nauka, 1972. 722 p. (in Russian).
12. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Lyulin Yu. V. Theoretical and experimental study of flows with evaporation at a thermocapillary interface: Modeling features, analysis of characteristics. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems], 2023, vol. 18, iss. 3, pp. 97–99 (in Russian). <https://doi.org/10.21662/mfs2023.3.018>, EDN: **ASCVIA**

Поступила в редакцию / Received 12.03.2024

Принята к публикации / Accepted 10.09.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025