



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 259–270  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 259–270  
<https://mmi.sgu.ru>      <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-259-270>, EDN: WIEVBM

Научная статья  
УДК 539.374

## Пластическое деформирование биметаллической трубы под действием внутреннего давления

С. В. Фирсов

Хабаровский федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Россия, 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Металлургов, д. 1

**Фирсов Сергей Викторович**, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук, [firsov.s.new@yandex.ru](mailto:firsov.s.new@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-7446-6231>, SPIN: 8267-2329, AuthorID: 783315

**Аннотация.** Рассмотрена задача деформирования двухслойной (биметаллической) толстостенной трубы под воздействием внутреннего давления. Выведена зависимость для определения критической нагрузки, при которой впервые зародится область пластического течения либо в начале внутреннего слоя, либо в начале внешнего, в зависимости от физико-геометрических параметров изделия. Выведены соотношения для полуаналитического решения задачи необратимого деформирования двухслойной трубы под воздействием внутреннего давления. Рассмотрен частный случай деформирования биметаллической трубы из стали 09Г2С с внутренним плакирующим слоем из коррозионностойкой стали 13ХФА при различных толщинах последнего. Произведен расчёт задачи автофretирования с целью повышения эксплуатационных свойств изделия. Делаются выводы о выборе оптимальной (в плане прочностных свойств) толщины плакирующего слоя, исходя из физических параметров используемых материалов и геометрических размеров изделия.

**Ключевые слова:** упругость, пластичность, вязкопластичность, плоская деформация, малые деформации, биметаллическая труба, внутреннее давление

**Благодарности:** Выполнено в рамках госзадания Хабаровского федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук.

**Для цитирования:** Фирсов С. В. Пластическое деформирование биметаллической трубы под действием внутреннего давления // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 259–270. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-259-270>, EDN: WIEVBM

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

## Plastic strain of the bimetal tube subjected to inner pressure

S. V. Firsov

Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 1 Metallurgov St., Komsomolsk-na-Amure 681005, Russia

**Sergey V. Firsov**, [firsov.s.new@yandex.ru](mailto:firsov.s.new@yandex.ru), <https://orcid.org/0000-0001-7446-6231>, SPIN: 8267-2329, AuthorID: 783315

**Abstract.** The problem of deformation of a two-layer (bimetallic) thick tube under inner pressure is considered. A dependence of critical load from physical and geometrical properties of the product at which plastic flow is occurred at the beginning of either inner or outer layer is derived. The relations for the semi-analytical solution



of the problem of irreversible deformation of a two-layer pipe under the influence of internal pressure are derived. A special case of deformation of a bimetallic pipe made of 09G2C steel with an internal plating layer made of corrosion-resistant 13XFA steel at various thicknesses is considered. The calculation of the autofrettage process was performed in order to improve the operational properties of the product. Conclusions about the choice of the optimal (in terms of strength properties) thickness of the cladding layer, based on the physical parameters of the materials used and the geometric dimensions of the product are drawn.

**Keywords:** elasticity, plasticity, viscoplasticity, plain strain, small strain, bimetal tube, inner pressure

**Acknowledgements:** The work was carried out within the framework of the state task of the Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.

**For citation:** Firsov S. V. Plastic strain of the bimetal tube subjected to inner pressure. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 259–270 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-259-270>, EDN: WIEVBM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

## Введение

Расчёты одномерных напряжённо-деформированных состояний в длинной трубе относятся к классической задаче механики деформируемых тел. В теории упругости такую задачу называют задачей Ламе [1]. Под таким названием она входит в большинство учебников [2, 3]. Точное решение задачи Ламе в теории идеального пластического деформирования было дано Блендом [4]. Оно в значительной степени опиралось на использование кусочно-линейного условия пластичности максимальных касательных напряжений (условия Треска – Сен-Венана).

При гладком условии максимальных октаэдрических напряжений (условие Мизеса) получить точное решение упругопластической задачи не удается. В [5] приведено сравнение результатов расчётов, проведённых при условии максимальных октаэдрических напряжений, с точными решениями, полученными при использовании кусочно-линейных пластических потенциалов, т. е. при максимальных касательных напряжениях или максимальных приведённых напряжениях (условия Ишлинского – Ивлева). Оказалось, что численное решение совпадает с полусуммой аналитических по своему уровню и распределению напряжений по радиальной координате. То же относится и к распределению остаточных напряжений после снятия внешних нагружающих усилий.

Радиальные напряжения максимальны, если расчёт провести в рамках максимальных приведённых напряжений, и минимальны при проведении расчётов в рамках условия максимальных касательных напряжений. Этот результат практически нашёл своё подтверждение при решении задач термопластичности [6]. Важно отметить, что решение в [6] проведено с учётом вязкого сопротивления пластическому течению, т. е. в рамках упруговязкопластической модели.

В [7, 8] разрешается подобная задача с учётом приобретения материалом больших упругопластических деформаций. Неизбежность больших деформаций связывается с малым размером внутренней цилиндрической полости (дефект сплошности), когда возникающие перемещения оказываются соразмерными с принимаемым радиусом полости. Установлен [8] эффект приспособляемости дефекта сплошности в идеальном упругопластическом материале, когда геометрия дефекта и уровень остаточных напряжений в его окрестности остаются неизменными после каждой разгрузки при циклическом нагружении по типу «нагрузка – разгрузка». Выход из такой парадоксальной ситуации продемонстрирован в статье [9]. Связывается он с учётом вязкости в условиях пластического деформирования.

В нефтегазовой и нефтехимической отраслях остро стоят проблемы защиты от коррозии и обеспечения высокой надёжности оборудования и трубопроводов [10]. Одним из способов решения этих проблем является использование двухслойных или многослойных труб и сосудов с основным слоем низколегированной стали типа 09Г2С и плакирующим слоем нержа-



веющих сталей. Материалы слоёв отличаются по своим механическим и теплофизическими свойствам, что приводит к сложному напряжённо-деформированному состоянию таких изделий [11]. Исследуется как коррозионная стойкость различных плакирующих поверхностей [12], так и возможность биметаллических труб переносить различные нагрузки [11, 13]. Целью данной работы является изучение напряжённо-деформированного состояния таких биметаллических труб с плакирующей внутренней поверхностью под воздействием критических значений внутреннего давления.

## 1. Исходные соотношения принимаемой математической модели

Деформируемый материал полагаем упруговязкопластическим, допускающим лишь малые деформации. Полные деформации  $\mathbf{d}$  в материале считаем представленными суммой его обратимых (упругих) деформаций  $\mathbf{e}$  и необратимых (вязкопластических)  $\mathbf{p}$  деформаций

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}). \quad (1)$$

В (1)  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений. Упругие деформации  $\mathbf{e}$  задают напряжения  $\sigma$  в деформируемом материале.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\mathbf{e}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — параметры Ламе,  $\mathbf{I}$  — единичный тензор, составленный из символов Кронекера. Пластические деформации в материале производятся в условиях принадлежности напряжений поверхности нагружений (текущести)  $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0) = 0$  ( $\sigma_0$  — предел текучести) в пространстве напряжений  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . В условиях принятия принципа Мизеса [14] функция  $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0)$  оказывается пластическим потенциалом со следованием ассоциированного с поверхностью нагружения закона пластического течения

$$\boldsymbol{\theta}^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad \phi > 0, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\theta}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \mathbf{I},$$

где  $\boldsymbol{\tau}$  — девиатор тензора напряжений  $\boldsymbol{\sigma}$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  — тензор скоростей пластических деформаций, а  $\boldsymbol{\theta}^p$  — его девиатор.

В качестве условия пластического течения (поверхности нагружения) будем использовать следующее обобщение условия максимальных октаэдрических напряжений Мизеса на случай вязкопластического течения [15, 16]:

$$\frac{3}{2} (\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\theta}^p) \cdot \cdot (\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\theta}^p) = \sigma_0^2.$$

Здесь  $\eta$  — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

Данные формулы можно привести к виду

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^p &= \frac{3\phi}{1+3\phi\eta} \boldsymbol{\tau}, \quad \phi = \frac{1}{3\eta} \left( \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \boldsymbol{\tau}} - 1 \right), \\ \boldsymbol{\varepsilon}^p &= \frac{1}{\eta} \frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma} \boldsymbol{\tau}, \quad \Sigma^2 = \frac{3}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (3)$$

Вместе с уравнением движения (равновесия) система уравнений (1)–(3) составляет замкнутую систему, которой подчинено деформирование упруговязкопластического тела.

## 2. Постановка задачи

Рассматриваем двухслойный полый вал, другими словами, биметаллическую трубу, радиус внутренней полости которой равен  $R_1$ . Сама труба состоит из двух слоёв, являющихся деформируемыми, разделённых граничной поверхностью  $r = R_2$ . Боковая поверхность трубы  $r = R_3$  полагается свободной от нагружения. Деформирование трубы происходит под действием давления  $P = P(t)$ , приложенного к поверхности внутренней полости



$r = R_1$ . Для деформаций материала такой трубы имеем в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$

$$\begin{aligned} u_r &= u(r, t), \quad u_\varphi = u_z = 0, \quad d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = u_{,r}, \\ d_{\varphi\varphi} &= e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = r^{-1}u, \quad d_{zz} = e_{zz} + p_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение равновесия запишется в виде

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0. \quad (5)$$

Границные условия для трубы:

$$\sigma_{rr}(R_1, t) = p(t) = -P(t), \quad \sigma_{rr}(R_3, t) = 0. \quad (6)$$

На границе между слоями примем условия прилипания

$$\sigma_{rr}^{[1]}(R_2, t) = \sigma_{rr}^{[2]}(R_2, t), \quad u^{[1]}(R_2, t) = u^{[2]}(R_2, t). \quad (7)$$

Здесь  $f^{[l]}$  обозначает значение параметра или переменной на слое  $l$ .

### 3. Первоначальное упругое деформирование

В начале деформирования напряжения малы и не возникает области пластического течения. Иными словами, необратимые деформации  $\boldsymbol{p}$  будут равны нулю. Используя соотношения (1), (2), уравнение равновесия (5) можно свести к двум дифференциальным уравнениям второго порядка для двух слоёв рассматриваемой трубы

$$u_{,rr}^{[l]} + r^{-1}u_{,r}^{[l]} - r^{-2}u^{[l]} = 0, \quad l = 1, 2. \quad (8)$$

Проинтегрировав данные уравнения (8) с учётом граничных условий (6) и условий на границе между слоями (7), получим следующее решение задачи упругого деформирования:

$$\begin{aligned} u^{[l]} &= c_1^{[l]}r + c_2^{[l]}r^{-1}, \quad \sigma_{rr}^{[l]} = 2(\lambda^{[l]} + \mu^{[l]})c_1^{[l]} - 2\mu^{[l]}c_2^{[l]}r^{-2}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{[l]} &= 2(\lambda^{[l]} + \mu^{[l]})c_1^{[l]} + 2\mu^{[l]}c_2^{[l]}r^{-2}, \quad \sigma_{zz}^{[l]} = 2\lambda^{[l]}c_1^{[l]} - 2\mu^{[l]}c_2^{[l]}r^{-2}, \\ c_1^{[1]} &= pAD^{-1}, \quad c_2^{[1]} = pR_1^2BD^{-1}, \quad c_1^{[2]} = pR_1^2R_2^2\mu^{[2]}\left(\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]}\right)D^{-1}, \\ c_2^{[2]} &= pR_1^2R_2^2R_3^2\left(\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]}\right)\left(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]}\right)D^{-1}, \\ A &= R_1^2R_2^2\mu^{[2]}\left(\mu^{[1]} + \lambda^{[2]} + \mu^{[2]}\right) + R_1^2R_3^2\left(\mu^{[1]} - \mu^{[2]}\right)\left(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]}\right), \\ B &= R_2^4\mu^{[2]}\left(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]} - \lambda^{[1]} - \mu^{[1]}\right) - R_2^2R_3^2\left(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]}\right)\left(\lambda^{[1]} + \mu^{[1]} + \mu^{[2]}\right), \\ D &= 2(\lambda^{[1]} + \mu^{[1]})A + 2\mu^{[1]}B. \end{aligned} \quad (9)$$

Из соотношений (3) следует, что plasticность в среде появится при условии  $\Sigma > \sigma_0$ , так как только при этом условии скорости пластического течения будут выше нуля. С помощью (9) найдём выражения для давления, при котором начнётся пластическое течение в деформируемой среде. Получим соответственного для первого и второго слоёв трубы

$$p^{[1]} = \pm \frac{1}{2\mu^{[1]}} \frac{r^2\sigma_0^{[1]}D}{\sqrt{A^2r^4 + 3B^2R_1^4}}, \quad p^{[2]} = \pm \frac{1}{2\mu^{[2]}} \frac{(\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]})^{-1}R_1^{-2}R_2^{-2}r^2\sigma_0^{[2]}D}{\sqrt{(\mu^{[2]})^2r^4 + 3R_3^4(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]})^2}}.$$

Полученные функции являются монотонно возрастающими, соответственно, наименьшее значение (по модулю) они будут принимать при минимально возможном значении  $r$ .



Для первого слоя это  $r = R_1$ , а для второго —  $r = R_2$ . С учётом ранее сказанного, пластическое течение начнётся при

$$p^{[1]} = \pm \frac{1}{2\mu^{[1]}} \frac{\sigma_0^{[1]} D}{\sqrt{A^2 + 3B^2}}, \quad p^{[2]} = \pm \frac{1}{2\mu^{[2]}} \frac{(\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]})^{-1} R_1^{-2} \sigma_0^{[2]} D}{\sqrt{(\mu^{[2]})^2 R_2^4 + 3R_3^4 (\lambda^{[2]} + \mu^{[2]})^2}}. \quad (10)$$

В случае деформирования однослойной трубы (без упрочняющего слоя), исходя из аналогичных соображений, пластическое течение начнётся при

$$p = \pm \frac{(\lambda + \mu)(R_2^2 - R_1^2)\sigma_0}{\sqrt{\mu^2 R_1^4 + 3(\lambda + \mu)^2 R_2^4}}. \quad (11)$$

Изучим, какое влияние на пластическое течение оказывают различные параметры. Предположим, что упругие модули совпадают и различны только пределы текучести. В этом случае первая формула из (10) сведётся к (11), а вторая запишется в виде

$$p^{[2]} = \pm \alpha \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{(\lambda + \mu)(R_3^2 - R_1^2)\sigma_0}{\sqrt{\mu^2 R_2^4 + 3(\lambda + \mu)^2 R_3^4}}, \quad \sigma_0^{[1]} = \sigma_0, \quad \sigma_0^{[2]} = \alpha \sigma_0.$$

Приравняв эти два условия, можно найти значение коэффициента  $\alpha$ , при котором пластическое течение начнётся одновременно во внутреннем и внешнем слоях биметаллической трубы:

$$\alpha = \frac{R_1^2}{R_2^2} \sqrt{\frac{\mu^2 R_2^4 + 3(\lambda + \mu)^2 R_3^4}{\mu^2 R_1^4 + 3(\lambda + \mu)^2 R_3^4}}. \quad (12)$$

При  $\alpha$ , меньшем приведённого значения, пластическое течение впервые будет появляться именно в начале второго слоя. При больших значениях пластичность будет зарождаться на границе первого слоя. Иными словами,  $\alpha^{-1}$  — это во сколько раз предел текучести первого слоя должен быть больше второго, чтобы пластическое течение зародилось в основном слое.

В качестве примера рассмотрим толстостенную трубу наружным диаметром 68 мм, толщина стенки которой 16 мм. В наших обозначениях получим  $R_1 = 0,018$  м и  $R_2 = 0,034$  м для однослойной трубы. В качестве основного материала возьмём Ст 09Г2С, а для плакирующего слоя рассмотрим коррозионностойкий сплав Ст 13ХФА. Их параметры приводятся в таблице.

Согласно приведённым параметрам и формуле (11) подобная труба способна выдержать давление вплоть до  $P = 165.864$  МПа в случае стали 13ХФА и  $P = 121.854$  МПа для Ст 09Г2С перед началом пластического течения.

Рассмотрим двухслойную биметаллическую трубу с данными размерами, внутренний слой которой выполнен из коррозионностойкой стали 13ХФА, а внешний — из нелегированной стали Ст 09Г2С. Из формул (10) найдём такое положение разграничающей слои поверхности  $r = R_2$ , при котором пластическое течение начнётся одновременно в первом и втором слоях. Получим значение  $R_2 \approx 0.020471$  м.

Далее рассмотрим три случая, в которых толщина плакирующего внутреннего слоя будет равна 1.5, 2.5 и 3.5 мм. Получим соответственно  $R_2 = 0.0195$ ,  $R_2 = 0.0205$  и  $R_2 = 0.0215$ . В первом случае пластическое течение впервые появится во втором слое при давлении свыше 144.406 МПа, во втором — в первом слое при  $P > 160.026$  МПа, а в третьем — во внутреннем слое при  $P > 160.712$  МПа. На рис. 1 приводится распределение перемещений и напряжений в материале двухслойной трубы перед началом пластического течения для всех трёх случаев.

Параметры материала  
Table. Material Parameters

Материал	$\lambda$ , ГПа	$\mu$ , ГПа	$\sigma_0$ , МПа
Ст 09Г2С	97	77	294
Ст 13ХФА	121	81	400

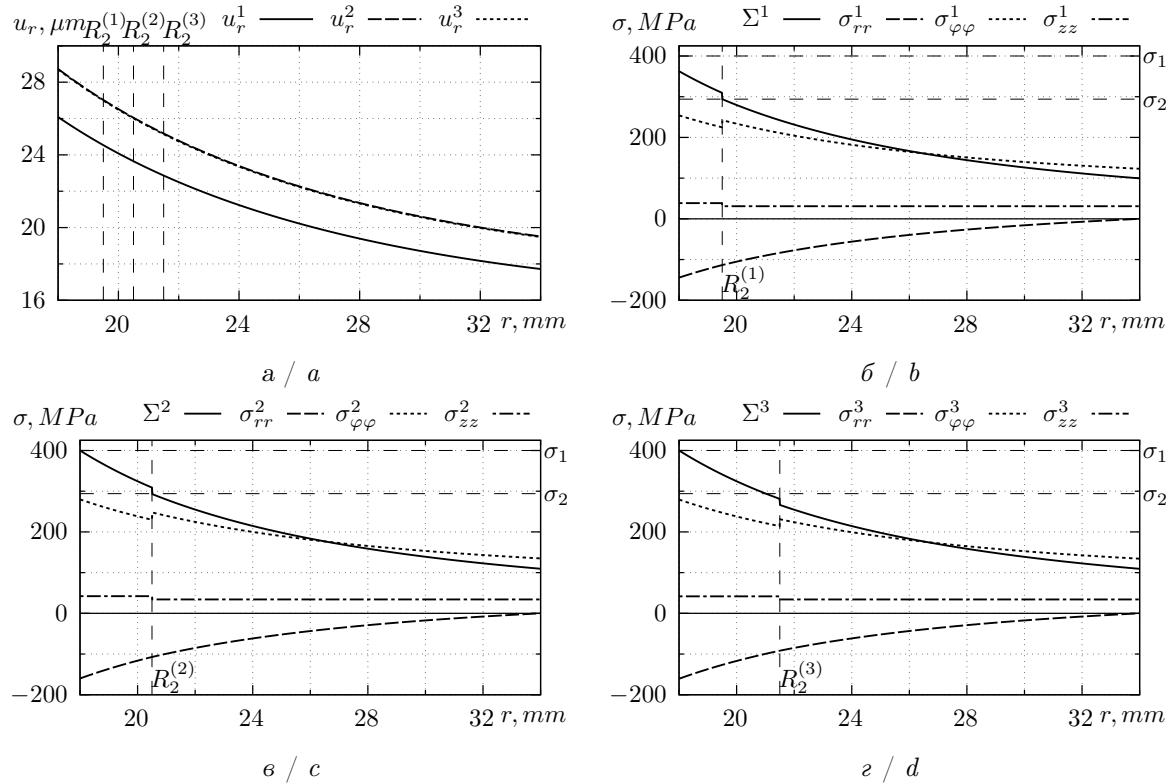


Рис. 1. Напряжённо-деформированное состояние перед началом пластического течения при различной толщине внутреннего слоя (1 – 1.5 мм, 2 – 2.5 мм, 3 – 3.5 мм): перемещения (а) и напряжения для первого (б), второго (в) и третьего (г) случаев

Fig. 1. Stress-strain state before the start of plastic flow at different inner layer thicknesses (1 – 1.5 mm, 2 – 2.5 mm, and 3 – 3.5 mm): displacements (a) and voltage for the first (b), second (c) and third (d) cases

#### 4. Вязкопластическое течение

Когда давление превысит критическое значение (10), в материале двухслойной трубы начнут накапливаться необратимые деформации за счёт вязкопластического течения. Скорость их накопления рассчитываем по формулам (3), которые в нашем случае примут вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^p &= \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\ \varepsilon_{zz}^p &= \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})\end{aligned}\quad (13)$$

для каждого слоя материала трубы. Чтобы не загромождать формулы, индексы слоёв не приводятся.

Используя соотношения (1), (2), уравнение равновесия (5) можно свести к двум дифференциальным уравнениям второго порядка вида

$$u_{,rr}^{[l]} + r^{-1}u_{,r}^{[l]} - r^{-2}u^{[l]} = r^{-1} \frac{2\mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} (p_{rr}^{[l]} - p_{\varphi\varphi}^{[l]}) + p_{rr,r}^{[l]} + \frac{\lambda^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} (p_{\varphi\varphi,r}^{[l]} + p_{zz,r}^{[l]}). \quad (14)$$

Представив левую часть данного уравнения (14) в форме [17]

$$u_{,rr} + r^{-1}u_{,r} - r^{-2}u = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right),$$



проинтегрируем его и получим соотношения для нахождения компоненты вектора перемещений [18, 19] в каждом из слоёв:

$$\begin{aligned} u^{[l]} &= \frac{1}{2}C_1^{[l]}r + C_2^{[l]}r^{-1} + \frac{\mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}}rI_1^{[l]} + r^{-1}I_2^{[l]}, \\ I_1^{[l]}(r, t) &= \int_{R_l}^r x^{-1} \left( p_{rr}^{[l]}(x, t) - p_{\varphi\varphi}^{[l]}(x, t) \right) dx, \\ I_2^{[l]}(r, t) &= \int_{R_l}^r x \left( \frac{\lambda^{[l]} + \mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}}(p_{rr}^{[l]}(x, t) + p_{\varphi\varphi}^{[l]}(x, t)) + \frac{\lambda^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}}p_{zz}^{[l]}(x, t) \right) dx. \end{aligned} \quad (15)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{[l]} &= (\lambda^{[l]} + \mu^{[l]})C_1^{[l]} - 2\mu^{[l]}C_2^{[l]}r^{-2} + 2\mu^{[l]}\frac{\lambda^{[l]} + \mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}}I_1^{[l]} - 2\mu^{[l]}r^{-1}I_2^{[l]}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{[l]} &= (\lambda^{[l]} + \mu^{[l]})C_1^{[l]} + 2\mu^{[l]}C_2^{[l]}r^{-2} + 2\mu^{[l]}\frac{\lambda^{[l]} + \mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}}I_1^{[l]} + 2\mu^{[l]}r^{-1}I_2^{[l]} - \\ &\quad - \frac{2\mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} \left( \lambda^{[l]}p_{zz}^{[l]} + 2(\lambda^{[l]} + \mu^{[l]})p_{\varphi\varphi}^{[l]} \right), \\ \sigma_{zz}^{[l]} &= \lambda^{[l]}C_1^{[l]} + 2\mu^{[l]} \left( \frac{\lambda^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}}I_1^{[l]} - 2\frac{\lambda^{[l]} + \mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}}p_{zz}^{[l]} - \frac{\lambda^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}}p_{\varphi\varphi}^{[l]} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Подставив полученные значения перемещения (15) и напряжений (16) в граничные условия (6), (7), найдём значения коэффициентов интегрирования

$$\begin{aligned} C_1^{[1]} &= 2pAD^{-1} - 4\mu^{[1]}D^{-1} \left( \frac{\mu^{[1]}}{\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]}}BJ_1^{[1]} + AJ_2^{[1]}R_1^{-2} \right) + \\ &\quad + 4\mu^{[1]}\mu^{[2]}R_2^2D^{-1} \left( (\lambda^{[2]} + \mu^{[2]})R_3^2J_1^{[2]} - (\lambda^{[2]} + 2\mu^{[2]})J_2^{[2]} \right), \\ C_2^{[1]} &= -pR_1^2BD^{-1} - 2(\lambda^{[1]} + \mu^{[1]})D^{-1} \left( \frac{\mu^{[1]}}{\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]}}R_1^2BJ_1^{[1]} + AJ_2^{[1]} \right) + \\ &\quad + 2\mu^{[2]}(\lambda^{[1]} + \mu^{[1]})R_1^2R_2^2D^{-1} \left( (\lambda^{[2]} + \mu^{[2]})R_3^2J_1^{[2]} - (\lambda^{[2]} + 2\mu^{[2]})J_2^{[2]} \right), \\ C_1^{[2]} &= 2p\mu^{[2]}(\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]})R_1^2R_2^2D^{-1} + 4\mu^{[2]}ED^{-1} \left( \frac{\lambda^{[2]} + \mu^{[2]}}{\lambda^{[2]} + 2\mu^{[2]}}R_3^2J_1^{[2]} - J_2^{[2]} \right) + \\ &\quad + 4\mu^{[1]}\mu^{[2]}R_2^2D^{-1} \left( (\lambda^{[1]} + \mu^{[1]})R_1^2J_1^{[1]} - (\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]})J_2^{[1]} \right), \\ C_2^{[2]} &= p \left( \lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]} \right) \left( \lambda^{[2]} + \mu^{[2]} \right) R_1^2R_2^2R_3^2D^{-1} + \\ &\quad + 2\mu^{[1]} \left( \lambda^{[1]} + \mu^{[1]} \right) \left( \lambda^{[2]} + \mu^{[2]} \right) R_1^2R_2^2R_3^2D^{-1}J_1^{[1]} + \\ &\quad + 2\mu^{[1]}D^{-1} \left( AR_1^{-2}R_2^2 + B - \mu_2 \left( 2\lambda^{[2]} + 2\mu^{[2]} - \lambda^{[1]} \right) R_2^4 \right) J_2^{[1]} + \\ &\quad + 2\mu^{[2]}R_2^2FD^{-1} \left( \frac{\lambda^{[2]} + \mu^{[2]}}{\lambda^{[2]} + 2\mu^{[2]}}R_3^2J_1^{[2]} - J_2^{[2]} \right), \\ J_1^{[l]} &= I_1^{[l]}(R_{l+1}, t) = \int_{R_l}^{R_{l+1}} x^{-1} \left( p_{rr}^{[l]}(x, t) - p_{\varphi\varphi}^{[l]}(x, t) \right) dx, \quad J_2^{[l]} = I_2^{[l]}(R_{l+1}, t), \\ E &= \mu^{[1]} \left( \lambda^{[1]} + \mu^{[1]} + \mu^{[2]} \right) R_2^2 - \left( \lambda^{[1]} + \mu^{[1]} \right) \left( \mu^{[1]} - \mu^{[2]} \right) R_1^2, \\ F &= R_1^2 \left( \lambda^{[1]} + \mu^{[1]} \right) \left( \mu^{[1]} + \lambda^{[2]} + \mu^{[2]} \right) + \mu^{[1]} \left( \lambda^{[2]} + \mu^{[2]} - \lambda^{[1]} - \mu^{[1]} \right) R_2^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь сокращения  $A$ ,  $B$  и  $D$  аналогичны таковым из (9).



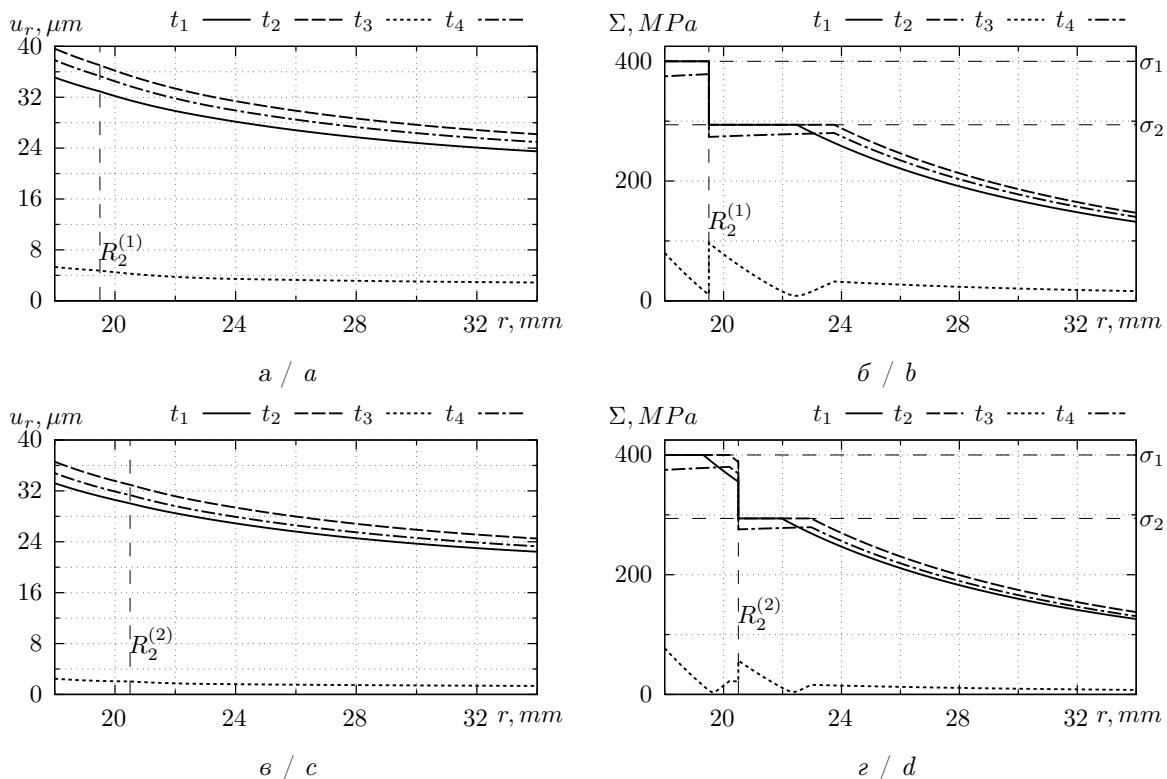
Полученные соотношения (15)–(17) можно использовать для нахождения точного решения задачи при заданных значениях нагружения  $p = p(t)$  и накопленных необратимых деформациях  $\mathbf{p}$ . К сожалению, нахождение точного решения для необратимых деформаций из соотношений (13), (16) вызывает затруднения, поэтому их значения будем искать численно:

$$\begin{aligned} p_{rr}^{j+1} &= p_{rr}^j + ht \left( \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma^j - \sigma_0}{\Sigma^j} (2\sigma_{rr}^j - \sigma_{\varphi\varphi}^j - \sigma_{zz}^j) \right), \\ p_{\varphi\varphi}^{j+1} &= p_{\varphi\varphi}^j + ht \left( \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma^j - \sigma_0}{\Sigma^j} (2\sigma_{\varphi\varphi}^j - \sigma_{rr}^j - \sigma_{zz}^j) \right), \\ p_{zz}^{j+1} &= p_{zz}^j + ht \left( \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma^j - \sigma_0}{\Sigma^j} (2\sigma_{zz}^j - \sigma_{rr}^j - \sigma_{\varphi\varphi}^j) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $f^j = f(t^j)$  – значение функции  $f$  при  $t = t^j$ , при этом  $t^j = ht \cdot j$ , где  $ht$  – шаг по времени.

При расчёте находим напряжённо-деформированное состояние материала трубы на текущем шаге в соответствии с формулами (15)–(17) при известных нагрузках и накопленных необратимых деформациях. Затем в соответствии с найденными напряжениями и формулами (18) находим значение необратимых деформаций на следующем шаге по времени и повторяем процесс. В дальнейших расчётах коэффициент вязкопластического сопротивления принимался равным  $\eta^{[l]} = 600$  МПа·с<sup>-1</sup>.

Как ранее было сказано, однослойная труба из сплава 13ХФА выдерживает давление порядка 165 МПа. Биметаллическая труба в лучшем из рассматриваемых случаев начинает пластически деформироваться уже при давлении в 161 МПа. Предположим, что необходимо повысить предел критического давления до границы в 180 МПа. Для этого можно воспользоваться известным процессом автофretирования [20], т. е. предварительно подвергнуть образец более высокой нагрузке, чтобы накопленные пластические деформации позволяли выдерживать большую рабочую нагрузку. Для этого рассмотрим задачу предварительного нагружения в 190 МПа и сравним поведение труб при давлении в 180 МПа без автофretирования и после него. Результаты расчётов приведены на рис. 2 и 3.



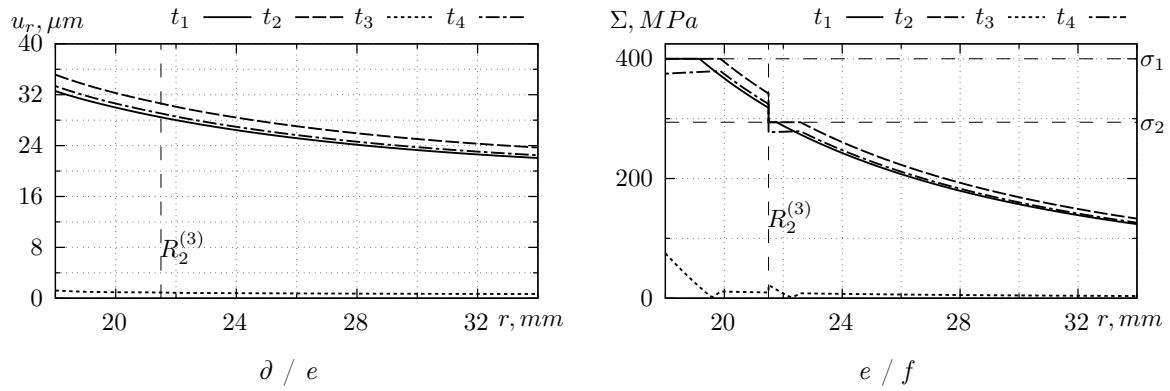


Рис. 2. Распределение перемещений  $u_r$  (а, в, д) и интенсивности напряжений  $\Sigma$  (б, г, е) в материале двухслойной трубы при первичной нагрузке до  $P = 180$  МПа ( $t_1$ ), максимальном давлении в  $P = 190$  МПа ( $t_2$ ), последующей разгрузке до  $P = 0$  МПа ( $t_3$ ) и повторном нагружении до рабочего давления  $P = 180$  МПа после процесса автофretтирования при различной толщине внутреннего слоя: 1.5 мм (а, б), 2.5 мм (в, г) и 3.5 мм (д, е)

Fig. 2. Distribution of displacements  $u_r$  (a, c, e) and stress intensity  $\Sigma$  (b, d, e) in the double-layer pipe material at primary load up to  $P = 180$  MPa ( $t_1$ ), maximum pressure of  $P = 190$  MPa ( $t_2$ ), subsequent unloading to  $P = 0$  MPa ( $t_3$ ) and reloading to operating pressure of  $P = 180$  MPa after the autofretting process at different thickness of the inner layer: 1.5 mm (a, b), 2.5 mm (c, d), and 3.5 mm (e, f)

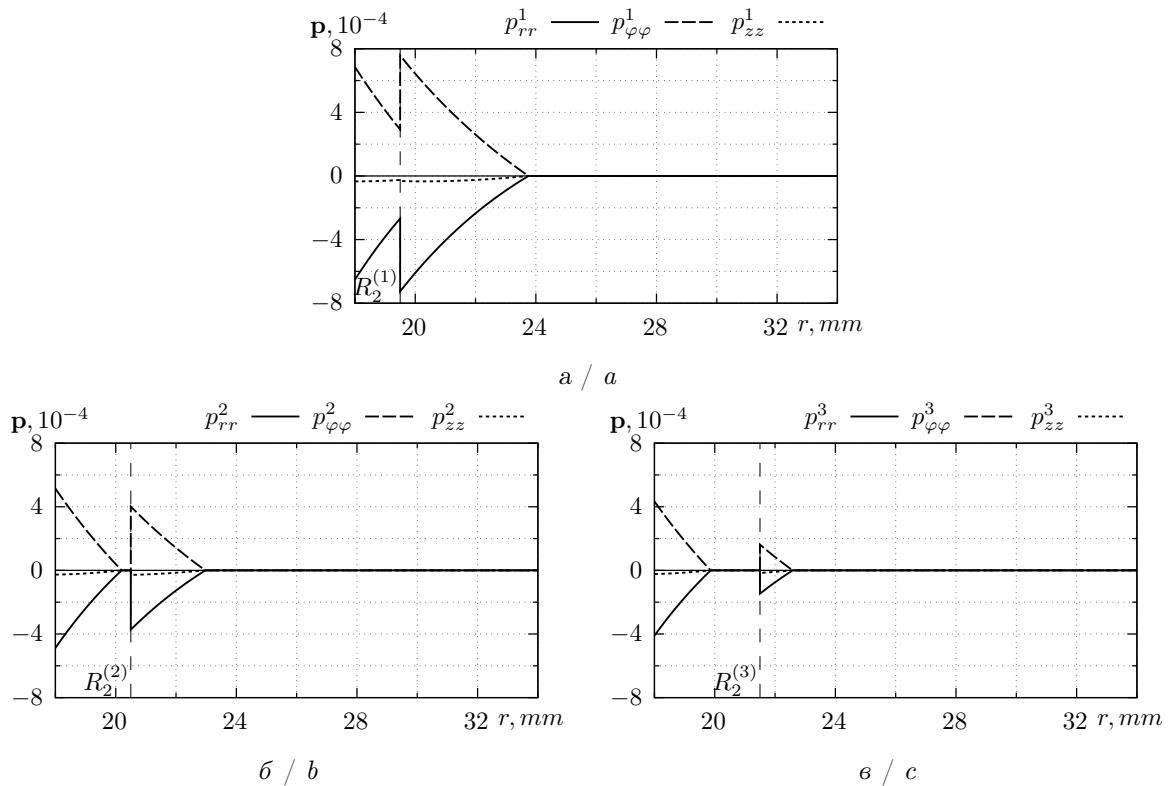


Рис. 3. Накопленные в процессе автофretтирования пластические деформации для труб с различной толщиной внутреннего слоя: 1.5 мм (а), 2.5 мм (б), 3.5 мм (в)

Fig. 3. Plastic deformations accumulated during the autofretting process for pipes with different inner layer thicknesses: 1.5 mm (a), 2.5 mm (b), 3.5 mm (c)

Как можно видеть из представленных графиков (см. рис. 2), при росте нагрузки сначала происходит упругое деформирование, затем на внутренней поверхности одного, а затем и другого слоёв (порядок зависит от рассматриваемого случая) сначала зарождаются,



а затем и развиваются области пластического течения. При заданной рабочей нагрузке  $P = 180$  МПа ( $t = t_1$ , на графиках обозначено как  $t_1$ ) во всех рассматриваемых случаях пластическое течение зарождается как во внутреннем (плакирующим) слое ( $R_1 \leq r \leq R_2$ ), так и в основном внешнем ( $R_2 \leq r \leq R_3$ ). При этом в первом случае (при тонком плакирующем слое толщиной в 1,5 мм) пластическое течение распространяется по всему внутреннему слою. С увеличением нагрузки до максимальных значений  $P = 190$  МПа (случай  $t_2$  на графиках) области пластического течения также увеличиваются. При этом чем толще плакирующий слой, тем меньшую область занимает пластическое течение.

После снятия нагрузки ( $t = t_3$ ) можно заметить, что остаточные напряжения во внутреннем слое имеют схожее распределение во всех трёх случаях, в то время как во внешнем слое они тем больше, чем тоньше был плакирующий слой. При повторном нагружении до рабочих значений давления в  $P = 180$  МПа ( $t = t_4$ ) остаточное напряжение имеет схожее распределение во всех трёх случаях: оно немного не достигает тех значений, которые принимало при максимальной нагрузке. Соответственно, во всех трёх случаях пластическое течение не наблюдается. Однако наблюдается большой скачок напряжений на местестыковки плакирующего слоя с основным, особенно в первом случае, с наиболее тонким внутренним слоем.

Из рис. 3 можно видеть, что в первом случае, с наиболее тонким внутренним слоем, накоплены наибольшие пластические деформации. С увеличением толщины слоя уменьшаются суммарные пластические деформации, накопленные в процессе автофретирования.

Стоит отметить, что если между первым (толщина 1.5 мм) и вторым (толщина 2.5 мм) случаем разница ощутима, то между вторым и третьим (толщина 3.5 мм) случаями она уже не так значительна. Иными словами, толщина внутреннего слоя, найденная из условия одновременного зарождения пластического течения в двух слоях биметаллической трубы, является наиболее оптимальной. При меньших её значениях происходит значительная потеря прочностных свойств. Превышение данного значения хоть и позволяет повысить прочностные свойства, но незначительно.

### Список литературы

1. Новожилов В. В. Теория упругости. Ленинград : Судпромгиз, 1958. 370 с.
2. Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. Москва : Высшая школа, 1979. 318 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. Москва : Мир, 1975. 872 с.
4. Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1956. Vol. 4, iss. 4. P. 209–229. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(56\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8)
5. Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 32–43. EDN: YOFWCD
6. Буренин А. А., Ткачева А. В. Задача Гадолина о процессе сборки двухслойной предварительно напряженной трубы // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 5 (381). С. 225–240. <https://doi.org/10.15372/PMTF202315249>, EDN: XGBQDW
7. Ковтанюк Л. В., Полоник М. В. Задача Ламе о равновесии толстостенной трубы, изготовленной из несжимаемого упругопластического материала // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций / отв. ред. А. А. Буренин, В. П. Мясников. Владивосток : Дальнаука, 1998. С. 94–113.
8. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, № 2. С. 315–325. EDN: OOMUOZ
9. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Об изменениях в остаточных напряжениях в окрестности дефекта сплошности упруговязкопластического материала при повторном нагружении // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 6. С. 113–124. <https://doi.org/10.31857/S0572329923600275>, EDN: BNCCFU
10. Реформатская И. И., Завьялов В. В., Подобаев А. Н., Ащеулова И. И., Сульжесенко А. Н. Влияние структурно-фазовых неоднородностей углеродистых и низколегированных трубных



- сталей на развитие локальных коррозионных процессов // Защита металлов. 1999. Т. 35, № 5. С. 472–480.
11. Бикбулатов А. Л., Багманов Р. Р., Гумеров К. М. Особенности напряженно-деформированного состояния двухслойных труб в условиях нестационарных термомеханических воздействий // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2015. № 2 (100). С. 120–126. EDN: [UGAVVL](#)
  12. Реформатская И. И., Завьялов В. В., Родионова И. Г., Подобаев А. Н., Ащеурова И. И. Перспективы использования биметаллических труб на промысловых нефтегазопроводах Западной Сибири // Защита металлов. 2000. Т. 36, № 1. С. 51–57. EDN: [UKAAJJ](#)
  13. Kuanhai D., Jialian Li, Bin Li, Lin P., Wanying L., Yuanhua L. Study of internal pressure strength of the titanium-steel composite tube based on yield and shear failure mechanisms // International Journal of Hydrogen Energy. 2019. Vol. 44, iss. 5. P. 2997–3012. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2018.11.201>
  14. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с.
  15. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. Москва : Наука, 1981. 208 с.
  16. Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестник Дальневосточного отделения РАН. 2006. № 4. С. 87–93. EDN: [HZMRVR](#)
  17. Буренин А. А., Ткачева А. В. О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 3. С. 86–99. <https://doi.org/10.1134/S0572329919030073>, EDN: [YPOULA](#)
  18. Фирсов С. В. Пластическое течение и ползучесть в полом цилиндре с жестким внешним покрытием под действием внутреннего давления // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 696–715. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1877>, EDN: [TMRVNH](#)
  19. Фирсов С. В. О влиянии деформаций ползучести материала вращающегося цилиндра на последующее пластическое течение // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2023. Т. 27, № 1. С. 102–118. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1955>, EDN: [ZHFNQY](#)
  20. Барвинок В. А., Федотов Ю. В., Родин Н. П., Кирилин А. Н. Упруго-пластическое самоупрочнение (автофrettирование) толстостенных контейнеров давлением эластичной среды // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 1999. Т. 1, № 1. С. 157–160. EDN: [FPHWPF](#)

### References

1. Novozhilov V. V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Leningrad, Sudpromgiz, 1958. 370 p. (in Russian).
2. Tolokonnikov L. A. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid]. Moscow, Vysshaya shkola, 1979. 318 p. (in Russian).
3. Nowacki W. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p. (in Russian).
4. Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1956, vol. 4, iss. 4, pp. 209–229. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(56\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8)
5. Dats E. P., Murashkin E. V., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. Thermal stresses in an elastoplastic tube depending on the choice of yield conditions. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, iss. 1, pp. 23–32. <https://doi.org/10.3103/S002565441801003X>, EDN: [YBOIYP](#)
6. Burenin A. A., Tkacheva A. V. Gadolin problem of assembling a prestressed two-layer pipe. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2024, vol. 64, iss. 5, pp. 929–942. <https://doi.org/10.1134/S002189442305022X>
7. Kovtanuk L. V., Polonik M. V. Lame's problem of the equilibrium of a thick-walled pipe made of an incompressible elastoplastic material. In: Burenin A. A., Myasnikov V. P. (eds.) *Problems of continuum mechanics and elements of constructions*. Vladivostok, Dal'nauka, 1998, pp. 94–113 (in Russian).
8. Burenin A. A., Kovtanuk L. V., Polonik M. V. The formation of a one-dimensional residual stress field in the neighbourhood of a cylindrical defect in the continuity of an elastoplastic medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, vol. 67, iss. 2, pp. 283–292. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)90014-1](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90014-1)
9. Burenin A. A., Kovtanuk L. V., Panchenko G. L. Changes in residual stresses in the vicinity of



- a continuity defect in an elastoviscoplastic material under repeated loading. *Mechanics of Solids*, 2023, vol. 58, iss. 6, pp. 2024–2033. <https://doi.org/10.3103/S0025654423600642>
10. Reformatskaya I. I., Podobaev A. N., Ashcheulova I. I., Sul'zhenko A. N., Zav'yakov V. V. The effect of the structure-phase inhomogeneity of carbon and low-alloyed steels on the development of local corrosion processes. *Protection of Metals*, 1999, vol. 35, iss. 5, pp. 429–436. EDN: [LFIVYF](#)
11. Bikbulatov A. L., Bagmanov R. R., Gumerov K. M. Peculiarities of stress-strain state of two-layer pipes exposed to non-stationary thermal and mechanical conditions. *Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products*, 2015, iss. 2 (100), pp. 120–126 (in Russian). EDN: [UGAVVL](#)
12. Reformatskaya I. I., Zav'yakov V. V., Rodionova I. G., Podobaev A. N., Ashcheulova I. I. Prospects for use of bimetal pipes in field oil and gas pipelines of West Siberia. *Protection of Metals*, 2000, vol. 36, iss. 1, pp. 46–51. <https://doi.org/10.1007/BF02766738>, EDN: [LGASCR](#)
13. Kuanhai D., Jialian Li, Bin Li, Lin P., Wanying L., Yuanhua L. Study of internal pressure strength of the titanium-steel composite tube based on yield and shear failure mechanisms. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2019, vol. 44, iss. 5, pp. 2997–3012. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2018.11.201>
14. Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. *Teoriya plastichnosti* [Theory of plasticity]. Vladivostok, Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).
15. Mosolov P. P., Myasnikov V. P. *Mekhanika zhestkoplasticheskikh sred* [Mechanics of rigid plastic media]. Moscow, Nauka, 1981. 208 p. (in Russian).
16. Kovtanyuk L. V., Shitikov A. V. On the theory of finite elastoplastic deformations of materials taking into account temperature and rheological effects. *Vestnik of the Far East Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2006, iss. 4, pp. 87–93 (in Russian). EDN: [HZMRVR](#)
17. Burenin A. A., Tkacheva V. E. Assembly of a two-layered metal pipe by using shrink fit. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, iss. 4, pp. 559–569. <https://doi.org/10.3103/S0025654419040095>, EDN: [BSSTLA](#)
18. Firsov S. V. Plastic and creep deformations of thick-walled cylinder with a rigid casing under internal pressure. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2021, vol. 25, iss. 4, pp. 696–715 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1877>, EDN: [TMRVNH](#)
19. Firsov S. V. The influence of creep deformations on the subsequent plastic flow in a material of rotating cylinder. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2023, vol. 27, iss. 1, pp. 102–118 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1955>, EDN: [ZHFNQY](#)
20. Barvinok V. A., Fedotov Yu. V., Rodin N. P., Kirilin A. N. Elasto-plastic self-reinforcement (autofretting) of thick-walled containers by pressure of elastic agent. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 1999, vol. 1, iss. 1, pp. 157–160 (in Russian). EDN: [FPHWPF](#)

Поступила в редакцию / Received 13.03.2024

Принята к публикации / Accepted 4.10.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025