



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 281–294  
*Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 281–294  
<https://mmi.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-281-294>, EDN: ZNKFMP

Научная статья

УДК 51.73

## Статистическое моделирование деполяризующих свойств оптически плотных дисперсных систем в режиме малоуглового рассеяния зондирующего излучения

А. А. Исаева<sup>1</sup>, Е. А. Исаева<sup>1</sup>, Ан. В. Скрипаль<sup>2</sup>, Д. А. Зимняков<sup>1,2,3</sup>✉

<sup>1</sup>Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

<sup>2</sup>Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

<sup>3</sup>Институт проблем точной механики и управления РАН (ИПТМУ РАН), Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

**Исаева Анна Андреевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, [isanna.1987@mail.ru](mailto:isanna.1987@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-2925-2733>, SPIN: 6741-7956, AuthorID: 732490

**Исаева Елена Андреевна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, [27isaevaea@mail.ru](mailto:27isaevaea@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-0407-312X>, SPIN: 1166-2738, AuthorID: 631180

**Скрипаль Анатолий Владимирович**, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой медицинской физики, [skripalav@info.sgu.ru](mailto:skripalav@info.sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9080-0057>, SPIN: 3794-5749, AuthorID: 33340

**Зимняков Дмитрий Александрович**, доктор физико-математических наук, <sup>1</sup>заведующий кафедрой физики; <sup>2</sup>профессор кафедры медицинской физики; <sup>3</sup>главный научный сотрудник, [zimnykov@mail.ru](mailto:zimnykov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0002-9787-7903>, SPIN: 1918-5220, AuthorID: 29094

**Аннотация.** Представлены результаты статистического моделирования эффекта убывания степени поляризации линейно поляризованного лазерного пучка при распространении вперед в многократно рассеивающих ансамблях сферических диэлектрических частиц с различными значениями волнового параметра. Алгоритм моделирования основан на итеративной процедуре трансформации векторов Джонса парциальных составляющих рассеянного светового поля в последовательностях актов рассеяния, реализуемой с использованием метода Монте-Карло. В качестве параметров, характеризующих скорость убывания степени линейной поляризации лазерного излучения, рассмотрены среднее число актов рассеяния, соответствующее убыванию степени поляризации в  $e$  раз, и отношение характерной длины поляризации к транспортной длине распространения излучения в ансамбле частиц. Установлено, что максимальное значение длины деполяризации достигается при значениях волнового параметра частиц в окрестностях первого резонанса Мie на зависимости фактора эффективности рассеяния от диаметра частиц. Результаты моделирования сопоставлены с экспериментальными и теоретическими данными, полученными с использованием гибридного подхода в рамках диффузационного приближения теории переноса излучения.

**Ключевые слова:** статистическое моделирование, дисперсные системы, перенос излучения, деполяризация  
**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-00679).

**Для цитирования:** Исаева А. А., Исаева Е. А., Скрипаль Ан. В., Зимняков Д. А. Статистическое моделирование деполяризующих свойств оптически плотных дисперсных систем в режиме малоуглового рассеяния зондирующего излучения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 281–294. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-281-294>, EDN: ZNKFMP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



## Statistical modeling of the depolarizing properties of optically dense dispersive systems in the small-angle scattering mode of probe light propagation

A. A. Isaeva<sup>1</sup>, E. A. Isaeva<sup>1</sup>, An. V. Skripal<sup>2</sup>, D. A. Zimnyakov<sup>1,2,3</sup>✉

<sup>1</sup>Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politehnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

<sup>2</sup>Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

<sup>3</sup>Institute of Precision Mechanics and Control Problems of the Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

**Anna A. Isaeva**, isanna.1987@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2925-2733>, SPIN: 6741-7956, AuthorID: 732490

**Elena A. Isaeva**, 27isaevaea@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0407-312X>, SPIN: 1166-2738, AuthorID: 631180

**Anatoly V. Skripal**, skripalav@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9080-0057>, SPIN: 3794-5749, AuthorID: 33340

**Dmitry A. Zimnyakov**, zimnyakov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9787-7903>, SPIN: 1918-5220, AuthorID: 29094

**Abstract.** Results of statistical modeling of the polarization degree decay in the case of forward propagation of a linearly polarized laser beam in multiple scattering dispersive systems are presented. Disordered ensembles of dielectric spherical particles with various values of the wave parameter are considered as these dispersive systems. The modeling algorithm is based on an iterative transformation of the Jones vectors for partial components of the multiple scattered light fields in the considered systems due to random sequences of scattering events; the transformation procedure is provided using the Monte-Carlo simulation. The average number of scattering events corresponding to the  $1/e$  decay of the polarization degree, and the ratio of the depolarization length to the mean transport free path of probe light in the scattering systems are considered as the key parameters. It was found that the maximal depolarization length is achieved in the case when the wave parameter of scattering particles is close to the value corresponding to the first Mie resonance of the dependence of the scattering efficiency on the wave parameter. The modeling results are compared to the experimental and theoretical data obtained using a hybrid approach in the framework of the diffusion approximation of radiative transfer theory.

**Keywords:** statistical modeling, dispersed systems, radiative transfer, depolarization

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 25-29-00679).

**For citation:** Isaeva A. A., Isaeva E. A., Skripal An. V., Zimnyakov D. A. Statistical modeling of the depolarizing properties of optically dense dispersive systems in the small-angle scattering mode of probe light propagation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 281–294 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-281-294>, EDN: ZNKFMP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Эффект деполяризации света при многократном рассеянии в случайно-неоднородных средах является одним из фундаментальных проявлений стохастичности распространения излучения в подобных системах [1–6]. При использовании квазимохроматических световых пучков для зондирования случайно-неоднородных сред подобная стохастичность приводит к спекл-модуляции рассеянных световых полей [7,8]. При этом формируемые спеклы характеризуются случайными состояниями поляризации с различной степенью эллиптичности от линейной до близкой к круговой. С точки зрения диагностических приложений при описании поляризационных характеристик рассеянных световых полей целесообразно использовать интегральные параметры, получаемые в результате усреднения локальных



состояний поляризации по всему ансамблю формируемых спеклов. В частности, к числу подобных обобщенных интегральных характеристик относится степень полной поляризации рассеянного излучения, выражаемая через компоненты вектора Стокса  $I, Q, U, V$  [9, 10]:

$$P = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}.$$

С ростом кратности рассеяния  $N_{sc}$  зондирующего излучения в среде величина  $P$  асимптотически стремится к 0, причем скорость убывания степени полной поляризации при увеличении  $N_{sc}$  определяется как режимом рассеяния (рассеяние вперед или обратное рассеяние), так и волновым параметром  $\pi d n_m / \lambda_0$  рассеивающих центров и их относительным показателем преломления  $\tilde{n}_p = n_p / m_m$  (здесь  $d$  — характерный размер рассеивающих центров,  $n_m$  — абсолютный показатель преломления матричной среды, содержащей частицы,  $\lambda_0$  — длина волны излучения в вакууме,  $n_p$  — абсолютный показатель преломления частиц). Это обстоятельство может быть использовано в качестве основы одного из подходов в поляризационной диагностике для применений в биомедицине и материаловедении. В частности, поляризационные методы морфофункциональной диагностики широко применяются в современной биомедицине [11–16]. При использовании линейно поляризованных зондирующих лазерных пучков процедура подобной поляризационной диагностики может быть сведена к нахождению степени остаточной линейной поляризации рассеянного излучения:

$$P_L^{sc} = \frac{I_y^{sc} - I_x^{sc}}{I_y^{sc} + I_x^{sc}},$$

где  $I_x^{sc}, I_y^{sc}$  — значения интенсивностей  $x$ - и  $y$ -линейно поляризованных составляющих рассеянного светового поля на выходе из зондируемой среды при условии, что степень линейной поляризации зондирующего пучка на входе в среду  $P_L^{in} = 1$  (соответственно,  $I_x^{in} = 0$ ). При возрастании оптической толщины зондируемой среды и детектировании рассеянного вперед излучения (малоугловой режим рассеяния) значение  $P_L^{sc}$  асимптотически стремится к 0 со скоростью убывания, определяемой структурными и оптическими характеристиками среды.

Решение обратных задач поляризационного зондирования случайно-неоднородных сред, связанных с восстановлением оптических и структурных параметров среды по измеренным в эксперименте поляризационным характеристикам рассеянного излучения, требует создания адекватной теоретической модели преобразования исходного состояния поляризации зондирующего пучка в процессе его распространения в зондируемом объекте. В настоящее время существуют различные подходы к решению этой проблемы, основанные на аналитической теории многократного рассеяния [17–19] или векторного уравнения переноса излучения [20–23]. Однако эти подходы в ряде случаев неприменимы на практике вследствие недостаточности или отсутствия необходимой априорной информации об особенностях взаимосвязи характеристик среды с модельными параметрами, описывающими трансформацию локальных состояний поляризации распространяющегося излучения (например, с матрицей рассеяния света, входящей в интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения). Кроме того, за исключением простейших случаев, обращение решений интегро-дифференциальных уравнений в рамках этих подходов требует значительных вычислительных затрат и зачастую является неустойчивым и расходящимся процессом.

Альтернативой сложным и в ряде случаев неустойчивым методам моделирования взаимодействия поляризованного света со случайно-неоднородными средами на основе аналитической теории многократного рассеяния и векторной теории переноса излучения является гибридный подход [24–26]. В рамках этого подхода, основанного на дискретной модели рассеяния, используется «скалярное» описание многократно рассеянного светового поля в среде с использованием функции плотности вероятности  $\rho(s)$  путей распространения парциальных составляющих рассеянного излучения для заданных условий освещения и де-

тектирования. Наиболее удобный метод получения функции  $\rho(s)$  — статистическое моделирование переноса излучения в среде с использованием Монте-Карло метода, в результате которого генерируется массив значений путей распространения парциальных составляющих  $\{s_i\}$ . Массив  $\{s_i\}$  подвергается частотному анализу с величиной интервалов выборки, обеспечивающей робастность оценок относительных частот попадания  $s_i$  в тот или иной интервал. Общее число выборочных интервалов  $N_s$ , используемых для восстановления выборочной функции плотности вероятности  $\rho(s)$ , может быть определено с использованием следующего эмпирического правила [27]:  $N_s \approx \sqrt{N_i}$ , где  $N_i$  — число значений  $\{s_i\}$  в сгенерированном массиве.

В рамках гибридного подхода различные статистические моменты рассеянного поля и производные от них величины (например, среднее значение интенсивности рассеянного света, временная автокорреляционная функция флуктуаций рассеянного поля в случае динамических рассеивающих сред, степень линейной или циркулярной поляризации) могут быть получены с помощью односторонних линейных интегральных преобразований функции  $\rho(s)$  с соответствующим образом выбранными ядрами, характеризующими динамику затухания анализируемой характеристики при возрастании пути распространения парциальных составляющих. Ранее в результате сопоставления экспериментальных и модельных данных [24–26] установлено, что ядра интегральных преобразований могут быть представлены с приемлемой точностью экспоненциальными функциями вида  $f(s, \xi) \propto \exp(-s/\xi)$ , где  $\xi$  — характерная длина затухания соответствующего параметра рассеянного поля. Экспоненциальная форма ядер обусловлена стохастичностью процесса распространения излучения в многократно рассеивающих средах и статистической независимостью парциальных составляющих рассеянного поля. Следует отметить, что экспоненциальная форма характерна для режима многократного рассеяния, когда транспортная длина распространения излучения в среде  $l^*$  [28] существенно меньше характерного размера среды. Таким образом, расчет характеристик рассеянного поля (в том числе и степени линейной поляризации) в режиме многократного рассеяния может быть сведен к вычислению одностороннего преобразования Лапласа  $\rho(s)$ .

В рамках гибридного подхода при описании деполяризующих свойств многократно рассеивающих сред могут быть рассмотрены два характерных пространственных масштаба — средняя длина распространения парциальных составляющих в среде  $\langle s \rangle = \int_0^\infty s \rho(s) ds$  и длина деполяризации  $\xi_L$  линейно поляризованного излучения. Величина  $\xi_L$  зависит как от свойств рассеивающих центров и длины волны  $\lambda$  излучения, так и от режима детектирования. Так, в случае малоуглового детектирования рассеянного вперед излучения средой, состоящей из непоглощающих частиц с характерным размером  $d \gg \lambda$ ,  $P_L$  убывает с ростом толщины слоя  $L$  в гораздо меньшей степени по сравнению со средой, состоящей из мелких (релеевских) частиц.

Несмотря на значительное число экспериментальных и теоретических работ, посвященных анализу деполяризующих свойств рассеивающих сред, вопросы взаимосвязи характерных масштабов распространения и преобразования поляризованного света (т. е.  $\langle s \rangle, \xi_L, l^*, l$ ) в ряде случаев требуют дальнейшего уточнения. Здесь  $l$  — длина рассеяния зондирующего излучения, обратно пропорциональная коэффициенту рассеяния среды,  $l^*$  — транспортная длина распространения излучения, соответствующая характерному масштабу преобразования направленного светового потока в диффузный. Целью данной работы явился теоретический анализ подобной взаимосвязи в случае поляризационного зондирования многократно рассеивающих ансамблей сферических диэлектрических частиц в режиме малоуглового детектирования рассеянного вперед излучения. Подобная геометрия поляризационного зондирования представляет интерес для решения диагностических задач в биомедицинской оптике и материаловедении. В качестве метода исследования применено статистическое моделирование переноса поляризованного света в ансамблях частиц с различными значениями волнового параметра. При моделировании применен поляризационно-чувствительный



Монте-Карло метод, имитирующий преобразование текущих состояний поляризации парциальных составляющих рассеянного поля в последовательностях актов рассеяния.

## 1. Методика статистического моделирования деполяризующих свойств дисперсных систем

Рассмотренный метод статистического моделирования деполяризующих свойств много-кратно рассеивающих случайно-неоднородных сред основан на итеративной процедуре преобразования текущих состояний поляризации распространяющихся в среде парциальных составляющих рассеянного светового поля. Моделируемая среда предполагается состоящей из сферических диэлектрических частиц, случайным образом распределенных в пространстве с заданным значением объемной доли  $f$ . Текущее состояние поляризации произвольно выбранной составляющей, моделируемой плоской волной с эллиптическим состоянием поляризации, трансформируется случайным образом в последовательности актов рассеяния. Каждая трансформация приводит к случайным изменениям амплитуд ортогонально поляризованных компонент парциальной составляющей и сдвигам фаз между ними, которые описываются в рамках формализма Джонса [29].

Для каждого акта рассеяния, приводящего к изменению направления распространения парциальной составляющей, вводится  $(2 \times 2)$  матрица Джонса, комплексные элементы которой определяются углом между волновыми векторами составляющей до  $(\bar{k}_{n-1})$  и после  $(\bar{k}_n)$  акта рассеяния (углом рассеяния  $\theta_n$ ). В системе декартовых координат, связанных с плоскостью рассеяния, проходящей через  $\bar{k}_{n-1}$  и  $\bar{k}_n$ , матрица Джонса для данного акта рассеяния на сферической частице сводится к диагональной форме. Поскольку изменение направления распространения парциальной составляющей характеризуется не только углом рассеяния  $\theta_n$ , но и азимутальным углом  $\phi_n$ , необходимо осуществлять преобразование ортогонально поляризованных компонент парциальной составляющей к системе координат, привязанной к текущей плоскости рассеяния для  $n$ -го акта (рис. 1).

Таким образом, процесс трансформации поляризационного состояния парциальной составляющей в единичном акте рассеяния может быть описан с помощью следующего уравнения:

$$\begin{pmatrix} E_x^n \\ E_y^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^n(\theta^n) & 0 \\ 0 & J_{22}^n(\theta^n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi^n & -\sin \phi^n \\ \sin \phi^n & \cos \phi^n \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x^{n-1} \\ E_y^{n-1} \end{pmatrix},$$

где  $E_x^{n-1}$ ,  $E_y^{n-1}$  — ортогонально поляризованные комплексные компоненты амплитуды электрического поля парциальной составляющей до  $n$ -го акта рассеяния; соответственно,  $E_x^n$  и  $E_y^n$  — ортогональные компоненты после акта рассеяния. Отметим, что координатные оси  $(x, y)$  привязаны к плоскости рассеяния для предшествующего  $(n-1)$  акта, в то время как система координат  $(x', y')$  соответствует плоскости рассеяния в текущем акте. Угол рассеяния  $\theta^n$  и азимутальный угол  $\phi^n$  являются величинами, случайным образом изменяющимися от одного акта рассеяния к другому. Преобразование состояния поляризации в последовательности из  $N$  актов описывается следующим выражением:

$$\begin{pmatrix} E_x^N \\ E_y^N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^N(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{12}^N(\theta^1, \phi^1) \\ \tilde{J}_{21}^N(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{22}^N(\theta^1, \phi^1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^{N-1}(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{12}^{N-1}(\theta^1, \phi^1) \\ \tilde{J}_{21}^{N-1}(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{22}^{N-1}(\theta^1, \phi^1) \end{bmatrix} \times \dots$$

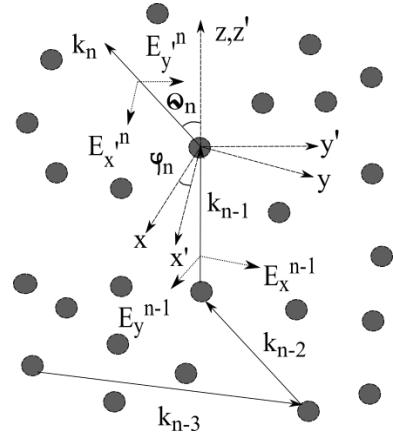


Рис. 1. Изменение состояния компонент вектора электрического поля в процессе рассеяния в случайно-неоднородной среде

Fig. 1. The change of the electric field vector components during the scattering in a randomly inhomogeneous medium

$$\times \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^2(\theta^n, \phi^n) & \tilde{J}_{12}^2(\theta^n, \phi^n) \\ \tilde{J}_{21}^2(\theta^n, \phi^n) & \tilde{J}_{22}^2(\theta^n, \phi^n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^1(\theta^n, \phi^n) & \tilde{J}_{12}^1(\theta^n, \phi^n) \\ \tilde{J}_{21}^1(\theta^n, \phi^n) & \tilde{J}_{22}^1(\theta^n, \phi^n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $J_{11}^n(\theta^n, \phi^n), \dots, J_{22}^n(\theta^n, \phi^n)$  — элементы модифицированной матрицы Джонса для  $n$ -го акта рассеяния; модификация осуществляется в соответствии с выражением

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^n(\theta^n, \phi^n) & \tilde{J}_{12}^n(\theta^n, \phi^n) \\ \tilde{J}_{21}^n(\theta^n, \phi^n) & \tilde{J}_{22}^n(\theta^n, \phi^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^n(\theta^n) & 0 \\ 0 & J_{22}^n(\theta^n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi^n & -\sin \phi^n \\ \sin \phi^n & \cos \phi^n \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Отметим, что на завершающем  $N$ -ом шаге моделирования входящая в выражение (2) матрица поворота выбирается таким образом, что система координат на выходе из последовательности соответствовала бы системе координат на входе в последовательность.

Выражение (1) наглядно иллюстрирует эффект деполяризации света, распространяющегося в многократно рассеивающей случайно-неоднородной среде; элементы на побочных диагоналях модифицированных матриц Джонса, принимающие ненулевые значения вследствие ненулевых азимутальных углов в актах рассеяния, приводят к появлению ненулевой составляющей  $E_x^N$  при вводе в среду линейно поляризованного света с  $E_x^0 = 0, E_y^0 = E_0$ .

Процедура моделирования деполяризации линейно поляризованного света сводится к циклическому повторению описываемой выражением (1) итеративной процедуры для заданного числа актов рассеяния  $N_s$ . В ходе итеративной процедуры в каждом цикле формируются последовательности случайных значений  $\phi^1, \dots, \phi^{N_s}; \theta^1, \dots, \theta^{N_s}$ , по которым рассчитываются случайные значения элементов матриц Джонса для всех актов рассеяния в данной последовательности. По окончании цикла формируются случайные значения  $E_x^{N_s}, E_y^{N_s}$ . В результате прогона  $M$  циклов формируется массив данных  $\{E_x^{N_s,1}, \dots, E_x^{N_s,M}; E_y^{N_s,1}, \dots, E_y^{N_s,M}\}$ , по которым затем вычисляется степень остаточной линейной поляризации  $P_L$  прошедшего через среду излучения:

$$P_L = \frac{\sum_{k=1}^M (E_y^{N_s,k})^2 - \sum_{k=1}^M (E_x^{N_s,k})^2}{\sum_{k=1}^M (E_y^{N_s,k})^2 + \sum_{k=1}^M (E_x^{N_s,k})^2}. \quad (3)$$

Формула (3) соответствует случаю некогерентного суммирования вкладов от  $M$  составляющих в наблюдаемый оптический сигнал. Правомерность подобного подхода обусловлена стохастичностью процесса многократного рассеяния излучения в среде. Диагональные элементы немодифицированных матриц Джонса  $J_{11}^n(\theta^n), J_{22}^n(\theta^n)$  для каждого акта рассеяния могут быть вычислены в соответствии с теорией рассеяния Ми (см., например, [29]), используя следующие выражения:

$$J_{11}^n(\theta) = \sum_{k=1}^{k_{stop}} \frac{2k+1}{k(k+1)} \cdot (a_k \pi_k + b_k \tau_k), \quad J_{22}^n(\theta) = \sum_{k=1}^{k_{stop}} \frac{2k+1}{k(k+1)} \cdot (a_k \pi_k + b_k \tau_k), \quad (4)$$

где  $\pi_k$  и  $\tau_k$  определяются присоединенными функциями Лежандра  $P_k^1(\theta)$  как  $\pi_k = \frac{P_k^1(\theta)}{\sin \theta}$ ,  $\tau_k = \frac{dP_k^1(\theta)}{d\theta}$ , а коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$  рядов рассеяния (4) рассчитываются с использованием сферических функций Бесселя первого и второго рода. Предельное число суммируемых членов  $k_{stop}$  ряда (4) определяется волновым параметром рассеивающих центров  $\rho = \pi n_m d \lambda_0$ , где  $d$  — диаметр частиц. При разыгрывании случайных значений азимутального угла  $\phi^n$  и угла рассеяния  $\theta^n$  необходимо воспользоваться следующими предположениями:

- значения  $\phi^n$  и  $\theta^n$  являются статистически независимыми величинами;
- функция плотности вероятности значений  $\phi^n$  определяется равномерным распределением  $\rho(\phi^n)$  в интервале от 0 до  $2\pi$ ;



– функция  $\rho(\theta^n)$  моделируется с использованием функции Хенни – Гринштейна [30]), являющейся универсальной для широкого класса модельных задач по рассеянию излучения:

$$\rho_{HG}(\cos \theta) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}}, \quad (5)$$

где  $g$  – средний косинус угла рассеяния (параметр анизотропии рассеяния). Величина  $g$  определяется  $\rho$ ,  $\tilde{n}_p$  и  $n_m$  и может быть получена с использованием различных онлайн-калькуляторов Ми (например, [https://omlc.org/calc/mie\\_calc.html](https://omlc.org/calc/mie_calc.html)). При статистическом моделировании случайные значения  $\theta^n$  разыгрываются с использованием следующего соотношения:

$$\theta^n = \arccos \left[ \frac{1}{2g} \left( 1 + g^2 - \left( \frac{1 - g^2}{1 - g + 2g\chi^n} \right)^2 \right) \right], \quad (6)$$

где  $\chi^n$  – случайная величина, равномерно распределенная на интервале  $[0, 1]$ . Статистическое моделирование деполяризующих свойств ансамблей случайным образом расположенных сферических диэлектрических частиц для режима малоуглового рассеяния вперед осуществлялось по следующей схеме:

- 1) исходя из заданных значений  $\lambda_0$ ,  $\rho$ ,  $\tilde{n}_p$  и  $n_m$  и с использованием онлайн-калькулятора Ми определялось значение  $g$  для анализируемой системы;
- 2) для заданного значения  $N_s$  в интервале от 1 до 40 осуществлялось статистическое моделирование переноса излучения в ансамбле частиц с заданным  $\rho$  в направлении распространения зондирующего пучка, в результате чего формировались наборы из  $M$  случайных значений  $E_x^{N_s,k}$ ,  $E_y^{N_s,k}$ ;
- 3) по полученным наборам значений  $E_x^{N_s,k}$ ,  $E_y^{N_s,k}$  для каждого  $N_s$  в соответствии с выражением (3) вычислялась степень остаточной линейной поляризации покидающего ансамбль частиц излучения.

Рассмотренный метод реализовывался с помощью специально разработанного программного обеспечения на языке программирования C++ на 4-ядерном процессоре Intel Core i7. Набор случайных значений  $E_x^{N_s,k}$ ,  $E_y^{N_s,k}$  получался в результате  $10^5$  прогонов разработанного алгоритма, с общей длительностью на один численный эксперимент около 25 мин.

## 2. Результаты моделирования и их обсуждение

В качестве модельных деполяризующих систем рассматривались многократно рассеивающие ансамбли сферических частиц диоксида титана с желатином в качестве матричной среды. Выбор подобных систем обусловлен их широким использованием в качестве фантомов (имитаторов оптических свойств) биологических сред (см., например, [31])). Предполагалось, что зондирование осуществляется линейно поляризованным лазерным излучением с длиной волны 532 нм (вторая гармоника излучения АИГ:Nd лазера). Показатель преломления желатина измерялся с помощью рефрактометра ИРФ-454 и равен 1.535, показатель преломления частиц диоксида титана принят равным 2.37 (<https://refractiveindex.info>). В ходе моделирования значения диаметра частиц диоксида титана варьировались в широких пределах (от 25 нм до 7 мкм).

На рис. 2 в качестве примера представлены значения  $P_L$  от числа актов рассеяния зондирующего излучения (3). Здесь же приведены аппроксимирующие зависимости вида  $P_L = A \exp(-N_s/N_s^e)$ ; мотивация для выбора подобной формы аппроксимации обсуждена ниже. Отметим, что используемая экспоненциальная аппроксимация с высокой точностью представляет поведение полученных модельных данных, за исключением случая существенно малократного рассеяния, когда  $N_s = 1 - 2$ .

В таблице приведены значения  $A$  и  $N_s^e$  для наборов данных, представленных на рис. 2, вместе с погрешностями их определения и интегральными характеристиками точности аппроксимации, выражаемыми по величине скорректированного коэффициента детерминации  $R_{adj}^2$ . Значения  $N_s$  характеризуют скорость убывания степени остаточной линейной

поляризации по мере возрастания кратности рассеяния. Полученные результаты моделирования позволяют сделать вывод о существенно немонотонном поведении данного параметра при возрастании диаметра рассеивающих частиц (и, соответственно, волнового параметра  $\rho$ ).

На рис. 3, а представлены модельные значения для ансамблей частиц диоксида титана в желатине в зависимости от диаметра частиц, демонстрирующие чрезвычайно высокую вариабельность. Анализ полученных данных позволяет сделать вывод, что их значительный разброс обусловлен не случайными погрешностями моделирования, а особенностями распространения парциальных составляющих рассеянного поля в ансамблях частиц с одинаковыми размерами (хотя и расположены случайным образом). В частности, рис. 3, б наглядно демонстрирует выраженную интерференционную структуру зависимости  $N_s^e = f(d)$  в интервале значений диаметра частиц от 0.025 мкм до 1 мкм. Подобные интерференционные эффекты в определенной степени аналогичны модуляции теоретических зависимостей сечения экстинкции сферических частиц от длины волны или диаметра частицы (так называемой ряби) [29].

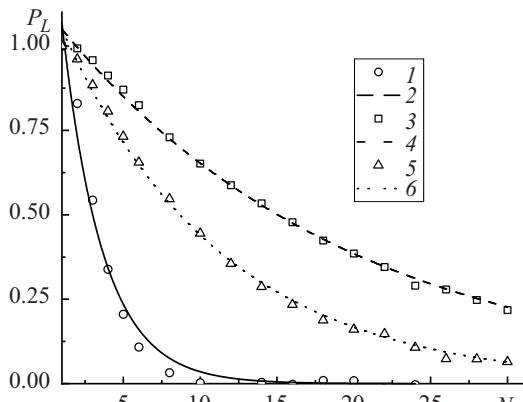


Рис. 2. Зависимости степени остаточной линейной поляризации от числа актов рассеяния для рассеивающих частиц с различными диаметрами  $d$ : 1 —  $d = 0.025$  мкм; 3 —  $d = 0.4$  мкм; 5 —  $d = 1$  мкм, 2, 4, 6 — аппроксимирующие экспоненциальные зависимости

Fig. 2. The dependencies of the residual linear polarization degree on the number of scattering events for scattering particles of different diameters: 1 —  $d = 0.025$   $\mu\text{m}$ ; 3 —  $d = 0.4$   $\mu\text{m}$ ; 5 —  $d = 1$   $\mu\text{m}$ ; 2, 4, 6 — approximating exponential dependences

Значения параметров аппроксимации для модельных данных, представленных на рис. 2

Table. Values of approximation parameters for the model data presented in Fig. 2

Диаметр частиц, мкм	$A$	$\delta(A)$	$N_s^e$	$\delta(N_s^e)$	$R_a d j^2$
0.025	1.560	$\pm 0.086$	2.64	$\pm 0.17$	0.983
0.400	1.110	$\pm 0.010$	18.94	$\pm 0.33$	0.996
1.000	1.157	$\pm 0.013$	10.35	$\pm 0.20$	0.997

Безразмерный параметр  $N_s$  определяет размерную длину деполяризации излучения в ансамбле частиц как  $\xi_L \approx N_s^e l$ , где длина рассеяния  $l$  характеризует средний путь распространения парциальных составляющих рассеянного поля между двумя последовательными актами рассеяния. С другой стороны, ключевым параметром, контролирующим перенос излучения в многократно рассеивающих средах, является транспортная длина  $l^* = l/(1-g)$ , асимптотически приближающаяся к  $l$  в случае изотропного рассеяния малыми частицами и существенно превышающая длину рассеяния в режиме рассеяния Ми, когда  $g \ll 0$ . Если рассматривать отношение длины деполяризации не к длине рассеяния  $l$ , а к транспортной длине  $l^*$ , то можно ввести безразмерный параметр  $\widetilde{N}_s^e = \xi/l^* = N_s^e(1-g)$ . Как длина рассеяния, так и транспортная длина существенным образом зависят от фактора эффективности рассеяния  $Q_{sca}$  [29], определяемого отношением сечения рассеяния частицы к ее геометрическому сечению и зависящего от набора параметров  $\lambda_0$ ,  $\rho$ ,  $\widetilde{n}_p$  и  $n_m$ .

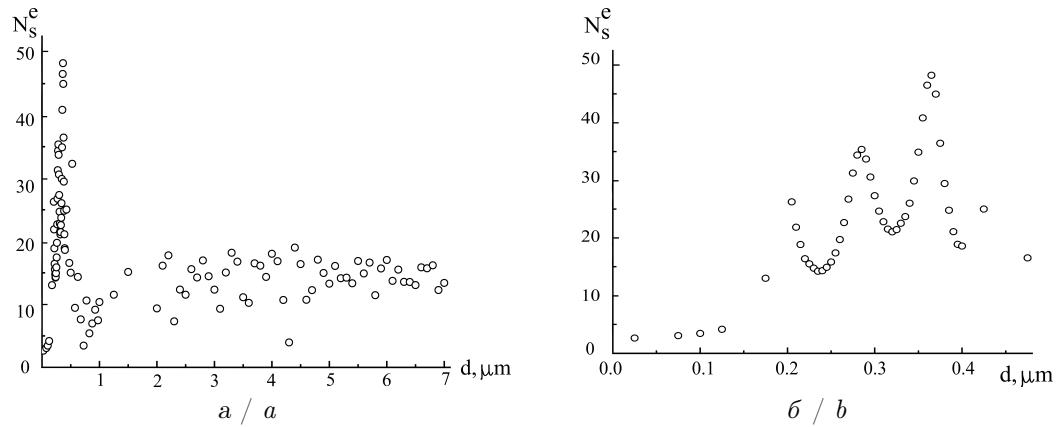


Рис. 3. Зависимость модельных значений  $N_s^e$  от диаметра частиц диоксида титана в желатине:  $a - d \in [0, 7]$  мкм;  $b$  — увеличенный фрагмент для  $d \in [0, 0.5]$  мкм

Fig. 3. The dependence of model values  $N_s^e$  on the titanium dioxide particles diameter in gelatin:  $a - d \in [0.7]$   $\mu\text{m}$ ;  $b$  — enlarged fragment for  $d \in [0, 0.5]$   $\mu\text{m}$

Представляет значительный интерес сопоставление полученных модельных данных с зависимостями  $Q_{sca}$  и  $g$  от диаметра частиц, восстановленными для исследуемых рассеивающих систем с использованием онлайн-калькулятора Ми ([https://omlc.org/calc/mie\\_calc.html](https://omlc.org/calc/mie_calc.html)). На рис. 4 эти зависимости сравнены с зависимостью  $\tilde{N}_s^e = f(d)$ , рассчитанной на основе полученных модельных данных и сглаженной с использованием скользящего окна с шириной в девять равнотстоящих значений. Сглаживание проводилось с целью выделения общих тенденций в поведении  $\tilde{N}_s^e = f(d)$ . Кроме того, следует отметить, что тонкая интерференционная структура, имеющая место для модельных зависимостей  $N_s^e = f(d)$  (см. рис. 3, а) и  $\tilde{N}_s^e = f(d)$ , в случае реальных рассеивающих систем с большей или меньшей полидисперсностью рассеивающих центров будет в значительной степени сглаживаться.

Характерной особенностью зависимостей фактора эффективности рассеяния от диаметра сферических диэлектрических частиц при фиксированной длине волны зондирующего излучения является убывающая квазипериодическая модуляция, связанная с существованием так называемых резонансов Ми (отмечены на рисунке стрелками). Первый резонанс Ми характеризуется максимальной амплитудой; при этом сечение рассеяния частицы в несколько раз превышает ее геометрическое сечение. Резонансы Ми высших порядков постепенно затухают, и  $Q_{sca}$  асимптотически стремится к 2 (проявление так называемого дифракционного парадокса [28]).

Из графиков, представленных на рис. 4, очевидно, что максимальные значения (порядка 9.0–9.5) сглаженной зависимости  $\tilde{N}_s^e = f(d)$  достигаются в области локализации первого резонанса Ми. Для малых ( $d < 0.1$  мкм), равно как и для больших ( $d > 3$  мкм), сглаженные значения  $\tilde{N}_s^e$  близки к трем.

Отметим, что в одной из ранних основополагающих работ по анализу деполяризующих свойств многократно рассеивающих дисперсных систем [32]) предложена феноменологи-

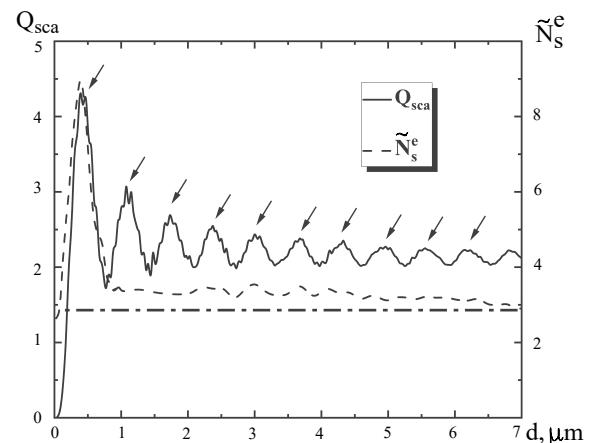


Рис. 4. Зависимости фактора эффективности рассеяния и модельных значений от диаметра диэлектрической частицы

Fig. 4. The dependencies of the scattering efficiency factor and model values on the size of dielectric particle

ческая модель для описания деполяризации линейно поляризованного света в случайных последовательностях актов рассеяния в форме, соответствующей упомянутому выше гибридному подходу:

$$P_L = \frac{\int_0^\infty f_L(N_s)G(N_s)dN_s}{\int_0^\infty G(N_s)dN_s}, \quad (7)$$

где  $G(N_s)$  характеризует распределение парциальных составляющих рассеянного светового поля по числом актов рассеяния в среде, а  $f_L(N_s)$  — модельная функция, описывающая деполяризацию единичной парциальной составляющей. В случае изотропного рассеяния малыми частицами для  $f_L(N_s)$  рассмотрена следующая модель:

$$f_L(N_s) \cong \frac{3}{2} \exp\left(-N_s \frac{l}{\xi_L}\right), \quad (8)$$

где  $\xi_L$  — деполяризация для малых релеевских частиц принимается равной  $\approx l/\ln(10/7) \approx 2.8l$ . Таким образом, в соответствии с феноменологической моделью [32] для малых сферических частиц  $A \approx 1.5$ , а  $N_s^e \approx 2.8$ , что хорошо согласуется с полученными в результате статистического моделирования данными (см. таблицу,  $A$  и  $N_s^e$  для частиц диоксида титана диаметром 0.025 мкм). В случае же более крупных частиц, характеризуемых режимом рассеяния  $l$  на транспортную длину  $l^*$  в выражениях (7), (8). Отметим, что подобное замещение приводит к постоянному значению  $N_s^e \approx 2.8$ , не зависящему от размера рассевающих частиц (эта величина показана на рис. 4 штрих-пунктирной горизонтальной линией).

В то же время представленные в [32] экспериментальные данные о деполяризующих свойствах водных суспензий полистироловых сфер различных диаметров на длине волны 0.67 мкм демонстрируют существенное увеличение отношения длины деполяризации к длине рассеяния по мере возрастания волнового параметра частиц от близких к 0 значений до величины порядка 5–6. Высказано предположение, что подобное расхождение обусловлено возможным проявлением резонансов Ми при рассеянии [32]. Полученные в данной работе результаты моделирования позволяют сделать вывод о значительном (не менее чем

в 3–4 раза) увеличении длины деполяризации линейно поляризованного света ансамблями сферических диэлектрических частиц вблизи первого резонанса Ми. Вдали от первого резонанса Ми значение  $N_s^e$  асимптотически стремится к величине, близкой к 2.8 (см. рис. 4). Этот вывод хорошо согласуется с экспериментальными данными о значениях  $N_s^e$  для монодисперсных полистироловых частиц с различными диаметрами в воде на длине волны 532 нм, представленными в работе [24].

На рис. 5 представлены фрагменты теоретических зависимостей  $Q_{sca}$  и  $g(d)$  в случае полистироловых сфер в воде для  $\lambda_0 = 532$  нм в интервале значений диаметра от 0 до 2.2 мкм. На графике также приведены значения  $N_s^e$  для пяти исследованных в работе размеров частиц. Следует отметить вполне удовлетворительное соответствие между двумя наборами данных, представленными на рис. 4 и 5.

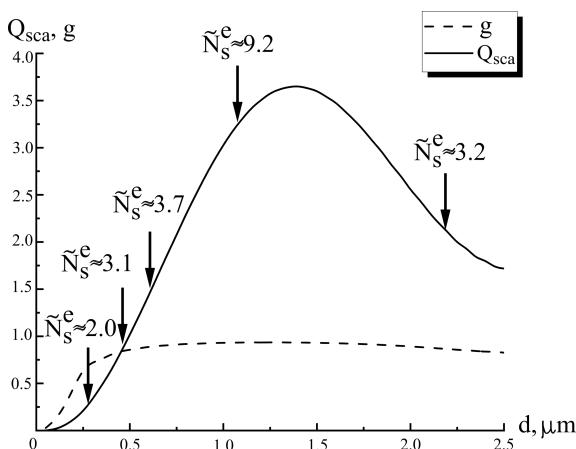


Рис. 5. Зависимости фактора эффективности рассеяния  $Q_{sca}$  и параметра анизотропии рассеяния  $g$  от диаметра полистироловых сфер в воде для длины волны зондирующего излучения  $\lambda_0 = 532$  нм

Fig. 5. The dependencies of scattering efficiency factor and scattering anisotropy parameter on the polystyrene spheres diameter in water for a probing radiation wavelength of  $\lambda_0 = 532$  nm



## Заключение

Таким образом, в результате проведенного статистического моделирования деполяризующих свойств ансамблей сферических диэлектрических частиц на примере сфер диоксида титана в желатине показано существенное ослабление деполяризующих свойств подобных систем при рассеянии вперед в случае, когда структурные и оптические свойства рассеивающей системы, равно как и длина волны зондирующего излучения, соответствуют условию появления первого резонанса МИ. По мере ухода от области локализации резонанса в стороны меньших и больших значений диаметров рассеивающих центров при фиксированной длине волны излучения (либо больших или меньших значений длины волны при постоянном диаметре частиц) деполяризующие свойства ансамблей частиц резко возрастают. Данный эффект может быть положен в основу новых подходов к поляризационной диагностике многократно рассеивающих сред в биомедицинской оптике и материаловедении. В дальнейшем планируется развитие разработанного алгоритма моделирования и соответствующего программного обеспечения с целью учета влияния различных факторов, проявляющихся при поляризационной диагностике многократно рассеивающих сред (полидисперсности рассеивающих центров, немонохроматичности зондирующего излучения и т.д.).

## Список литературы

1. *Aiello A., Woerdman J. P.* Physical bounds to the entropy-depolarization relation in random light scattering // Physical Review Letters. 2005. Vol. 94, iss. 9. Art. 090406. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.090406>
2. *Puentes G., Voigt D., Aiello A., Woerdman J. P.* Experimental observation of universality in depolarized light scattering // Optics Letters. 2005. Vol. 30, iss. 23. P. 3216–3218. <https://doi.org/10.1364/OL.30.003216>
3. *Brosseau C., Bicout D.* Entropy production in multiple scattering of light by a spatially random medium // Physical Review E. 1994. Vol. 50, iss. 6. P. 4997–5005. <https://doi.org/10.1103/physreve.50.4997>
4. *Vynck K., Pierrat R.* Multiple scattering of polarized light in disordered media exhibiting short-range structural correlations // Physical Review A. 1994. Vol. 94, iss. 3. Art. 033851. <https://doi.org/10.1103/physreva.94.033851>
5. *MacKintosh F. C., Zhi J. X., Pine D. J., Weitz D. A.* Polarization memory of multiply scattered light // Physical Review B. 1989. Vol. 40, iss. 13. P. 9342–9345. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.9342>
6. *Pires H. D., Monken C. H.* On the statistics of the entropy-depolarization relation in random light scattering // Optics Express. 2008. Vol. 16, iss. 25. P. 210059–210068. <https://doi.org/10.1364/oe.16.021059>
7. *MacKintosh F. C., John S.* Diffusing-wave spectroscopy and multiple scattering of light in correlated random media // Physical Review B. 1989. Vol. 40, iss. 4. P. 2383–2406. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.2383>
8. *Nieuwenhuizen Th. M., Van Rossum M. C. W.* Intensity distributions of waves transmitted through a multiple scattering medium // Physical Review Letters. 1995. Vol. 74, iss. 14. P. 2674–2677. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2674>
9. *Simon B. N., Simon S., Mukunda N., Gori F., Santarsiero M., Borghi R., Simon R.* A complete characterization of pre-Mueller and Mueller matrices in polarization optics // Journal of the Optical Society of America A. 2010. Vol. 27, iss. 2. P. 188–199. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.27.000188>
10. *Ortega-Quijano N., Arce-Diego J. L.* Mueller matrix differential decomposition // Optics Letters. 2011. Vol. 36, iss. 10. P. 1942–1946. <https://doi.org/10.1364/OL.36.001942>
11. *Dremin V., Zharkikh E. V., Lopushenko I., Marcinkevics Z., Bykov A. V., Meglinski I.* Incremental residual polarization caused by aging in human skin // Journal of Biomedical Optics. 2024. Vol. 29, iss. 5. P. 052912–052922. <https://doi.org/10.1117/1.JBO.29.5.052912>
12. *Mann P., Thapa P., Nayyar V., Surya V., Mishra D., Mehta D.* Multispectral polarization microscopy of different stages of human oral tissue: A polarization study // Journal of Biophotonics. 2024. Vol. 17, iss. 2. P. e202300236–e202300246. <https://doi.org/10.1002/jbio.202300236>



13. *Gassner C., Vongsivivut J., Ng S. H., Ryu M., Tobin M. J., Juodkazis S., Morikawa J., Wood B. R.* Linearly polarized infrared spectroscopy for the analysis of biological materials // Society for Applied Spectroscopy. 2023. Vol. 77, iss. 9. P. 977–1008. <https://doi.org/10.1177/00037028231180233>
14. *Song J., Zeng N., Guo W., Guo J., Ma H.* Stokes polarization imaging applied for monitoring dynamic tissue optical clearing // Biomedical Optics Express. 2021. Vol. 12, iss. 8. P. 4821–4836. <https://doi.org/10.1364/BOE.426653>
15. *Kapahi C., Silva A. E., Cory D. G., Kulmaganbetov M., Mungalsingh M. A., Pushin D. A., Singh T., Thompson B., Sarenac D.* Measuring the visual angle of polarization-related entoptic phenomena using structured light // Biomedical Optics Express. 2024. Vol. 15, iss. 2. P. 1278–1287. <https://doi.org/10.1364/BOE.507519>
16. *Pham T. T. H., Quach T. N. N., Vo Q. H. Q.* Analysis of polarization features of human breast cancer tissue by Mueller matrix visualization // Journal of Biomedical Optics. 2024. Vol. 29, iss. 5. Art. 052917. <https://doi.org/10.7868/S0869565214260041>
17. *Twersky V.* On propagation in random media of discrete scatterers // Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. 1964. Vol. 16. P. 84–116. <https://doi.org/10.1090/psapm/016/0163605>
18. *Parnell W. J., Abrahams I. D.* Multiple point scattering to determine the effective wavenumber and effective material properties of an inhomogeneous slab // Waves in Random Complex Media. 2010. Vol. 20, iss. 4. P. 678–701. <https://doi.org/10.1080/17455030.2010.510858>
19. *Gower A. L., Parnell W. J., Abrahams I. D.* Multiple waves propagate in random particulate materials // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2019. Vol. 79, iss. 6. P. 2569–2592. <https://doi.org/10.1137/18M122306X>
20. *Mishchenko M. I.* Vector radiative transfer equation for arbitrarily shaped and arbitrarily oriented particles: A microphysical derivation from statistical electromagnetics // Applied Optics. 2002. Vol. 41, iss. 33. P. 7114–7134. <https://doi.org/10.1364/AO.41.007114>
21. *Yang W., Jin X., Gao X.* Vector radiative transfer equation for arbitrary shape particles derived from Maxwell's electromagnetic theory // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2021 Vol. 265. Art. 107307. <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2020.107307>
22. *Ghosh N., Wood M. F. G., Vitkin I. A.* Mueller matrix decomposition for extraction of individual polarization parameters from complex turbid media exhibiting multiple scattering, optical activity, and linear birefringence // Journal of Biomedical Optics. 2008. Vol. 13, iss. 4. Art. 044036. <https://doi.org/10.1117/1.2960934>
23. *Wood M. F. G., Guo X., Vitkin I. A.* Polarized light propagation in multiply scattering media exhibiting both linear birefringence and optical activity: Monte Carlo model and experimental methodology // Journal of Biomedical Optics. 2007. Vol. 12, iss. 1. Art. 014029. <https://doi.org/10.1117/1.2434980>
24. *Zimnyakov D. A.* On some manifestations of similarity in multiple scattering of coherent light // Waves Random Media. 2000. Vol. 10, iss. 4. P. 417–434. <https://doi.org/10.1088/0959-7174/10/4/302>
25. *Зимняков Д. А., Синичкин Ю. П.* О предельном значении степени остаточной поляризации некогерентного обратно рассеянного излучения при многократном рассеянии линейно поляризованного света // Оптика и спектроскопия. 2001. Т. 91, № 1. С. 113–119. EDN: MQESRR
26. *Зимняков Д. А., Синичкин Ю. П.* Поляризационная визуализация рассеивающих сред с помощью непрерывного лазерного излучения // Оптика и спектроскопия. 2000. Т. 88, № 6. С. 1015–1022.
27. *Новицкий П. В., Зограф И. А.* Оценка погрешности результатов измерений. Ленинград : Энергоатомиздат, 1991. 304 с.
28. *Ishimaru A.* Wave propagation and scattering in random media. New York : Academic, 1978. 600 p.
29. *Борен К., Хафмен Д.* Рассеяние и поглощение света малыми частицами. Москва : Мир, 1986. 564 с.
30. *Heney L. G., Greenstein J. L.* Diffuse radiation in the Galaxy // Astrophysical Journal. 1941. Vol. 93. P. 70–83. <https://doi.org/10.1086/144246>
31. *Bezludnaya I. S., Chernova S. P., Pravdin A. B.* On one approach to description of multilayer tissue fluorescence // Proceedings. Vol. 4241: Saratov Fall Meeting 2000: Optical Technologies in



- Biophysics and Medicine II. 2001. P. 290–296. <https://doi.org/10.1117/12.431534>
32. Bicout D., Brosseau C., Martinez A. S., Schmitt J. M. Depolarization of multiply scattering waves by spherical diffusers: Influence of size parameter // Physical Review E. 1994. Vol. 49, iss. 2. P. 1767–1770. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.1767>

### References

1. Aiello A., Woerdman J. P. Physical bounds to the entropy-depolarization relation in random light scattering. *Physical Review Letters*, 2005, vol. 94, iss. 9, art. 090406. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.090406>
2. Puentes G., Voigt D., Aiello A., Woerdman J. P. Experimental observation of universality in depolarized light scattering. *Optics Letters*, 2005, vol. 30, iss. 23, pp. 3216–3218. <https://doi.org/10.1364/OL.30.003216>
3. Brosseau C., Bicout D. Entropy production in multiple scattering of light by a spatially random medium. *Physical Review E*, 1994, vol. 50, iss. 6, pp. 4997–5005. <https://doi.org/10.1103/physreve.50.4997>
4. Vynck K., Pierrat R. Multiple scattering of polarized light in disordered media exhibiting short-range structural correlations. *Physical Review A*, 1994, vol. 94, iss. 3, art. 033851. <https://doi.org/10.1103/physreva.94.033851>
5. MacKintosh F. C., Zhi J. X., Pine D. J., Weitz D. A. Polarization memory of multiply scattered light. *Physical Review B*, 1989, vol. 40, iss. 13, pp. 9342–9345. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.9342>
6. Pires H. D., Monken C. H. On the statistics of the entropy-depolarization relation in random light scattering. *Optics Express*, 2008, vol. 16, iss. 25, pp. 210059–210068. <https://doi.org/10.1364/oe.16.021059>
7. MacKintosh F. C., John S. Diffusing-wave spectroscopy and multiple scattering of light in correlated random media. *Physical Review B*, 1989, vol. 40, iss. 4, pp. 2383–2406. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.2383>
8. Nieuwenhuizen Th. M., Van Rossum M. C. W. Intensity distributions of waves transmitted through a multiple scattering medium. *Physical Review Letters*, 1995, vol. 74, iss. 14, pp. 2674–2677. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2674>
9. Simon B. N., Simon S., Mukunda N., Gori F., Santarsiero M., Borghi R., Simon R. A complete characterization of pre-Mueller and Mueller matrices in polarization optics. *Journal of the Optical Society of America A*, 2010, vol. 27, iss. 2, pp. 188–199. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.27.000188>
10. Ortega-Quijano N., Arce-Diego J. L. Mueller matrix differential decomposition. *Optics Letters*, 2011, vol. 36, iss. 10, pp. 1942–1946. <https://doi.org/10.1364/OL.36.001942>
11. Dremin V., Zharkikh E. V., Lopushenko I., Marcinkevics Z., Bykov A. V., Meglinski I. Incremental residual polarization caused by aging in human skin. *Journal of Biomedical Optics*, 2024, vol. 29, iss. 5, pp. 052912–052922. <https://doi.org/10.1117/1.JBO.29.5.052912>
12. Mann P., Thapa P., Nayyar V., Surya V., Mishra D., Mehta D. Multispectral polarization microscopy of different stages of human oral tissue: A polarization study. *Journal of Biophotonics*, 2024, vol. 17, iss. 2, pp. e202300236–e202300246. <https://doi.org/10.1002/jbio.202300236>
13. Gassner C., Vongsvivut J., Ng S. H., Ryu M., Tobin M. J., Juodkazis S., Morikawa J., Wood B. R. Linearly polarized infrared spectroscopy for the analysis of biological materials. *Society for Applied Spectroscopy*, 2023, vol. 77, iss. 9, pp. 977–1008. <https://doi.org/10.1177/00037028231180233>
14. Song J., Zeng N., Guo W., Guo J., Ma H. Stokes polarization imaging applied for monitoring dynamic tissue optical clearing. *Biomedical Optics Express*, 2021, vol. 12, iss. 8, pp. 4821–4836. <https://doi.org/10.1364/BOE.426653>
15. Kapahi C., Silva A. E., Cory D. G., Kulmaganbetov M., Mungalsingh M. A., Pushin D. A., Singh T., Thompson B., Sarenac D. Measuring the visual angle of polarization-related entoptic phenomena using structured light. *Biomedical Optics Express*, 2024, vol. 15, iss. 2, pp. 1278–1287. <https://doi.org/10.1364/BOE.507519>
16. Pham T. T. H., Quach T. N. N., Vo Q. H. Q. Analysis of polarization features of human breast cancer tissue by Mueller matrix visualization. *Journal of Biomedical Optics*, 2024, vol. 29, iss. 5, art. 052917. <https://doi.org/10.7868/S0869565214260041>
17. Twersky V. On propagation in random media of discrete scatterers. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 1964, vol. 16, pp. 84–116. <https://doi.org/10.1090/psapm/016/0163605>

18. Parnell W. J., Abrahams I. D. Multiple point scattering to determine the effective wavenumber and effective material properties of an inhomogeneous slab. *Waves in Random Complex Media*, 2010, vol. 20, iss. 4, pp. 678–701. <https://doi.org/10.1080/17455030.2010.510858>
19. Gower A. L, Parnell W. J., Abrahams I. D. Multiple waves propagate in random particulate materials. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2019, vol. 79, iss. 6, pp. 2569–2592. <https://doi.org/10.1137/18M122306X>
20. Mishchenko M. I. Vector radiative transfer equation for arbitrarily shaped and arbitrarily oriented particles: A microphysical derivation from statistical electromagnetics. *Applied Optics*, 2002, vol. 41, iss. 33, pp. 7114–7134. <https://doi.org/10.1364/AO.41.007114>
21. Yang W., Jin X., Gao X. Vector radiative transfer equation for arbitrary shape particles derived from Maxwell's electromagnetic theory. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2021, vol. 265, art. 107307. <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2020.107307>
22. Ghosh N., Wood M. F. G., Vitkin I. A. Mueller matrix decomposition for extraction of individual polarization parameters from complex turbid media exhibiting multiple scattering, optical activity, and linear birefringence. *Journal of Biomedical Optics*, 2008, vol. 13, iss. 4, art. 044036. <https://doi.org/10.1117/1.2960934>
23. Wood M. F. G., Guo X., Vitkin I. A. Polarized light propagation in multiply scattering media exhibiting both linear birefringence and optical activity: Monte Carlo model and experimental methodology. *Journal of Biomedical Optics*, 2007, vol. 12, iss. 1, art. 014029. <https://doi.org/10.1117/1.2434980>
24. Zimnyakov D. A. On some manifestations of similarity in multiple scattering of coherent light. *Waves Random Media*, 2000, vol. 10, iss. 4, pp. 417–434. <https://doi.org/10.1088/0959-7174/10/4/302>
25. Zimnyakov D. A., Sinichkin Yu. P. Ultimate degree of residual polarization of incoherently backscattered light for multiple scattering of linearly polarized light. *Optics and Spectroscopy*, 2001, vol. 91, iss. 1, pp. 103–108. <https://doi.org/10.1134/1.1388331>, EDN: LGMUBJ
26. Zimnyakov D. A., Sinichkin Yu. P. Polarization visualization of scattering media with CW laser radiation. *Optics and Spectroscopy*, 2000, vol. 88, iss. 6, pp. 926–932. <https://doi.org/10.1134/1.626902>
27. Novitsky P. V., Zograf I. A. *Otsenka pogreshnostey rezul'tatov izmereniy* [Estimation of the measurement results error]. Leningrad, Energoatomizdat, 1991. 304 p. (in Russian).
28. Ishimaru A. *Wave propagation and scattering in random media*. New York, Academic, 1978. 600 p.
29. Bohren C. F., Huffman D. R. *Absorption and scattering of light by small particles*. 1st ed. New York, Wiley VCH, 1983. 544 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1986. 564 p.).
30. Henyey L. G., Greenstein J. L. Diffuse radiation in the Galaxy. *Astrophysical Journal*, 1941, vol. 93, pp. 70–83. <https://doi.org/10.1086/144246>
31. Bezladnaya I. S., Chernova S. P., Pravdin A. B. On one approach to description of multilayer tissue fluorescence. *Proceedings, vol. 4241: Saratov Fall Meeting 2000: Optical Technologies in Biophysics and Medicine II*, 2001, pp. 290–296. <https://doi.org/10.1117/12.431534>
32. Bicout D., Brosseau C., Martinez A. S., Schmitt J. M. Depolarization of multiply scattering waves by spherical diffusers: Influence of size parameter. *Physical Review E*, 1994, vol. 49, iss. 2, pp. 1767–1770. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.1767>

Поступила в редакцию / Received 20.05.2024

Принята к публикации / Accepted 10.09.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025