

ISSN 1816-9791 (Print)
ISSN 2541-9005 (Online)

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия: Математика. Механика. Информатика

2025

Том 25

Выпуск 2



IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS



Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Новая серия

Серия Математика. Механика. Информатика, выпуск 2

Продолжение «Известий Императорского Николаевского Университета» 1910–1918, «Ученых записок СГУ» 1923–1962,
«Известий Саратовского университета. Новая серия» 2001–2004



Научный журнал
2025 Том 25

ISSN 1816-9791 (Print)

ISSN 2541-9005 (Online)

Издаётся с 2005 года

СОДЕРЖАНИЕ

Научный отдел

Математика

Акишев Г. Об оценках наилучших M -членных приближений функций многих переменных в пространстве с равномерной метрикой 154

Rykhlov V. S. Estimation of the difference of partial sums of expansions by the root functions of the differential operator and into trigonometric Fourier series
[Рыхлов В. С. Оценка разности частичных сумм разложений по корневым функциям дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье] 167

Серегина Е. В., Степович М. А. О проекционном методе решения уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью 173

Хромова Г. В. Разрывный оператор Стеклова и аппроксимационные полиномиальные сплайны 184

Механика

Королева М. Р., Тененев В. А. Табулирование решения задачи Римана в методе Годунова для уравнения состояния Соаве – Редлиха – Квонга 189

Кучеренко Д. В. Задача о введении жидкости в пористый сферический композит с учётом анизотропии 203

Модестов К. А., Шитикова М. В. Распространение гармонических волн в вязкоупругих средах, описываемых моделями с дробными производными 214

Паршина И. Ф., Иванов Д. В., Доль А. В., Виндокуров И. В., Бессонов Л. В., Ташкинов М. А. К вопросу об изучении структурных и механических характеристик губчатой костной ткани крупного рогатого скота 231

Степанова И. В. Влияние тепловой нагрузки на конвекцию в системе двух бинарных смесей с фазовым переходом 246

Фирсов С. В. Пластическое деформирование биметаллической трубы под действием внутреннего давления 259

Информатика

Дилигенская А. Н., Золотарёва В. В. Структурно-параметрическая идентификация граничных условий в обратных задачах теплопроводности с использованием ансамбля классов корректности 271

Исаева А. А., Исаева Е. А., Скрипаль Ан. В., Зимняков Д. А. Статистическое моделирование деполаризующих свойств оптических плотных дисперсных систем в режиме малоуглового рассеяния зондирующего излучения 281

Farakhutdinov R. A. Heuristic optimization methods for linear ordering of automata [Фарахутдинов Р. А. Эвристические методы оптимизации для линейного упорядочивания автоматов] 295

Журнал «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика»» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Запись о регистрации СМИ ПИ № ФС77-76640 от 26 августа 2019 г.
Учредитель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского»

Журнал включен в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (категория К1, специальности: 1.1.1; 1.1.2; 1.1.5; 1.1.6; 1.1.7; 1.1.8; 1.1.9; 1.1.10; 1.2.2; 2.3.1).
Журнал индексируется RSCI, Web of Science (ESCI), Scopus, MathSciNet, zbMATH, DOAJ

Подписной индекс издания 36017.
Подписку на печатные издания можно оформить в интернет-каталоге ГК «Урал-Пресс» (ural-press.ru).
Журнал выходит 4 раза в год.
Цена свободная.
Электронная версия находится в открытом доступе (mmi.sgu.ru)

Директор издательства
Бучко Ирина Юрьевна
Редактор
Каргин Игорь Анатольевич
Редактор-стилист
Агафонов Андрей Петрович
Верстка
Халова Виктория Анатольевна
Технический редактор
Каргин Игорь Анатольевич
Корректор
Агафонов Андрей Петрович

В оформлении издания использованы работы художника Соколова Дмитрия Валерьевича (13.11.1940–20.11.2023)

Адрес учредителя, издателя и издательства (редакции):
410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
Тел.: +7(845-2) 51-29-94, 51-45-49, 52-26-89
E-mail: publ@sgu.ru, izdat@sgu.ru

Подписано в печать 26.05.2025.
Подписано в свет 30.06.2025.
Выход в свет 30.06.2025.
Формат 60 × 84 1/8.
Усл. печ. л. 17,67 (19,0).
Тираж 100 экз. Заказ 54-Т

Отпечатано в типографии Саратовского университета.
Адрес типографии:
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А

© Саратовский университет, 2025



ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал принимает к публикации статьи, содержащие новые оригинальные результаты по всем основным разделам математики, механики и информатики. Редколлегией не рассматриваются статьи, носящие исключительно прикладной характер, ранее опубликованные или принятые к опубликованию в других журналах.

Объем публикуемой статьи не должен превышать 12 страниц, оформленных в LaTeX согласно стилевому файлу, размещенному по адресу <https://mmi.sgu.ru/ru/dlya-avtorov>. Статьи большего объема принимаются только по согласованию с редколлегией журнала.

Все рукописи, поступившие в редакцию и соответствующие профилю журнала, проходят рецензирование, и затем редколлегия принимает решение о возможности их опубликования. В случае положительного решения статья подвергается научному и контрольному редактированию.

Статья, направленная автору на доработку, должна быть возвращена в исправленном виде в максимально короткие сроки. Статья, задержанная на срок более трёх месяцев, рассматривается как вновь поступившая. К переработанной рукописи необходимо приложить письмо от авторов, содержащее ответы на все замечания и поясняющее все изменения, сделанные в статье. Возвращение статьи на доработку не означает, что статья будет опубликована, после переработки она вновь будет рецензироваться.

Автору статьи, принятой к публикации, одновременно с решением редколлегии высылается лицензионный договор.

Датой поступления статьи считается дата поступления ее окончательного варианта.

Плата за публикацию рукописей не взимается.

Более подробно с правилами для авторов и порядком рецензирования можно ознакомиться на сайте журнала: <https://mmi.sgu.ru>

Адрес редколлегии серии:

410012, Саратов, Астраханская, 83,
СГУ имени Н. Г. Чернышевского,
механико-математический факультет

Тел./факс: +7(845-2) 26-15-54

E-mail: mmi@sgu.ru

Website: <https://mmi.sgu.ru>

Ответственный секретарь серии:

Шевцова Юлия Владиславовна

CONTENTS

Scientific Part

Mathematics

- Akishev G.** On estimates of the best M -term approximations of functions of many variables in a space with a uniform metric 154

- Rykhlov V. S.** Estimation of the difference of partial sums of expansions by the root functions of the differential operator and into trigonometric Fourier series 167

- Seregina E. V., Stepovich M. A.** On the projection method for solving the heat equation with lumped heat capacity 173

- Khromova G. V.** Discontinuous Steklov operator and approximate polynomial splines 184

Mechanics

- Koroleva M. R., Tenenev V. A.** Tabulation of the Riemann problem solution in Godunov method for Soave – Redlich – Kwong equation of state 189

- Kucherenko D. V.** Modeling fluid injection into a porous spherical composite with anisotropy 203

- Modestov K. A., Shitikova M. V.** Harmonic wave propagation in viscoelastic media modelled via fractional derivative models 214

- Parshina I. F., Ivanov D. V., Dol A. V., Vindokurov I. V., Bessonov L. V., Tashkinov M. A.** On the issue of studying the structural and mechanical characteristics of bovine cancellous bone 231

- Stepnova I. V.** The influence of thermal load on convection in a system of two binary mixtures with a phase transition 246

- Firsov S. V.** Plastic strain of the bimetal tube subjected to inner pressure 259

Computer Sciences

- Diligenskaya A. N., Zolotaryova V. V.** Structural-parametric identification of boundary conditions in inverse heat conduction problems using an ensemble of correctness classes 271

- Isaeva A. A., Isaeva E. A., Skripal An. V., Zimnyakov D. A.** Statistical modeling of the depolarizing properties of optically dense dispersive systems in the small-angle scattering mode of probe light propagation 281

- Farakhutdinov R. A.** Heuristic optimization methods for linear ordering of automata 295

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ ЖУРНАЛА
«ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. НОВАЯ СЕРИЯ.
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА»**

Главный редактор

Коссович Леонид Юрьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Заместитель главного редактора

Прохоров Дмитрий Валентинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Ответственный секретарь

Шевцова Юлия Владиславовна, кандидат физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Члены редакционной коллегии:

Андрейченко Дмитрий Константинович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Бауэр Светлана Михайловна, доктор физ.-мат. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Ватульян Александр Ованесович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Ростов-на-Дону, Россия)

dell'Isola Francesco, доктор наук, профессор (Рим, Италия)

Зубков Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Омск, Россия)

Икбал Мод Ашраф, Ph.D. (Рурки, Индия)

Иматани Сёдзи, Ph.D. (Киото, Япония)

Каплунов Юрий Давидович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Киль, Великобритания)

Ковалёв Владимир Александрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Кротов Вениамин Григорьевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Минск, Беларусь)

Ломакин Евгений Викторович, доктор физ.-мат. наук, чл.-корр. РАН (Москва, Россия)

Матвеев Валерий Павлович, доктор техн. наук, акад. РАН (Пермь, Россия)

Насыров Семён Рафаилович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Казань, Россия)

Половинкин Евгений Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Долгопрудный, Московская обл., Россия)

Радаев Юрий Николаевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Рацеев Сергей Михайлович, доктор физ.-мат. наук (Ульяновск, Россия)

Резчиков Александр Федорович, доктор техн. наук, профессор, чл.-корр. РАН (Саратов, Россия)

Роджерсон Грэм, Ph.D. (Киль, Великобритания)

Сергеев Александр Николаевич, доктор физ.-мат. наук (Саратов, Россия)

Сперанский Дмитрий Васильевич, доктор техн. наук, профессор (Москва, Россия)

Старовойтов Эдуард Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Гомель, Беларусь)

Тананко Игорь Евстафьевич, кандидат физ.-мат. наук, доцент (Саратов, Россия)

Хромов Август Петрович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Цатурян Андрей Кимович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Москва, Россия)

Шалыто Анатолий Абрамович, доктор техн. наук, профессор (Санкт-Петербург, Россия)

Шашкин Александр Иванович, доктор физ.-мат. наук, профессор (Воронеж, Россия)

Юрко Вячеслав Анатольевич, доктор физ.-мат. наук, профессор (Саратов, Россия)

Янг Чуань-Фу, профессор (Нанкин, Китайская Народная Республика)

**EDITORIAL BOARD OF THE JOURNAL
"IZVESTIYA OF SARATOV UNIVERSITY.
MATHEMATICS. MECHANICS. INFORMATICS"**

Editor-in-Chief – Leonid Yu. Kossovich (Saratov, Russia)

Deputy Editor-in-Chief – Dmitri V. Prokhorov (Saratov, Russia)

Executive Secretary – Yuliya V. Shevtsova (Saratov, Russia)

Members of the Editorial Board:

Dmitri K. Andreichenko (Saratov, Russia)

Svetlana M. Bauer (St. Petersburg, Russia)

Francesco dell'Isola (Rome, Italy)

Shoji Imatani (Kyoto, Japan)

Mohd A. Iqbal (Roorkee, India)

Julius D. Kaplunov (Keele, United Kingdom)

August P. Khromov (Saratov, Russia)

Vladimir A. Kovalev (Moscow, Russia)

Veniamin G. Krotov (Minsk, Belarus)

Evgenii V. Lomakin (Moscow, Russia)

Valerii P. Matveenko (Perm, Russia)

Semen R. Nasyrov (Kazan, Russia)

Evgenii S. Polovinkin (Dolgoprudny,

Moscow region, Russia)

Yuri N. Radaev (Moscow, Russia)

Sergey M. Ratseev (Ulyanovsk, Russia)

Alexander F. Rezchikov (Saratov, Russia)

Graham A. Rogerson (Keele, United Kingdom)

Alexander N. Sergeev (Saratov, Russia)

Anatoly A. Shalyto (St. Petersburg, Russia)

Alexander I. Shashkin (Voronezh, Russia)

Dmitriy V. Speranskiy (Moscow, Russia)

Eduard I. Starovoitov (Gomel, Belarus)

Igor' E. Tananko (Saratov, Russia)

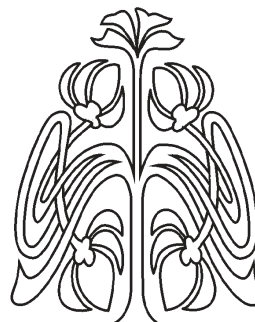
Andrey K. Tsaturyan (Moscow, Russia)

Alexander O. Vatulyan (Rostov-on-Don, Russia)

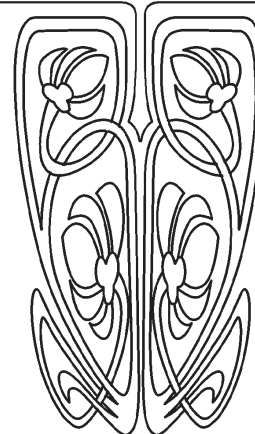
Chuan-Fu Yang (Nanjing, Jiangsu, China)

Vjacheslav A. Yurko (Saratov, Russia)

Alexander N. Zubkov (Omsk, Russia)



**РЕДАКЦИОННАЯ
КОЛЛЕГИЯ**



МАТЕМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика.
Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 154–166

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025,
vol. 25, iss. 2, pp. 154–166

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-154-166>

EDN: CQAXPK

Научная статья

УДК 517.51

Об оценках наилучших M -членных приближений функций многих переменных в пространстве с равномерной метрикой

Г. Акишев

Казахстанский филиал Московского государственного университета име-
ни М. В. Ломоносова, Казахстан, 010010, г. Астана, ул. Кажымукана,
д. 11

Акишев Габдолла, доктор физико-математических наук, профессор
кафедры математики и информатики, akishev_g@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8336-6192>, SPIN: 1527-9433, AuthorID: 194028

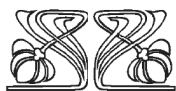
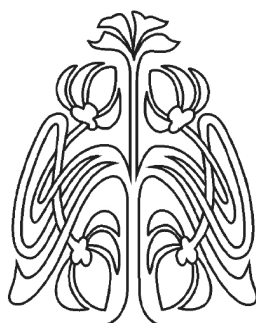
Аннотация. В статье рассматриваются пространство непрерывных
функций с равномерной метрикой и анизотропное пространство Лорен-
ца–Зигмунда периодических функций многих переменных и класс Ни-
кольского–Бесова в этом пространстве. Установлены оценки наилучших
 M -членных тригонометрических приближений функций из класса Ни-
кольского–Бесова в равномерной метрике.

Ключевые слова: равномерная метрика, пространство Лоренца–
Зигмунда, класс Никольского–Бесова, M -членное приближение

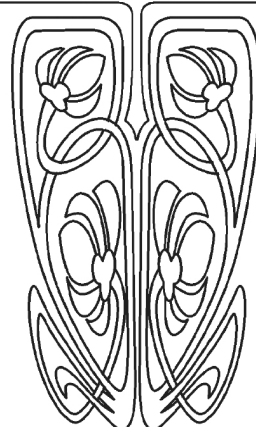
Благодарности: Работа выполнена в рамках грантового финансиروа-
ния Комитета науки Министерства науки и высшего образования РК
(проект № AP19677486). Автор благодарен Рецензенту за замечания.

Для цитирования: Акишев Г. Об оценках наилучших M -членных при-
ближений функций многих переменных в пространстве с равномерной
метрикой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия:
Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 154–166.
<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-154-166>, EDN: CQAXPK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons
Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Научный
отдел





Article

On estimates of the best M -term approximations of functions of many variables in a space with a uniform metric

G. Akishev

Kazakhstan Branch of Lomonosov Moscow State University, 11 Kazhymukan St., Astana 010010, Kazakhstan

Gabdolla Akishev, akishev_g@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-8336-6192>, SPIN: 1527-9433, AuthorID: 194028

Abstract. The paper considers the space of continuous functions with a uniform metric and the anisotropic Lorentz–Zygmund space of periodic functions of many variables and the Nikol’skii–Besov class in this space. We have established estimates of the best M -term trigonometric approximations of functions from the Nikol’skii–Besov class in a uniform metric.

Keywords: uniform metric, Lorentz–Zygmund space, Nikol’skii–Besov class, M -term approximation

Acknowledgements: This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (project No. AP19677486). The author is grateful to the Reviewer for his comments.

For citation: Akishev G. On estimates of the best M -term approximations of functions of many variables in a space with a uniform metric. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 154–166 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-154-166>, EDN: CQAXPK

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В статье используются следующие обозначения: \mathbb{R}^m — m -мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ с вещественными координатами, \mathbb{Z}_+^m — множество точек пространства \mathbb{R}^m с неотрицательными целыми координатами, $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi)^m$, $C(\mathbb{T}^m)$ — пространство непрерывных функций, имеющих период 2π по каждой переменной с нормой $\|f\|_\infty := \max_{\bar{x} \in \mathbb{T}^m} |f(\bar{x})|$.

Напомним определения невозрастающей перестановки функции.

Определение 1. Пусть f — измеримая по Лебегу функция одной переменной на $[0, 1)$. Функция распределения для $|f|$ определяется как мера Лебега (см. например [1, с. 81])

$$\mu_f(y) := \mu\{x \in [0, 1) : |f(x)| > y\}, \quad 0 \leq y < \infty.$$

Две неотрицательные измеримые функции f и g называются *равноизмеримыми*, если их функции распределения равны (см. например [1, с. 82]).

Определение 2 (см. например [1, с. 83]). *Невозрастающей перестановкой функции f одной переменной* называется невозрастающая на $[0, 1)$ функция $f^*(t)$, равноизмеримая с функцией $|f(x)|$.

Невозрастающая перестановка f^* функции f одной переменной на $[0, 1)$ определяется по формуле (см. например [1, с. 83])

$$f^*(t) := \inf\{y > 0 : \mu_f(y) \leq t\}, \quad t \in [0, 1).$$

Теперь напомним определение повторной невозрастающей перестановкой функции m переменных.



Определение 3 (см. [2, с. 53; 3]). Пусть $f(x_1, \dots, x_m)$ — измеримая по Лебегу функция m переменных на $I^m = [0, 1]^m$. *Невозрастающей перестановкой функции $|f(x_1, \dots, x_m)|$ по первой переменной* понимается функция $f^{*1}(t_1, x_2, \dots, x_m)$, равноизмеримая на I^m , невозрастающая по t_1 и такая, что функции $|f(x_1, \dots, x_m)|$ и $f^{*1}(t_1, x_2, \dots, x_m)$ равноизмеримы как функции одной переменной для почти всех фиксированных x_2, \dots, x_m .

Аналогичным образом, рассматривая невозрастающую перестановку функции $f^{*1}(t_1, x_2, \dots, x_m)$ по переменной x_2 , при фиксированных t_1, x_3, \dots, x_m определяется функция $f^{*1*2}(t_1, t_2, x_3, \dots, x_m)$, равноизмеримая с функцией $f(x_1, \dots, x_m)$. Продолжая этот процесс, определяется невозрастающая перестановка $f^{*1*2 \dots *m}(t_1, t_2, \dots, t_m)$, равноизмеримая с функцией $|f(x_1, \dots, x_m)|$.

В статье рассматриваются следующие функциональные пространства.

Пусть даны числа $p, \tau \in [1, \infty)$, $\alpha \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$. Пространством Лоренца–Зигмунда $L_{p, \alpha, \tau}(\mathbb{T})$ называется множество всех измеримых по Лебегу и 2π периодических функций f , для которых (см. например, [4])

$$\|f\|_{p, \alpha, \tau} := \left\{ \int_0^1 \left(f^*(t) \right)^\tau \left(1 + |\log_2 t| \right)^{\alpha\tau} t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}} < +\infty,$$

где $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi x)|$, $x \in [0, 1)$, $\mathbb{T} = [0, 2\pi)$.

Известно, что пространство Лоренца–Зигмунда $L_{p, \alpha, \tau}(\mathbb{T})$ является симметричным пространством [1, 4]. Поэтому, следуя [3], рассмотрим анизотропное пространство Лоренца–Зигмунда.

Пусть $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ и $p_j, \tau_j \in [1, \infty)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$. Через $L_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$ обозначим анизотропное пространство Лоренца–Зигмунда — всех измеримых по Лебегу функций m переменных f , имеющих период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^* := \|\dots\| f^{*1, \dots, *m} \|_{p_1, \alpha_1, \tau_1} \dots \|_{p_m, \alpha_m, \tau_m} < \infty,$$

где $f^{*1, \dots, *m}(t_1, \dots, t_m)$ — невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi \bar{x})|$ по каждой переменной $x_j \in [0, 1)$ при фиксированных остальных переменных (см. [3]) и

$$\|g\|_{p, \alpha, \tau} := \left\{ \int_0^1 (g(t))^\tau (1 + |\log_2 t|)^{\alpha\tau} t^{\frac{\tau}{p}-1} dt \right\}^{\frac{1}{\tau}}.$$

Для $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, m$ пространство $L_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$ является анизотропным пространством Лоренца и обозначается $L_{\bar{p}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m)$, а $\|f\|_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^* = \|f\|_{\bar{p}, \bar{\tau}}^*$ (см. [3]).

Если $\alpha_j = 0$ и $p_j = \tau_j = p$, $j = 1, \dots, m$, то $L_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m) = L_p(\mathbb{T}^m)$ — известное пространство Лебега с нормой $\|f\|_p$.

$l_{\bar{p}}$ — пространство последовательностей $\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_+^m}$ действительных чисел с нормой

$$\left\| \{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{p}}} = \left\{ \sum_{n_m=0}^{\infty} \left[\dots \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} |a_{\bar{n}}|^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}} \right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

для $1 \leq p_j < +\infty$, $j = 1, 2, \dots, m$, $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$ и $\|\{a_{\bar{n}}\}\|_{l_{\infty}} = \sup_{\bar{n} \in \mathbb{Z}_+^m} |a_{\bar{n}}|$ для $p_j = \infty$, $j = 1, \dots, m$.

Введем обозначения $a_{\bar{n}}(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ по системе $\{e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}\}$ и $\langle \bar{y}, \bar{x} \rangle = \sum_{j=1}^m y_j x_j$, $\delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) = \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} a_{\bar{n}}(f) e^{i\langle \bar{n}, \bar{x} \rangle}$, где $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, \dots, m\}$, $[y]$ — целая часть действительного числа y и $s_j \in \mathbb{Z}_+$.



В теории функций и ее приложениях важное значение имеет $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ — пространство Никольского–Бесова в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 \leq p < \infty$ и его различные обобщения (см. [5, 6]).

Рассматривается аналог класса Никольского–Бесова в анизотропном пространстве Лоренца–Зигмунда:

$$S_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{\theta}}^{\bar{r}}B := \left\{ f \in \dot{L}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}}^*(\mathbb{T}^m) : \|f\|_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}}^* + \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}}^* \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq 1 \right\},$$

где $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $1 < p_j, \tau_j < \infty$, $0 < \theta_j \leq +\infty$, $0 < r_j < +\infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$.

В случае $\alpha_j = 0$ и $\tau_j = p_j = p$, $j = 1, \dots, m$ класс $S_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}}^{\bar{r}}B$ совпадает с известным классом Никольского–Бесова $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ в пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$, $1 < p < \infty$ (см. [5, 6]).

Наилучшим M -членным тригонометрическим приближением функции $f \in C(\mathbb{T}^m)$ называется величина (см. [7])

$$e_M(f)_\infty = \inf_{\bar{k}^j, b_j} \left\| f - \sum_{j=1}^M b_j e^{i\langle \bar{k}^j, \bar{x} \rangle} \right\|_\infty,$$

где $\{\bar{k}^j\}_{j=1}^M$ — система векторов $\bar{k}^j = (k_1^j, \dots, k_m^j)$ с целочисленными координатами, b_j — действительные или комплексные числа. Если F — некоторый функциональный класс в пространстве $C(\mathbb{T}^m)$, то положим $e_M(F)_\infty = \sup_{f \in F} e_M(f)_\infty$.

В настоящее время M -членное приближение элементов функционального пространства находит много применений в задачах обработки сигналов, математической статистики, оптимизации, машинного обучения, нейронных сетей.

Оценки порядка M -членного приближения функций класса Никольского–Бесова $S_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ в равномерной метрике установлены Э. С. Белинским [8], А. С. Романоюком [9] соответственно в случаях $\theta = \infty$ и $2 \leq \theta < \infty$, $1 \leq p \leq \infty$, $r_1 > \max\{1/p, 1/2\}$. При малых гладкостях $1/p < r_1 \leq 1/2$ оценки величины $e_M(S_{p,\theta}^{\bar{r}}B)_\infty$ установлены в недавней совместной работе В. Н. Темлякова и Т. Ульриха [10, теоремы 6.2–6.3].

Как отмечено в [7], неизвестны оценки снизу наилучших M -членных приближений класса Никольского–Бесова, в равномерной метрике совпадающие с известными оценками сверху.

Точные порядки наилучших M -членных приближений классов $S_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)},\bar{\theta}}^{\bar{r}}B$ в анизотропных пространствах Лоренца и Лоренца–Зигмунда ранее установлены в [11, 12]. В отличие от [11, 12], в предлагаемой статье рассмотрим задачу оценки наилучших M -членных приближений элементов класса $S_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)},\bar{\theta}}^{\bar{r}}B$ в равномерной метрике.

Основная цель статьи — найти точный порядок величины $e_M(S_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}^{(1)},\bar{\theta}}^{\bar{r}}B)_\infty$.

В первом разделе приведено одно вспомогательное утверждение, необходимое для доказательства основных результатов статьи. В разделе 2 мы представим и докажем основные результаты.

Будем обозначать через $C(p, q, y, \dots)$ различные положительные величины, которые зависят от указанных параметров. Запись $A(y) \asymp B(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 A(y) \leq B(y) \leq C_2 A(y)$. Для краткости записи вместо $B \geq C_1 A$ или $B \leq C_2 A$ часто будем писать $B \gg A$ или $B \ll A$ соответственно. Запись $\log y$ означает логарифм с основанием 2 от числа $y > 0$.



1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Пусть $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$ и $0 < \gamma'_j \leq \gamma_j$, $0 < \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$ и $\alpha \in (0, \infty)$. Тогда справедливо следующее неравенство:

$$I_n^m := \left\| \left\{ 2^{-\alpha \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{\lambda_j} \right\}_{\bar{s} \in Y^m(n, \bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \ll 2^{-n\alpha\delta} n^{\sum_{j \in A} \lambda_j + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\delta = \min \left\{ \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} : j = 1, \dots, m \right\}$, $A = \left\{ j : \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} = \delta, j = 1, \dots, m \right\}$, $j_1 = \min \{ j : j \in A \}$ и числа $\lambda_j \in \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям

$$\min \left\{ \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} \lambda_j + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j}, \lambda_{j'} + \frac{1}{\theta'_{j'}} \right\} > 0$$

и $j' = \max \{ j \in A \}$.

Доказательство. Случай $0 < \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$ доказан в [13, лемма 3]. Для $\theta_j = \infty$, $j = 1, 2$ доказательство приведено в [13, с. 9]. Поэтому мы рассмотрим случай $m \geq 3$ при $\theta_j = \infty$, $j = 1, \dots, m$.

Предположим, что утверждение леммы верно для $m - 1$ т. е.

$$I_n^{m-1} := \sup_{\bar{s} \in Y^{m-1}(n, \bar{\gamma}'_{m-1})} 2^{-\alpha \langle \bar{s}_{m-1}, \bar{\gamma}_{m-1} \rangle} \prod_{j=1}^{m-1} (s_j + 1)^{\lambda_j} \ll 2^{-n\alpha\delta_{m-1}} (n+1)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \quad (1)$$

при условии $\lambda_j \geq 0$, для $j \in A_{m-1}$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$, для $j \notin A_{m-1}$, где $\bar{z}_{m-1} = (z_1, \dots, z_{m-1})$, $\delta_{m-1} = \min \left\{ \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} : j = 1, \dots, m-1 \right\}$, $A_{m-1} := \left\{ j = 1, \dots, m-1 : \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} = \delta_{m-1} \right\}$, $j_{1,m-1} = \min \{ j \in A_{m-1} \}$.

Докажем утверждение леммы для $m \geq 3$. По определению множества $Y^m(n, \bar{\gamma}')$ имеем

$$\begin{aligned} I_n^m &= \sup_{0 \leq s_m < n/\gamma'_m} 2^{-s_m \gamma_m \alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} \sup_{\bar{s} \in Y^{m-1}(n - s_m \gamma'_m, \bar{\gamma}'_{m-1})} 2^{-\alpha \langle \bar{s}_{m-1}, \bar{\gamma}_{m-1} \rangle} \prod_{j=1}^{m-1} (s_j + 1)^{\lambda_j} + \\ &+ \sup_{s_m \geq n/\gamma'_m} 2^{-s_m \gamma_m \alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} \sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^{m-1}} 2^{-\alpha \langle \bar{s}_{m-1}, \bar{\gamma}_{m-1} \rangle} \prod_{j=1}^{m-1} (s_j + 1)^{\lambda_j} = \sigma_1(n) + \sigma_2(n). \end{aligned} \quad (2)$$

В силу предположения (1) с заменой n на $n - s_m \gamma'_m$ получим

$$\begin{aligned} \sigma_1(n) &\ll \sup_{0 \leq s_m < n/\gamma'_m} 2^{-s_m \gamma_m \alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} 2^{-(n - s_m \gamma'_m) \alpha \delta_{m-1}} (n - s_m \gamma'_m)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} = \\ &= C 2^{-n\alpha\delta_{m-1}} \sup_{0 \leq s_m < n/\gamma'_m} 2^{-s_m \gamma'_m (\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1}) \alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} (n - s_m \gamma'_m)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \end{aligned} \quad (3)$$

при условии $\lambda_j \geq 0$, для $j \in A_{m-1}$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$, для $j \notin A_{m-1}$.

Если $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1} > 0$, то $\delta = \delta_m = \min \left\{ \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} : j = 1, \dots, m \right\} = \delta_{m-1}$, $A = A_m = \{ j : \frac{\gamma_j}{\gamma'_j} = \delta, j = 1, \dots, m \} = A_{m-1}$, $j_1 = \min \{ j \in A_m \} = j_{0,m-1}$. Поэтому, учитывая, что $\lambda_j \geq 0$, для $j \in A_{m-1}$ из неравенства (3) получим

$$\begin{aligned} \sigma_1(n) &\ll 2^{-n\alpha\delta_{m-1}} (n+1)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \sup_{0 \leq s_m < n/\gamma'_m} 2^{-s_m \gamma'_m (\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1}) \alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} \ll \\ &\ll 2^{-n\alpha\delta} (n+1)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \end{aligned} \quad (4)$$

в случае $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1} > 0$, для $\lambda_m \in \mathbb{R}$.



Пусть $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1} < 0$. Тогда $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} < \frac{\gamma_j}{\gamma'_j}$, для $j = 1, \dots, m-1$ и $A = \{m\}$. Выберем число $\eta \in (0, \alpha(\delta_{m-1} - \frac{\gamma_m}{\gamma'_m}))$. Учитывая, что для $\lambda > 0$ функция $\frac{t^\lambda}{2^t} \downarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \sup_{0 \leq s_m < n/\gamma'_m} 2^{-s_m \gamma'_m (\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1}) \alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} (n - s_m \gamma'_m + 1)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} = \\ & = \sup_{0 \leq s_m < n/\gamma'_m} 2^{s_m \gamma'_m \alpha (\delta_{m-1} - \frac{\gamma_m}{\gamma'_m})} (s_m + 1)^{\lambda_m} 2^{(n - s_m \gamma'_m) \eta} 2^{-(n - s_m \gamma'_m) \eta} \times \\ & \times 2^{(n - s_m \gamma'_m) \eta} (n - s_m \gamma'_m + 1)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \ll \sup_{0 \leq s_m < n/\gamma'_m} 2^{s_m \gamma'_m \alpha (\delta_{m-1} - \frac{\gamma_m}{\gamma'_m})} (s_m + 1)^{\lambda_m} \times \\ & \times 2^{(n - s_m \gamma'_m) \eta} = C 2^{n \eta} \sup_{0 \leq s_m < n/\gamma'_m} 2^{s_m \gamma'_m (\alpha (\delta_{m-1} - \frac{\gamma_m}{\gamma'_m}) - \eta)} (s_m + 1)^{\lambda_m} = \\ & = C 2^{n \eta} 2^{n (\alpha (\delta_{m-1} - \frac{\gamma_m}{\gamma'_m}) - \eta)} (n + 1)^{\lambda_m} = C 2^{n \alpha (\delta_{m-1} - \frac{\gamma_m}{\gamma'_m})} (n + 1)^{\lambda_m} \end{aligned}$$

для $\lambda_m \in \mathbb{R}$. Поэтому из неравенства (3) следует, что

$$\sigma_1(n) \ll 2^{-n \alpha \delta_{m-1}} 2^{n \alpha (\delta_{m-1} - \frac{\gamma_m}{\gamma'_m})} (n + 1)^{\lambda_m} = C 2^{-n \alpha \frac{\gamma_m}{\gamma'_m}} (n + 1)^{\lambda_m} \quad (5)$$

в случае $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1} < 0$, для $\lambda_m \in \mathbb{R}$.

Таким образом, оценки (4) и (5) означают, что

$$\sigma_1(n) \ll 2^{-n \alpha \delta} (n + 1)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \quad (6)$$

в случае $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} \neq \delta_{m-1}$, $\lambda_j \geq 0$, для $j \in A$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$, для $j \notin A$.

Пусть $\frac{\gamma_m}{\gamma'_m} - \delta_{m-1} = 0$. Тогда $A = A_m = A_{m-1} \cup \{m\}$ и $j_1 = \min\{j \in A_m\} = \min\{j \in A_{m-1}\} = j_{0,m-1}$. Поэтому, учитывая, что $\lambda_j \geq 0$ для $j \in A$, из неравенства (3) для $\lambda_m \geq 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_1(n) & \ll 2^{-n \alpha \delta_{m-1}} \sup_{0 \leq s_m < n/\gamma'_m} (s_m + 1)^{\lambda_m} (n - s_m \gamma'_m)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \ll \\ & \ll 2^{-n \alpha \delta_{m-1}} (n + 1)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} \sup_{0 \leq s_m < n/\gamma'_m} (s_m + 1)^{\lambda_m} \ll \\ & \ll 2^{-n \alpha \delta_{m-1}} (n + 1)^{\sum_{j \in A_{m-1}} \lambda_j} (n + 1)^{\lambda_m} = C 2^{-n \alpha \delta_m} (n + 1)^{\sum_{j \in A} \lambda_j}. \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом (см. (6) и (7)),

$$\sigma_1(n) \ll 2^{-n \alpha \delta} (n + 1)^{\sum_{j \in A} \lambda_j}, \quad (8)$$

$\lambda_j \geq 0$ для $j \in A$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$ для $j \notin A$. Так как для $\lambda > 0$ функция $\frac{t^\lambda}{2^t} \downarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, то

$$\sigma_2(n) \ll \sup_{s_m \geq n/\gamma'_m} 2^{-s_m \gamma'_m \alpha} (s_m + 1)^{\lambda_m} \ll 2^{-n \alpha \frac{\gamma_m}{\gamma'_m}} (n + 1)^{\lambda_m} \quad (9)$$

для $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$.

Теперь из равенства (2) и неравенств (8), (9) следует, что

$$I_n^m \ll 2^{-n \alpha \delta} (n + 1)^{\sum_{j \in A} \lambda_j} + 2^{-n \alpha \frac{\gamma_m}{\gamma'_m}} (n + 1)^{\lambda_m} \ll 2^{-n \alpha \delta} (n + 1)^{\sum_{j \in A} \lambda_j},$$

$\lambda_j \geq 0$ для $j \in A$ и $\lambda_j \in \mathbb{R}$ для $j \notin A$. □



2. Основные результаты

Пусть $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $r_j > 0$, $b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим вспомогательный класс

$$S_{2, \bar{\theta}}^{\bar{r}, \bar{b}} B = \left\{ f \in L_2(\mathbb{T}^m) : \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} (s_j + 1)^{b_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq 1 \right\}.$$

Для функции $f \in L_1(\mathbb{T}^m)$ положим (см. [7, 14])

$$f_{l, \bar{r}}(\bar{x}) = \sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}), \quad l \in \mathbb{Z}_+,$$

где $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq \dots \leq \gamma_m$, $\gamma_j = \frac{r_j}{r_1}$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$.

Для оценки M -членных наилучших приближений дифференцируемых функций конструктивным методом используется класс $W_A^{a, b}$ (см. [7, 14]). Пусть число $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$. Рассмотрим следующий класс определенный в [7, 14]:

$$W_A^{a, b} = \left\{ f \in L_1(\mathbb{T}^m) : \|f_{l, \bar{\gamma}}\|_A \leq 2^{-la} l_0^{(\nu-1)b} \right\},$$

где $l_0 = \max\{1, l\}$, $l \in \mathbb{Z}_+$ и

$$\|f_{l, \bar{\gamma}}\|_A = \sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma} \rangle < l+1} \sum_{\bar{n} \in \rho(\bar{s})} |a_{\bar{n}}(f)|.$$

Используя класс $W_A^{a, b}$, докажем следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$, $b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$, $0 < r_{j_0} = \min\{r_j : j = 1, \dots, m\}$, $A = \{j = 1, \dots, m : r_j = r_{j_0}\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$.

Если $r_{j_0} > 1/2$, то

$$e_M(S_{2, \bar{\theta}}^{\bar{r}, \bar{b}} B)_\infty \ll \left(\frac{\log^{|A|-1} M}{M} \right)^{r_{j_0}} (\log M)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}) - \sum_{j \in A} b_j} \sqrt{\log M}$$

при условии

$$\min \left\{ - \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} b_j + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta_j'}, -b_{j'} + \frac{1}{\theta_{j'}} \right\} > 0, \quad (10)$$

где $j' = \max\{j \in A\}$, $|A|$ — количество элементов множества $A \subset \{1, \dots, m\}$.

Доказательство. Сначала докажем, что $S_{2, \bar{\theta}}^{\bar{r}, \bar{b}} B \subset C(\mathbb{T}^m)$. Пусть $f \in S_{2, \bar{\theta}}^{\bar{r}, \bar{b}} B$. По свойству нормы в пространстве $C(\mathbb{T}^m)$ и неравенству разных метрик Никольского для тригонометрического полинома [15, гл. 3, подразд. 3.4.3] имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &\leq \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_\infty \leq 2^m \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{s_j/2} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 = \\ &= 2^m \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} (s_j + 1)^{b_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j-1/2)} (s_j + 1)^{-b_j}. \end{aligned} \quad (11)$$

Если $\theta_j = \infty$, $j = 1, \dots, m$, то из неравенства (11) получим

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \left(\prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} (s_j + 1)^{b_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \right) \sum_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j-1/2)} (s_j + 1)^{-b_j}. \quad (12)$$



Если $1 \leq \theta_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$, то, применяя неравенство Гельдера при $\frac{1}{\theta_j} + \frac{1}{\theta'_j} = 1$, $j = 1, \dots, m$ (при $\theta_j = 1$ считается, что $\theta'_j = \infty$), из неравенства (11) будем иметь

$$\|f\|_\infty \leq \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{s_j r_j} (s_j + 1)^{b_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j-1/2)} (s_j + 1)^{-b_j} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}'}} \quad (13)$$

где $\bar{\theta}' = (\theta'_1, \dots, \theta'_m)$. Так как $r_j - \frac{1}{2} > 0$, $j = 1, \dots, m$, то из неравенств (12) и (13) следует, что $S_{2, \bar{\theta}}^{\bar{r}, \bar{b}} B \subset C(\mathbb{T}^m)$.

Докажем оценку сверху величины $e_M(S_{2, \bar{\theta}}^{\bar{r}, \bar{b}} B)_\infty$. Пусть $f \in S_{2, \bar{\theta}}^{\bar{r}, \bar{b}} B$. Для $M \in \mathbb{N}$ существует натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{|A|-1}$. Введем обозначения $\gamma_j = \frac{r_j}{r_{j_0}}$, $j = 1, \dots, m$ и $\gamma'_j = \gamma_j = 1$, для $j \in A$ и $1 < \gamma'_j < \gamma_j$, для $j \notin A$, $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, $\bar{\gamma}' = (\gamma'_1, \dots, \gamma'_m)$. Как в доказательствах неравенств (11)–(13), применяя равенство Парсеваля [15, гл. 3, разд. 5.5], неравенство Гельдера при $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $\frac{1}{\theta_j} + \frac{1}{\theta'_j} = 1$, $j = 1, \dots, m$ и лемму 1, имеем

$$\begin{aligned} \|f_{l, \bar{\gamma}'}\|_A &= \sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < l+1} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_A \leq 2^m \sum_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < l+1} 2^{\langle \bar{s}, \bar{1} \rangle \frac{1}{2}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \ll \\ &\ll \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s}, \bar{r} \rangle} \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{b_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \right\}_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < l+1} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^m 2^{-s_j(r_j-\frac{1}{2})} (s_j + 1)^{-b_j} \right\}_{l \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < l+1} \right\|_{l_{\bar{\theta}'}} \ll \\ &\ll 2^{-l(r_{j_0}-\frac{1}{2})} l^{-\sum_{j \in A} b_j + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j}} \end{aligned} \quad (14)$$

для функции $f \in S_{2, \bar{\theta}}^{\bar{r}, \bar{b}} B$ при условии (10), где $\bar{1} = (1, \dots, 1)$. Поэтому согласно лемме 6.1 [7] при $a = r_{j_0} - \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{|A|-1} \left(\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j} - \sum_{j \in A} b_j \right)$ будем иметь

$$\begin{aligned} e_M(W_{\mathcal{A}}^{r_{j_0}-\frac{1}{2}, b})_\infty &\ll M^{-1/2} M^{-(r_{j_0}-\frac{1}{2})} (\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0}-\frac{1}{2}+\frac{1}{|A|-1}(\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j} - \sum_{j \in A} b_j))} \sqrt{\log M} = \\ &= C \left(\frac{\log^{|A|-1} M}{M} \right)^{r_{j_0}} (\log M)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} (\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta'_j}) - \sum_{j \in A} b_j} \sqrt{\log M} \end{aligned} \quad (15)$$

при условии (10). Из оценки (14) следует, что

$$S_{2, \bar{\theta}}^{\bar{r}, \bar{b}} B \subset W_{\mathcal{A}}^{r_{j_0}-\frac{1}{2}, b},$$

где $b = \frac{1}{|A|-1} \left(\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \frac{1}{\theta'_j} - \sum_{j \in A} b_j \right)$. Поэтому из оценки (15) следует, что утверждение теоремы 1 доказано. \square

Теорема 2. Пусть $\bar{p} = (p_1, \dots, p_m)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)$, $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$ и $1 < p_j, \tau_j < \infty$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$ и $0 < r_{j_0} - \max\{\frac{1}{p_{j_0}}, \frac{1}{2}\} = \min\{r_j - \max\{\frac{1}{p_j}, \frac{1}{2}\} : j = 1, \dots, m\}$, $A = \{j : r_j - \max\{\frac{1}{p_j}, \frac{1}{2}\} = r_{j_0} - \max\{\frac{1}{p_{j_0}}, \frac{1}{2}\}, j = 1, \dots, m\}$, $j_1 = \min\{j \in A\}$.

1. Если $2 \leq \theta_j \leq +\infty$, $p_j \in (1, 2) \cup (2, \infty)$, $1 < \tau_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$, то

$$\begin{aligned} e_M(S_{\bar{p}, \bar{\alpha}, \bar{\tau}, \bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_\infty &\ll M^{-(r_{j_0} - (\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{2})_+)} (\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0} - (\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{2})_+) - \sum_{j \in A} \alpha_j} \times \\ &\times (\log M)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})} (\log M)^{1/2} \end{aligned}$$



при условии $\min\left\{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}\right) - \sum_{j \in A \setminus \{j'\}} \alpha_j, \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_{j'}} - \alpha_{j'}\right\} > 0$, где $j' = \max\{j \in A\}$.

2. Если $p_j = 2$ и $1 < \tau_j < \infty$, $2 \leq \theta_j \leq \infty$, $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, m$, то

$$e_M(\mathbb{S}_{2,0,\bar{\tau},\bar{\theta}}^\tau B)_\infty \ll \left(\frac{\log|A|-1}{M}\right)^{r_{j_0}} (\log M)^{j \in A \setminus \{j_1\} \sum (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}) + \sum_{j \in A} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j}) +} (\log M)^{1/2}.$$

3. Если $\alpha_j = 0$ и $2 \leq \theta_j \leq +\infty$, $p_j \in (1, 2) \cup (2, \infty)$, $1 < \tau_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$, то

$$M^{-(r_{j_0} - (\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{2})_+)} (\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0} - (\frac{1}{p_{j_0}} - \frac{1}{2})_+)} (\log M)^{j \in A \setminus \{j_1\} \sum (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})} \ll e_M(\mathbb{S}_{\bar{p},0,\bar{\tau},\bar{\theta}}^\tau B)_\infty.$$

Доказательство. Пусть $2 < p_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\mathbb{S}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{\theta}}^\tau B \subset \mathbb{S}_{2,0,2,\bar{\theta}}^\tau B = \mathbb{S}_{2,\bar{\theta}}^\tau B$ для $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$. В теореме 1, полагая $b_j = 0$ для $j = 1, \dots, m$, имеем

$$e_M(\mathbb{S}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{\theta}}^\tau B)_\infty \ll e_M(\mathbb{S}_{2,\bar{\theta}}^\tau B)_\infty \ll M^{-r_{j_0}} (\log M)^{j \in A \setminus \{j_1\} \sum (r_{j_0} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})}$$

в случае $2 < p_j < \infty$, $2 \leq \theta_j \leq +\infty$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть $1 < p_j < 2$, $j = 1, \dots, m$. В статье [16], в теореме 2, полагая $\varphi_j(t) = t^{1/p_j}(1 + |\log t|)^{\alpha_j}$ и $\psi_j(t) = t^{1/2}$, для $t \in (0, 1]$, $j = 1, \dots, m$ и $f(\bar{x}) = \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x})$, получим

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \ll \prod_{j=1}^m 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{2})} (s_j + 1)^{-\alpha_j} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau}}^*$$

при $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $1 < \tau_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$. В силу этого неравенства имеем $\mathbb{S}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{\theta}}^\tau B \subset \mathbb{S}_{2,\bar{\theta}}^{\bar{\beta},\bar{\alpha}} B$, где $\bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_m)$, $\beta_j = r_j - \frac{1}{p_j} + \frac{1}{2}$, для $j = 1, \dots, m$. Поэтому согласно теореме 1 получим

$$\begin{aligned} e_M(\mathbb{S}_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{\tau},\bar{\theta}}^\tau B)_\infty &\ll e_M(\mathbb{S}_{2,\bar{\theta}}^{\bar{\beta},\bar{\alpha}} B)_\infty \ll M^{-\beta_{j_0}} (\log M)^{j \in A \setminus \{j_1\} \sum (\beta_{j_0} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}) - \sum_{j \in A} \alpha_j} \sqrt{\log M} \ll \\ &\ll M^{-(r_{j_0} - \frac{1}{p_j} + \frac{1}{2})} (\log M)^{(|A|-1)(r_{j_0} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_{j_0}}) - \sum_{j \in A} \alpha_j} (\log M)^{j \in A \setminus \{j_1\} \sum (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})} \sqrt{\log M} \end{aligned}$$

в случае $1 < p_j < 2$, $j = 1, \dots, m$, при условии

$$\min\left\{-\sum_{j \in A} \alpha_j + \sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}\right), -\alpha_{j'} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_{j'}}\right\} > 0.$$

Первое утверждение доказано.

Докажем утверждение 2. Пусть $p_j = 2$ и $1 \leq \tau_j \leq 2$, $\alpha_j = 0$, $j = 1, \dots, m$. Тогда из известного неравенства $\|f\|_2 \ll \|f\|_{2,\bar{\tau}}^*$ для $f \in L_{2,\bar{\tau}}^*$ следует, что $\mathbb{S}_{2,\bar{\tau},\bar{\theta}}^\tau B \subset \mathbb{S}_{2,\bar{\tau},\bar{\theta}}^\tau B$. Следовательно, из теоремы 1 при $2 < \theta_j \leq \infty$ и $b_j = 0$, $j = 1, \dots, m$ получим

$$e_M(\mathbb{S}_{2,\bar{\tau},\bar{\theta}}^\tau B)_\infty \ll M^{-r_{j_0}} (\log M)^{j \in A \setminus \{j_1\} \sum (r_{j_0} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})} \sqrt{\log M}.$$

Если $2 < \tau_j < \infty$ и $p_j = 2$, $j = 1, \dots, m$, то в силу неравенства разных метрик для тригонометрического полинома в анизотропном пространстве Лоренца [17] имеем

$$\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_2 \ll \prod_{j=1}^m (s_j + 1)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j}} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{2,\bar{\tau}}^*.$$



Поэтому $S_{2,\bar{\tau},\bar{\theta}}^{\bar{\tau}}B \subset S_{2,\bar{\theta}}^{\bar{\tau},\bar{b}}B$, где $\bar{b} = (b_1, \dots, b_m)$, $b_j = \frac{1}{\tau_j} - \frac{1}{2}$, $2 < \tau_j < \infty$, $j = 1, \dots, m$. Следовательно, по теореме 1 будем иметь

$$e_M(S_{2,\bar{\tau},\bar{\theta}}^{\bar{\tau}}B)_{\infty} \ll e_M(S_{2,\bar{\theta}}^{\bar{\tau},\bar{b}}B)_{\infty} \ll M^{-r_{j_0}} (\log M)^{\sum_{j \in A \setminus \{j_1\}} (r_{j_0} + \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j}) + \sum_{j \in A} (\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j})} \sqrt{\log M}$$

в случае $2 < \tau_j < \infty$ и $p_j = 2$, $j = 1, \dots, m$.

Докажем утверждение 3. Мы воспользуемся схемой доказательства оценки снизу в теореме [9]. Введем обозначения. Для $\bar{s} = (s_1, \dots, s_m)$, s_j — четные натуральные числа, для $j = 1, \dots, m$ обозначим $\rho^+(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, \dots, k_m) : 2^{s_j-1} \leq k_j < 2^{s_j}, k_j \in \mathbb{N}\}$ для $n \in \mathbb{N}$ положим

$$B_n = \{\bar{s} = (s_1, \dots, s_m) : \langle \bar{s}, \bar{1} \rangle = 2[n/2], s_j \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, m\}, \quad \bar{Q}'_n = \cup_{\bar{s} \in B_n} \rho^+(\bar{s}).$$

Пусть $\mathfrak{F}(\bar{Q}'_n)$ — множество тригонометрических полиномов

$$t(\bar{x}) = \sum_{|\bar{k}| \in \bar{Q}'_n} c_{\bar{k}} e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}, \quad |\bar{k}| = (|k_1|, \dots, |k_m|).$$

Аналогично [18, с. 96], рассмотрим пространство $S_{q,\bar{\theta}}^0 B$, которое для тригонометрических полиномов $t \in \mathfrak{F}(\bar{Q}'_n)$ определим формулой

$$\|t\|_{S_{q,\bar{\theta}}^0 B} = \left\| \left\{ \|A_{\bar{s}}(t)\|_q \right\}_{\bar{s} \in B_n} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}$$

для $1 \leq q \leq \infty$, $1 \leq \theta_j \leq \infty$, $j = 1, \dots, m$. Далее, $(\mathfrak{F}(\bar{Q}'_n))_{S_{q,\bar{\theta}}^0 B}$ означает единичный шар в пространстве $\mathfrak{F}(\bar{Q}'_n)$ по норме пространства $S_{q,\bar{\theta}}^0 B$.

В [18, с. 97] доказано, что

$$e_M((\mathfrak{F}(\bar{Q}'_n))_{S_{\infty,\infty}^0 B}, T)_q \geq e_M((\mathfrak{F}(\bar{Q}'_n))_{S_{\infty,\infty}^0 B}, \{e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}\}_{\bar{k} \in \bar{Q}'_n})_q \quad (16)$$

для $q \in (1, \infty)$, где $T = \{e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}\}_{\bar{k} \in \mathbb{Z}^m}$. Для $t \in \mathfrak{F}(\bar{Q}'_n)$ справедливо неравенство

$$\|t\|_{S_{\infty,\bar{\theta}}^{\bar{\tau}} B} \leq 2^{nr_1} \max_{\bar{s} \in B_n} \|A_{\bar{s}}(t)\|_{\infty} \left\| \left\{ \chi_{B_n}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in B_n} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}, \quad (17)$$

где χ_{B_n} — характеристическая функция множества B_n . В силу леммы 2 [19] имеем

$$\left\| \left\{ \chi_{B_n}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in B_n} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \asymp n^{\sum_{j=2}^m 1/\theta_j}.$$

Поэтому из (17) следует, что

$$\|t\|_{S_{\infty,\bar{\theta}}^{\bar{\tau}} B} \ll 2^{nr_1} n^{\sum_{j=2}^m 1/\theta_j} \|t\|_{S_{\infty,\infty}^0 B}.$$

Следовательно, существует постоянная $C_0 > 0$ такая, что

$$C_0 2^{-nr_1} n^{-\sum_{j=2}^m 1/\theta_j} (\mathfrak{F}(\bar{Q}'_n))_{S_{\infty,\infty}^0 B} \subset S_{\infty,\bar{\theta}}^{\bar{\tau}} B \cap \mathfrak{F}(\bar{Q}'_n). \quad (18)$$

Теперь из неравенств (16) и включения (18) следует, что

$$\begin{aligned} e_M(S_{\infty,\bar{\theta}}^{\bar{\tau}} B)_q &\gg e_M(S_{\infty,\bar{\theta}}^{\bar{\tau}} B \cap \mathfrak{F}(\bar{Q}'_n))_q \gg \\ &\gg 2^{-nr_1} n^{-\sum_{j=2}^m 1/\theta_j} e_M((\mathfrak{F}(\bar{Q}'_n))_{S_{\infty,\infty}^0 B}, \{e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}\}_{\bar{k} \in \bar{Q}'_n})_q. \end{aligned} \quad (19)$$



На основании теоремы 2.1 из [20] в [18, с. 98] доказано, что

$$e_M((\mathfrak{F}(\bar{Q}'_n))_{B_{\infty,\infty}^0}, \{e^{i\langle \bar{k}, \bar{x} \rangle}\}_{\bar{k} \in \bar{Q}'_n})_q \gg n^{\frac{m-1}{2}}. \quad (20)$$

Далее, из неравенств (19) и (20) следует, что

$$e_M(B_{\infty,\bar{\theta}}^{\bar{r}})_q \gg 2^{-nr_1} n^{\sum_{j=2}^m (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})} \asymp M^{-r_1} (\log M)^{(m-1)r_1 + \sum_{j=2}^m (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})}. \quad (21)$$

Так как $S_{\infty,\bar{\theta}}^{\bar{r}} B \subset S_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{r},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B$, то из соотношения (21) получим

$$e_M(S_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{r},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_q \gg e_M(S_{\infty,\bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_q \gg M^{-r_1} (\log M)^{(m-1)r_1 + \sum_{j=2}^m (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})} \quad (22)$$

для $1 \leq q < \infty$. Далее, из неравенства (22) следует, что

$$e_M(S_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{r},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_{\infty} \gg e_M(S_{\bar{p},\bar{\alpha},\bar{r},\bar{\theta}}^{\bar{r}} B)_q \gg M^{-r_1} (\log M)^{(m-1)r_1 + \sum_{j=2}^m (\frac{1}{2} - \frac{1}{\theta_j})}. \quad \square$$

Заключение

В случае $\tau_j = p_j = p$, $\theta_j = \theta$, $\alpha_j = 0$, для $j = 1, \dots, m$ из теоремы 2 следует теорема 1 [9]. Теорема 2 анонсирована в [21].

Список литературы

1. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. Москва : Наука, 1978. 400 с.
2. Kolyada V. I. On embedding theorems // Nonlinear analysis, function spaces and application. Vol. 8: Proceedings of the Spring School held in Prague, May 30 – June 6, 2006 / ed. by J. Rákosník. Praha : Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic, 2007. P. 35–94.
3. Blozinski A. P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms // Transactions of the American Mathematical Society. 1981. Vol. 263, iss. 1. P. 146–167. <https://doi.org/10.2307/1998649>
4. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of operators. Orlando : Academic Press, 1988. 469 p.
5. Лизоркин П. И., Никольский С. М. Пространства функций смешанной гладкости с декомпозиционной точкой зрения // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 1989. Т. 187. С. 143–161.
6. Аманов Т. И. Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной. Алма-Ата : Наука, 1976. 224 с.
7. Темляков В. Н. Конструктивные разреженные тригонометрические приближения и другие задачи для функций смешанной гладкости // Математический сборник. 2015. Т. 206, № 11. С. 131–160. <https://doi.org/10.4213/sm8466>
8. Belinskii E. S. Approximation of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics and estimates of ϵ -entropy // Analysis Mathematica. 1989. Vol. 15, iss. 2. P. 67–74. <https://doi.org/10.1007/BF01910941>
9. Романюк А. С. Наилучшие тригонометрические приближения классов периодических функций многих переменных в равномерной метрике // Математические заметки. 2007. Т. 82, вып. 2. С. 247–261. <https://doi.org/10.4213/mzm3797>
10. Temlyakov V. N., Ullrich T. Approximation of functions with small mixed smoothness in the uniform norm // Journal of Approximation Theory. 2022. Vol. 277. Art. 105718. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2022.105718>
11. Акишев Г. О порядках M -членного приближения классов в пространстве Лоренца // Математический журнал. Алматы. 2011. Т. 11, № 1. С. 5–29.
12. Акишев Г. А. Об оценках порядка наилучших M -членных приближений функций многих переменных в анизотропном пространстве Лоренца – Караматы // Уфимский математический журнал. 2023. Т. 15, вып. 1. С. 3–21.
13. Akishev G. On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz–Zygmund space // arXiv:2106.07188v2 [mathCA]. 14 Jun 2021. 20 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2106.07188>



14. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness // *Constructive Approximation*. 2017. Vol. 45, iss. 3. P. 467–495. <https://doi.org/10.1007/s00365-016-9345-3>
15. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва : Наука, 1977. 456 с.
16. Akishev G. Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space // arXiv:2105.14810v1 [math.CA]. 31 May 2021. 18 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.14810>
17. Нурсултанов Е. Д. Неравенство разных метрик С. М. Никольского и свойства последовательности норм сумм Фурье функции из пространства Лоренца // *Труды Математического института имени В. А. Стеклова*. 2006. Т. 255. С. 197–215.
18. Романюк А. С. Наилучшие M -членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных // *Известия Российской академии наук. Серия математическая*. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 61–100. <https://doi.org/10.4213/im427>
19. Акишев Г. Приближение функциональных классов в пространствах со смешанной нормой // *Математический сборник*. 2006. Т. 197, № 8. С. 17–40. <https://doi.org/10.4213/sm1127>
20. Кашин Б. С., Темляков В. Н. О наилучших m -членных приближениях и энтропии множеств в пространстве L_1 // *Математические заметки*. 1994. Т. 56, № 5. С. 57–86.
21. Акишев Г. Об оценках наилучших M -членных приближений функций многих переменных в пространстве с равномерной метрикой // *Современные проблемы теории функций и их приложения*. 2024. Вып. 22. С. 12–15. EDN: [KNYWGH](https://doi.org/10.48550/arXiv.2106.07188)

References

1. Krein S. G., Petunin Yu. I., Semenov E. M. *Interpolatsiya lineynykh operatorov* [Interpolation of linear operators]. Moscow, Nauka, 1978. 400 p. (in Russian).
2. Kolyada V. I. On embedding theorems. In: Rákosník J. (ed.) *Nonlinear analysis, function spaces and application*. Vol. 8: Proceedings of the Spring School held in Prague, May 30 – June 6, 2006. Praha, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic Publ., 2007, pp. 35–94.
3. Blozinski A. P. Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1981, vol. 263, iss. 1, pp. 146–167. <https://doi.org/10.2307/1998649>
4. Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of operators*. Orlando, Academic Press, 1988. 469 p.
5. Lizorkin P. I., Nikol'skii S. M. Spaces of functions of mixed smoothness from the decomposition point of view. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1990, vol. 187, pp. 163–184.
6. Amanov T. I. *Prostranstva differentsiruyemykh funktsiy s dominiruyushchey smeshannoy proizvodnoy* [Spaces of differentiable functions with dominant mixed derivative]. Alma-Ata, Nauka, 1976. 224 p. (in Russian).
7. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation and other problems for functions with mixed smoothness. *Sbornik: Mathematics*, 2015, vol. 206, iss. 11, pp. 1628–1656. <https://doi.org/10.1070/SM2015v206n11ABEH004507>
8. Belinskii E. S. Approximation of functions of several variables by trigonometric polynomials with given number of harmonics and estimates of ε -entropy. *Analysis Mathematica*, 1989, vol. 15, iss. 2, pp. 67–74. <https://doi.org/10.1007/BF01910941>
9. Romanyuk A. S. Best trigonometric approximations for some classes of periodic functions of several variables in the uniform metric. *Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, iss. 2, pp. 216–228. <https://doi.org/10.1134/S0001434607070279>
10. Temlyakov V. N., Ullrich T. Approximation of functions with small mixed smoothness in the uniform norm. *Journal of Approximation Theory*, 2022, vol. 277, art. 105718. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2022.105718>
11. Akishev G. On the order of the M -term approximation classes in Lorentz spaces. *Matematicheskaya Zhurnal*, Almaty, 2011, vol. 11, iss. 1, pp. 5–29 (in Russian).
12. Akishev G. A. On estimates for orders of best M -term approximations of multivariate functions in anisotropic Lorentz–Karamata spaces. *Ufa Mathematical Journal*, 2023, vol. 15, iss. 1, pp. 1–20. <https://doi.org/10.13108/2023-15-1-1>
13. Akishev G. On exact estimates of the order of approximation of functions of several variables in the anisotropic Lorentz–Zygmund space. arXiv:2106.07188v2 [math.CA], 14 Jun 2021. 20 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2106.07188>



14. Temlyakov V. N. Constructive sparse trigonometric approximation for functions with small mixed smoothness. *Constructive Approximation*, 2017, vol. 45, iss. 3, pp. 467–495. <https://doi.org/10.1007/s00365-016-9345-3>
15. Nikol'skii S. M. *Priblizheniye funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vložheniya* [Approximation of functions of several variables and imbedding theorems]. Moscow, Nauka, 1977. 456 p. (in Russian).
16. Akishev G. Estimates of the order of approximation of functions of several variables in the generalized Lorentz space. *arXiv:2105.14810v1 [math.CA]*, 31 May 2021. 18 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2105.14810>
17. Nursultanov E. D. Nikol'skii's inequality for different metrics and properties of the sequence of norms of the Fourier sums of a function in the Lorentz space. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2006, vol. 255, pp. 185–202. <https://doi.org/10.1134/S0081543806040158>
18. Romanyuk A. S. Best M -term trigonometric approximations of Besov classes of periodic functions of several variables. *Izvestiya: Mathematics*, 2003, vol. 67, iss. 2, pp. 265–302. <https://doi.org/10.1070/IM2003v067n02ABEH000427>
19. Akishev G. A. Approximation of function classes in spaces with mixed norm. *Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, iss. 8, pp. 1121–1144. <https://doi.org/10.1070/SM2006v197n08ABEH003791>
20. Kashin B. S., Temlyakov V. N. On best m -term approximations and the entropy of sets in the space L_1 . *Mathematical Notes*, 1994, vol. 56, iss. 5, pp. 1137–1157. <https://doi.org/10.1007/BF02274662>
21. Akishev G. On estimates of the best m -term approximations of functions of many variables in a space with a uniform metric. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*, 2024, iss. 22, pp. 12–15 (in Russian). EDN: [KNYWGH](https://www.edn.ru/KNYWGH)

Поступила в редакцию / Received 24.02.2024

Принята к публикации / Accepted 16.07.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025



Article

Estimation of the difference of partial sums of expansions by the root functions of the differential operator and into trigonometric Fourier series

V. S. Rykhlov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Victor S. Rykhlov, rykhlovvs@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1556-7707>, SPIN: 5650-4265, AuthorID: 2936

Abstract. We consider a linear ordinary differential operator defined by an n -th order differential expression with a nonzero coefficient for $(n - 1)$ th derivative and Birkhoff regular two-point boundary conditions. The question of the uniform convergence of expansions of a function into a series of root functions of the operator L and the usual trigonometric Fourier series, as well as the estimation of the difference of the corresponding partial sums, is investigated. Estimates of the difference of the partial sums of these expansions are obtained in terms of the general (integral) modules of continuity of the expandable function and the coefficient at the $(n - 1)$ th derivative. The proof essentially uses the estimate (previously obtained by the author) of the difference between the partial sums of the expansions of a function in a series with respect to the root functions of the operator L and in the modified trigonometric Fourier series, as well as the author's analogue of the Steinhaus theorem in terms of general modules of continuity.

Keywords: ordinary differential operator, root functions, eigen and associated functions, expansion in a series by root functions, equiconvergence of expansions, estimation of the difference of partial sums, integral modules of continuity.

For citation: Rykhlov V. S. Estimation of the difference of partial sums of expansions by the root functions of the differential operator and into trigonometric Fourier series. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 167–172. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-167-172>, EDN: ENEECH

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 517.927.25

Оценка разности частичных сумм разложений по корневым функциям дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье

В. С. Рыхлов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Рыхлов Виктор Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, rykhlovvs@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1556-7707>, SPIN: 5650-4265, AuthorID: 2936

© Rykhlov V. S., 2025



Аннотация. Рассматривается линейный обыкновенный дифференциальный оператор, определяемый дифференциальным выражением n -го порядка с ненулевым коэффициентом при $(n - 1)$ -й производной и регулярными по Биркгофу двухточечными краевыми условиями. Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений функции в ряд по корневым функциям оператора L и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также об оценке разности соответствующих частичных сумм. Получены оценки разности частичных сумм этих разложений в терминах общих (интегральных) модулей непрерывности разлагаемой функции и коэффициента при $(n - 1)$ -й производной. Доказательство существенно использует ранее полученную автором оценку разности частичных сумм разложений функции в ряд по корневым функциям оператора L и в модифицированный тригонометрический ряд Фурье, а также полученный автором аналог теоремы Штейнгауза в терминах общих модулей непрерывности.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор, корневые функции, собственные и присоединенные функции, разложение в ряд по корневым функциям, равносходимость разложений, оценка разности частичных сумм, интегральные модули непрерывности

Для цитирования: Rykhlov V. S. Estimation of the difference of partial sums of expansions by the root functions of the differential operator and into trigonometric Fourier series [Рыхлов В. С. Оценка разности частичных сумм разложений по корневым функциям дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 167–172. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-167-172>, EDN: ENEECH
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

Consider the differential operator L generated by the differential expression

$$\ell(y) = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y, \quad p_j(x) \in L_1[0, 1],$$

and boundary conditions

$$\sum_{j=0}^{n-1} (a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1)$$

Suppose that the boundary conditions (1) are Birkhoff regular [1, pp. 66–67].

One of the important problems is the problem of expansion of a given function into a series of root functions (r.f.) of the operator L . This problem is most completely solved in the case when it is possible to prove the equiconvergence of the expansion (in one or another sense) of the given function into the series on the r.f. of the operator L and into the trigonometric Fourier series since the trigonometric system is well enough studied.

The trigonometric system is a system of the r.f. of the operator L_0 of the form

$$\ell_0(y) = y^{(n)}, \quad y^{(k-1)}(0) - y^{(k-1)}(1) = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

We study the influence of the properties of the coefficient $p_1(x)$ and the expandable function $f(x)$ on the estimation of the difference of partial sums of series expansions by the r.f. of operators L and L_0 in the uniform metric inside the interval $(0, 1)$.

Some results have already been published in [2–4]. A brief background can also be found there. A more detailed background is given in the review articles [5, 6].

1. Basic concepts. Formulation of the theorem

Let λ_ν , $\lambda_{0\nu}$, $\nu = 0, 1, \dots$, be the eigenvalues (e.v.) of the operators L and L_0 , respectively. Let us denote by D_δ the region of \mathbb{C} resulting from the removal of all e.v. operators L and L_0 together with circles with centers in the e.v. and of sufficiently small fixed radius $\delta > 0$.



From the asymptotics of e.v. [1, p. 74–75] it follows that there exists a sequence $\{r_m\}_{m=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$ such that $(2\pi m)^n < r_m < (2\pi(m+1))^n$, and the contours $\Gamma_m := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_m\}$, starting from some sufficiently large m , lie in the region D_δ .

Between neighboring contours, there are at most two e.v. λ_ν of the operator L starting from some m , and one double e.v. $\lambda_{0\mu}$ of the operator L_0 . The consideration of such contours is due to the structure of the usual trigonometric Fourier series, which is actually a series with brackets.

Let us denote by R_λ and $R_{0\lambda}$ the resolvents of the operators L and L_0 , respectively. Let

$$S_m(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_\lambda f d\lambda, \quad \sigma_m(f, x) \equiv S_{0m}(f, x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_m} R_{0\lambda} f d\lambda.$$

It is known [1, p. 92] that $S_m(f, x)$ is a partial sum of the biorthogonal Fourier series of the function $f(x)$ by the r.f. of the operator L , containing summands corresponding to the e.v. λ_ν for which $|\lambda_\nu| < r_m$, and $\sigma_m(f)$ is the partial sum of order m of the ordinary trigonometric Fourier series of the function $f(x)$ (the partial sum of the orthogonal Fourier series of the function $f(x)$ by the r.f. of the operator L_0 , containing summands corresponding to the e.v. $\lambda_{0\nu} = (2\nu\pi i)^n$ for which $|\nu| \leq m$), i.e.

$$\sigma_m(f, x) := \sum_{k=-m}^m (f, e_k) e_k(x), \quad \text{where } (f, e_k) := \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi.$$

For $f(x)$ from $L_1[0, 1]$ denote

$$\Phi_m(x) = S_m(f, x) - V\sigma_m(V^{-1}f, x), \quad \Psi_m(x) = S_m(f, x) - \sigma_m(f, x), \quad (2)$$

where

$$V(x) = \exp\left(-\frac{1}{n} \int_0^x p_1(\tau) d\tau\right). \quad (3)$$

Let us introduce the following continuity modules

$$\omega(f, \delta)_p = \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(t+h) - f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad \text{где } 1 \leq p < \infty,$$

$$\omega(f, \delta)_\infty = \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} |f(t+h) - f(t)|.$$

By $L_\infty[0, 1]$, we understand the space $C[0, 1]$.

The following condition is used further

$$f(x) \in L_r[0, 1], \quad p_1(x) \in L_q[0, 1], \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1, \quad 1 \leq q \leq \infty. \quad (4)$$

To formulate the theorem on the estimation of $\Psi_m(x)$ we introduce the following notations:

— for the function $h(x) \in C[0, 1]$ denote by

$$H_q(h, m) := \left(\int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} h^q(\xi) d\xi \right)^{1/q} \quad \text{when } 1 \leq q < \infty, \quad H_\infty(h, m) := 1;$$

— for the function $g(x) \in L_q[0, 1]$ denote by

$$\theta_q(g, \delta) := \sup_{\tau \in [0, \delta]} \theta_{1q}(g, \tau) \quad \text{when } 1 \leq q < \infty \quad \text{and} \quad \theta_\infty(g, \delta) \equiv 1,$$

$$\begin{aligned}\theta_{1q}(g, \tau) &:= \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(g, \frac{1}{k}\right)_q + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{when } 1 \leq q < \infty, \\ \hat{\theta}_q(g, \delta) &= \sup_{\tau \in [0, \delta]} \hat{\theta}_{1q}(g, \tau) \quad \text{when } 1 \leq q < \infty \quad \text{and} \quad \hat{\theta}_\infty(g, \delta) \equiv 1, \\ \hat{\theta}_{1q}(g, \tau) &= \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega\left(g, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(g, \frac{1}{k}\right) + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad \text{when } 1 \leq q < \infty.\end{aligned}$$

Theorem 1. Under the condition (4) for any compact $K \subset (0, 1)$ and $m \in \mathbb{N}$, $m \gg 1$,

$$\|\Psi_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, L, K) B_m$$

where

$$\begin{aligned}B_m &= \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \left(\ln m \omega\left(p_1, \frac{1}{k}\right)_q + 1 + H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m) + \frac{k^{2/q}}{m^{1/q}} + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_r + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{k^2 \ln m}{m} \right) \omega\left(p_1, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) + \frac{k^{2+2/q}}{m^{1+1/q}} + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}.\end{aligned}$$

Theorem 1 was previously formulated in [4], but the proof was not given. This paper fills this gap. Moreover, the formulation of Theorem 1 clarifies the formulation of the corresponding theorem from [4].

If we impose conditions on $\omega(f, \delta)_r$ and $\omega(p_1, \delta)_q$ such that $B_m \rightarrow 0$ at $m \rightarrow \infty$, we can obtain various sufficient conditions of equiconvergence of the corresponding expansions with partial sum difference estimates (see [2–4]).

2. Proof of the theorem 1

The validity of the statement of Theorem 1 in the case of general continuity modules follows from Theorem 1 [4] and the analog of Steinghaus' theorem [7] for general continuity modules on the basis of the relation

$$\begin{aligned}\Psi_m(x) &= S_m(f, x) - \sigma_m(f, x) = S_m(f, x) - V(x)\sigma_m(f, x) + \\ &+ V(x) \left(\sigma_m(V^{-1}f, x) - V^{-1}(x)\sigma_m(f, x) \right) = \Phi_m(x) + V(x) \left(\sigma_m(V^{-1}f, x) - V^{-1}(x)\sigma_m(f, x) \right) = \\ &= \Phi_m(x) - V(x) \left(\mathcal{W}(x)\sigma_m(f, x) - \sigma_m(\mathcal{W}f, x) \right) = \Phi_m(x) - V(x)\Theta_m(x),\end{aligned}\quad (5)$$

where the notations (2) are used, $V(x)$ is defined by the formula (3), $\mathcal{W}(x) := V^{-1}(x)$ and $\Theta_m(x) := \mathcal{W}(x)\sigma_m(f, x) - \sigma_m(\mathcal{W}f, x)$.

The following formula is valid for the function $\mathcal{W}(x)$:

$$\mathcal{W}(x) = V^{-1}(x) = \exp \left(\frac{1}{n} \int_0^x p_1(\tau) d\tau \right) = 1 + \int_0^x \tilde{g}(t) dt, \quad (6)$$

where

$$\tilde{g}(t) := \frac{1}{n} p_1(t) V^{-1}(t). \quad (7)$$

Clearly, if $p_1(t) \in L_q[0, 1]$, then so does $\tilde{g}(t) \in L_q[0, 1]$ and vice versa. Hence, the function $\mathcal{W}(x)$ is the analog of the function $W(x)$ in the analog of Steingaz's theorem from [7] for the case of general continuity modules and for it instead of the formula

$$W(x) = \mathcal{W}_0 + \int_0^x \int_0^t g(t) dt,$$

the formula (6) with $\tilde{g}(t) \in L_q[0, 1]$ is valid.



Then, based on Theorem 1, we obtain from [7] the following estimate

$$\|\Theta_m(x)\|_{C(K)} \leq C(f, \tilde{g}, K) Q_m \quad (8)$$

where

$$Q_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \left(f, \frac{1}{k} \right)_r H_q(\theta_q(\tilde{g}, \cdot), m) + \omega \left(\tilde{g}, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}. \quad (9)$$

Let us evaluate all objects containing the function $\tilde{g}(x)$ through similar objects containing only the original function $p_1(x)$.

If we denote $v := \max_{t \in [0,1]} |V^{-1}(t)|$, then based on (6) we obtain

$$\begin{aligned} \omega(\tilde{g}, \delta)_q &= \frac{1}{n} \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |p_1(t+h)V^{-1}(t+h) - p_1(t)V^{-1}(t)|^q dt \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |p_1(t+h) - p_1(t)|^q |V^{-1}(t+h)|^q dt \right)^{1/q} + \right. \\ &\quad \left. + \sup_{0 < h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |p_1(t)|^q |V^{-1}(t+h) - V^{-1}(t)|^q dt \right)^{1/q} \right) \leq \\ &\leq \frac{v}{n} \omega(p_1, \delta)_q + \|p_1(x)\|_q \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} |V^{-1}(t+h) - V^{-1}(t)| = \\ &= \frac{v}{n} \omega(p_1, \delta)_q + \|p_1(x)\|_q \sup_{0 < h \leq \delta} \sup_{t \in [0, 1-h]} \left| \int_0^{1-h} \tilde{g}(\tau) d\tau \right|. \end{aligned} \quad (10)$$

Since $p_1(x) \in L_q[0, 1]$, based on the equality (7) we have from [7]

$$\int_t^{t+h} |\tilde{g}(\tau)| d\tau \leq \frac{v}{n} \int_t^{t+h} |p_1(\tau)| d\tau \leq C(p_1) h^{\frac{1}{r}} \theta_q(p_1, h). \quad (11)$$

It follows from (10), (11) that

$$\omega(\tilde{g}, \delta)_q \leq C(p_1) \left(\omega(p_1, \delta)_q + \delta^{\frac{1}{r}} \theta_q(p_1, \delta) \right). \quad (12)$$

Using this estimate, we obtain

$$\theta_{1q}(\tilde{g}, \tau) \leq C(p_1) \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \omega \left(p_1, \frac{1}{k} \right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q \left(p_1, \frac{1}{k} \right) + (k^2 \tau)^{\frac{1}{q}} \right\} = C(p_1) \hat{\theta}_{1q}(p_1, \tau).$$

Based on this estimate, we have

$$\theta_q(\tilde{g}, \xi) \leq C(p_1) \sup_{\tau \in [0, \xi]} \hat{\theta}_{1q}(p_1, \tau) = C(p_1) \hat{\theta}_q(p_1, \xi). \quad (13)$$

Finally, from (13) we obtain

$$H_q(\theta_q(\tilde{g}, \cdot), m) \leq C(p_1) \left(\int_{1/m}^1 \frac{1}{\xi} \hat{\theta}_q^q(p_1, \xi) d\xi \right)^{1/q} = C(p_1) H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m). \quad (14)$$



Thus, from (8), (9), (12), (14), it follows that the following estimation is valid

$$Q_m \leq C(f, p_1, K) \hat{Q}_m \quad (15)$$

where

$$\hat{Q}_m = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left\{ H_q(\hat{\theta}_q(p_1, \cdot), m) \omega\left(f, \frac{1}{k}\right)_r + \omega\left(p_1, \frac{1}{k}\right)_q + \frac{1}{k^{1/r}} \theta_q\left(p_1, \frac{1}{k}\right) + \frac{k^4 \ln m}{m} \right\}. \quad (16)$$

Hence, based on the relations (5), (8), (15), (16), and Theorem 1 of [4] on the evaluation of $\|\Phi_m(x)\|$, we obtain the statement of Theorem 1.

Thus, Theorem 1 is proved.

References

1. Naimark M. A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, Nauka, 1969. 527 p. (in Russian).
2. Rykhlov V. S. The rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient multiplying the $(n-1)$ th derivative. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1984, vol. 279, iss. 5, pp. 1053–1056 (in Russian).
3. Rykhlov V. S. Rate of equiconvergence for differential operators with nonzero coefficient of the $n-1$ -th derivative. *Differential Equations*, 1990, vol. 26, iss. 6, pp. 704–715.
4. Rykhlov V. S. Equiconvergence rate in terms of general moduli of continuity for differential operators. *Results in Mathematics*, 1996, vol. 29, pp. 153–168. <https://doi.org/10.1007/BF03322215>
5. Minkin A. M. Equiconvergence theorems for differential operators. *Journal of Mathematical Sciences*, 1999, vol. 96, no. 6, pp. 3631–3715. <https://doi.org/10.1007/bf02172664>
6. Lomov I. S. Estimates of speed of convergence and equiconvergence of spectral decomposition of ordinary differential operators. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2015, vol. 15, iss. 4, pp. 405–418 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2015-15-4-405-418>
7. Rykhlov V. S. On the rate of equiconvergence in an analogue of the Steinghaus theorem. *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, 2015, iss. 3 (28), pp. 62–81 (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 11.12.2024

Принята к публикации / Accepted 09.01.2025

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 173–183

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 173–183

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-173-183>, EDN: ERHSOY

Научная статья

УДК 517.95, 519.63, 51–73

О проекционном методе решения уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью

Е. В. Серегина^{1✉}, М. А. Степович²

¹Калужский филиал Московского государственного технического университета имени Н. Э. Баумана (национального исследовательского университета), Россия, 248000, г. Калуга, ул. Баженова, д. 2

²Калужский государственный университет имени К. Э. Циолковского, Россия, 248023, г. Калуга, ул. Степана Разина, д. 26

Серегина Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры систем автоматического управления, evfs@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0002-9683-0617>, SPIN: 6075-1022, AuthorID: 701298

Степович Михаил Адольфович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник кафедры физики и математики, m.stepovich@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6456-4644>, SPIN: 2242-8941, AuthorID: 149370

Аннотация. В настоящей работе изложены некоторые результаты возможности использования проекционного метода наименьших квадратов для решения уравнений теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью на полупрямой. Дана порядковая оценка погрешности рассмотренной проекционной схемы, соответствующей приближенному решению уравнения теплопроводности с использованием базиса из многочленов Лагерра – Якоби. Приведены результаты расчетов для двумерной модельной задачи.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, сосредоточенная теплоемкость, проекционный метод наименьших квадратов, многочлены Лагерра – Якоби, модуль непрерывности

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Правительства Калужской области № 23-21-10069, <https://rscf.ru/project/23-21-10069/>.

Для цитирования: Серегина Е. В., Степович М. А. О проекционном методе решения уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 173–183. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-173-183>, EDN: ERHSOY

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the projection method for solving the heat equation with lumped heat capacity

E. V. Seregina^{1✉}, M. A. Stepovich²

¹Bauman Moscow State Technical University (Kaluga Branch), 2 Bazhenova St., Kaluga 248000, Russia

²Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovski, 26 Stepan Razin St., Kaluga 248023, Russia

Elena V. Seregina, evfs@yandex.ru, <https://orcid.org/0009-0002-9683-0617>, SPIN: 6075-1022, AuthorID: 701298

Mikhail A. Stepovich, m.stepovich@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-6456-4644>, SPIN: 2242-8941, AuthorID: 149370



Abstract. This paper presents some results of the possibility of using the least squares projection method for solving heat equations with concentrated heat capacity on a half-line. An order estimate of the error is given of the considered projection scheme corresponding to an approximate solution of the heat equation using a basis of Laguerre–Jacobi polynomials. The results of calculations for a two-dimensional model problem are presented.

Keywords: heat equation, lumped heat capacity, least squares projection method, Laguerre–Jacobi polynomials, modulus of continuity

Acknowledgements: This work was supported by the grant of the Russian Science Foundation and the Government of Kaluga Region (project No. 23-21-10069, <https://rscf.ru/en/project/23-21-10069/>).

For citation: Seregina E. V., Stepovich M. A. On the projection method for solving the heat equation with lumped heat capacity. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 173–183 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-173-183>, EDN: ERHSOY

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

В работе [1] был представлен алгоритм и проведено обоснование проекционного метода Галеркина для решения стационарного трехмерного дифференциального уравнения тепло-массопереноса в полубесконечной области.

В настоящей работе изложен алгоритм применения проекционного метода наименьших квадратов (МНК) для нахождения решения на полупрямой нестационарного дифференциального уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью. Искомое решение находится в виде частичной суммы двойного ряда Фурье по системе ортогональных многочленов Лагерра–Якоби. В работе [2] было проведено обоснование модифицированной проекционной схемы метода наименьших квадратов для моделирования распределения неравновесных неосновных носителей заряда в полупроводниковых материалах. Настоящая статья продолжает такие исследования и ставит задачу дать оценку погрешности предложенной проекционной схемы МНК, соответствующей приближенному решению нестационарного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью, для расчета температурного поля.

1. Постановка задачи

Будем искать решение дифференциального уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью

$$(C + C_0\delta(z - z_0)) \frac{\partial \theta}{\partial t} - k \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = f(z, t). \quad (1)$$

Для конкретности зададим граничные условия

$$\theta(z, 0) = \varphi(z), \quad \left. \frac{d\theta(z, t)}{dz} \right|_{z=0} = 0, \quad 0 \leq z < \infty, \quad 0 \leq t < \infty. \quad (2)$$

Здесь $\theta(z, t)$ — температура, $f(z, t)$ — удельная мощность внутреннего тепловыделения, C — теплоемкость единицы объема, k — коэффициент теплопроводности. Пусть также выполняются условия

$$f(+\infty, t) = 0, \quad f(z, +\infty) = 0 \quad (3)$$

и

$$\varphi(+\infty) = 0. \quad (4)$$

Условия (3) возможны, например, для электронного или светового пучков, когда источник описывается классической функцией Гаусса или экспонентой, убывающей на бесконечности до нуля [3–5], а также произведением некоторого многочлена на убывающую экспоненту, характеризующую плотность потока энергии [6, 7]. Условие (4) имеет место, например, если



вместо температуры $\theta(z, t)$ ищется разность температур, что обычно актуально при небольших нагревах [4, 5]. В этом случае обычно задают нулевое начальное условие: $\theta(z, 0) = 0$. В точке $z = z_0$ помещена сосредоточенная теплоемкость величины C_0 . Тогда в этой точке

$$[\theta] = \theta(z_0 + 0, t) - \theta(z_0 - 0, t) = 0, \quad (5)$$

$$C_0 \frac{\partial \theta}{\partial t} = \left[k \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]. \quad (6)$$

Последнее выполняется при $z = z_0$.

Для решения этой задачи можно воспользоваться проекционным методом МНК, в котором, в отличие от метода Галеркина, приближенное решение не обязано удовлетворять начальным условиям. Однако авторы большинства работ не уделяют достаточного внимания вопросам обоснования применяемых проекционных методов. В связи с этим целью настоящей работы является изложение алгоритма применения проекционного метода МНК, получение оценки погрешности предложенной проекционной схемы, соответствующей приближенному решению нестационарного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью, и сравнение приближенных результатов расчета с точным решением для модельной задачи.

2. Алгоритм применения проекционного метода наименьших квадратов

Согласно классическому методу МНК вместо задачи (1)–(6) вводится в рассмотрение функционал

$$\begin{aligned} J(\theta(z, t)) = & \left\| L^{(\theta)}(\theta_1(z, t)) - f_1(z, t) \right\|_{L_2}^2 + \left\| L^{(\theta)}(\theta_2(z, t)) - f_2(z, t) \right\|_{L_2}^2 + \\ & + \left\| \theta_1(z, 0) - \varphi_1(z) \right\|_{L_2}^2 + \left\| \theta_2(z, 0) - \varphi_2(z) \right\|_{L_2}^2 + \left\| \frac{d\theta_1(z, t)}{dz} \Big|_{z=0} \right\|_{L_2}^2 + \left\| \theta_1(z_0, t) - \theta_2(z_0, t) \right\|_{L_2}^2 + \\ & + \left\| \left(C_0 \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + k \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - k \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} \right\|_{L_2}^2 + \left\| \left(C_0 \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + k \frac{\partial \theta_1}{\partial z} - k \frac{\partial \theta_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} \right\|_{L_2}^2, \end{aligned}$$

где $L^{(\theta)} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{k}{C} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — дифференциальный оператор, и решение

$$\theta(z, t) = \begin{cases} \theta_1(z, t), & 0 \leq z \leq z_0, \quad 0 \leq t < \infty, \\ \theta_2(z, t), & z_0 \leq z < \infty, \quad 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

ищется из требования, чтобы оно доставляло минимум функционалу $J(\theta(z, t))$.

Для реализации проекционного метода МНК выберем двумерный базис из многочленов Якоби $\tilde{P}_i(z; \alpha, \beta) = P_i((2z - z_0)/z_0; \alpha, \beta)$ [8] по переменной $z \in [0, z_0]$ с параметрами $\alpha \geq -1/2$ и $\beta \geq -1/2$, использующий модифицированные функции Лагерра по переменной $z \in [z_0, \infty)$

$$\varphi_i^{\alpha_1, \gamma_1}(z) = \exp(-\gamma_1(z - z_0)/2) L_i(\gamma_1(z - z_0); \alpha_1)$$

и по переменной $t \in [0, \infty)$

$$\varphi_i^{\alpha_2, \gamma_2}(t) = \exp(-\gamma_2 t/2) L_i(\gamma_2 t; \alpha_2),$$

которые определяются через многочлены Чебышева–Лагерра по переменной z — $L_i(\gamma_1(z - z_0); \alpha_1)$ и многочлены по переменной t — $L_j(\gamma_2 t; \alpha_2)$ [8], $i, j = 0, 1, 2, \dots$. Здесь параметры $\alpha_1 > -1$, $\alpha_2 > -1$ и $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$ используются для оптимизации вычислительной схемы.

Для простоты будем брать одинаковое число базисных функций m . Тогда каждую функцию от переменных z и t , входящую в исходную систему уравнений, аппроксимируем частичной суммой двойного ряда Фурье по системе многочленов Якоби и функций Лагерра.

Приближенное решение $\theta_m(z, t)$ ищем из требования, чтобы оно доставляло минимум функционалу $J(\theta_m(z, t))$.

Обозначим через $C_{mm}^{\theta_1}$, $C_{mm}^{\theta_2}$ и $C_{mm}^{f_1}$, $C_{mm}^{f_2}$ столбцы (матрицы, растянутые в столбцы) [9] из коэффициентов разложения неизвестных функций $\theta_1(z, t)$, $\theta_2(z, t)$ и известных функций $f_1(z, t)$, $f_2(z, t)$ по выбранному базису соответственно; $C_m^{\varphi_1}$, $C_m^{\varphi_2}$ — столбцы из коэффициентов разложения известных функций $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ соответственно. Далее введем матрицы $D^{z_1} = E \otimes D_1$, $D^{z_2} = E \otimes D_2$ и $D^t = D_3 \otimes E$, где D_1 — матрица дифференцирования в одномерном базисе из многочленов Якоби, а D_2 , D_3 — матрицы дифференцирования в одномерном базисе из модифицированных функций Лагерра, элементы которых находятся с помощью элементарных алгебраических операций [10, 11]

$$d_{ij}^{2,3} = \begin{cases} -\gamma_{1,2}/2, & i = j, \\ -\gamma_{1,2}, & i < j, \\ 0, & i > j. \end{cases}$$

Здесь E — единичная матрица. Элементы матрицы дифференцирования D_1 могут быть найдены по формуле

$$d_{ij}^1 = \begin{cases} ((\alpha + \beta + j) \Gamma(\alpha + \beta + 2) / (z_0 \Gamma(\alpha + \beta + j + 1))) \times \\ \times (\Gamma(\beta + j) / \Gamma(\beta + 1) + (-1)^{j-2} \Gamma(\alpha + j) / \Gamma(\alpha + 1)), & i = 1, \\ ((\alpha + \beta + j)(\alpha + \beta + 2i - 1) \Gamma(\alpha + \beta + i) / (z_0 \Gamma(\alpha + \beta + j + 1))) \times \\ \times (\Gamma(\beta + j) / \Gamma(\beta + i) + (-1)^{j-i-1} \Gamma(\alpha + j) / \Gamma(\alpha + i)), & i \leq j, \end{cases}$$

d_{ij}^1 определяются с использованием формулы дифференцирования и известных рекуррентных формул для многочленов Якоби [8].

Обозначим через $\tilde{P}_m^{\alpha, \beta}(z)$, $\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z)$ и $\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(t)$ столбцы из m первых базисных функций по переменным z и t , смещенным на соответствующих интервалах.

В силу ортогональности базисных функций функционал $J(\theta_m(z, t))$ можно представить в виде

$$J(\theta_m(z, t)) = J(C^\theta) = (AC^\theta - G)^T (AC^\theta - G) \rightarrow \inf, \quad (7)$$

где матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} D^t - \frac{k}{C} (D^{z_1})^2 & O_{m^2 \times m^2} & D^t - \frac{k}{C} (D^{z_2})^2 & O_{m^2 \times m^2} \\ O_{m^2 \times m^2} & O_{m^2 \times m^2} & O_{m^2 \times m^2} & O_{m^2 \times m^2} \\ (\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0))^T \otimes E & O_{m \times 1} & (\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(0))^T \otimes E & O_{m \times 1} \\ O_{m \times 1} & O_{m \times 1} & O_{m \times 1} & O_{m \times 1} \\ E \otimes (\tilde{P}_m^{\alpha, \beta}(0))^T D_1 & O_{m \times 1} & -E \otimes (\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z_0))^T & O_{m \times 1} \\ E \otimes (\tilde{P}_m^{\alpha, \beta}(z_0))^T & O_{m \times 1} & -E \otimes (\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z_0))^T & O_{m \times 1} \\ D_3 \otimes (\tilde{P}_m^{\alpha, \beta}(z_0))^T + \frac{k}{C_0} (E \otimes (\tilde{P}_m^{\alpha, \beta}(z_0))^T D_1) & \frac{k}{C_0} (E \otimes (\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z_0))^T D_2) & \frac{k}{C_0} (E \otimes (\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z_0))^T D_2) & \frac{k}{C_0} (E \otimes (\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z_0))^T D_2) \\ -\frac{k}{C_0} (E \otimes (\tilde{P}_m^{\alpha, \beta}(z_0))^T D_1) & D_3 \otimes (\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z_0))^T - \frac{k}{C_0} (E \otimes (\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z_0))^T D_2) & D_3 \otimes (\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z_0))^T - \frac{k}{C_0} (E \otimes (\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z_0))^T D_2) & D_3 \otimes (\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z_0))^T - \frac{k}{C_0} (E \otimes (\varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z_0))^T D_2) \end{bmatrix}.$$

Здесь G — столбец $G = [C_{mm}^{f_1} \ C_{mm}^{f_2} \ C_m^{\varphi_1} \ C_m^{\varphi_2} \ O_{m \times 1} \ O_{m \times 1} \ O_{m \times 1} \ O_{m \times 1}]^T$.

Далее находим нормальное псевдорешение задачи минимизации (7) $C^{\theta^+} = [C_1^{\theta^+} \ C_2^{\theta^+}]^T$ с помощью псевдообратной матрицы, т. е.

$$C^{\theta^+} = (A^T A)^{-1} A^T G.$$



Получив нормальное псевдорешение $C^{\theta+}$, можно восстановить приближенное решение исходной задачи:

$$\begin{aligned}\theta_1(z, t) &\approx (\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(t))^T C^{\theta_1+} \tilde{P}_m^{\alpha, \beta}(z), \quad z \in [0, z_0], \quad t \in [0, \infty), \\ \theta_2(z, t) &\approx (\varphi_m^{\alpha_2, \gamma_2}(t))^T C^{\theta_2+} \varphi_m^{\alpha_1, \gamma_1}(z), \quad z \in [z_0, \infty), \quad t \in [0, \infty).\end{aligned}$$

3. Условие сходимости

Исследуем сходимость последовательности $\{C_m^{\theta}\}$ по функционалу J , т.е. покажем, что $\lim_{m \rightarrow \infty} J(C_m^{\theta}) = 0$.

Следуя [12], введем обозначения:

$$\begin{aligned}D_1 &= \left(\frac{4z}{z_0} - \frac{4z^2}{z_0^2} \right) \frac{d^2}{dz^2} + \left(\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2) \left(\frac{2z - z_0}{z_0} \right) \right) \frac{d}{dz} + t \frac{d^2}{dt^2} + (\alpha_2 - t + 1) \frac{d}{dt}, \\ D_2 &= (z - z_0) \frac{d^2}{dz^2} + (\alpha_1 - z + z_0 + 1) \frac{d}{dz} + t \frac{d^2}{dt^2} + (\alpha_2 - t + 1) \frac{d}{dt}.\end{aligned}$$

Здесь $L_2^n(D_1)$ ($n = 0, 1, \dots$) — класс функций f таких, что функции $\tilde{f}(z, t) = f(z, t) \times \exp(\gamma_2 t/2) \in L_2$ и имеющие обобщенные частные производные в смысле Леви [13]

$$\frac{\partial^k}{\partial z^i \partial t^j} \tilde{f}(z, t), \quad i + j = k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

принадлежащие пространству L_2 , для которых $D_1^n \tilde{f} \in L_2$, $n = 0, 1, \dots$, где $D_1^0 \tilde{f} = \tilde{f}$, $D_1^n \tilde{f} = D_1(D_1^{n-1} \tilde{f})$, $n = 1, 2, \dots$, $L_2^0(D_1) = L_2$. Также $L_2^n(D_2)$ ($n = 0, 1, \dots$) — класс функций f таких, что функции $\tilde{f}(z, t) = f(z, t) \exp(\gamma_1(z - z_0)/2) \exp(\gamma_2 t/2) \in L_2$ и имеющие обобщенные частные производные в смысле Леви [13]

$$\frac{\partial^k}{\partial z^i \partial t^j} \tilde{f}(z, t), \quad i + j = k, \quad k = 0, 1, \dots,$$

принадлежащие пространству L_2 , для которых $D_2^n \tilde{f} \in L_2$, $n = 0, 1, \dots$, где $D_2^0 \tilde{f} = \tilde{f}$, $D_2^n \tilde{f} = D_2(D_2^{n-1} \tilde{f})$, $n = 1, 2, \dots$, $L_2^0(D_2) = L_2$.

Далее нам понадобится вспомогательная теорема, которой будем пользоваться ниже.

Справедлива

Теорема 1. Для любых функций $f_1(z, t) \in L_2^n(D_1)$ и $f_2(z, t) \in L_2^n(D_2)$ справедлива оценка (см. [1, 12])

$$\|f_1 - S_{m,m}(f_1)\| \leq [1 - (1 - h)^m]^{-k} m^{-n} \Omega_k(D_1^n \tilde{f}_1; h), \quad (8)$$

$$\|f_2 - S_{m,m}(f_2)\| \leq [1 - (1 - h)^m]^{-k} m^{-n} \Omega_k(D_2^n \tilde{f}_2; h), \quad (9)$$

где $r = 0, 1, \dots$, $0 < h < 1$. Величины $\Omega_k(D_1^n \tilde{f}_1; h)$ и $\Omega_k(D_2^n \tilde{f}_2; h)$ — обобщенные модули непрерывности функций $D_1^n \tilde{f}$ и $D_2^n \tilde{f}_2$ (см. [12]), а $S_{m,m}(f_1) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{f_1} \tilde{P}_i(z; \alpha, \beta) \varphi_j^{\alpha_2, \gamma_2}(t)$ и $S_{m,m}(f_2) = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{f_2} \varphi_i^{\alpha_1, \gamma_1}(z) \varphi_j^{\alpha_2, \gamma_2}(t)$ — прямоугольные частичные суммы двойных рядов Фурье функций $f_1(z, t)$ и $f_2(z, t)$ соответственно.

Если погрешности в исходных данных и погрешности вычислений отсутствуют, а учитываются лишь погрешности аппроксимаций, тогда имеет место следующий результат.

Теорема 2. Пусть $r = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta\} \geq -1/2$, а функции $f_1(z, t) \in L_2^n(D_1)$, $f_2(z, t) \in L_2^n(D_2)$ и имеют непрерывные частные производные до порядка $n > \frac{r}{2} + \frac{11}{4}$ по обоим пространственным направлениям. Тогда последовательность нормальных псевдо-решений $\{C_{mm}^{\theta^+}\}$ будет минимизирующей для функционала $J(C_{mm}^{\theta})$ и справедлива оценка

$$\sqrt{J(C_{mm}^{\theta^+})} < \left(\frac{2k}{C} + 15 + 6k + 4C_0\right) [1 - (1 - m^{-1})^m]^{-k} (m)^{-n} \Omega(m^{-1}) + \\ + O\left(m^{-n+\frac{r}{2}+\frac{11}{4}}\right) \omega(m^{-1}), \quad m \rightarrow \infty,$$

где $\Omega(m^{-1})$ — мажоранта обобщенных модулей непрерывности и $\omega(m^{-1})$ — заданная мажоранта модулей непрерывности.

Доказательство. Имеем:

$$\sqrt{J(C_{mm}^{\theta^+})} \leq \sqrt{J(C_{mm}^{\theta})} \leq \left\| \frac{\partial \theta_1(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \theta_1^m(z, t)}{\partial t} \right\|_{L_2} + \\ + \frac{k}{C} \left\| \left(\frac{\partial^2 \theta_1(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \theta_1^m(z, t)}{\partial z^2} \right) \right\|_{L_2} + \|f_1(z, t) - f_1^m(z, t)\|_{L_2} + \\ + \left\| \frac{\partial \theta_2(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \theta_2^m(z, t)}{\partial t} \right\|_{L_2} + \frac{k}{C} \left\| \left(\frac{\partial^2 \theta_2(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \theta_2^m(z, t)}{\partial z^2} \right) \right\|_{L_2} + \\ + \|f_2(z, t) - f_2^m(z, t)\|_{L_2} + \|\varphi_1(z) - \varphi_1^m(z)\|_{L_2} + \|\varphi_2(z) - \varphi_2^m(z)\|_{L_2} + \\ + \|\theta_1(z, 0) - \theta_1^m(z, 0)\|_{L_2} + \|\theta_2(z, 0) - \theta_2^m(z, 0)\|_{L_2} + \|\theta_2(z, 0) - \theta_2^m(z, 0, t)\|_{L_2} + \\ + 2k \left\| \left(\frac{\partial \theta_2(z, t)}{\partial z} - \frac{\partial \theta_2^m(z, t)}{\partial z} \right) \right\|_{z=z_0, L_2} + C_0 \left\| \left(\frac{\partial \theta_2(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \theta_2^m(z, t)}{\partial t} \right) \right\|_{z=z_0, L_2} + \\ + \|\theta_1(z_0, t) - \theta_1^m(z_0, t)\|_{L_2} + \left\| \left(\frac{d\theta_1(z, t)}{dz} - \frac{d\theta_1^m(z, t)}{dz} \right) \right\|_{z=0, L_2} + \\ + 2k \left\| \left(\frac{\partial \theta_1(z, t)}{\partial z} - \frac{\partial \theta_1^m(z, t)}{\partial z} \right) \right\|_{z=z_0, L_2} + C_0 \left\| \left(\frac{\partial \theta_1(z, t)}{\partial t} - \frac{\partial \theta_1^m(z, t)}{\partial t} \right) \right\|_{z=z_0, L_2}.$$

Обозначим слагаемые в правой части последнего неравенства через S_1, \dots, S_{17} и оценим их сверху. В силу оценок (8), (9):

$$S_1 \leq [1 - (1 - h)^m]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1} \left(D_1^n \left(\tilde{\theta}'_{1t}(z, t) + \left(\frac{\gamma_2}{2}\right) \tilde{\theta}_1(z, t) \right); h \right), \\ S_2 \leq \frac{k}{C} [1 - (1 - h)^m]^{-k} m^{-n} \Omega_k \left(D_1^n \left(\tilde{\theta}''_{1zz}(z, t) \right); h \right), \\ S_3 \leq [1 - (1 - h)^m]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2} \left(D_1^{n+1} \left(\tilde{f}_1(z, t) \right); h \right), \\ S_4 \leq [(1 - h)^m]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1} \left(D_2^n \left(\tilde{\theta}'_{2t}(z, t) + \left(\frac{\gamma_2}{2}\right) \tilde{\theta}_2(z, t) \right); h \right), \\ S_5 \leq \frac{k}{C} [1 - (1 - h)^m]^{-k} m^{-n} \Omega_k \left(D_2^n \left(\tilde{\theta}''_{2zz}(z, t) + \gamma_1 \tilde{\theta}'_{2z}(z, t) + (\gamma_1^2/4) \tilde{\theta}_2(z, t) \right); h \right), \\ S_6 \leq [(1 - h)^m]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2} \left(D_2^{n+1} \left(\tilde{f}_2(z, t) \right); h \right), \\ S_7 \leq [(1 - h)^m]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2} \left(D_1^{n+1} \left(\tilde{\varphi}_1(z) \right); h \right), \\ S_8 \leq [(1 - h)^m]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2} \left(D_2^{n+1} \left(\tilde{\varphi}_2(z) \right); h \right).$$

Далее оценим слагаемые S_9, \dots, S_{13} :

$$S_9 \leq [(1 - h)^m]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2} \left(D_1^{n+1} \left(\tilde{\theta}_1(z, 0) \right); h \right) + \sum_{i=0}^{m-1} \left| \tilde{c}_i^{\theta_1(z, 0)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z, t)} L_j(0; \alpha_2) \right|.$$



Для оценки выражения

$$\left| \tilde{c}_i^{\theta_1(z,0)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z,t)} L_j(0; \alpha_2) \right|$$

воспользуемся асимптотической формулой для коэффициентов Фурье – Лагерра [14]

$$c_{im}^{\theta_1(z,t)} = O\left(m^{-(\alpha_2+2n+2)/2-1/4}\right) \omega\left(m^{-1/2}\right), \quad (10)$$

учитывая, что $c_1 m^{\alpha_2} \leq L_m(0; \alpha_2) \leq c_2 m^{\alpha_2}$ [8]. Здесь c_1 и c_2 — некоторые фиксированные положительные постоянные, а $\omega(t)$ — заданная мажоранта модулей непрерывности. Тогда в силу (10) и $\sum_{j=m}^{\infty} j^{-\beta} = O(m^{-\beta+1})$ при $\beta > 1$ для отклонения сумм Фурье – Лагерра находим

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{c}_i^{\theta_1(z,0)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z,t)} L_j(0; \alpha_2) \right| = \left| \sum_{j=m}^{\infty} c_{ij}^{\theta_1(z,t)} L_j(0; \alpha_2) \right| = \\ & = O(1) \sum_{j=m}^{\infty} j^{\frac{(-2n-2)}{2} + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{4}} \omega(j^{-1/2}) = O\left(m^{-n + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{4}}\right) \omega\left(m^{-1/2}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что последнее имеет место, если $n > \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{4}$. Ясно, что если функция $\theta_1(z, t)$ бесконечное число раз непрерывно дифференцируема, то всегда будет сходиться ряд $\sum_{j=0}^{\infty} j^{\frac{(-2n-2)}{2} + \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{4}} \omega(j^{-1/2})$, т.е. в этом случае будем учитывать, что полученная оценка справедлива при любом $n > \frac{\alpha_2}{2} - \frac{1}{4}$. Итак,

$$S_9 \leq [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2}\left(D_1^{n+1}(\tilde{\theta}_1(z, 0)); h\right) + O\left(m^{-n + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{3}{4}}\right) \omega\left(m^{-1/2}\right).$$

Аналогичным способом получаем оценки для слагаемых S_{10}, \dots, S_{13} :

$$\begin{aligned} S_{10} & \leq [1 - (1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2}\left(D_2^{n+1}(\tilde{\theta}_2(z, 0)); h\right) + O\left(m^{-n + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{3}{4}}\right) \omega\left(m^{-1/2}\right), \\ S_{11} & \leq [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2}\left(D_2^{n+1}(\tilde{\theta}_2(z_0, t)); h\right) + O\left(m^{-n + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{3}{4}}\right) \omega\left(m^{-1/2}\right), \\ S_{12} & \leq 2k[(1-h)^m]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1}\left(D_2^n(\tilde{\theta}'_{2z}(z_0, t) + (\gamma_1/2)\tilde{\theta}_2(z_0, t)); h\right) + \\ & \quad + O\left(m^{-n + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{9}{4}}\right) \omega\left(m^{-1/2}\right), \\ S_{13} & \leq C_0[(1-h)^m]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1}\left(D_2^n(\tilde{\theta}'_{2t}(z_0, t) + (\gamma_2/2)\tilde{\theta}_2(z_0, t)); h\right) + \\ & \quad + O\left(m^{-n + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{5}{4}}\right) \omega\left(m^{-1/2}\right). \end{aligned}$$

Оценим слагаемые S_{14}, \dots, S_{17} :

$$\begin{aligned} S_{14} & \leq [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2}\left(D_1^{n+1}(\tilde{\theta}_1(z_0, t)); h\right) + \\ & \quad + \sum_{i=0}^{m-1} \left| \tilde{c}_i^{\theta_1(z_0, t)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z, t)} \hat{P}_j(z_0; \alpha, \beta) \right|, \end{aligned}$$

где $\hat{\varphi}_i^{\alpha_2, \gamma_2}(t)$ — ортонормированные функции Лагерра.



Для оценки выражения

$$\left| \tilde{c}_i^{\theta_1(z_0, t)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z, t)} \hat{P}_j(z_0; \alpha, \beta) \right|$$

воспользуемся следующей оценкой для многочленов Якоби [8]:

$$\left| \tilde{c}_i^{\theta_1(z_0, t)} - \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij}^{\theta_1(z, t)} \hat{P}_j(z_0; \alpha, \beta) \right| = O(m^{-2n+q-1}) \omega(m^{-1}),$$

где $q = \max\{\alpha, \beta\} \geq -1/2$ [8]. Заметим, что последнее имеет место, если $n > \frac{q}{2} - \frac{1}{2}$. Ясно, что если функция $\theta_1(z, t)$ бесконечное число раз непрерывно дифференцируема, то в этом случае полученная оценка справедлива при любом $n > \frac{q}{2} - \frac{1}{2}$. Итак,

$$S_{14} \leq [(1-h)^m]^{-k-2} m^{-n-1} \Omega_{k+2} \left(D_1^{n+1} \left(\tilde{\theta}_1(z_0, t) \right); h \right) + O(m^{-2n+q}) \omega(m^{-1}).$$

Аналогичным способом получаем оценки для слагаемых S_{15} , S_{16} , S_{17} :

$$\begin{aligned} S_{15} &\leq [(1-h)^m]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1} \left(D_1^n \left(\tilde{\theta}'_{1z}(0, t) \right); h \right) + O(m^{-2n+q+2}) \omega(m^{-1}), \\ S_{16} &\leq 2k[(1-h)^m]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1} \left(D_1^n \left(\tilde{\theta}'_{1z}(z_0, t) \right); h \right) + O(m^{-2n+q+2}) \omega(m^{-1}), \\ S_{17} &\leq C_0[(1-h)^m]^{-k-1} m^{-n} \Omega_{k+1} \times \\ &\times \left(D_1^n \left(\tilde{\theta}'_{1t}(z_0, t) + (\gamma_2/2) \tilde{\theta}_1(z_0, t) \right); h \right) + O(m^{-2n+q+1/2}) \omega(m^{-1}). \end{aligned}$$

Полагая $h = m^{-1}$ и учитывая, что $\omega(m^{-1/2}) \leq 2\sqrt{m} \omega(m^{-1})$ [15], собрав все оценки вместе, получаем оценку для функционала

$$\begin{aligned} \sqrt{J(C_{mm}^{\theta+})} &< \left(\frac{2k}{C} + 15 + 6k + 4C_0 \right) [1 - (1-m^{-1})^m]^{-k} (m)^{-n} \Omega(m^{-1}) + \\ &+ O(m^{-n+\frac{r}{2}+\frac{11}{4}}) \omega(m^{-1}), \end{aligned}$$

где $\Omega(m^{-1})$ — мажоранта обобщенных модулей непрерывности, $r = \max\{\alpha_1, \alpha_2, q\} \geq -\frac{1}{2}$. Теорема 2 доказана. \square

4. Результаты расчетов

Расчеты проведены с помощью математического пакета Matlab (MathWorks, Inc.) для двумерной модельной задачи. На глубине $z_0 = 1$ помещена сосредоточенная теплоемкость. Рассматривалась следующая задача:

$$(2 + 4\delta(z-1)) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = f(z, t), \quad 0 \leq z < \infty, \quad 0 \leq t < \infty$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \theta_1(z, 0) &= z^2 \exp(-z), \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \theta_2(z, 0) = (z-2)^2 \exp(-z), \quad 1 \leq z < \infty, \\ \frac{d\theta(z, t)}{dz} \Big|_{z=0} &= 0, \quad 0 \leq t < \infty. \end{aligned}$$

Здесь

$$f_1(z, t) = \exp(-t) \exp(-z) (-1.5z^2 + 2z - 1),$$



$$f_2(z, t) = \exp(-t) \exp(-z) (-1.5z^2 + 8z - 11).$$

Точное решение этой задачи

$$\begin{aligned}\theta_1^*(z, t) &= z^2 \exp(-t) \exp(-z), \quad 0 \leq z \leq 1, \quad 0 \leq t < \infty, \\ \theta_2^*(z, t) &= (z - 2)^2 \exp(-t) \exp(-z), \quad 1 \leq z < \infty, \quad 0 \leq t < \infty.\end{aligned}$$

Приведем оценки относительной погрешности по норме пространства L_2 и значения функционала для $m = 4, 5, 6$:

$$\begin{aligned}\Delta_1(\theta^*, \theta_4) &= \frac{\|\theta^*(z, t) - \theta_4(z, t)\|_{L_2}}{\|\theta^*(z, t)\|_{L_2}} \cdot 100\% \approx 34.62\%, \quad \tilde{J}(\theta^4(z, t)) = 954.78, \\ \Delta_2(\theta^*, \theta_5) &= \frac{\|\theta^*(z, t) - \theta_5(z, t)\|_{L_2}}{\|\theta^*(z, t)\|_{L_2}} \cdot 100\% \approx 9.02\%, \quad \tilde{J}(\theta^5(z, t)) = 28.88, \\ \Delta_3(\theta^*, \theta_6) &= \frac{\|\theta^*(z, t) - \theta_6(z, t)\|_{L_2}}{\|\theta^*(z, t)\|_{L_2}} \cdot 100\% \approx 0.16\%, \quad \tilde{J}(\theta^6(z, t)) = 0.73.\end{aligned}$$

Значения модифицирующих параметров равны $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 2$.

Результаты расчетов показали, что предложенный алгоритм метода МНК позволяет получить решение уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью с использованием небольшого числа удерживаемых членов разложения в ряд. Вычисления производились в символьном виде и с помощью встроенных функций MATLAB.

Заключение

Изложен алгоритм применения проекционного метода наименьших квадратов и получения порядковая оценка погрешности предложенной проекционной схемы, соответствующей приближенному решению нестационарного уравнения теплопроводности с сосредоточенной теплоемкостью. Метод позволяет находить матрицу, определяющую приближенное решение рассматриваемой задачи, не прибегая к операциям дифференцирования и интегрирования, а используя только алгебраические операции, что существенно сокращает время вычислений. Проведено сравнение приближенных результатов расчета с точным решением для двумерной модельной задачи. Приближенное решение содержит небольшое число членов разложения по базису из многочленов Лагерра – Якоби.

Список литературы

1. Макаренков А. М., Серегина Е. В., Степович М. А. Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 5. С. 801–813. <https://doi.org/10.7868/S0044466917050076>
2. Серегина Е. В., Степович М. А., Макаренков А. М. О модифицированной проекционной схеме метода наименьших квадратов для моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в однородном полупроводниковом материале // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2013. № 11. С. 65–69. <https://doi.org/10.7868/S0207352813110176>, EDN: RDJUUP
3. Михеев Н. Н., Степович М. А. Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1996. Т. 62, № 4. С. 20–25.
4. Амрастанов А. Н., Серегина Е. В., Степович М. А. Об одной особенности моделирования нагрева полупроводниковой мишени электронным зондом // Известия РАН. Серия физическая. 2018. Т. 82, № 9. С. 1304–1309. <https://doi.org/10.1134/S036767651809003X>
5. Амрастанов А. Н., Серегина Е. В., Степович М. А., Филиппов М. Н. Оценка нагрева поверхности полупроводниковой мишени низкоэнергетичным электронным зондом // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 2018. № 8. С. 48–52. <https://doi.org/10.1134/S0207352818080036>



6. Ханефт А. В., Долгачев В. А., Дугинов Е. В., Иванов Г. А. Критерии зажигания энергетических материалов коротким лазерным и электронным импульсами // Вестник Кемеровского государственного университета. 2013. Т. 3, № 3 (55). С. 31–39.
7. Seregina E. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V. Modeling of heating in the epitaxial structure $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}/\text{CdTe}$ with the projection least squares method // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1163. Art. 012013. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1163/1/012013>
8. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. Москва : Физматлит, 2007. 480 с.
9. Лапин С. В., Егупов Н. Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. Москва : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1997. 496 с.
10. Петров В. И., Самохвалов А. А., Степович М. А., Чайковский М. М. Матричный метод решения задачи коллективного движения неосновных носителей заряда, генерированных в полупроводниковом материале электронным пучком // Известия РАН. Серия физическая. 2002. Т. 66, № 9. С. 1310–1316.
11. Belov A. A., Egupov N. D., Samokhvalov A. A., Stepovich M. A., Tchaikovsky M. M. Orthogonal-projection method for solving equations of diffusion of minority charge carriers generated by the electron beam in semiconductors // SPIE Proceedings. 2003. Vol. 5025. P. 149–159. <https://doi.org/10.1117/12.498033>
12. Абилов В. А., Абилов М. В., Керимов М. К. Точные оценки скорости сходимости двойных рядов Фурье по классическим ортогональным многочленам // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 7. С. 1109–1117. <https://doi.org/10.7868/S0044466915070029>, EDN: TXUKCZ
13. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. Москва : Наука, 1969. 480 с.
14. Лащенко В. К. Приближение дифференцируемых функций частными суммами ряда Фурье–Лагерра // Известия вузов. Математика. 1981. № 1. С. 44–57.
15. Тимман А. Ф. Теория приближения функций действительного переменного. Москва : Физматлит, 1960. 624 с.

References

1. Makarenkov A. M., Seregina E. V., Stepovich M. A. The projection Galerkin method for solving the time-independent differential diffusion equation in a semi-infinite domain. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, iss. 5, pp. 802–814. <https://doi.org/10.1134/S0965542517050074>
2. Seregina E. V., Stepovich M. A., Makarenkov A. M. On a modified projection scheme of the least squares method for the modeling of the distribution of minority charge carriers generated by an electron beam in a homogeneous semiconductor material. *Journal of Surface Investigation X-ray Synchrotron and Neutron Techniques*, 2013, vol. 7, iss. 6, pp. 1077–1080.
3. Mikheev N. N., Stepovich M. A. Distribution of energy losses in interaction of an electron probe with material. *Industrial Laboratory*, 1996, vol. 62, iss. 4, pp. 221–226. EDN: LDPTZB
4. Amrastanov A. N., Seregina E. V., Stepovich M. A. Aspects of modeling the electron probe heating of a semiconductor target. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*, 2018, vol. 82, iss. 9, pp. 1187–1192. <https://doi.org/10.3103/S1062873818090034>
5. Amrastanov A. N., Seregina E. V., Stepovich M. A., Filippov M. N. Estimation of the heating of a semiconductor target surface by a low-energy electron beam. *Journal of Surface Investigation. X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques*, 2018, vol. 12, iss. 4, pp. 778–782. <https://doi.org/10.1134/S1027451018040225>
6. Khanef A. V., Dolgachev V. A., Duginov E. V., Ivanov G. A. Criteria of energetic materials ignition by short laser and electron pulses. *Bulletin of Kemerovo State University*, 2013, vol. 3, iss. 3 (55), pp. 31–39 (in Russian).
7. Seregina E. V., Stepovich M. A., Kalmanovich V. V. Modeling of heating in the epitaxial structure $\text{Cd}_x\text{Hg}_{1-x}\text{Te}/\text{CdTe}$ with the projection least squares method. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1163, art. 012013. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1163/1/012013>
8. Suetin P. K. *Klassicheskiye ortogonal'nye mnogochleny* [Classical orthogonal polynomials]. Moscow, Fizmatlit, 2007. 480 p. (in Russian).
9. Lapin S. V., Egupov N. D. *Teoriya matrichnykh operatorov i ee prilozheniye k zadacham avtomaticheskogo upravleniya* [The theory of matrix operators and its application to automatic control problems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997. 496 p. (in Russian).
10. Petrov V. I., Samokhvalov A. A., Stepovich M. A., Tchaikovsky M. M. A matrix method for solving



the problem of collective motion of non-basic charge carriers generated in a semiconductor material by an electron beam. *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*, 2002, vol. 66, iss. 9, pp. 1310–1316 (in Russian).

11. Belov A. A., Egupov N. D., Samokhvalov A. A., Stepovich M. A., Tchaikovsky M. M. Orthogonal-projection method for solving equations of diffusion of minority charge carriers generated by the electron beam in semiconductors. *SPIE Proceedings*, 2003, vol. 5025, pp. 149–159. <https://doi.org/10.1117/12.498033>
12. Abilov V. A., Abilov M. V., Kerimov M. K. Sharp estimates for the rate of convergence of double Fourier series in classical orthogonal polynomials. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, vol. 55, iss. 7, pp. 1094–1102. <https://doi.org/10.1134/S0965542515070027>
13. Nikolsky S. M. *Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of functions of many variables and embedding theorems]. Moscow, Nauka, 1969. 480 p. (in Russian).
14. Laschenov V. K. Approximation of differentiable functions by partial sums of the Fourier – Laguerre series. *Russian Mathematics*, 1981, iss. 1, pp. 44–57 (in Russian).
15. Timman A. F. *Teoriya priblizheniya funktsiy deystvitel'nogo peremennogo* [The theory of approximation of functions of a real variable]. Moscow, Fizmatlit, 1960. 624 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 25.02.2024

Принята к публикации / Accepted 21.10.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 184–188

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 184–188

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-184-188>, EDN: ETQAWZ

Научная статья

УДК 517.51

Разрывный оператор Стеклова и аппроксимационные полиномиальные сплайны

Г. В. Хромова

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Хромова Галина Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений и математической экономики, Khromovagv@sgu.ru, <https://orcid.org/0009-0009-5390-4293>, SPIN: 7390-7936, AuthorID: 7998

Аннотация. Для непрерывной функции, заданной на равномерной сетке отрезка $[0,1]$, представлен метод построения аппроксимационных полиномиальных сплайнов. Метод не требует никакой дополнительной информации о функции и обеспечивает равномерную сходимость к ней. Эта сходимость имеет место и для приближенно заданной сеточной функции. В случае параболического сплайна приведены формулы, готовые для непосредственного использования.

Ключевые слова: оператор Стеклова, ломаная, непрерывная функция, равномерная сетка, равномерные приближения, сплайн

Для цитирования: Хромова Г. В. Разрывный оператор Стеклова и аппроксимационные полиномиальные сплайны // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 184–188. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-184-188>, EDN: ETQAWZ
Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Discontinuous Steklov operator and approximate polynomial splines

G. V. Khromova

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Galina V. Khromova, khromovagv@sgu.ru, <https://orcid.org/0009-0009-5390-4293>, SPIN: 7390-7936, AuthorID: 7998

Abstract. For a continuous function specified on a uniform grid of the segment $[0,1]$, a method for constructing approximation polynomial splines is presented. This method does not require any additional information about the function and ensures uniform convergence. This convergence also occurs for an approximately given grid function. In the case of a parabolic spline, the article provides formulas ready for direct use.

Keywords: Steklov operator, broken line, continuous function, uniform mesh, uniform approximations, spline

For citation: Khromova G. V. Discontinuous Steklov operator and approximate polynomial splines. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 184–188 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-184-188>, EDN: ETQAWZ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)



Введение

Сплайн-методы широко применяются в теории функций, вычислительной математике, при решении прикладных задач. В настоящее время хорошо разработана теория интерполяционных сплайнов [1]. Построение интерполяционных полиномиальных сплайнов требует дополнительной информации об интерполируемой функции, значительного объема вычислительных работ и специального выбора сетки. В то же время, как отмечается в [2, с. 164], «во многих практических задачах не всегда необходимо выполнение условий интерполяции, а определяющим является требование хорошей аппроксимации функции при минимальных вычислительных затратах». Сплайны с такими свойствами получили название аппроксимационных, или А-сплайнов. В данной работе будут построены А-сплайны, требующие от функции, заданной на сетке на отрезке, только свойства непрерывности.

1. Построение и свойства параболического сплайна

Пусть $f(x) \in C[0, 1]$ задана набором ее значений:

$$\hat{f} = f(x_i)_0^n, \quad f_i = f(x_i), \quad x_{i+1} = x_i + \frac{1}{n}.$$

Построим параболический сплайн, дающий равномерные приближения к $f(x)$ на $[0, 1]$. Применим следующий метод: построим ломаную $L_n \hat{f} : (L_n \hat{f})(x_i) = f_i, i = 0, \dots, n$, а затем сгладим с помощью разрывного оператора Стеклова [3]:

$$S_\alpha L_n \hat{f} = \begin{cases} S_{\alpha 2} L_n \hat{f}, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ S_{\alpha 1} L_n \hat{f}, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases} \quad (1)$$

где

$$S_{\alpha 1} \varphi = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x \varphi(t) dt, \quad S_{\alpha 2} \varphi = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} \varphi(t) dt.$$

(Запись (1) означает: как именно определено значение $(S_\alpha L_n \hat{f})(\frac{1}{2})$ — несущественно.)

Идея построения операторов с разрывной областью значений, в том числе разрывного оператора Стеклова с целью получения равномерных приближений к непрерывным функциям на отрезке, была выдвинута в 2006 г. А. П. Хромовым. С 2010 г. эти операторы стали использоваться автором при решении задач теории приближений и некорректных задач (см. обзор [3]).

Получим формулы для вычисления параболического сплайна.

Теорема 1 ([4]). Функция $S_\alpha L_n \hat{f}$ при $\alpha = \frac{1}{n}$ представляет собой параболический сплайн, разрывный в точке $x = \frac{1}{2}$ и вычисляемый по формуле

$$(S_\alpha L_n \hat{f})(x) = \begin{cases} A_i^+ x^2 + B_i^+ x + C_i^+, & x \in [0, \frac{1}{2}], \\ A_i^- x^2 + B_i^- x + C_i^-, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

где $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$ при n четном, $i = 0, \dots, \frac{n-1}{2}$ при n нечетном для $x \in [0, \frac{1}{2}]$; $i = \frac{n}{2}, \dots, n-1$ при n четном, $i = \frac{n-1}{2}, \dots, n-1$ при n нечетном для $x \in [\frac{1}{2}, 1]$,

$$\begin{aligned} A_i^+ &= \frac{n^2}{2} (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i), \\ B_i^+ &= -n^2 [f_{i+2}x_i - f_{i+1}(x_i + x_{i+1}) + f_i x_{i+1}], \\ C_i^+ &= \frac{n^2}{2} (f_{i+2}x_i^2 + f_i x_{i+1}^2) + (\frac{1}{2} - n^2 x_i x_{i+1}) f_{i+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Формулы для A_i^- , B_i^- , C_i^- получаются из (2) заменой f_{i+2} на f_{i+1} , f_{i+1} на f_i , f_i на f_{i-1} .



При этом

$$(S_\alpha L_n \widehat{f})(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(f_i + f_{i+1}), & x_i \in [0, \frac{1}{2}], \\ \frac{1}{2}(f_i + f_{i-1}), & x_i \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Доказательство. Любая точка $x \in [0, 1]$ попадает в один из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$. При этом точка разрыва $x = \frac{1}{2}$ есть узел $\frac{n}{2}$ при n четном, а при n нечетном она является внутренней точкой отрезка $[x_{\frac{n-1}{2}}, x_{\frac{n+1}{2}}]$.

По формулам линейной интерполяции для $x \in [x_i, x_{i+1}]$ $(L_n \widehat{f})(x) = a_i x + b_i$, где $a_i = n(f_{i+1} - f_i)$, $b_i = n(f_i x_{i+1} - f_{i+1} x_i)$.

Если $x \in [0, \frac{1}{2}]$, то

$$\frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} (L_n \widehat{f})(t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_x^{x_{i+1}} (a_i t + b_i) dt + \frac{1}{\alpha} \int_{x_{i+1}}^{x+\alpha} (a_{i+1} t + b_{i+1}) dt.$$

Если $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, то

$$\frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^x (L_n \widehat{f})(t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_{x-\alpha}^{x_i} (a_{i-1} t + b_{i-1}) dt + \frac{1}{\alpha} \int_{x_i}^x (a_i t + b_i) dt.$$

Вычисляем интегралы, группируем слагаемые при x^2 , x , x^0 — получаем формулы для коэффициентов параболы на участке $[x_i, x_{i+1}]$. Полагая $x = x_i$, получаем значение $(S_\alpha L_n \widehat{f})(x_i)$. Другой вид формул для A_i^- , B_i^- , C_i^- приведен в [5]. \square

Теорема 2. Для любой $f(x) \in C[0, 1]$ и $\alpha = \frac{1}{n}$ справедлива оценка

$$\|S_\alpha L_n \widehat{f} - f\|_{L_\infty} \leq 2\omega\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $\|\cdot\|_{L_\infty} = \max\{\|\cdot\|_{C[0, 1/2]}, \|\cdot\|_{C[1/2, 1]}\}$, $\omega(\frac{1}{n})$ — модуль непрерывности функции $f(x)$ на $[0, 1]$.

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из оценок

$$\begin{aligned} \|S_\alpha L_n \widehat{f} - f\|_{L_\infty} &\leq \|S_\alpha\|_{C[0, 1] \rightarrow L_\infty} \cdot \|L_n \widehat{f} - f\|_{C[0, 1]} + \|S_\alpha f - f\|_{L_\infty}, \\ \|L_n \widehat{f} - f\|_{C[0, 1]} &\leq \omega\left(\frac{1}{n}\right), \quad \|S_\alpha f - f\|_{L_\infty} \leq \omega(\alpha) \end{aligned}$$

и того, что $\|S_\alpha\|_{C[0, 1] \rightarrow L_\infty} = 1$. \square

Следствие. Для любой $f(x) \in C[0, 1]$ и $\alpha = \frac{1}{n}$ выполняется сходимость

$$\|S_\alpha L_n \widehat{f} - f\|_{L_\infty[0, 1]} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

2. А-сплайны произвольной степени

Если вместо оператора S_α в (1) мы рассмотрим оператор S_α^{m-1} , который получается заменой в правой части (1) операторов $S_{\alpha i}$, $i = 1, 2$, на $S_{\alpha i}^{m-1}$, то таким же способом получим полиномиальный сплайн степени m $S_\alpha^{m-1} L_n \widehat{f}$.

Теорема 3. Максимальная степень m полиномиального сплайна $S_\alpha^{m-1} L_n \widehat{f}$ на отрезке $[0, 1]$ при фиксированном n есть $\frac{n}{2} + 1$ при n четном и $\frac{n+1}{2}$ при n нечетном.



Доказательство. При построении сплайна степени m мы применяем оператор S_α к сплайну степени $m - 1$. Так, при построении кубического сплайна мы применяем S_α к параболическому и проводим вычисления по той же схеме, что и в теореме 1. При $x \in [0, \frac{1}{2}]$ коэффициенты сплайна выражаются через f_{i+2}, f_{i+1}, f_i на $[x_i, x_{i+1}]$ и через $f_{i+3}, f_{i+2}, f_{i+1}$ на $[x_{i+1}, x_{i+2}]$.

Значит, коэффициенты кубического сплайна будут выражаться через значения $f(x)$ в четырех узлах: $f_{i+3}, f_{i+2}, f_{i+1}, f_i$, а на отрезке $[\frac{1}{2}, 1]$ — через $f_{i-2}, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}$.

Рассуждая по индукции, получим, что коэффициенты сплайна степени m выражаются через значения $f(x)$ в $m + 1$ узле: в узлах x_i, x_{i+1} и еще в $m - 1$ узле справа от x_{i+1} при $x \in [0, \frac{1}{2}]$ и слева от x_i при $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Очевидно, значение $m - 1$ не может превосходить числа узлов справа и слева от отрезков $[x_{\frac{n}{2}-1}, x_{\frac{n}{2}}]$ при n четном и $[x_{\frac{n-1}{2}}, x_{\frac{n+1}{2}}]$ при n нечетном.

Отсюда вытекает утверждение теоремы. \square

Замечание 1. Для сплайна степени m справедлива теорема 2 с заменой S_α на S_α^{m-1} , $2\omega(\frac{1}{n})$ на $\omega(\frac{1}{n}) + \omega(\frac{m-1}{n})$ и следствие из нее — с заменой S_α на S_α^{m-1} .

Замечание 2. Сплайны любой заданной степени m можно построить, если мы распоряжаемся выбором n .

3. Устойчивость решений в задаче приближения непрерывных функций А-сплайнами

Пусть вместо \hat{f} нам известен набор $\hat{f}_\delta : \|\hat{f}_\delta - \hat{f}\|_{E_{n+1}} \leq \delta$, где E_{n+1} — евклидово пространство с нормой

$$\|\hat{f}\|_{E_{n+1}} = \left(\sum_0^n f_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

либо с нормой

$$\|\hat{f}\|_{E_{n+1}} = \max_i |f_i|.$$

Теорема 4. Для сплайна m -й степени при $\alpha = \frac{1}{n}$ и любой $f(x) \in C[0, 1]$ справедлива оценка

$$\|S_\alpha^{m-1} L_n \hat{f}_\delta - f\|_{L_\infty} \leq \delta + \omega\left(\frac{1}{n}\right) + \omega\left(\frac{m-1}{n}\right).$$

Доказательство. Утверждение теоремы вытекает из оценки

$$\|S_\alpha^{m-1} L_n \hat{f}_\delta - f\|_{L_\infty} \leq \|S_\alpha^{m-1}\|_{C[0,1] \rightarrow L_\infty} \|L_n\|_{E_{n+1} \rightarrow C[0,1]} \delta + \|S_\alpha^{m-1} L_n \hat{f} - f\|_{L_\infty},$$

того, что $\|S_\alpha^{m-1}\|_{C[0,1] \rightarrow L_\infty} = 1$, $\|L_n\|_{E_{n+1} \rightarrow C[0,1]} = 1$, и теоремы 2 с заменой S_α на S_α^{m-1} . \square

Если в E_{n+1} выбрана метрика иная, чем указанная выше, и такая, что $\|L_n\|_{E_{n+1} \rightarrow C[0,1]} = \varphi(n)$, где $\varphi(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то мы попадаем в зону действия некорректно поставленных задач. Тогда, применяя технику методов регуляризации [3], мы добиваемся этой сходимости за счет согласования n с δ : $n(\delta) \rightarrow \infty$ и $\varphi(n(\delta))\delta \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Частный случай $\varphi(n)$ рассмотрен в [6].

Данный метод дает возможность проводить нужную коррекцию построенного сплайна. Так, может оказаться, что в формулах, приведенных в теореме 1, $A_i^+ = 0$ ($A_i^- = 0$). Это будет случай, когда у ломаной $L_n \hat{f}$ в точке x_{i+1} (x_i) не будет излома. Такой сплайн можно назвать параболическим с вырождением. Вырождение можно устранить: значение f_{i+1} (f_i) заменить на близкое $f_{i+1} + \delta$ ($f_i + \delta$). Это не повлияет на аппроксимативные свойства сплайна по теореме 4.



Список литературы

1. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. Москва : Наука, 1976. 248 с.
2. Старков В. Н. Конструктивные методы вычислительной физики в задачах интерпретации. Киев : Наукова думка, 2002. 262 с.
3. Хромова Г. В. Об операторах с разрывной областью значений и их применении // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2021. Т. 200. С. 58–64. <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-200-58-64>, EDN: MJEHGK
4. Хромова Г. В. Разрывный оператор Стеклова и полиномиальные сплайны // Современные проблемы теории функций и их приложения. 2024. Вып. 22. С. 296–299. EDN: XXTNRH
5. Хромова Г. В. Об одном аналоге интерполяционных параболических сплайнов // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. 2023. Т. 66. С. 279–281.
6. Советникова С. Ю. О восстановлении функций, заданных на сетке // Современные проблемы теории функций и их приложения. 2024. Вып. 22. С. 252–255. EDN: DHPJAU

References

1. Stechkin S. B., Subbotin Yu. N. *Splayny v vychislitel'noy matematike* [Splines in computational mathematics]. Moscow, Nauka, 1976. 248 p. (in Russian).
2. Starkov V. N. *Konstruktivnye metody vychislitel'noy fiziki v zadachakh interpretatsii* [Constructive methods of computational physics in interpretation problems]. Kiev, Naukova Dumka, 2002. 262 p. (in Russian).
3. Khromova G. V. Operators with discontinuous range and their applications. *Progress in Science and Technology. Contemporary Mathematics and its Applications. Thematic Surveys*, 2021, vol. 200, pp. 58–64 (in Russian). <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-200-58-64>, EDN: MJEHGK
4. Khromova G. V. Discontinuous Steklov operator and polynomial splines. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*, 2024, iss. 22, pp. 296–299 (in Russian). EDN: XXTNRH
5. Khromova G. V. An analogue of interpolation parabolic splines. *Trudy Matematicheskogo tsentra im. N. I. Lobachevskogo* [Proceedings of the N. I. Lobachevsky Mathematical Center], 2023, vol. 66, pp. 279–281 (in Russian).
6. Sovetnikova S. Yu. On restoring functions defined on a grid. *Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications*, 2024, iss. 22, pp. 252–255 (in Russian). EDN: DHPJAU

Поступила в редакцию / Received 06.05.2024

Принята к публикации / Accepted 11.12.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025

МЕХАНИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 189–202

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 189–202

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-189-202>

EDN: FPIOWJ

Научная статья

УДК [533+536]:51-73

Табулирование решения задачи Римана в методе Годунова для уравнения состояния Соаве – Редлиха – Квонга

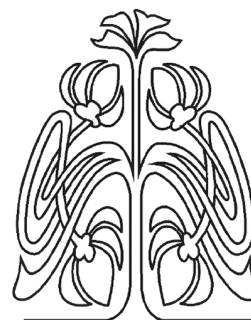
М. Р. Королева[✉], В. А. Тенев

Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения РАН, Россия, 426067, г. Ижевск, ул. Татьяны Барамзиной, д. 34

Королева Мария Равилевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, koroleva@udman.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5697-9199>, SPIN: 5085-4691, AuthorID: 154514

Тенев Валентин Алексеевич, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, v.tenenev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7685-609X>, SPIN: 4793-8214, AuthorID: 119471

Аннотация. В работе рассматриваются вопросы использования точных решений задачи Римана для описания течений реальных газов, описываемых уравнением состояния Соаве – Редлиха – Квонга. Формулируются основные математические выражения для построения точного решения задачи о распаде произвольного разрыва. Исследуются особенности поведения функций, входящих в состав решения. Показано, что форма уравнения состояния Соаве – Редлиха – Квонга не допускает явного выражения зависимости между давлением и внутренней энергией газа. Связь между данными параметрами определяется через температуру, что значительно усложняет процедуру нахождения точного решения на разрывах. Возникающие сложности определяются, во-первых, особенностями математической постановки задачи, которая включает ряд нелинейных уравнений и интегралов, требующих привлечения итерационных методов поиска решения. Это приводит к существенному повышению трудоемкости алгоритма. Во-вторых, специфическое поведение ряда функций в составе математической модели не гарантирует корректное построение точного решения задачи Римана при использовании итерационных методов. Все это делает классический подход неприменимым для решения сложных задач нестационарной газовой динамики для реального газа Соаве – Редлиха – Квонга. Предлагаемый в работе подход использует интерполирование решений на основе предварительных точных расчетов задачи Римана, выполненных без дополнительных допущений во всем диапазоне изменения газодинамических параметров задачи. Использование табулированных значений гарантирует точность построения приближенного решения и сокращает трудоемкость вычислительного алгоритма. Описанный подход используется для численного моделирования течения водорода в ударной трубе в широком диапазоне изменения газодинамических величин в областях классической и неклассической газовой динамики, а также для численного моделирования газодинамики водород-



Научный
отдел





ного предохранительного клапана. Полученные результаты подтверждают, что применение табулированных параметров оправданно в очень широком диапазоне изменения параметров, а предложенный подход может быть использован для решения сложных задач нестационарной газовой динамики, в том числе с областями смешанной нелинейности.

Ключевые слова: задача Римана, метод Годунова, реальный газ, уравнение состояния Соаве–Редлиха–Квонга, табулирование решения, интерполяция

Благодарности: Работа выполнена в рамках темы государственного задания УдмФИЦ УрО РАН «Разработка и развитие новых методов исследований в естественно-научных, технических и социогуманитарных направлениях на основе технологий глубоких нейронных сетей, машинного обучения и математического моделирования» (проект № 22040700011-4).

Для цитирования: Королева М. Р., Тенев В. А. Табулирование решения задачи Римана в методе Годунова для уравнения состояния Соаве–Редлиха–Квонга // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 189–202. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-189-202>, EDN: FPIOWJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Tabulation of the Riemann problem solution in Godunov method for Soave–Redlich–Kwong equation of state

M. R. Koroleva[✉], V. A. Tenenev

Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the RAS, 34 Tat'yany Baramzinoi St., Izhevsk 426067, Russia

Maria R. Koroleva, koroleva@udman.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5697-9199>, SPIN: 5085-4691, AuthorID: 154514

Valentin A. Tenenev, v.tenenev@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-7685-609X>, SPIN: 4793-8214, AuthorID: 119471

Abstract. The work is devoted to the using of the exact solutions of the Riemann problem on the decay of an arbitrary discontinuity to describe the real gases flows with the Soave–Redlich–Kwong equation of state. The governing mathematical expressions are formulated for constructing an exact solution to the Riemann problem. The features of the functions included in the solution are investigated. It is demonstrated that the form of the Soave–Redlich–Kwong equation of state does not allow to define explicitly the relationship between pressure and internal energy of the gas. The connection between these is determined through gas temperature that leads to significant complication of the task solution technique on the discontinuities. The arising difficulties are determined, firstly, by the features of the mathematical formulation of the problem. It includes a number of nonlinear equations and definite integrals that require the using of the iterative methods to find an exact Riemann solution. This leads to a significant increase in numerical algorithm complexity. Secondly, the specific behavior of some functions in the mathematical model does not guarantee the correct construction of an exact solution to the Riemann problem in using the iterative methods. All these reasons make the classical approach inappropriate for solving complex problems of nonstationary gas dynamics for a real Soave–Redlich–Kwong gas. The approach proposed in this work uses interpolation of solutions constructed on the preliminary accurate calculations of the Riemann problem, performed without additional assumptions over the entire range of changes in gas-dynamic parameters. The use of tabulated values provides the accuracy of constructing an approximate solution and reduces the complexity of the computational algorithm. In the present work this approach is used for numerical simulation of the hydrogen flow in shock tube in a wide range of gas parameters in the fields of classical and non-classical gas dynamics and for numerical simulation of the gas dynamics of a hydrogen safety valve. The obtained results confirm that the use of tabulated parameters is justified in a wide range of gas parameters variations, and the proposed approach can be used to solve complex problems of non-stationary gas dynamics, including those with areas of mixed nonlinearity.



Keywords: Riemann problem, Godunov method, real gas, discontinuity decay, Soave – Redlich – Kwong equation of state, solution tabulation, interpolation

Acknowledgements: The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences “Design and development of new research methods in natural sciences, technology and social-humanitarian directions based on deep neural network technologies, machine learning and mathematical modeling” (project No. 22040700011-4).

For citation: Koroleva M. R., Tenenev V. A. Tabulation of the Riemann problem solution in Godunov method for Soave – Redlich – Kwong equation of state. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 189–202 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-189-202>, EDN: FPIOWJ

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Метод Годунова [1] был построен для решения нестационарных задач классической газовой динамики. Однако спектр задач, для успешного решения которых применима схема Годунова и различные ее модификации, значительно шире [2–12]. Данный метод использовался для решения задач о распространении волн горения и детонации в сверхзвуковых потоках, сопровождаемых большим количеством физико-химических реакций [4, 5]; описания кумуляции взрывных волн в трехмерных замкнутых объемах сложной геометрии [6]; моделирования распространения в атмосфере продуктов испарения метеоритных тел [7]; численного расчета упругопластической деформации твердого тела [8]; решения задач релятивистской и нерелятивистской магнитной гидродинамики [9], описания разрывов в двухтемпературной и трехтемпературной газовой динамике, а также различного рода обобщений этих систем на многофазные среды [10, 11]. Одним из направлений развития метода Годунова является внедрение в классическую схему сложных уравнений состояния. Такие уравнения описывают, например, процессы в средах в состоянии насыщения или близком к нему. Они, как правило, являются широкодиапазонными, частично полуэмпирическими, учитывают многофазность и метастабильность и описывают поведение вещества не только в газообразном состоянии, но также в плазменном, твердом и жидком состояниях [9, 13].

В качестве сложного уравнения состояния в работе рассматривается известное уравнение реального газа – уравнение Соаве – Редлиха – Квонга [12]. Данное уравнение является модификацией уравнения состояния Редлиха – Квонга [14, 15], которое положило начало возникновению целого семейства уравнений состояний, характеризующихся относительной простотой и точностью описания критических свойств веществ. Уравнение имеет сложную аналитическую форму, не допускающую однозначного выражения энтропии, внутренней энергии и температуры газа через давление и в результате является труднореализуемым на практике, особенно в области неклассического поведения решения, когда в потоке формируются сложные составные волновые конструкции [16, 17]. Применение данного уравнения требует модификации метода Годунова, что в случае сохранения строгой физической интерпретации метода приводит к появлению следующих особенностей.

Во-первых, возрастает трудоемкость процедуры поиска точного решения задачи Римана и, соответственно, снижается скорость вычислительного алгоритма. Ускорить алгоритм возможно за счет использования приближенных решений задачи о распаде разрыва, однако данный подход не всегда оправдан, так как может привести к количественному и качественному искажению результатов нестационарных и автоколебательных (квазипериодических) процессов, как это было отмечено, например, в работе [2].

Во-вторых, специфический характер нелинейных функций в составе решения затрудняет использование итерационных процедур поиска решения нелинейных уравнений. Это связано с наличием нескольких действительных корней нелинейных уравнений, располо-

женных близко друг к другу. Встает проблема выбора начального приближения в итерационных методах вроде метода бисекций или метода Ньютона.

В качестве подхода, сохраняющего ориентированность метода Годунова на точные решения задачи Римана с применением сложных уравнений состояния, предлагается использование интерполяционных зависимостей по табулированным значениям ключевых газодинамических параметров потока. Данный подход гарантирует корректное построение точных решений задачи распада разрыва и не требует применения итерационных вычислительных процедур, что существенно сокращает временные затраты при решении сложных задач.

1. Задача Римана о распаде произвольного разрыва для уравнения состояния Соаве – Редлиха – Квонга

Рассмотрим задачу Римана для уравнений Эйлера, содержащих законы сохранения массы, импульса и энергии для сжимаемого газа без учета свойств вязкости и теплопроводности. В качестве неизвестных величин примем плотность ρ , давление p , удельную внутреннюю энергию e и скорость газа u . В этом случае система уравнений Эйлера для одномерного нестационарного случая записывается следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 + p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho (e + u^2/2)}{\partial t} + \frac{\partial \rho u (e + u^2/2) + pu}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

Система уравнений (1)–(3) замыкается уравнением состояния в общем виде $e = e(p, \rho)$.

Начальные условия в задаче Римана формируют разрыв между двумя исходными состояниями слева (p_l, ρ_l, u_l) и справа (p_r, ρ_r, u_r) от разрыва. Согласно классической газовой динамике решение задачи Римана представляет собой систему волн, которая включает ударную волну или волну разрежения, соединяющую левое исходное состояние (p_l, ρ_l, u_l) с состоянием слева от контактного разрыва (R_l, P, U) , и волну разрежения или ударную волну, соединяющую состояние справа от контактного разрыва (R_r, P, U) с правым исходным состоянием (p_r, ρ_r, u_r) .

Распределение параметров на ударных волнах подчиняется соотношениям Ренкина – Гюгонно [1]:

$$[u] = \pm \frac{1}{m} [p], \quad \left[\frac{1}{\rho} \right] = -\frac{1}{m^2} [p], \quad [e] = -\frac{P + p_H}{2} \left[\frac{1}{\rho} \right]. \quad (4)$$

В уравнениях (4) квадратные скобки обозначают разницу между параметрами слева/справа от ударной волны, а m является массовой скоростью на ударной волне [1]. Нижний индекс « H » принимает значения « l », « r » с разных сторон начального разрыва.

В волне разрежения выполняется условие постоянства энтропии, что приводит к следующим соотношениям, содержащим величину локальной скорости звука c :

$$\frac{dp}{d\rho} = c^2, \quad \frac{du}{dp} \pm \frac{1}{\rho c} = 0. \quad (5)$$

В общем случае по соотношениям (4) и (5) строится система из трех уравнений, решение которой позволяет определить значения параметров (P, R_l, R_r) на разрывах, а в дальнейшем и скорость газа между волнами – U . Аналитические выражения для функций на разрывах получены лишь для случая идеального газа или вещества, подчиняющегося двучленному уравнению состояния [1, 9]. Решение такой системы уравнений итерационное, требует хорошего начального приближения и включает в себя интегрирование второго уравнения системы (5) в волне разрежения.



Рассмотрим решение задачи Римана для уравнения состояния реального газа Соаве – Редлиха – Квонга. Данное уравнение в приведенной форме имеет вид

$$p(\rho, T) = \frac{8}{3} \frac{T\rho}{1 - B_s\rho} - \frac{A_s\alpha(T)\rho^2}{1 + B_s\rho}, \quad (6)$$

где T – температура газа, $\alpha(T) = (1+n-n\sqrt{T})^2$ – модифицирующая функция с параметром $n = 0.48 + 1.574\omega - 0.176\omega^2$, учитывающим фактор ацентричности молекул реальных газов ω [18], а константы A_s и B_s равны 3.03987 и 0.23104 соответственно.

В случае политропного газа для описания термодинамической системы можно использовать следующие фундаментальные термодинамические соотношения, определяющие изменение внутренней энергии газа и условие изоэнтропийности процесса [19]:

$$e(\rho, T) = \frac{8T}{3\delta} - \frac{A_s}{B_s} \ln(1 + B_s\rho)^{\chi(T)}, \quad (7)$$

$$T \left(\frac{1 - B_s\rho}{\rho} \right)^{\delta} (1 + B_s\rho)^{\beta(T)} = \text{const}. \quad (8)$$

Здесь величина $\delta = c_v/R$ определяется удельной теплоемкостью c_v и удельной газовой постоянной R , а показатели степеней определяются следующим образом:

$$\beta(T) = -\frac{3}{8}\delta\frac{A_s}{B_s}n \left(\frac{1+n}{\sqrt{T}} - n \right), \quad \chi(T) = (1+n)\alpha^{0.5}(T).$$

Более подробно постановка задачи для реальных газов представлена в работе [20].

Решение задачи Римана для реального газа, описываемого уравнениями (6)–(8), определяется параметрами на контактном разрыве и начинается с решения нелинейного уравнения для давления [1]:

$$F(p) = F_l(p) + F_r(p) + u_l - u_r = 0, \quad (9)$$

где функция $F_H(p)$ определяется в зависимости от величины текущего давления изменением скорости либо в волне разрежения (Δu^{rar}), либо на ударной волне (Δu^{sh}):

$$F_H(p) = \begin{cases} z_H \Delta u^{rar}(p, p_H, \rho_H), & p < p_H, \\ z_H \Delta u^{sh}(p, p_H, \rho_H), & p > p_H. \end{cases} \quad (10)$$

Величина $z_H = \pm 1$ зависит от направления распространения волны. Величины Δu^{rar} и Δu^{sh} определяются текущим давлением и параметрами газа перед волной и согласно (4) и (5) определяются следующими уравнениями:

$$\Delta u^{rar}(p, p_H, \rho_H) = \int_{p_H}^p \frac{dp}{\rho(p)c(p)}, \quad (11)$$

$$\Delta u^{sh}(p, p_H, \rho_H) = \left[(p - p_H) \left(\frac{1}{\rho_H} - \frac{1}{\rho(p)} \right) \right]^{0.5}. \quad (12)$$

Таким образом, с учетом уравнений (9)–(11) для определения параметров в волне разрежения необходимо знать зависимости плотности и скорости звука от давления. Из уравнения (8) можно получить еще одно нелинейное уравнение, которое связывает между собой плотность и температуру газа:

$$S(p, \rho) = T(p, \rho) \left(\frac{1 - B_s\rho}{\rho} \right)^{\delta} (1 + B_s\rho)^{\beta(T)} - T_H \left(\frac{1 - B_s\rho_H}{\rho_H} \right)^{\delta} (1 + B_s\rho_H)^{\beta(T_H)} = 0. \quad (13)$$

Температура, в свою очередь, находится из уравнения состояния (6) как корень квадратного уравнения и определяется соотношением

$$T(p, \rho) = \left[\frac{-B(\rho) + \sqrt{B^2(\rho) - 4A(\rho)C(p, \rho)}}{2A(\rho)} \right]^2 \quad (14)$$

с величинами

$$A(\rho) = \frac{8}{3} \frac{\rho}{1 - B_s \rho} - \frac{A_s n^2 \rho^2}{1 + B_s \rho}, \quad B(\rho) = 2n(n+1) \frac{A_s \rho^2}{1 + B_s \rho}, \quad C(p, \rho) = -\frac{A_s (n+1)^2 \rho^2}{1 + B_s \rho} - p.$$

Уравнение (13) решается итерационно совместно с уравнением (14), при этом изменение скорости в волне разрежения определяется с помощью интеграла (11) численно.

Изменение скорости на ударной волне (12) определяется значением плотности при текущей величине давления, которая может быть найдена из решения уравнения

$$e(p, \rho) - e_H + 0.5(p + p_H) \left(\frac{1}{\rho(p)} - \frac{1}{\rho_H} \right) = 0 \quad (15)$$

методом Ньютона при начальном приближении $\rho = \rho_H$. В формуле (15) величина e_H является внутренней энергией газа, определяемой исходными значениями параметров на разрыве $e_H = e(\rho_H, T(\rho_H, p_H))$.

Определив величины Δu^{rag} и Δu^{sh} , можно построить функцию $F(p)$, а решение нелинейного уравнения (9) позволит определить давление P на контактном разрыве и автоматически волновую структуру решения. При этом соотношения (11) или (12) определяют скорость контактного разрыва U . В зависимости от вида распространяющихся волн можно найти плотность газа R_l и R_r по соотношениям (13) и/или (15). Комплект величин (P, R_l, R_r, U) определяет точное решение задачи Римана и используется в численном решении задач нестационарной газовой динамики для нахождения потоков массы импульса и энергии через грань контрольного объема.

Описанный выше алгоритм включает итерационное решение уравнения (9), на каждой итерации выполнения которого необходимо также итерационно решать еще два нелинейных уравнения — (13) и/или (15), и при необходимости находить с использованием квадратурных формул интеграл (11).

Сложность алгоритма увеличивается в случае решения задачи для неклассической области газодинамики, которая характеризуется уменьшением и отрицательным значением величины фундаментальной производной $G = G(p, \rho)$ при постоянной энтропии газа [21] (рис. 1). Характер течения в области отрицательных значений фундаментальной производной $G < 0$ может существенно отличаться от поведения политропных газов в классических областях. Например, в этом случае ударная волна разрежения является физически допустимой, поскольку кривизна изоэнтропии и, следовательно, кривой Ренкина – Гюгоннио между двумя состояниями обратная (отрицательная) по отношению к классическому случаю [22]. Невыпуклый характер изоэнтроп делает возможным существование неклассических плавно изменяющихся волн сжатия и формирование сложных составных волн, состоящих из двух/трех классических и/или неклассических простых волн. Наличие таких волн впервые было теоретически показано Зельдовичем и неоднократно подтверждено в различных веществах экспериментально [23–28].

В неклассической области функция $S(p, \rho)$ имеет нелинейный характер. На рис. 2 приведены графики изменения функции $S(p, \rho)$ в зависимости от плотности при различных значениях давления p для вариантов исходных данных (1) : $\rho_H = 1$, $T_H = 0.9$ и (2) : $\rho_H = 1.3$, $T_H = 1.2$. Видно, что расположение корней сильно зависит от начальных параметров задачи Римана. Кроме того, в неклассической области уравнение (13) может иметь более одного решения. В связи с этим возникает проблема задания начального приближения при нахождении актуального корня уравнения с использованием итерационных методов. Выбор



универсального начального приближения, например, для метода Ньютона, в таких условиях невозможен, особенно в широком диапазоне изменения параметров задачи. Расчеты показали, что в этом случае метод бисекции является более приемлемым, но и тогда точно требуется «ручное» управление процедурой поиска решения, что неприемлемо при решении сложных задач газовой динамики.

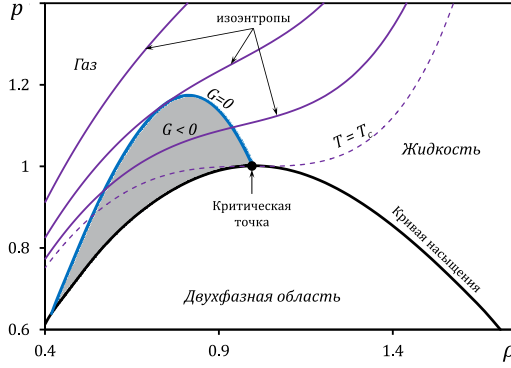


Рис. 1. Фазовая диаграмма вещества для политропного газа Соаве – Редлиха – Квонга, неклассическая область выделена серым цветом (цвет онлайн)

Fig. 1. Phase diagram for the polytropic Soave – Redlich – Kwong gas, non-classical area is highlighted in grey color (color online)

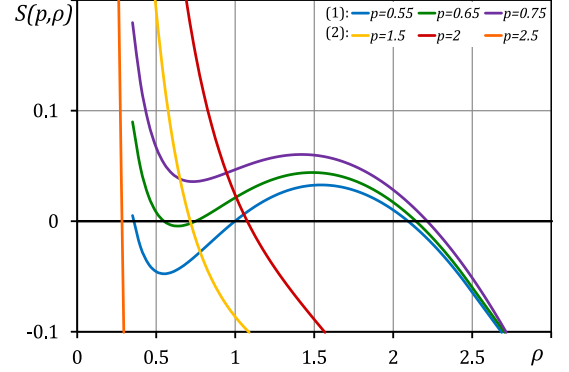


Рис. 2. Функция $S(p, \rho)$ для разных значений давления, (1) : $\rho_H = 1$, $T_H = 0.9$, (2) : $\rho_H = 1.3$, $T_H = 1.2$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Function $S(p, \rho)$ for different pressure values, (1) : $\rho_H = 1$, $T_H = 0.9$, (2) : $\rho_H = 1.3$, $T_H = 1.2$ (color online)

Для решения данной проблемы можно использовать два подхода. Первый подход заключается в аппроксимации уравнений (6), (7) двухчленным уравнением состояния в окрестности распада разрыва. Данный способ применялся при расчете течений реального газа в работах [29, 30], однако его использование требует обоснования, особенно в областях неклассического изменения давления и плотности [16, 17].

Второй подход предполагает использование интерполяции решения на основе предварительно рассчитанных и затабулированных значений основных газодинамических величин. Такой подход гарантирует правильное построение точного решения задачи Римана и позволит существенно снизить трудоемкость алгоритма.

2. Метод табулирования решения задачи Римана

Рассмотрим метод табулирования на примере решения тестовых задач в ударной трубе. Приближенное решение строится на равномерной сетке $X_k = \{(x_k) : (x_k) = x_{k-1} + \Delta x, k = 1, \dots, N_x - 1\}$, где N_x — число узлов сетки. Два соседних узла сетки формируют слой, внутри которого газодинамические величины (ρ_k, p_k, u_k) постоянны. Разрыв формируется на границе двух слоев, соответствующей общему узлу сетки.

Для реализации метода необходимо рассчитать зависимости изменения скорости в волне разрежения Δu^{rar} и на ударной волне Δu^{sh} при различных значениях газодинамических параметров (p_H, ρ_H) по обе стороны предполагаемых разрывов, формирующихся на сетке X_k с течением времени. Для реализации решения задачи Римана вводится неравномерная интерполяционная сетка (p_H^i, ρ_H^j) , на которой будет проводиться табулирование зависимостей (11) и (12) в заданном диапазоне изменения давления (p_{\min}, p_{\max}) и плотности $(\rho_{\min}, \rho_{\max})$:

$$(p_H^i, \rho_H^j) : \begin{cases} p_H^i = p_H^{i-1} + \Delta p_i, & i = 1 \dots N - 1, p_H^0 = p_{\min}, p_H^{N-1} = p_{\max}, \\ \rho_H^j = \rho_H^{j-1} + \Delta \rho_j, & j = 1 \dots M - 1, \rho_H^0 = \rho_{\min}, \rho_H^{M-1} = \rho_{\max}. \end{cases} \quad (16)$$

где N, M — число узлов интерполяционной сетки по давлению и плотности соответственно, а Δp_i и $\Delta \rho_j$ — переменные шаги этих сеток. Интерполяционная сетка сгущается в области



резкого изменения величин Δu^{rar} и Δu^{sh} . Определение шагов интерполирования Δp_i на неравномерной сетке по давлению проводится по формулам

$$\Delta p_i = \begin{cases} (p_H^{n_r} - p_H^0) \frac{r-1}{r^{n_r-1} - 1} r^i, & i = 0 \dots n_r - 1, \\ \frac{p_H^{N-1} - p_H^{n_r}}{N - n_r}, & i = n_r \dots N - 1, \end{cases} \quad (17)$$

где $(p_H^{n_r} - p_H^0)$ — интервал, на котором проводится сгущение интерполяционной сетки, n_r — число узлов сетки на данном интервале, $r \geq 1$ — коэффициент сгущения. Аналогичные соотношения записываются для шагов $\Delta \rho_j$ интерполяционной сетки для плотности.

Из закона распределения узлов интерполяции (16), (17) можно явно определить местоположение ячейки интерполяционной сетки $p_H^{i-1} < p_H < p_H^i$, в которую попадают значения параметров p_H слева или справа от локального разрыва по формулам

$$\begin{cases} i = \frac{\ln \left(1 + \frac{p_H - p_H^{n_r}}{p_H^{n_r}} (r-1) r^{n_r-1} \right)}{\ln(r)}, & i < n_r, \\ i = n_r - 1 + \frac{p_H - p_H^{n_r}}{p_H^{N-1} - p_H^{n_r}} (N - n_r), & i \geq n_r. \end{cases}$$

Значения в точке (p_H, ρ_H) определяются с использованием билинейной интерполяции по величинам $p_H^{i-1}, p_H^i, \rho_H^{j-1}, \rho_H^j$. В результате строится сеточная функция $F(p_k)$ по соотношениям (9) и (10). Определив интервал смены знака $[p_{k-1}, p_k]$ уравнения (9) и предполагая линейное изменение функции $F(p)$ между узлами сетки p_{k-1} и p_k , величина давления на локальном разрыве находится по формуле

$$P = p_k - F(p_k) \frac{p_k - p_{k-1}}{F(p_k) - F(p_{k-1})}. \quad (18)$$

Следует отметить, что для нахождения давления на разрыве при таком подходе не требуется использование итерационных процессов. Скорость на разрыве находится по формуле

$$U = u_H + F_H(P). \quad (19)$$

Текущее значение давления в волне разрежения в зависимости от значения характеристики $\xi = x/t$ определяется из аналогичного уравнения

$$u_H + F_H(p) - z_H c(p) - \xi = 0. \quad (20)$$

Зависимости плотности и скорости звука от давления также табулируются и определяются текущим давлением. Табулированные зависимости параметров от давления полностью определяют решение задачи Римана без каких-либо дополнительных допущений и упрощений.

3. Результаты расчетов

Апробация метода табулирования рассматривается на примере расчета течений в ударной водородной трубе в классической и неклассической областях газовой динамики.

Для классической области начальное распределение параметров газа определяется величинами $(p_l = 78.935, \rho_l = 2.140, u_l = 0)$ и $(p_r = 0.077, \rho_r = 0.054, u_r = 0)$. В данном случае задача характеризуется широким диапазоном изменения параметров: давление слева и справа от разрыва различается на три порядка, а плотность — на два порядка. Решением является система волн: волна разрежения, распространяющаяся влево, ударная волна,двигающаяся вправо, и однонаправленный ей контактный разрыв. Расчет в ударной трубе



с применением разностной схемы Годунова по табулированным параметрам мало отличается от решения задачи Римана. Наблюдается лишь обычное схемное сглаживание резких скачков. Максимальная относительная ошибка по давлению не превышает 1.5%.

Для неклассической области начальные данные идентичны тестовой задаче, рассмотренной в работе [16], и равны ($p_l = 1.256$, $\rho_l = 1.222$, $u_l = 0.141$) и ($p_r = 1.028$, $\rho_r = 0.918$, $u_r = 1.894$) с параметром $\delta = 0.008$. Решение является составным и включает комбинацию «волна разрежения — ударная волна разрежения — волна разрежения», движущуюся влево, и двойную комбинацию «волна разрежения — ударная волна разрежения», распространяющуюся вправо по газу. На рис. 3, а представлена термодинамическая диаграмма данного решения. Части изоэнтроп, лежащие в области $G < 0$, формируют неклассические ударные составляющие. Характеристическое поле решения с тройной составной волной « fSf » и двойной составной волной « fS » по обе стороны контактного разрыва « c » показано на рис. 3, б. Обе составные волны являются волнами разрежения, поэтому их неклассические ударные компоненты вносят вклад в расширение газа.

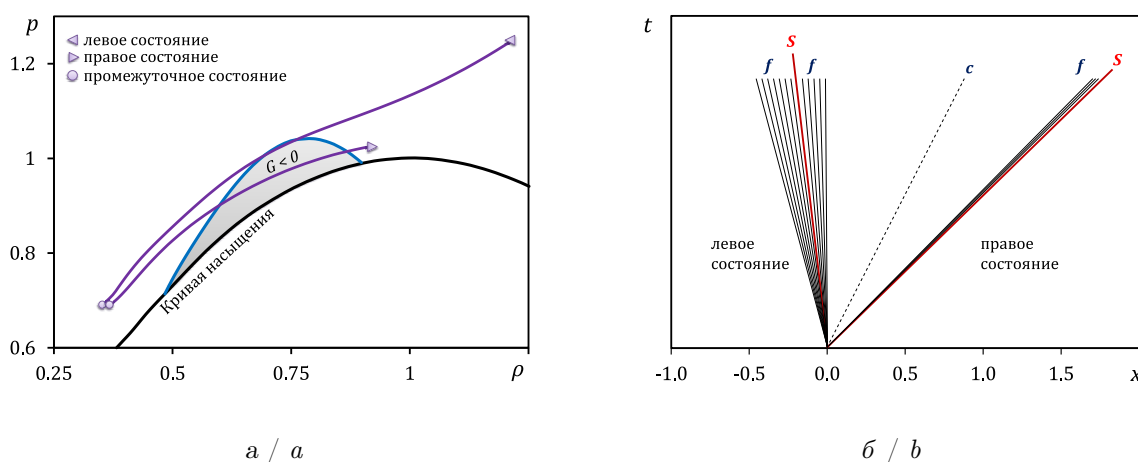


Рис. 3. Задача Римана в неклассической области: а — термодинамическая диаграмма решения; б — схема решения (f — волна разрежения, S — ударная волна разрежения, c — контактный разрыв) (цвет онлайн)

Fig. 3. Riemann problem in nonclassical region: a is solution thermodynamic plane; b is solution sketch (f — rarefaction wave, S — rarefaction shock, c — contact discontinuity) (color online)

Результаты, полученные с использованием табулированных значений газодинамических величин в неклассической области, приведены на рис. 4, где сплошной линией показано точное решение задачи Римана, основанное на уравнениях (9)–(15), а маркерами — приближенное решение, полученное с применением схемы Годунова по табулированным значениям (18)–(20). Оба решения построены на идентичных сетках с числом узлов $N_x = 400$ при длине расчетной области, равной 1. Табулирование проводилось на неравномерной интерполяционной сетке (16), содержащей 50 точек для интерполяции давления и 30 точек для плотности.

На рис. 4 показано распределение давления и плотности газа в ударной трубе. Видно, что метод табулирования сохраняет все особенности неклассического решения задачи Римана, хорошо разрешая составные волновые структуры. Ошибка описания сложных волн разрежения не превышает 1.6%.

Предлагаемый подход был реализован при численном моделировании газодинамических процессов в водородном предохранительном клапане. Условия срабатывания клапана соответствуют диапазону параметров газа для тестовой задачи в ударной трубе в классической области. Результаты расчетов в виде распределения давления и скорости в центральном сечении клапана показаны на рис. 5.

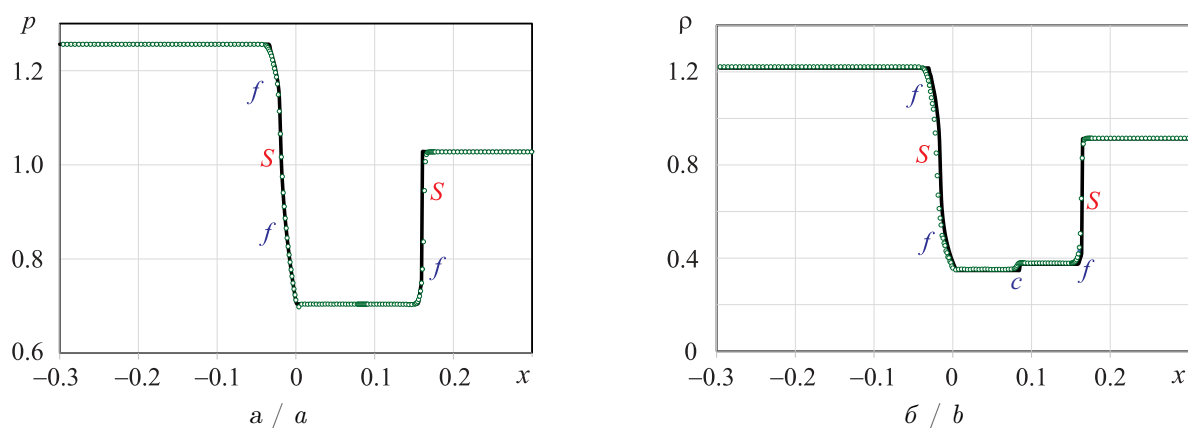


Рис. 4. Сравнение точного решения задачи Римана с табулированным решением для распределения плотности газа в неклассической области: a — давление; b — плотность, линия — точное решение, маркеры — табулированное решение (цвет онлайн)

Fig. 4. Comparison of the exact and tabulated solutions of the Riemann problem for nonclassical region: a is pressure; b is density, line — exact solution, marker — tabulated solution (color online)

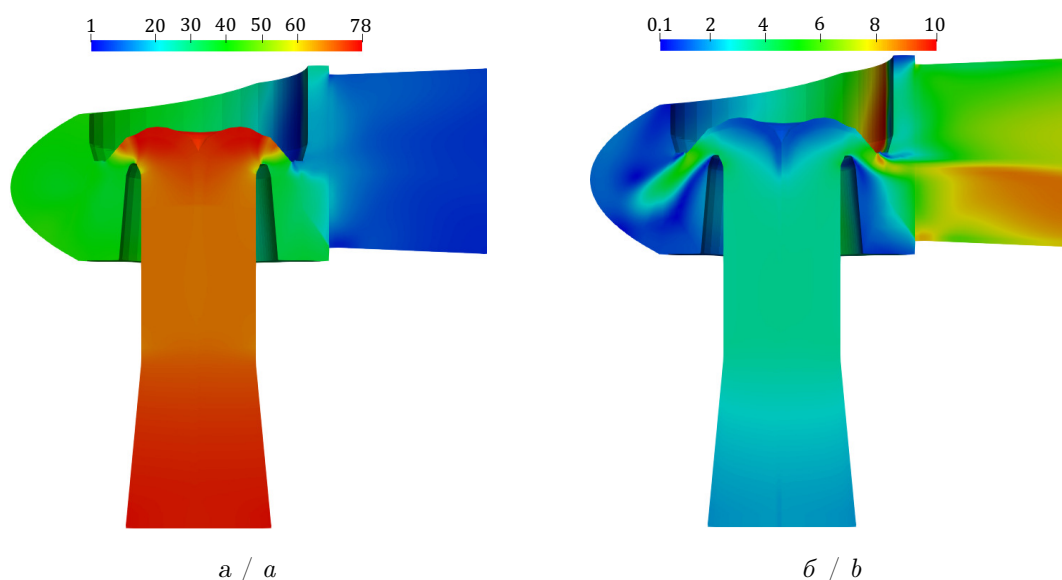


Рис. 5. Газодинамика водородного предохранительного клапана: a — распределение давления, b — распределение скорости (цвет онлайн)

Fig. 5. Gas dynamics of the hydrogen safety valve: a — pressure field, b — velocity field (color online)

Структура течения определяется сложной геометрической формой внутреннего объема клапана. В критическом сечении между корпусом и подвижным диском поток максимально разгоняется, и после перехода в выходной патрубок в нижней части выходного канала формируется высокоскоростная струя газа. Поля распределения газодинамических величин, полученные методом табулирования, соответствуют решению, полученному с использованием классической схемы Годунова, что подтверждает обоснованность его использования для решения аналогичных задач с режимами смешанной нелинейности [31].

Заключение

В работе описан подход, основанный на использовании в методе Годунова интерполяционных зависимостей по табулированным значениям ключевых газодинамических параметров потока, которые получены в результате точного решения задачи Римана для реального газа, описываемого уравнением состояния Соаве–Редлиха–Квонга. Использование такого



подхода позволяет сохранить ориентированность метода на точные решения задачи Римана. При этом гарантируется корректное построение точного решения задачи распада разрыва и не требуется выполнения многократных итерационных вычислительных процедур, что позволяет существенно повысить скорость вычислительного алгоритма. Оценка предлагаемого подхода проводилась на основе решения тестовых задач в ударной трубе в областях классического и неклассического поведения газа, а также на примере численного моделирования газодинамики водородного предохранительного клапана. Полученные результаты подтверждают, что применение табулированных значений ключевых газодинамических величин оправданно в очень широком диапазоне изменения параметров, а предложенный подход может быть использован для решения сложных задач нестационарной газовой динамики, в том числе с областями смешанной нелинейности.

Список литературы

1. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. Москва : Наука, 1976. 400 с. EDN: [UESERL](#)
2. Бочарова О. В., Лебедев М. Г. Тестирование метода Годунова первого порядка точности на некоторых модельных и практических задачах // Прикладная математика и информатика: труды факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Москва : МАКС Пресс, 2016. Т. 51. С. 24–44. EDN: [XHMDZT](#)
3. Прокопов Г. П., Северин А. В. Экономичная реализация метода Годунова // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. 2009. № 29. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-29> (дата обращения: 02.04.2024), EDN: [OYBUIR](#)
4. Туник Ю. В. Детонационное горение водорода в сопле Лаваля с центральным коаксиальным цилиндром // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2014. № 5. С. 142–148. EDN: [SUCSCT](#)
5. Туник Ю. В., Герасимов Г. Я., Левашов В. Ю., Славинская Н. А. Численное моделирование детонационного горения паров керосина в расширяющемся сопле // Физика горения и взрыва. 2020. Т. 56, № 3. С. 105–114. <https://doi.org/10.15372/FGV20200311>, EDN: [WBOTUC](#)
6. Базаров С. Б., Набоко И. М. Фокусировка взрывных волн: трехмерное математическое моделирование // Химическая физика. 2008. Т. 27, № 10. С. 58–62. EDN: [JRFTSV](#)
7. Ситник В. В. Моделирование разрушения лесного массива ударной волной, вызванной падением крупного космического тела // Химическая физика. 2009. Т. 28, № 5. С. 45–55. EDN: [KFRINJ](#)
8. Сузов В. С. Об одном варианте метода Годунова для расчета упругопластической деформации среды // Вычислительная механика сплошных сред. 2021. Т. 14, № 1. С. 30–39. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.1.3>, EDN: [MTTPAB](#)
9. Куликовский А. Г., Погорелов Н. В., Семенов А. Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Москва : Физматлит, 2012. 656 с. EDN: [UGLJBR](#)
10. Fechter S., Jaegle F., Schleper V. Exact and approximate Riemann solvers at phase boundaries // Computers and Fluids. 2013. Vol. 75. P. 112–126. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.01.024>
11. Garavello M., Marcellini F. The Riemann problem at a junction for a phase transition traffic model // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2017. Vol. 37. P. 5191–5209. <https://doi.org/10.3934/dcds.2017225>
12. Akberov R. R. Calculating the vapor-liquid phase equilibrium for multicomponent systems using the Soave–Redlich–Kwong equation // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. 2011. Vol. 45. P. 312–318. <https://doi.org/10.1134/S004057951103002>
13. Болотникова Р. Х., Бузина В. А. Пространственное моделирование нестационарной стадии истечения вскипающей жидкости из камер высокого давления // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, № 4. С. 343–352. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.33>, EDN: [TCSUMX](#)
14. Soave G. 20 years of Redlich–Kwong equation of state // Fluid Phase Equilibria. 1993. Vol. 82. P. 345–359. [https://doi.org/10.1016/0378-3812\(93\)87158-W](https://doi.org/10.1016/0378-3812(93)87158-W)
15. Soave G. S. An effective modification of the Benedict–Webb–Rubin equation of state // Fluid Phase Equilibria. 1999. Vol. 164. P. 157–172. EDN: [ADVWMV](#)
16. Quartapelle L., Castelletti L., Guardone A., Quaranta G. Solution of the Riemann problem of classical gasdynamics // Journal of Computational Physics. 2003. Vol. 190. P. 118–140. [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00267-5](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00267-5)



17. Fossati M., Quartapelle L. The Riemann problem for hyperbolic equations under a nonconvex flux with two inflection points // arXiv:1402.5906 [physics.flu-dyn], 24 Feb 2014. 104 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1402.5906>
18. Zohuri B. Properties of Pure Substances. Physics of Cryogenics. Berlin ; Gottingen ; Heidelberg : Elsevier, 2018. 710 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70551-4_2
19. Callen H. B. Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics. Hoboken : John Wiley&Sons, 1988. 534 p.
20. Тененев В. А., Королева М. Р. Постановка задачи Римана для политропных газов, описываемых сложными уравнениями состояния // Химическая физика и мезоскопия. 2023. Т. 25, № 4. С. 507–514. <https://doi.org/10.15350/17270529.2023.4.44>, EDN: YGFVBN
21. Thompson P. A., Carofano G. C., Kim Y.-G. Shock waves and phase changes in a large–heat–capacity fluid emerging from a tube // Journal of Fluid Mechanics. 1986. Vol. 166. P. 57–92. <https://doi.org/10.1017/s0022112086000046>
22. Zamfirescu C., Guardone A., Colonna P. Admissibility region for rarefaction shock waves in dense gases // Journal of Fluid Mechanics. 2008. Vol. 599. P. 363–381. <https://doi.org/10.1017/S0022112008000207>
23. Зельдович Я. Б. Теория ударных волн и введение в газодинамику. Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 188 с. EDN: RXGUKX
24. Borisov A. A., Borisov Al. A., Kutateladze S. S., Nakoryakov V. E. Rarefaction shock wave near the critical liquid–vapour point // Journal of Fluid Mechanics. 1983. Vol. 126. P. 59–73. <https://doi.org/10.1017/s002211208300004x>, EDN: XNAHEG
25. Кутателадзе С. С., Борисов Ал. А., Накоряков В. Е. Экспериментальное обнаружение ударной волны разрежения вблизи критической точки жидкость–пар // Доклады АН СССР. 1980. Т. 252, № 3. С. 595–598.
26. Barker L. M., Hollenbach R. E. Shock-wave studies of PMMA, fused silica, and sapphire // Journal of Applied Physics. 1970. Vol. 41, iss. 10. P. 4208–4226. <https://doi.org/10.1063/1.1658439>
27. Ivanov A. G., Novikov S. A. Rarefaction shock waves in iron from explosive loading // Combustion, Explosion, and Shock Waves. 1986. Vol. 22, iss. 3. P. 343–350. <https://doi.org/10.1007/bf00750354>
28. Drummond W. E. Multiple shock production // Journal of Applied Physics. 1957. Vol. 28, iss. 9. P. 998–1001. <https://doi.org/10.1063/1.1722925>
29. Raeder T., Chernova A. A., Tenenev V. A. Incorporation of fluid compressibility into the calculation of the stationary mode of operation of a hydraulic device at high fluid pressures // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 17, iss. 2. P. 195–209. <https://doi.org/10.20537/nd210205>, EDN: FTAVMO
30. Тененев В. А., Королева М. Р. Численное моделирование течения реального газа Ван-дер-Ваальса в ударной трубе // Интеллектуальные системы в производстве. 2021. Т. 19, № 2. С. 96–103. <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2021-2-96-103>, EDN: QCOAFK
31. Raeder T., Tenenev V. A., Koroleva M. R., Mishchenkova O. V. Nonlinear processes in safety systems for substances with parameters close to a critical state // Russian Journal Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 17, iss. 1. P. 119–138. <https://doi.org/10.20537/nd210109>, EDN: FTAVMO

References

1. Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Krayko A. N., Prokopov G. P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow, Nauka, 1976. 400 p. (in Russian). EDN: UESERL
2. Bocharova O. V., Lebedev M. G. Testing the first order accurate Godunov method on some prototype and applied problems. *Computational Mathematics and Modeling*, 2016, vol. 28, iss. 1, pp. 18–31. <https://doi.org/10.1007/s10598-016-9342-1>
3. Prokopov G. P., Severin A. V. Rational realization of Godunov’s method. *Keldysh Institute Preprints*, 2009, iss. 29. 24 p. (in Russian). Available: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-29> (accessed 2 April, 2024), EDN: OYBUIR
4. Tunik Y. V. Detonation combustion of hydrogen in a convergent-divergent nozzle with a central coaxial cylinder. *Fluid Dynamics*, 2014, vol. 49, iss. 5, pp. 688–693. <https://doi.org/10.1134/S0015462814050160>, EDN: UFJCMV
5. Tunik Y. V., Gerasimov G. Y., Levashov V. Y., Slavinskaya N. A. Numerical simulation of detonation combustion of kerosene vapors in an expanding nozzle. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*,



- 2020, vol. 56, iss. 3, pp. 344–352. <https://doi.org/10.1134/S0010508220030119>, EDN: JCFZVW
6. Bazarov S. B., Naboko I. M. Focusing blast waves: Three-dimensional mathematical modeling. *Russian Journal of Physical Chemistry B*, 2008, vol. 2, iss. 5, pp. 809–813. <https://doi.org/10.1134/S1990793108050242>
7. Sitnik V. V. Simulation of the destruction of a woodland massif by the shock wave generated by the impact of a large cosmic body. *Russian Journal of Physical Chemistry B*, 2009, vol. 3, iss. 3, pp. 373–382. <https://doi.org/10.1134/S1990793109030063>
8. Surov V. S. On one version of the Godunov method for calculating elastoplastic deformations of a medium. *Computational Continuum Mechanics*, 2021, vol. 14, iss. 1, pp. 30–39 (in Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2021.14.1.3>, EDN: MTTTAB
9. Kulikovskiy A. G., Pogorelov N. V., Semenov A. Yu. *Matematicheskie voprosy chislennogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy* [Mathematical issues in the numerical solution of hyperbolic systems of equations]. Moscow, Fizmatlit, 2012. 656 p. (in Russian). EDN: UGLJBR
10. Fechter S., Jaegle F., Schleper V. Exact and approximate Riemann solvers at phase boundaries. *Computers and Fluids*, 2013, vol. 75, pp. 112–126. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.01.024>
11. Garavello M., Marcellini F. The Riemann problem at a junction for a phase transition traffic model. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 2017, vol. 37, pp. 5191–5209. <https://doi.org/10.3934/dcds.2017225>
12. Akberov R. R. Calculating the vapor-liquid phase equilibrium for multicomponent systems using the Soave–Redlich–Kwong equation. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2011, vol. 45, pp. 312–318. <https://doi.org/10.1134/S004057951103002>
13. Bolotnova R. Kh., Buzina V. A. Spatial modeling of the nonstationary processes of boiling liquid outflows from high pressure vessels. *Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, iss. 4, pp. 343–352 (in Russian). <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2014.7.4.33>, EDN: TCSUMX
14. Soave G. 20 years of Redlich–Kwong equation of state. *Fluid Phase Equilibria*, 1993, vol. 82, pp. 345–359. [https://doi.org/10.1016/0378-3812\(93\)87158-W](https://doi.org/10.1016/0378-3812(93)87158-W)
15. Soave G. S. An effective modification of the Benedict–Webb–Rubin equation of state. *Fluid Phase Equilibria*, 1999, vol. 164, pp. 157–172. EDN: ADVWMV
16. Quartapelle L., Castelletti L., Guardone A., Quaranta G. Solution of the Riemann problem of classical gasdynamics. *Journal of Computational Physics*, 2003, vol. 190, pp. 118–140. [https://doi.org/10.1016/S0021-9991\(03\)00267-5](https://doi.org/10.1016/S0021-9991(03)00267-5)
17. Fossati M., Quartapelle L. The Riemann problem for hyperbolic equations under a nonconvex flux with two inflection points. *arXiv:1402.5906 [physics.flu-dyn]*, 24 Feb 2014. 104 p. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1402.5906>
18. Zohuri B. *Properties of pure substances. Physics of cryogenics*. Berlin, Gottingen, Heidelberg, Elsevier, 2018. 710 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-70551-4_2
19. Callen H. B. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*. Hoboken, John Wiley & Sons, 1988. 534 p.
20. Tenenev V. A., Koroleva M. R. Statement of the Riemann problem for polytropic gases described by complex equations of state. *Chemical Physics and Mesoscopy*, 2023, vol. 25, iss. 4, pp. 507–514 (in Russian). <https://doi.org/10.15350/17270529.2023.4.44>, EDN: YGFVBN
21. Thompson P. A., Carofano G. C., Kim Y.-G. Shock waves and phase changes in a large–heat–capacity fluid emerging from a tube. *Journal of Fluid Mechanics*, 1986, vol. 166, pp. 57–92. <https://doi.org/10.1017/s0022112086000046>
22. Zamfirescu C., Guardone A., Colonna P. Admissibility region for rarefaction shock waves in dense gases. *Journal of Fluid Mechanics*, 2008, vol. 599, pp. 363–381. <https://doi.org/10.1017/S0022112008000207>
23. Zeldovich Ya. B. *Teoriya udarnykh voln i vvedenie v gazodinamiku* [Shock wave theory and introduction to gas dynamics]. Moscow, Izhevsk, R&C Dynamics, 2004. 188 c. (in Russian). EDN: RXGUKX
24. Borisov A. A., Borisov Al. A., Kutateladze S. S., Nakoryakov V. E. Rarefaction shock wave near the critical liquid–vapour point. *Journal of Fluid Mechanics*, 1983, vol. 126, pp. 59–73. <https://doi.org/10.1017/s002211208300004x>, EDN: XNAHEG
25. Kutateladze S. S., Borisov Al. A., Nakoryakov V. E. Experimental detection of a rarefaction shock wave near the liquid–vapor critical point. *Doklady AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1980, vol. 252, iss. 3, pp. 595–598 (in Russian).
26. Barker L. M., Hollenbach R. E. Shock-wave studies of PMMA, fused silica, and sapphire. *Journal*



- of *Applied Physics*, 1970, vol. 41, iss. 10, pp. 4208–4226. <https://doi.org/10.1063/1.1658439>
27. Ivanov A. G., Novikov S. A. Rarefaction shock waves in iron from explosive loading. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1986, vol. 22, iss. 3, pp. 343–350. <https://doi.org/10.1007/bf00750354>
28. Drummond W. E. Multiple shock production. *Journal of Applied Physics*, 1957, vol. 28, iss. 9, pp. 998–1001. <https://doi.org/10.1063/1.1722925>
29. Raeder T., Chernova A. A., Tenenev V. A. Incorporation of fluid compressibility into the calculation of the stationary mode of operation of a hydraulic device at high fluid pressures. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 17, iss. 2, pp. 195–209. <https://doi.org/10.20537/nd210205>, EDN: FTAVMO
30. Tenenev V. A., Koroleva M. R. Numerical modeling of the real Van der Waals gas flow in the shock tube. *Intelligent Systems in Manufacturing*, 2021, vol. 19, iss. 2, pp. 96–103 (in Russian). <https://doi.org/10.22213/2410-9304-2021-2-96-103>, EDN: QCOAFK
31. Raeder T., Tenenev V. A., Koroleva M. R., Mishchenkova O. V. Nonlinear processes in safety systems for substances with parameters close to a critical state. *Russian Journal Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 17, iss. 1, pp. 119–138. <https://doi.org/10.20537/nd210109>, EDN: FTAVMO

Поступила в редакцию / Received 15.04.2024

Принята к публикации / Accepted 10.09.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 203–213

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 203–213

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-203-213>, EDN: FADHUK

Научная статья

УДК 539.3

Задача о введении жидкости в пористый сферический композит с учётом анизотропии

Д. В. Кучеренко

Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, г. Санкт-Петербург, ул. Университетская наб., д. 7–9

Кучеренко Денис Валерьевич, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, catcher.denis@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5946-5943>, SPIN: 8184-0670, AuthorID: 1109128

Аннотация. Пористые сферические композиты широко встречаются как в природных объектах, так и в технических приложениях. Для описания механического поведения таких структур необходимо учитывать взаимодействие твёрдой и жидкой фаз, поскольку жидкость внутри пористого тела воспринимает и перераспределяет часть внешней нагрузки. В данной работе предложена модель сферического композита, включающего пористое ядро и упругую трансверсально-изотропную оболочку. Предложенная модель применяется для анализа напряжений и деформаций в различных режимах нагружения, включая воздействие внешнего нормального давления и введение дополнительного объёма жидкости, например, при моделировании интравитреальных инъекций в биомедицинских исследованиях. Проведённый анализ показал, что при моделировании интравитреальных инъекций и описании глазного яблока как пороупругого композита падение внутриглазного давления при увеличении степени анизотропии оказывается менее значительным, чем в случае модели с упругой оболочкой, находящейся под воздействием только внутреннего давления. Увеличение степени анизотропии оказывается более существенным для снижения давления в пористом ядре в режиме приложения внешнего нормального давления, чем при введении дополнительного объёма жидкости. В работе также исследовано влияние геометрии и механических свойств порового ядра на изменение толщины оболочки. Полученные результаты обеспечивают комплексное понимание распределения напряжений и давления жидкости, что позволяет учитывать влияние анизотропии оболочки, пористости ядра и их механических характеристик на поведение сферических композитов.

Ключевые слова: биомеханика, пороупругость, инъекция, склера, стекловидное тело

Для цитирования: Кучеренко Д. В. Задача о введении жидкости в пористый сферический композит с учётом анизотропии // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 203–213. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-203-213>, EDN: FADHUK

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Modeling fluid injection into a porous spherical composite with anisotropy

D. V. Kucherenko

St. Petersburg University, 7–9 Universitetskaya Emb., St. Petersburg 199034, Russia

Denis V. Kucherenko, catcher.denis@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5946-5943>, SPIN: 8184-0670, AuthorID: 1109128

© Кучеренко Д. В., 2025



Abstract. Porous spherical composites are widely found both in natural objects and in technical applications. To describe the mechanical behavior of such structures, it is necessary to take into account the interaction of solid and fluid phases, since the fluid inside the porous body supports and redistributes part of the external load. This paper proposes a model of a spherical composite including a porous core and an elastic transversely isotropic shell. The developed model is applied for stress and strain analysis in different loading regimes, including the effect of external normal pressure and the injection of an additional volume of fluid, for example, when modeling intravitreal injections in biomedical research. The analysis has shown that when modeling intravitreal injections and describing the eyeball as a poroelastic composite, the drop in intraocular pressure with increasing degree of anisotropy is less significant than in the case of a model with an elastic shell under the influence of internal pressure alone. The increase in the degree of anisotropy is more significant for the pressure reduction in the porous core in the mode of external normal pressure application than the injection of additional fluid volume. The study also investigates the influence of the geometry and mechanical properties of the porous core on the variation of the shell thickness. The results obtained provide a comprehensive understanding of the stress distribution and fluid pressure, which allows to consider the influence of shell anisotropy, core porosity and their mechanical characteristics on the behavior of spherical composites.

Keywords: biomechanics, poroelasticity, injection, sclera, vitreous body

For citation: Kucherenko D. V. Modeling fluid injection into a porous spherical composite with anisotropy. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 203–213 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-203-213>, EDN: FADHUK

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Сферические композиты находят широкое применение в различных областях, от биомеханики до инженерных технологий. Например, в биомеханике глазное яблоко представляет собой сферический композит с уникальными механическими свойствами [1], а в ядерной энергетике сферические топливные элементы используются в реакторах [2]. Анализ деформации таких структур под различными нагрузками имеет ключевое значение для понимания их напряжённо-деформированного поведения и разработки новых решений в этих областях.

Особый интерес представляют пористые сферические композиты, которые благодаря своей структуре обладают исключительными механическими свойствами. Примеры из природы, такие как кораллы, демонстрируют высокую прочность и устойчивость за счёт пористой структуры [3, 4]. В инженерии такие материалы широко применяются, например, в фильтрах, катализаторах и цементных композитах, где они выполняют роль включений в матрице [5, 6]. Благодаря своей способности перераспределять нагрузки, снижать напряжения и предотвращать разрушения пористые композиты становятся важным объектом исследования. Использование пороупругих моделей позволяет более детально изучить взаимодействие твёрдой и жидкой фаз и оптимизировать механическое поведение подобных материалов.

Целью данной работы является построение математической модели сферического композита, состоящего из пористого внутреннего ядра и упругой внешней оболочки, способного учитывать взаимодействие жидкости и твёрдой фазы. Рассматриваются два режима нагружения: введение дополнительного объёма жидкости в пористое ядро и приложение нормального давления на внешнюю поверхность оболочки. Модель позволяет описать распределение напряжений, деформаций и давления жидкости, а также учесть возможное влияние жёсткости ядра и степени анизотропии оболочки.

1. Математическая модель пористого сферического композита

Рассмотрим задачу инъекции дополнительного объёма жидкости в пористое сферическое тело, окружённое упругой трансверсально-изотропной непроницаемой оболочкой (рис. 1).



В качестве системы отсчёта выберем сферическую систему координат (r, θ, ϕ) , помещённую в центр сферы.

При инъекции дополнительного объёма жидкости композит деформируется в радиальном направлении. Благодаря симметрии сдвиговые деформации в ядре и оболочке отсутствуют, а нормальные деформации ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$ и $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ описываются через радиальное перемещение u_r :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r}.$$

Уравнение равновесия сферического элемента

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0, \quad (1)$$

где σ_{ij} — компоненты тензора напряжений оболочки или пористого ядра.

Для внутренней сферы-ядра будем использовать индекс «с» (core), а для оболочки — индекс «sh» (shell), причем индексы могут быть нижними или верхними.

В рамках задачи рассматриваются эффективные напряжения σ_{ij}^{eff} , которые характеризуют напряжённое состояние твёрдой фазы пористого материала, исключая влияние порового давления. Компоненты полного тензора напряжений пористого тела σ_{ij}^c представляют собой сумму эффективных напряжений и порового давления p , действующего на поровое пространство. Для описания линейного изотропного пороупругого тела используется следующая модель [7, 8]:

$$\sigma_{ij}^c = \sigma_{ij}^{\text{eff}} - Ap\delta_{ij} = 2\mu_c\varepsilon_{ij} + \lambda_c\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - Ap\delta_{ij}, \quad (2)$$

где μ_c , λ_c — параметры Ламе пористого ядра, A — коэффициент эффективных напряжений Био (для мягких тканей значение коэффициента близко к единице), p — давление жидкости в поровом пространстве, δ_{ij} — символ Кронекера.

Для трансверсально-изотропной упругой оболочки связь между напряжениями и деформациями записывается в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\theta\theta}^{\text{sh}} \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{\text{sh}} \\ \sigma_{rr}^{\text{sh}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{\theta\theta}^{\text{sh}} & M_{\theta\varphi}^{\text{sh}} & M_{\theta r}^{\text{sh}} \\ M_{\varphi\theta}^{\text{sh}} & M_{\varphi\varphi}^{\text{sh}} & M_{\varphi r}^{\text{sh}} \\ M_{r\theta}^{\text{sh}} & M_{r\varphi}^{\text{sh}} & M_{rr}^{\text{sh}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\theta\theta}^{\text{sh}} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^{\text{sh}} \\ \varepsilon_{rr}^{\text{sh}} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где модули упругости M_{ij}^{sh} выражены через E_{sh} , E'_{sh} (модули Юнга при растяжении-сжатии в плоскости изотропии и в направлении, перпендикулярном к ней) и коэффициенты Пуассона оболочки $\nu_{\text{sh}} = \nu_{\theta\varphi}^{\text{sh}} = \nu_{\varphi\theta}^{\text{sh}}$, $\nu'_{\text{sh}} = \nu_{r\varphi}^{\text{sh}} = \nu_{r\theta}^{\text{sh}}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{\theta\theta}^{\text{sh}} = M_{\varphi\varphi}^{\text{sh}} &= \frac{E_{\text{sh}} (E'_{\text{sh}} - E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2)}{(1 + \nu_{\text{sh}}) (E'_{\text{sh}} - E'_{\text{sh}}\nu_{\text{sh}} - 2E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2)}, \\ M_{\theta\varphi}^{\text{sh}} = M_{\varphi\theta}^{\text{sh}} &= \frac{E_{\text{sh}} (E'_{\text{sh}}\nu'_{\text{sh}} + E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2)}{(1 + \nu_{\text{sh}}) (E'_{\text{sh}} - E'_{\text{sh}}\nu_{\text{sh}} - 2E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2)}, \\ M_{rr}^{\text{sh}} &= \frac{(E'_{\text{sh}})^2(1 - \nu_{\text{sh}})}{E'_{\text{sh}} - E'_{\text{sh}}\nu_{\text{sh}} - 2E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2}, \\ M_{r\theta}^{\text{sh}} = M_{r\varphi}^{\text{sh}} &= \frac{E'_{\text{sh}}E_{\text{sh}}\nu'_{\text{sh}}}{E'_{\text{sh}} - E'_{\text{sh}}\nu_{\text{sh}} - 2E_{\text{sh}}(\nu'_{\text{sh}})^2}. \end{aligned}$$

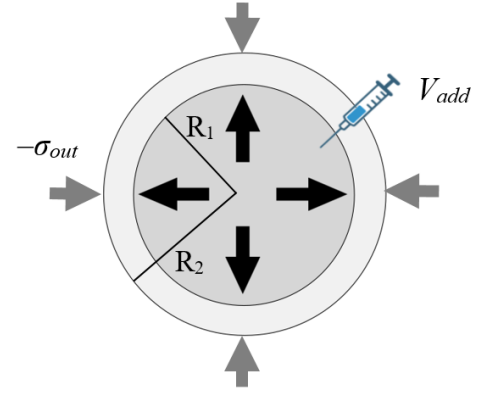


Рис. 1. Введение жидкости во внутреннюю полость сферического композита, находящегося под действием нормального внешнего давления

Fig. 1. Injection of liquid into the inner cavity of a spherical composite under external normal pressure



Приращение содержания поровой жидкости ζ отражает изменение объёма порового пространства, вызванное инъекцией жидкости, а также влияние давления жидкости на деформацию твёрдой фазы материала [7, 8]:

$$\zeta = \phi \operatorname{div} (\mathbf{u}_s - \mathbf{U}_f) = \phi (\theta_s - \theta_f),$$

где \mathbf{u}_s и \mathbf{U}_f — перемещения точек твёрдой и жидкой фаз ядра, θ_s и θ_f — объёмная деформация твёрдой и жидкой фаз ядра, ϕ — пористость тела — доля жидкости в представительном объёме пористого тела соответствующей части композита, $0 \leq \phi \leq 1$.

Последнее уравнение может быть переписано в виде

$$\theta_f = \theta_s - \phi^{-1} \zeta,$$

означающем, что при отсутствии приращения содержания поровой жидкости, когда жидкость не втекает и не вытекает, объёмные деформации твёрдой и жидкой фаз совпадают.

Приращение содержания поровой жидкости также может быть переписано в виде [7]:

$$\zeta = A\theta_s + \frac{p}{M},$$

где M — модуль Био, описывающий сжимаемость пористого материала при изменении давления жидкости в условиях удержания постоянного объёма твёрдой фазы.

Рассмотрим установившийся процесс деформирования для статической задачи. Для обеспечения отсутствия потоков жидкости при $t \rightarrow \infty$ примем, что градиент давления равен нулю. Уравнение равновесия (1) вместе с выражениями для напряжений (2) принимает вид

$$\frac{d^2 u_r^c}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du_r^c}{dr} - \frac{2u_r^c}{r^2} = 0. \quad (4)$$

Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$u_r^c(r) = C_1^c r + \frac{C_2^c}{r}.$$

Так как при $r = 0$ в выражении для перемещений точек твёрдой фазы ядра образуется сингулярность, примем, что $C_2^c = 0$:

$$u_r^c(r) = C_1^c r.$$

Аналогичное уравнение для трансверсально-изотропной оболочки получается путём подстановки выражений (3) в уравнение (1):

$$\left(u_r^{\text{sh}}\right)'' + \frac{2}{r} \left(u_r^{\text{sh}}\right)' - \frac{2B_{\text{sh}}}{r^2} u_r^{\text{sh}} = 0, \quad B_{\text{sh}} = \frac{E_{\text{sh}} (\nu_{\text{sh}}' - 1)}{E_{\text{sh}}' (\nu_{\text{sh}} - 1)}. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (5) имеет вид

$$u_r^{\text{sh}}(r) = C_1^{\text{sh}} r^m + \frac{C_2^{\text{sh}}}{r^{m+1}}, \quad m = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1 + 8B_{\text{sh}}}}{2}, \quad m > 0.$$

На границе между внутренним ядром и оболочкой требуется выполнение условий непрерывности радиальных перемещений и радиального компонента полного тензора напряжений:

$$\begin{aligned} u_r^c|_{r=R_1} &= u_r^{\text{sh}}|_{r=R_1}, \\ \sigma_{rr}^{\text{sh}}|_{r=R_1} &= \sigma_{rr}^c|_{r=R_1}. \end{aligned}$$



Предположим, что на внешнюю поверхность действует нормальное давление σ_{out} :

$$\sigma_{rr}^{\text{sh}}|_{r=R_2} = \sigma_{\text{out}}.$$

Величина приращения содержания поровой жидкости, проинтегрированная по объёму ядра, равна объёму жидкости, введённой в процессе инъекции. Это соотношение отражает баланс массы жидкости, поступающей в пористое тело, и изменений её содержания в поровом пространстве, обеспечивая связь между внешними условиями инъекции и внутренними деформационными процессами:

$$\int_{V_{\text{core}}} \zeta dV = V_{\text{add}} \Rightarrow \int_{V_{\text{core}}} \left(A\theta_s + \frac{p}{M} \right) dV = V_{\text{add}} \Rightarrow \left(3AC_1^c + \frac{p}{M} \right) \frac{4}{3}\pi R_1^3 = V_{\text{add}},$$

где V_{add} — закачиваемый или выкачиваемый объём жидкости, V_{core} — объём пористого ядра.

2. Результаты и их обсуждение

Глазное яблоко можно рассматривать как сферический композит. Его внешняя оболочка, склера, выполняет ключевую механическую функцию благодаря наличию коллагеновых волокон [9]. Она обеспечивает необходимую жёсткость и структурную устойчивость, позволяя глазу противостоять внутриглазному давлению (ВГД) и сохранять форму при движении [10]. Внутреннюю часть глаза заполняет стекловидное тело — гелеобразная субстанция, расположенная между хрусталиком и сетчаткой. Для его моделирования применяются различные подходы, включая описание в виде вязкой жидкости [11] или пороупругого материала [12].

Интравитреальная инъекция является эффективным методом доставки лекарственных препаратов для лечения офтальмологических заболеваний [13]. Этот способ обеспечивает высокую концентрацию действующего вещества непосредственно в стекловидном теле, минимизируя системные побочные эффекты. Обычно объём инъекций составляет от 0.05 до 0.1 мл [14]. При введении жидкости общий объём глаза временно увеличивается, что вызывает значительное повышение внутриглазного давления. Даже кратковременное повышение ВГД сверх допустимых значений может нарушить кровоснабжение сетчатки и области диска зрительного нерва [15].

Для исследования биомеханических процессов, связанных с интравитреальными инъекциями, применяются аналитические методы [1, 16] и численные подходы [17]. В большинстве исследований склера представляется как трансверсально-изотропный материал в трёхмерной постановке [18] или описывается с использованием теории оболочек [19].

Диаметр глазного яблока у взрослого человека колеблется от 21 до 27 мм [20] при среднем значении 24 мм [21, 22]. Толщина склеры варьируется: на экваторе она минимальна и составляет 0.5 мм, тогда как в задней части глаза достигает максимального значения 1.3 мм [21]. Механические свойства склеры зависят от возраста и наличия патологий [9]. Значения окружного модуля упругости для склеры, приведённые в литературе, составляют 3 МПа [22], 14.76 МПа [23], 14.31 ± 8.56 МПа [24]. Коэффициент Пуассона варьируется в диапазоне от 0.4 до 0.48 [22]. Для расчётов принимаем модуль упругости склеры равным 14.3 МПа, а коэффициент Пуассона $\nu_{\text{sh}} = 0.4$ [23]. При увеличении степени анизотропии оболочки (уменьшении E'_{sh}) коэффициент Пуассона ν'_{sh} уменьшается согласно [1].

Значение модуля Юнга ядра примем равным 60 Па [25]. Мягкие ткани, как правило, близки к состоянию несжимаемости, что обусловлено их высокой гидратацией. Наличие значительного объёма жидкости внутри тканей обеспечивает их устойчивость к изменениям объёма при внешних нагрузках, что отражается в значениях коэффициента Пуассона, приближённых к 0.5.

Полные напряжения в такой системе зависят от суммы эффективных напряжений и вклада порового давления. Высокое поровое давление, связанное с введением объёма жид-



кости, может преобладать над эффективными напряжениями, что приводит к отрицательным значениям полных напряжений, соответствующим состоянию сжатия. Если коэффициент Био A близок к 1 (пористый материал с высокой долей жидкости), вклад порового давления в полные напряжения становится особенно значительным. В табл. 1 приведены параметры, отражающие степень анизотропии оболочки и распределение напряжений в ядре при введении инъекции объёмом 0.1 мл.

Таблица 1 / Table 1

Изменение величины порового давления и полных механических напряжений в пористом стекловидном теле при введении инъекции 0.1 мл
Changes in the magnitude of pore pressure and total mechanical stresses in the porous vitreous body during injection of 0.1 mL

| Соотношение E_{sh}/E'_{sh} | Коэффициент Пуассона ν'_{sh} | Значение порового давления, мм рт. ст. | Значение полных напряжений в ядре, мм рт. ст. |
|------------------------------|----------------------------------|--|---|
| 1 | 0.4 | 94 | –52 |
| 2 | 0.3 | 93 | –50 |
| 10 | 0.15 | 89 | –43 |
| 100 | 0.02 | 84 | –31 |
| 200 | 0.0075 | 82 | –28 |

Увеличение степени анизотропии приводит к уменьшению значений порового давления ядра на 13%, в то время как полные напряжения снижаются на 46%. Это указывает на рост по модулю эффективных напряжений в твёрдой фазе ядра, при этом они остаются ограниченными значением p . Такое поведение позволяет компенсировать снижение полных напряжений, обеспечивая механическое равновесие в системе.

Моделирование глаза как пороупругого композита позволяет более подробно описать механическое равновесие, учитывая взаимодействие твёрдой и жидкой фаз. В отличие от модели упругой оболочки, находящейся под действием только внутреннего давления [1], пороупругая модель показывает, что увеличение степени анизотропии приводит к менее выраженному падению ВГД.

При рассмотрении задачи воздействия внешнего давления σ_{out} без введения дополнительного объёма жидкости изучено распределение напряжений в ядре при различных значениях степени анизотропии оболочки. В табл. 2 представлены результаты расчётов для внешней сжимающей нагрузки, равной 11 кПа.

Таблица 2 / Table 2

Изменение величины порового давления и полных механических напряжений в пористом стекловидном теле при внешней сжимающей нагрузке 11 кПа
Variation of pore pressure and total mechanical stresses in a porous vitreous body under an external compressive load of 11 kPa

| Соотношение E_{sh}/E'_{sh} | Коэффициент Пуассона ν'_{sh} | Значение порового давления, мм рт. ст. | Значение полных напряжений в ядре, мм рт. ст. |
|------------------------------|----------------------------------|--|---|
| 1 | 0.4 | 26 | –52 |
| 2 | 0.3 | 25 | –50 |
| 10 | 0.15 | 21 | –42 |
| 100 | 0.02 | 11 | –22 |
| 200 | 0.0075 | 7 | –13 |

Значение 11 кПа было выбрано таким образом, чтобы в изотропном случае полные напряжения для обоих режимов нагружения совпадали. Поровое давление составляет половину от полных напряжений в ядре (см. табл. 2), что указывает на равное распределение



нагрузки между твёрдой и жидкой фазами при приложении внешнего давления. Однако при введении дополнительного объёма жидкости поровое давление превышает эффективные напряжения, что свидетельствует о большей нагрузке, воспринимаемой жидкой фазой. При этом увеличение степени анизотропии приводит к более значительному снижению полных напряжений в случае $\sigma_{\text{applied}} = 11$ кПа, $V_{\text{add}} = 0$, по сравнению со случаем $\sigma_{\text{applied}} = 0$, $V_{\text{add}} = 0.1$ мл. Такое различие объясняется тем, что при равномерном внешнем давлении оболочка принимает на себя значительную часть нагрузки, эффективно перераспределяя её благодаря своей анизотропной структуре, тогда как при инъекции прилагаемые напряжения воздействуют в первую очередь непосредственно на твёрдую и жидкую фазы ядра.

На рис. 2 представлено относительное изменение толщины оболочки h/h_0 в зависимости от степени её анизотропии $E_{\text{sh}}/E'_{\text{sh}}$ для трёх различных объёмов инъекции жидкости: 0.01, 0.05 и 0.1 мл. С уменьшением объёма инъекции величина относительного изменения толщины оболочки снижается.

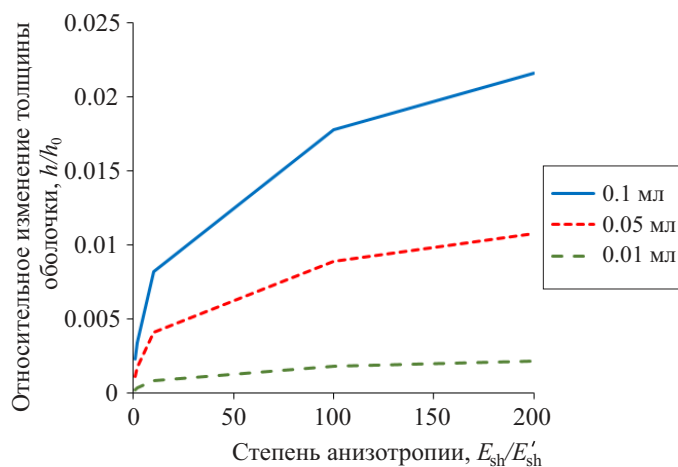


Рис. 2. Относительное изменение толщины оболочки в зависимости от степени анизотропии и объёма инъекции
Fig. 2. Relative change in shell thickness as a function of the degree of anisotropy and injection volume

При увеличении степени анизотропии оболочки $E_{\text{sh}}/E'_{\text{sh}}$ возрастает относительное изменение толщины оболочки для всех рассматриваемых объёмов инъекции. Полученные значения оказываются ниже, чем результаты, представленные в работе [1]. Это связано с тем, что в настоящей работе внутреннее ядро представлено как двухфазный материал, обладающий сопротивлением к внешним нагрузкам, что снижает степень деформации оболочки.

Для всех случаев наблюдается увеличение порового давления с ростом модуля Юнга ядра. Это объясняется тем, что более жёсткое ядро (с большим модулем Юнга) оказывает большее сопротивление изменению объёма при нагружении, что приводит к росту давления поровой жидкости.

На рис. 3 представлены зависимости давления в порах от модуля Юнга ядра для трёх различных степеней анизотропии оболочки и двух случаев толщины оболочки до деформации.

Увеличение модуля Юнга ядра и толщины оболочки приводит к росту порового давления. Для более тонкой оболочки изменения порового давления при различных степенях анизотропии менее значительны, чем для более толстой оболочки. Рост порового давления, связанный с увеличением толщины оболочки, объясняется ограничением деформаций ядра и уменьшением объёма доступного порового пространства. В результате полные напряжения в ядре становятся менее сжимающими, так как вклад давления жидкости частично компенсирует нагрузку, передаваемую на твёрдую фазу.

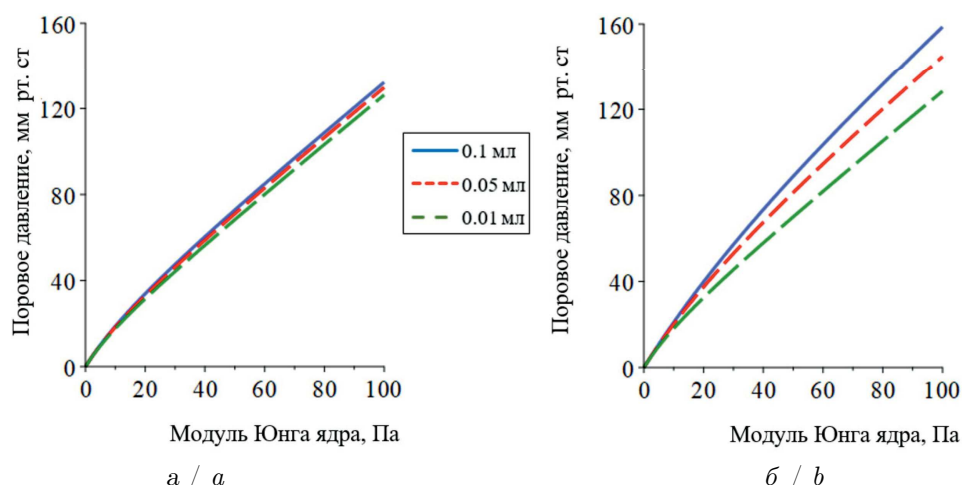


Рис. 3. Влияние величины модуля Юнга ядра на значения порового давления при $\sigma_{\text{applied}} = 0$ кПа, $V_{\text{add}} = 0.1$ мл и толщине оболочки до деформации 0.5 мм (а) и 2 мм (б)

Fig. 3. Influence of the Young's modulus value of the core on the values of pore pressure at $\sigma_{\text{applied}} = 0$ kPa, $V_{\text{add}} = 0.1$ ml and shell thickness before deformation 0.5 mm (a), and 2 mm (b)

Закключение

В данной работе разработана модель сферического композита, включающего пористое внутреннее ядро и упругую внешнюю трансверсально-изотропную оболочку. Рассмотрены два режима нагружения: введение дополнительного объёма жидкости во внутреннюю сферу и приложение распределённой нормальной нагрузки на внешнюю поверхность оболочки. Полученные результаты демонстрируют распределение полных напряжений в пористом ядре, а также значения давления жидкости в пористой среде.

Модель показала, как степень анизотропии оболочки влияет на перераспределение напряжений, изменение толщины оболочки и механическое поведение ядра. Увеличение толщины оболочки приводит к более высоким значениям порового давления при инъекции. Дальнейшее исследование будет направлено на изучение влияния скорости введения инъекции и других динамических факторов на механическое поведение композита.

Список литературы

1. Бауэр С. М., Замураев Л. А., Котляр К. Е. Модель трансверсально-изотропного сферического слоя для расчета изменения внутриглазного давления при интрасклеральных инъекциях // Российский журнал биомеханики. 2006. Т. 10, № 2. С. 43–49. EDN: JJWTIDD
2. Powers J. J., Wirth B. D. A review of TRISO fuel performance models // Journal of Nuclear Materials. 2010. Vol. 405, iss. 1. P. 74–82. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2010.07.030>
3. Pasquini L., Molinari A., Fantazzini P., Dauphen Ya., Cuif J.-P., Levy O., Dubinsky Z., Caroselli E., Prada F., Goffredo S., Di Giosia M., Reggi M., Falini G. Isotropic microscale mechanical properties of coral skeletons // Journal of the Royal Society Interface. 2015. Vol. 12, iss. 106. Art. 20150168. <https://doi.org/10.1098/rsif.2015.0168>
4. Wu Y.-C., Lee T.-M., Chiu K.-H., Shaw S.-Y., Yang C.-Y. A comparative study of the physical and mechanical properties of three natural corals based on the criteria for bone–tissue engineering scaffolds // Journal of Materials Science: Materials in Medicine. 2009. Vol. 20. P. 1273–1280. <https://doi.org/10.1007/s10856-009-3695-3>
5. Du R., Eychemuller A. Metal-based aerogels and porous composites as efficient catalysts: Synthesis and catalytic performance // Catalysts. 2023. Vol. 13, iss. 11. Art. 1451. <https://doi.org/10.3390/catal13111451>
6. Hashin Z., Monteiro P. J. M. An inverse method to determine the elastic properties of the interphase between the aggregate and the cement paste // Cement and Concrete Research. 2002. Vol. 32, iss. 8. P. 1291–1300. [https://doi.org/10.1016/S0008-8846\(02\)00792-5](https://doi.org/10.1016/S0008-8846(02)00792-5)
7. Cheng A. H.-D. Poroelasticity. Switzerland : Springer, 2016. 877 p. (Theory and Applications of Transport in Porous Media, vol. 27.). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-25202-5>



8. Маслов Л. Б. Конечно-элементные пороупругие модели в биомеханике. СПб. : Лань, 2013. 236 с.
9. Coudrillier B., Tian J., Alexander S., Myers K. M., Quigley H. A., Nguyen T. D. Glaucoma-related changes in the mechanical properties and collagen micro-architecture of the human sclera // *PloS One*. 2015. Vol. 10, iss. 7. Art. e0131396. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0131396>
10. Meek K. M. The cornea and sclera // *Collagen: Structure and Mechanics* / ed. by P. Fratzl. Boston, MA : Springer US, 2008. P. 359–396. https://doi.org/10.1007/978-0-387-73906-9_13
11. Bonfiglio A., Repetto R., Siggers J. H., Stocchino A. Investigation of the motion of a viscous fluid in the vitreous cavity induced by eye rotations and implications for drug delivery // *Physics in Medicine & Biology*. 2013. Vol. 58, iss. 6. Art. 1969. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/58/6/1969>
12. Ruffini A., Casalucci A., Cara C., Ethier C. R., Repetto R. Drug distribution after intravitreal injection: A mathematical model // *Investigative Ophthalmology & Visual Science*. 2024. Vol. 65, iss. 4. Art. 9. <https://doi.org/10.1167/iov.65.4.9>
13. Avery R. L., Pieramici D. J., Rabena M. D., Castellarin A. A., Nasir M. A., Giust M. J. Intravitreal bevacizumab (Avastin) for neovascular age-related macular degeneration // *Ophthalmology*. 2006. Vol. 113, iss. 3. P. 363–372. <https://doi.org/10.1016/j.ophttha.2005.11.019>
14. Doshi R. R., Bakri S. J., Fung A. E. Intravitreal injection technique // *Seminars in Ophthalmology*. 2011. Vol. 26, iss. 3. P. 104–113. <https://doi.org/10.3109/08820538.2010.541318>
15. Nagel E., Vilser W., Lanzl I. M. Retinal vessel reaction to short-term IOP elevation in ocular hypertensive and glaucoma patients // *European Journal of Ophthalmology*. 2001. Vol. 11, iss. 4. P. 338–344. <https://doi.org/10.1177/112067210101100404>
16. Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б. Модели механики деформируемого тела в задачах офтальмологии // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2023. Т. 10, вып. 4. С. 686–712. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.407>, EDN: UJNCGP
17. Иомдина Е. Н., Полоз М. В. Биомеханическая модель глазного яблока человека: описание и верификация // *Математическая биология и биоинформатика*. 2014. Т. 9, № 1. С. 286–295. <https://doi.org/10.17537/2014.9.286>, EDN: SIHWUT
18. Бауэр С. М., Венатовская Л. А., Воронкова Е. Б., Смирнов А. Л. Задача об осесимметричной деформации ортотропного сферического слоя в трехмерной постановке // *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия*. 2016. Т. 3, вып. 3. С. 449–456. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu01.2016.313>, EDN: WLSQNJ
19. Bauer S. M., Voronkova E. B. Nonclassical shell theories in ocular biomechanics // *Advanced Structured Materials*. 2015. Vol. 45. P. 81–97. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02535-3_4, EDN: UEMWQF
20. Bekerman I., Gottlieb P., Vaiman M. Variations in eyeball diameters of the healthy adults // *Journal of Ophthalmology*. 2014. Vol. 2014. Art. 503645. <https://doi.org/10.1155/2014/503645>
21. Boote C., Sigal I. A., Grytz R., Hua Y., Nguyen T. D., Girard M. J. A. Scleral structure and biomechanics // *Progress in Retinal and Eye Research*. 2020. Vol. 74. Art. 100773. <https://doi.org/10.1016/j.preteyeres.2019.100773>
22. Иомдина Е. Н. Механические свойства тканей глаза человека // *Биомеханика: достижения и перспективы* / под ред. А. К. Цатуряна, А. А. Штейна. Москва : Изд-во Московского ун-та, 2006. С. 183–200. (Современные проблемы биомеханики. Вып. 11).
23. Иомдина Е. Н., Бауэр С. М., Котляр К. Е. Биомеханика глаза: теоретические аспекты и клинические приложения. Москва : Реал Тайм, 2015. 208 с.
24. Zhang Y., Li Z., Liu L., Han X., Zhao X., Mu G. Comparison of riboflavin/ultraviolet-A cross-linking in porcine, rabbit, and human sclera // *BioMed Research International*. 2014. Vol. 2014. Art. 194204. <https://doi.org/10.1155/2014/194204>
25. Swindle K. E., Hamilton P. D., Ravi N. In situ formation of hydrogels as vitreous substitutes: viscoelastic comparison to porcine vitreous // *Journal of Biomedical Materials Research Part A*. 2008. Vol. 87A, iss. 3. P. 656–665. <https://doi.org/10.1002/jbm.a.31769>

References

1. Bauer S. M., Zamuraev L. A., Kotlyar K. E. Model of the transversely isotropic spherical layer for estimation of intraocular pressure changes after intravitreal injections. *Russian Journal of Biomechanics*, 2006, vol. 10, iss. 2, pp. 43–49 (in Russian). EDN: JWTIDD
2. Powers J. J., Wirth B. D. A review of TRISO fuel performance models. *Journal of Nuclear Materials*, 2010, vol. 405, iss. 1, pp. 74–82. <https://doi.org/10.1016/j.jnucmat.2010.07.030>



3. Pasquini L., Molinari A., Fantazzini P., Dauphen Ya., Cuif J.-P., Levy O., Dubinsky Z., Caroselli E., Prada F., Goffredo S., Di Giosia M., Reggi M., Falini G. Isotropic microscale mechanical properties of coral skeletons. *Journal of The Royal Society Interface*, 2015, vol. 12, iss. 106, art. 20150168. <https://doi.org/10.1098/rsif.2015.0168>
4. Wu Y.-C., Lee T.-M., Chiu K.-H., Shaw S.-Y., Yang C.-Y. A comparative study of the physical and mechanical properties of three natural corals based on the criteria for bone–tissue engineering scaffolds. *Journal of Materials Science: Materials in Medicine*, 2009, vol. 20, pp. 1273–1280. <https://doi.org/10.1007/s10856-009-3695-3>
5. Du R., Eychmuller A. Metal-based aerogels and porous composites as efficient catalysts: Synthesis and catalytic performance. *Catalysts*, 2023, vol. 13, iss. 11, art. 1451. <https://doi.org/10.3390/catal13111451>
6. Hashin Z., Monteiro P. J. M. An inverse method to determine the elastic properties of the interphase between the aggregate and the cement paste. *Cement and Concrete Research*, 2002, vol. 32, iss. 8, pp. 1291–1300. [https://doi.org/10.1016/S0008-8846\(02\)00792-5](https://doi.org/10.1016/S0008-8846(02)00792-5)
7. Cheng A. H.-D. *Poroelasticity. Theory and Applications of Transport in Porous Media*, vol. 27. Switzerland, Springer, 2016. 877 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-25202-5>
8. Maslov L. B. *Konechno-elementnye porouprugie modeli v biomekhanike* [Finite-element poroelastic models in biomechanics]. St. Petersburg, Lan', 2013. 236 p. (in Russian).
9. Coudrillier B., Tian J., Alexander S., Myers K. M., Quigley H. A., Nguyen T. D. Glaucoma-related changes in the mechanical properties and collagen micro-architecture of the human sclera. *PloS One*, 2015, vol. 10, iss. 7, art. e0131396. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0131396>
10. Meek K. M. The cornea and sclera. In: Fratzl P. (ed.) *Collagen: Structure and Mechanics*. Boston, MA, Springer US, 2008, pp. 359–396. https://doi.org/10.1007/978-0-387-73906-9_13
11. Bonfiglio A., Repetto R., Siggers J. H., Stocchino A. Investigation of the motion of a viscous fluid in the vitreous cavity induced by eye rotations and implications for drug delivery. *Physics in Medicine & Biology*, 2013, vol. 58, iss. 6, art. 1969. <https://doi.org/10.1088/0031-9155/58/6/1969>
12. Ruffini A., Casalucci A., Cara C., Ethier C. R., Repetto R. Drug distribution after intravitreal injection: A mathematical model. *Investigative Ophthalmology & Visual Science*, 2024, vol. 65, iss. 4, art. 9. <https://doi.org/10.1167/iovs.65.4.9>
13. Avery R. L., Pieramici D. J., Rabena M. D., Castellarin A. A., Nasir M. A., Giust M. J. Intravitreal bevacizumab (Avastin) for neovascular age-related macular degeneration. *Ophthalmology*, 2006, vol. 113, iss. 3, pp. 363–372. <https://doi.org/10.1016/j.ophtha.2005.11.019>
14. Doshi R. R., Bakri S. J., Fung A. E. Intravitreal injection technique. *Seminars in Ophthalmology*, 2011, vol. 26, iss. 3, pp. 104–113. <https://doi.org/10.3109/08820538.2010.541318>
15. Nagel E., Vilser W., Lanzl I. M. Retinal vessel reaction to short-term IOP elevation in ocular hypertensive and glaucoma patients. *European Journal of Ophthalmology*, 2001, vol. 11, iss. 4, pp. 338–344. <https://doi.org/10.1177/112067210101100404>
16. Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B. Models of solid mechanics in the problems of ophthalmology. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2023, vol. 56, iss. 4, pp. 493–511. <https://doi.org/10.1134/s1063454123040039>, EDN: KFETGL
17. Iomdina E. N., Poloz M. V. Biomechanical model of the human eye: Description and verification. *Mathematical Biology and Bioinformatics*, 2014, vol. 9, iss. 1, pp. 286–295 (in Russian). <https://doi.org/10.17537/2014.9.286>, EDN: SIHWUT
18. Bauer S. M., Venatovskaya L. A., Voronkova E. B., Smirnov A. L. The three-dimensional problem of the axisymmetric deformation of an orthotropic spherical layer. *Vestnik of the St. Petersburg University: Mathematics*, 2016, vol. 49, iss. 3, pp. 277–283. <https://doi.org/10.3103/S1063454116030043>, EDN: XFPPKB
19. Bauer S. M., Voronkova E. B. Nonclassical shell theories in ocular biomechanics. *Advanced Structured Materials*, 2015, vol. 45, pp. 81–97. https://doi.org/10.1007/978-3-319-02535-3_4, EDN: UEMWQF
20. Bekerman I., Gottlieb P., Vaiman M. Variations in eyeball diameters of the healthy adults. *Journal of Ophthalmology*, 2014, vol. 2014, art. 503645. <https://doi.org/10.1155/2014/503645>
21. Boote C., Sigal I. A., Grytz R., Hua Y., Nguyen T. D., Girard M. J. A. Scleral structure and biomechanics. *Progress in Retinal and Eye Research*, 2020, vol. 74, art. 100773. <https://doi.org/10.1016/j.preteyeres.2019.100773>
22. Iomdina E. N. Mechanical properties of the human eye tissues. In: Tsaturyan A. K., Stein A. A. *Biomechanics: Progress and Perspectives*. Modern Problems of Biomechanics. Vol. 11. Moscow, Moscow University Press, 2006, pp. 183–200 (in Russian).
23. Iomdina E. N., Bauer S. M., Kotlyar K. E. *Biomekhanika glaza: teoreticheskie aspekty i klinicheskie*



- prilozheniya* [Biomechanics of the eye: Theoretical aspects and clinical applications]. Moscow, Real Time, 2015. 208 p. (in Russian).
24. Zhang Y., Li Z., Liu L., Han X., Zhao X., Mu G. Comparison of riboflavin/ultraviolet-A cross-linking in porcine, rabbit, and human sclera. *BioMed Research International*, 2014, vol. 2014, art. 194204. <https://doi.org/10.1155/2014/194204>
 25. Swindle K. E., Hamilton P. D., Ravi N. In situ formation of hydrogels as vitreous substitutes: viscoelastic comparison to porcine vitreous. *Journal of Biomedical Materials Research Part A*, 2008, vol. 87A, iss. 3, pp. 656–665. <https://doi.org/10.1002/jbm.a.31769>

Поступила в редакцию / Received 18.12.2024

Принята к публикации / Accepted 11.01.2025

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 214–230

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 214–230

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230>, EDN: PVASPW

Научная статья

УДК 517.98

Распространение гармонических волн в вязкоупругих средах, описываемых моделями с дробными производными

К. А. Модестов^{1,2}, М. В. Шитикова¹✉

¹Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, Россия, 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

²Воронежский государственный технический университет, Россия, 394006, г. Воронеж, ул. 20-летия Октября, д. 84

Модестов Константин Анатольевич, ¹старший преподаватель кафедры общей и прикладной физики; ²младший научный сотрудник Международного научного центра по фундаментальным исследованиям в области естественных и строительных наук им. Заслуженного деятеля науки РФ, профессора Россихина Ю. А., ModestovKA@mgsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4596-2652>, SPIN: 6850-4620, AuthorID: 635355

Шитикова Марина Вячеславовна, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики, mvs@cchgeu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>, SPIN: 5023-9854, AuthorID: 4259

Аннотация. В данной работе исследуются характеристики гармонических волн, распространяющихся в трехмерных изотропных вязкоупругих средах, с помощью обобщенных моделей Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными. Найдены асимптотические значения скоростей продольных и поперечных волн, их коэффициентов затухания и логарифмических декрементов.

Ключевые слова: вязкоупругие среды, реологические модели, дробная производная, логарифмический декремент затухания, дисперсия

Благодарности: Данные исследования проводились в рамках программы научно-исследовательских работ Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (проект № 36).

Для цитирования: Модестов К. А., Шитикова М. В. Распространение гармонических волн в вязкоупругих средах, описываемых моделями с дробными производными // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 214–230. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230>, EDN: PVASPW

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Harmonic wave propagation in viscoelastic media modelled via fractional derivative models

K. A. Modestov^{1,2}, M. V. Shitikova¹✉

¹Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), 26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow 129337, Russia

²Voronezh State Technical University, 84 20-letiya Oktyabrya St., Voronezh 394006, Russia

Konstantin A. Modestov, ModestovKA@mgsu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4596-2652>, SPIN: 6850-4620, AuthorID: 635355



Marina V. Shitikova, mvs@cchgeu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-2186-1881>, SPIN: 5023-9854, AuthorID: 4259

Abstract. In the present paper, harmonic waves propagating in 3D isotropic viscoelastic media are analyzed using the fractional derivative Kelvin–Voigt model, Maxwell model and standard linear solid model. Asymptotic values of the wave velocities, their coefficients of attenuation and logarithmic decrements have been found.

Keywords: viscoelastic media, rheological models, fractional derivative, logarithmic decrement of attenuation, dispersion

Acknowledgements: This research was carried out within the Scientific Programme of Moscow National Research University of Civil Engineering (project No. 36).

For citation: Modestov K. A., Shitikova M. V. Harmonic wave propagation in viscoelastic media modelled via fractional derivative models. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 214–230 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-214-230>, EDN: PVASPW

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Посвящается 75-летию профессора Л. Ю. Коссовича

Введение

Как отмечал Ю. Н. Работнов [1], в природе абсолютно упругих тел не существует. Все среды обладают в той или иной степени вязкоупругими свойствами, а их основные физико-механические свойства зависят от времени. В связи с широким применением теории вязкоупругости при исследовании поведения новых материалов и традиционных материалов теории и методам расчета вязкоупругих сред при различного рода воздействиях уделялось большое внимание [2–6].

Проблема распространения волн в вязкоупругих средах довольно сложна [5] и предполагает изучение физических эффектов, таких как дисперсия и затухание. Исследователи находят аналитические решения с помощью различных моделей вязкоупругости [3, 6], применяя в том числе и модели с производными дробного порядка [7–9]. Подробный анализ вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела, приведен в обзоре [10], а история развития этих моделей описана в работе [11].

Анализ работ, посвященных изучению распространения волн в вязкоупругих средах, свойства которых описываются различными моделями с дробными производными, показал, что в подавляющем большинстве из них рассматривались одномерные среды, т.е. продольные волны в вязкоупругих стержнях [7–9, 12–19].

Распространение плоских гармонических волн в линейной трехмерной вязкоупругой среде со слабо сингулярным ядром наследственности в виде дробноэкспоненциальной функции Ю. Н. Работнова [4] изучалось в работах [20–22], где была установлена связь особенностей ядра наследственности с соответствующей функцией распределения и проанализированы особенности поведения коэффициента затухания гармонических волн при высоких частотах. Наряду с [2], где изучены гармонические волны в трехмерных термовязкоупругих средах, было найдено, что при распространении подобных волн имеет место не только затухание, но и дисперсия (зависимость фазовой скорости от частоты).

В данной статье исследуется распространение плоских гармонических волн в трехмерных вязкоупругих средах, свойства которых описываются простейшими моделями с дробными производными, а именно: моделями Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела. Рассматриваются среды с памятью в случае, когда объемной релаксацией можно пренебречь по сравнению с релаксацией при сдвиге. При этом модели с дробными производными используются для задания зависящих от времени операторов Юнга или сдвига.



1. Определяющие соотношения для анализа характеристик продольных и поперечных волн в линейной вязкоупругости

Система уравнений, описывающая динамическое поведение линейных изотропных вязкоупругих сред, имеет вид [1, 2, 6]:

$$\sigma_{ij} = \hat{\lambda} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\hat{\mu} \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad (2)$$

где σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензоров напряжений и деформаций соответственно, u_i — компоненты вектора перемещений, ρ — плотность среды, точка над величиной означает производную по времени, индекс после запятой указывает на пространственное дифференцирование по соответствующей координате, а $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ — зависящие от времени t операторы параметров Ламе:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} \varepsilon &= \int_0^\infty \lambda(t') \varepsilon(t - t') dt', \\ \hat{\mu} \varepsilon &= \int_0^\infty \mu(t') \varepsilon(t - t') dt'. \end{aligned}$$

Учитывая зависимость между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

и соотношения (1), уравнения движения (2) можно переписать в виде

$$\rho \ddot{u}_i = \hat{\lambda} u_{k,ki} + \hat{\mu} (u_{k,ki} + u_{i,kk}). \quad (3)$$

Будем искать решение в виде затухающей волны

$$u_i = A_i \exp \left[i\omega t - \left(\alpha + i\frac{\omega}{c} \right) x_k \nu_k \right], \quad (4)$$

где A_i , c , ω и α — амплитуда, скорость, частота и коэффициент затухания волны соответственно, ν_k — единичный вектор в направлении распространения волны, i — мнимая единица.

Подставляя соотношения (4) в уравнения движения (3), получим

$$-\rho \omega^2 A_i = \left(\alpha + i\frac{\omega}{c} \right)^2 \left[A_k \nu_k \nu_i \tilde{\lambda} + (A_i + A_k \nu_k \nu_i) \tilde{\mu} \right], \quad (5)$$

где тильда над символом некоторой физической величины означает Фурье-образ ядра его оператора

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(\omega) &= \int_0^\infty \lambda(t) e^{-i\omega t} dt, \\ \tilde{\mu}(\omega) &= \int_0^\infty \mu(t) e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Соотношения (5) позволяют определить скорости волн c , коэффициент затухания α и логарифмический декремент δ , характеризующий затухание волны в пространстве. При этом следует различать две волны — поперечную и продольную, независимо распространяющиеся с разными скоростями c_t и c_l соответственно. В дальнейшем все характеристики поперечных волн будут записываться с нижним индексом t , а продольных волн — с индексом l .



Учитывая, что для поперечной волны $A_k \nu_k = 0$, из уравнения (5) имеем

$$\left(\alpha_t + i \frac{\omega}{c_t} \right)^2 = - \frac{\omega^2 \rho}{\tilde{\mu}}. \quad (6)$$

Умножая (5) на ν_i и учитывая, что для продольной волны $A_k \nu_k \neq 0$, получим

$$\left(\alpha_l + i \frac{\omega}{c_l} \right)^2 = - \frac{\omega^2 \rho}{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}. \quad (7)$$

Известные соотношения между параметрами Ламе λ и μ и модулем всестороннего сжатия K для изотропной упругой среды [23]

$$\lambda + 2\mu = K + \frac{4}{3}\mu = \frac{3K(3K + E)}{9K - E} \quad (8)$$

на основе принципа соответствия Вольтерра могут быть переписаны для изотропной вязкоупругой среды в виде

$$\begin{aligned} \hat{M} \equiv \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} &= \hat{K} + \frac{4}{3}\hat{\mu} = \frac{3\hat{K}(3\hat{K} + \hat{E})}{9\hat{K} - \hat{E}}, \\ \tilde{M} = \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} &= \tilde{K} + \frac{4}{3}\tilde{\mu} = \frac{3\tilde{K}(3\tilde{K} + \tilde{E})}{9\tilde{K} - \tilde{E}}, \end{aligned}$$

где \hat{K} — оператор всестороннего расширения-сжатия, \hat{E} — оператор модуля Юнга, \hat{M} — оператор так называемого модуля Р-волны.

Введем угол потерь

$$\begin{aligned} \varphi_t &= \arg \tilde{\mu} = \arctg \left(\frac{\operatorname{Im} \tilde{\mu}}{\operatorname{Re} \tilde{\mu}} \right), \\ \varphi_l &= \arg \tilde{A} = \arctg \left(\frac{\operatorname{Im} \tilde{M}}{\operatorname{Re} \tilde{M}} \right). \end{aligned}$$

Тогда из соотношений (6) и (7) можно получить выражения для физических величин, характеризующих распространение и затухание поперечных и продольных волн в трехмерной вязкоупругой линейной среде, а именно:

комплексное волновое число

$$\begin{aligned} \tilde{k}_t &= k_{1t} + i k_{2t} = \frac{1}{i} \left(\alpha_t + i \frac{\omega}{c_t} \right) = \frac{\omega}{c_t} - i \alpha_t = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{|\tilde{\mu}|}} e^{-i \frac{\varphi_t}{2}}, \\ \tilde{k}_l &= k_{1l} + i k_{2l} = \frac{1}{i} \left(\alpha_l + i \frac{\omega}{c_l} \right) = \frac{\omega}{c_l} - i \alpha_l = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{|\tilde{M}|}} e^{-i \frac{\varphi_l}{2}}; \end{aligned}$$

скорости поперечных и продольных волн

$$c_t^2 = \frac{\omega^2}{|\tilde{k}|^2} \sec^2 \frac{\varphi_t}{2} = \frac{|\tilde{\mu}|}{\rho} \sec^2 \frac{\varphi_t}{2}, \quad (9)$$

$$c_l^2 = \frac{\omega^2}{|\tilde{k}|^2} \sec^2 \frac{\varphi_l}{2} = \frac{|\tilde{M}|}{\rho} \sec^2 \frac{\varphi_l}{2}; \quad (10)$$



коэффициенты затухания

$$\alpha_t^2 = |\tilde{k}|^2 \sin^2 \frac{\varphi_t}{2} = \frac{\omega^2 \rho}{|\tilde{\mu}|} \sin^2 \frac{\varphi_t}{2},$$

$$\alpha_l^2 = |\tilde{k}|^2 \sin^2 \frac{\varphi_l}{2} = \frac{\omega^2 \rho}{|\tilde{M}|} \sin^2 \frac{\varphi_l}{2};$$

логарифмические декременты затухания

$$\delta_t = 2\pi \frac{\alpha_t c_t}{\omega} = 2\pi \operatorname{tg} \frac{\varphi_t}{2},$$

$$\delta_l = 2\pi \frac{\alpha_l c_l}{\omega} = 2\pi \operatorname{tg} \frac{\varphi_l}{2}.$$

Для дальнейшего анализа распространения волн в вязкоупругих средах необходимо задаться конкретным видом вязкоупругих операторов.

2. Анализ распространения вязкоупругих волн с помощью моделей с дробными производными

Хорошо известно [23], что каждый изотропный упругий материал обладает только двумя независимыми константами, а все остальные выражаются через две, которые должны быть заданы или определены из экспериментов. Точно так же и в случае изотропных вязкоупругих сред, материальные свойства которых зависят от времени и описываются операторами, которые должны быть выражены через два наперед заданных (или определенных из экспериментов) оператора, используя принцип соответствия [10].

Будем считать оператор объемного расширения–сжатия \hat{K} не зависящим от времени, тем самым пренебрегая объемной релаксацией (это предположение имеет место для вязкоупругих материалов, у которых объемная релаксация намного меньше, чем релаксация при сдвиге [1]), т.е.

$$\tilde{K} = \text{const.}$$

В этом случае для дальнейшего анализа необходимо задать второй оператор. Для этого рассмотрим три простейшие модели вязкоупругости с дробными производными: обобщенную модель Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела [7, 10].

2.1. Моделирование оператора модуля сдвига с помощью моделей с дробной производной

Модель Кельвина–Фойгта

Наиболее часто оператор сдвига $\hat{\mu}$ задается с помощью модели Кельвина–Фойгта с дробной производной [10]

$$\hat{\mu} = \mu_0 [1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma], \quad (11)$$

где μ_0 — релаксированный модуль сдвига, τ_σ^μ — время ретардации при сдвиге, D^γ — дробная производная Римана–Лиувилля порядка $0 < \gamma < 1$

$$D^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(t')}{(t-t')^\gamma} dt',$$

при этом объемный модуль принимается постоянной величиной, равной релаксированному значению объемного модуля K_0 .

Тогда Фурье-образ ядра оператора модуля сдвига, квадрат его абсолютной величины и его аргумент принимают вид

$$\tilde{\mu} = \mu_0 [1 + (i\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma] = \mu_0 \left[1 + (\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma} \right], \quad |\tilde{\mu}|^2 = \mu_0^2 \left[1 + 2(\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + (\omega\tau_\sigma^\mu)^{2\gamma} \right],$$



$$\varphi_t = \arg \tilde{\mu} = \operatorname{arctg} \left(\frac{(\omega \tau_\sigma^\mu)^\gamma \sin \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right)}{1 + (\omega \tau_\sigma^\mu)^\gamma \cos \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right)} \right).$$

Асимптотические величины скорости поперечной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента принимают следующие значения:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = c_{t0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 0; \quad (12)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = 2\pi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \gamma \right). \quad (13)$$

Асимптотические значения скорости продольной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_l = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\mu_0 + K_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho}} = c_{l0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \quad (14)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = 2\pi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \gamma \right), \quad (15)$$

где λ_0 — релаксированное значение первого коэффициента Ламе.

Модель Максвелла

Если для описания поведения вязкоупругих тел использовать модель Максвелла, тогда оператор сдвига $\hat{\mu}$ может быть записан в виде [10]

$$\hat{\mu} = \mu_\infty \frac{(\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma D^\gamma}, \quad (16)$$

где μ_∞ — нерелаксированное значение модуля сдвига, τ_ε^μ — время релаксации при сдвиге, при этом оператор объемного модуля считается постоянной величиной, равной нерелаксированному значению объемного модуля K_∞ .

В этом случае Фурье-образ ядра оператора модуля сдвига, квадрат его абсолютной величины и его аргумент принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \mu_\infty \frac{(\omega \tau_\varepsilon^\mu)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^\mu)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}, \\ |\tilde{\mu}|^2 &= \mu_\infty^2 \frac{1}{1 + 2(\omega \tau_\varepsilon^\mu)^{-\gamma} \cos \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right) + (\omega \tau_\varepsilon^\mu)^{-2\gamma}}, \\ \varphi_t &= \arg \tilde{\mu} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right)}{(\omega \tau_\varepsilon^\mu)^\gamma + \cos \left(\frac{\pi}{2} \gamma \right)} \right). \end{aligned}$$

Полученные соотношения позволяют получить следующие асимптотические значения скорости поперечной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 2\pi \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} \gamma \right); \quad (17)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho}} = c_{t\infty}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = 0. \quad (18)$$

Асимптотические значения скорости продольной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:



при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_l = \sqrt{\frac{K_\infty}{\rho}}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \quad (19)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\mu_\infty + K_\infty}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho}} = c_{l\infty}, \quad (20)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = 0,$$

где λ_∞ — нерелаксированное значение первого коэффициента Ламе.

Модель стандартного линейного твердого тела

Если для описания поведения вязкоупругой среды использовать модель стандартного линейного твердого тела с дробными производными одного порядка для напряжений и деформаций, тогда оператор сдвига может быть записан в виде [10]

$$\hat{\mu} = \mu_0 \frac{1 + (\tau_\sigma^\mu)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma D^\gamma}. \quad (21)$$

В этом случае Фурье-образ ядра оператора модуля сдвига, квадрат его абсолютной величины и его аргумент принимают вид

$$\tilde{\mu} = \mu_0 \frac{1 + (\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{1 + (\omega\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}, \quad |\tilde{\mu}|^2 = \mu_0^2 \frac{1 + 2(\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma \cos(\frac{\pi}{2}\gamma) + (\omega\tau_\sigma^\mu)^{2\gamma}}{1 + 2(\omega\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma \cos(\frac{\pi}{2}\gamma) + (\omega\tau_\varepsilon^\mu)^{2\gamma}},$$

$$\varphi_t = \arg \tilde{\mu} = \arctg \left\{ \frac{[(\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma - (\omega\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma] \sin(\frac{\pi}{2}\gamma)}{1 + [(\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma + (\omega\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma] \cos(\frac{\pi}{2}\gamma) + (\omega\tau_\sigma^\mu)^\gamma (\omega\tau_\varepsilon^\mu)^\gamma} \right\}.$$

Пренебрегая объемной релаксацией, т.е. считая, что $\hat{K} = \tilde{K} = K_0 = K_\infty = K = \text{const}$, из полученных соотношений можно найти следующие асимптотические значения скорости, коэффициента затухания и логарифмического декремента для поперечной волны:

при $\omega \rightarrow 0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = c_{t0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 0; \quad (22)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \left(\frac{\tau_\sigma^\mu}{\tau_\varepsilon^\mu} \right)^{\frac{\gamma}{2}} = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho}} = c_{t\infty}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = 0; \quad (23)$$

для продольной волны:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_l = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\mu_0 + K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho}} = c_{l0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \quad (24)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\mu_0 \left(\frac{\tau_\sigma^\mu}{\tau_\varepsilon^\mu} \right)^\gamma + K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho}} = c_{l\infty}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = 0. \quad (25)$$

При выводе соотношений (23) и (25) учитывалось известное для модели стандартного линейного твердого тела соотношение между временами релаксации τ_ε^μ и ретардации τ_σ^μ , порядком дробной производной γ и релаксированным μ_0 и нерелаксированным μ_∞ значениями модуля сдвига [10]

$$\frac{\mu_\infty}{\mu_0} = \left(\frac{\tau_\sigma^\mu}{\tau_\varepsilon^\mu} \right)^\gamma.$$



2.2. Моделирование оператора модуля Юнга с помощью моделей с дробной производной

Модель Кельвина – Фойгта

Самым распространенным способом задания оператора модуля Юнга в научной литературе является использование модели Кельвина – Фойгта с дробной производной. В этом случае оператор \tilde{E} имеет вид [10]

$$\hat{E} = E_0 \left[1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma \right], \quad (26)$$

или

$$\tilde{E} = E_0 \left[1 + (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma} \right],$$

где E_0 — релаксированное значение модуля Юнга, τ_σ^E — время ретардации продольной деформации.

В этом случае оператор сдвига $\hat{\mu}$ нужно выразить через оператор модуля объемного расширения $\hat{K} = K_0$ и оператор модуля Юнга \hat{E} аналогично упругому случаю:

$$\hat{\mu} = \frac{3K_0\hat{E}}{9K_0 - \hat{E}}.$$

В результате получим [10]

$$\begin{aligned} \hat{\mu} &= \left(3\hat{E}^{-1} - \frac{1}{3}K_0^{-1} \right)^{-1} = \left\{ \frac{3}{E_0} \left[1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma \right]^{-1} - \frac{1}{3K_0} \right\}^{-1} = \frac{3K_0E_0}{9K_0 - E_0} \frac{1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma}{1 - \frac{E_0}{9K_0 - E_0} (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma}, \\ \tilde{\mu} &= 3K_0E_0 \left\{ (9K_0 - E_0) + (9K_0 - 2E_0) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega\tau_\sigma)^\gamma - E_0(\omega\tau_\sigma)^{2\gamma} + \right. \\ &\quad \left. + i9K_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega\tau_\sigma)^\gamma \right\} / \left[(9K_0 - E_0)^2 + E_0^2(\omega\tau_\sigma)^{2\gamma} - 2E_0(9K_0 - E_0)(\omega\tau_\sigma)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) \right], \\ |\tilde{\mu}|^2 &= \frac{(3K_0E_0)^2 \left[1 + 2(\omega\tau_\sigma)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + (\omega\tau_\sigma)^{2\gamma} \right]}{(9K_0 - E_0)^2 + E_0^2(\omega\tau_\sigma)^{2\gamma} - 2E_0(9K_0 - E_0)(\omega\tau_\sigma)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)}, \\ \varphi_t = \arg \tilde{\mu} &= \arctg \left[\frac{9K_0(\omega\tau_\sigma)^\gamma \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)}{9K_0 - E_0 + (9K_0 - 2E_0)(\omega\tau_\sigma)^\gamma \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) - E_0(\omega\tau_\sigma)^{2\gamma}} \right]. \end{aligned}$$

Тогда асимптотические значения скорости поперечной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента принимают вид:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = \sqrt{\frac{3K_0E_0}{(9K_0 - E_0)\rho}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = c_{t0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 0; \quad (27)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = \infty. \quad (28)$$

Асимптотические значения скорости продольной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} c_l &= \sqrt{\frac{3K_0(3K_0 + E_0)}{(9K_0 - E_0)\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho}} = c_{l0}, \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l &= 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \end{aligned} \quad (29)$$



при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = \infty. \quad (30)$$

Модель Максвелла

В случае моделирования оператора модуля Юнга с помощью модели Максвелла с дробной производной он приобретает вид [10]

$$\hat{E} = E_\infty \frac{(\tau_\varepsilon^E)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\varepsilon^E)^\gamma D^\gamma}, \quad (31)$$

или

$$\tilde{E} = E_\infty \frac{(\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}},$$

где E_∞ — нерелаксированное значение модуля Юнга, τ_ε^E — время релаксации при растяжении-сжатии.

Тогда, зная оператор Юнга, можно найти оператор сдвига

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= \frac{3K_\infty E_\infty \left[(9K_\infty - E_\infty) (\omega \tau_\varepsilon)^{2\gamma} + 9K_\infty \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma + i 9K_\infty \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma \right]}{(9K_\infty - E_\infty)^2 (\omega \tau_\varepsilon)^{2\gamma} + (9K_\infty)^2 + 18K_\infty (9K_\infty - E_\infty) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma}, \\ |\tilde{\mu}|^2 &= \frac{[3K_\infty E_\infty (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma]^2}{(9K_\infty - E_\infty)^2 (\omega \tau_\varepsilon)^{2\gamma} + (9K_\infty)^2 + 18K_\infty (9K_\infty - E_\infty) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma}, \\ \operatorname{tg}(\varphi_t) &= \frac{9K_\infty \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)}{(9K_\infty - E_\infty) (\omega \tau_\varepsilon)^\gamma + 9K_\infty \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)}. \end{aligned}$$

Асимптотические значения скорости поперечной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 2\pi \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\gamma\right); \quad (32)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t &= \sqrt{\frac{3K_\infty E_\infty}{(9K_\infty - E_\infty)\rho}} = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho}} = c_{t\infty}, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t &= \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Асимптотические значения скорости продольной волны, коэффициента затухания и логарифмического декремента:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_l = \sqrt{\frac{K_\infty}{\rho}}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \quad (34)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l &= \sqrt{\frac{3K_\infty (3K_\infty + E_\infty)}{(9K_\infty - E_\infty)\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho}} = c_{l\infty}, \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l &= \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = 0. \end{aligned} \quad (35)$$



Модель стандартного линейного твердого тела

При описании оператора модуля Юнга с помощью модели стандартного линейного твердого тела с дробными производными одного порядка для напряжений и деформаций он приобретает вид [10]

$$\hat{E} = E_0 \frac{1 + (\tau_\sigma^E)^\gamma D^\gamma}{1 + (\tau_\varepsilon^E)^\gamma D^\gamma}, \quad (36)$$

или

$$\tilde{E} = E_0 \frac{1 + (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}{1 + (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma e^{i\frac{\pi}{2}\gamma}}.$$

В этом случае с учетом соотношений (8) и условия $K_0 = K_\infty = K = \text{const}$ Фурье-образ ядра оператора модуля сдвига, квадрат его абсолютной величины и его аргумент принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= 3KE_0 \left\{ 9K - E_0 - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^{2\gamma} - 2E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma + 9K (\omega^2 \tau_\sigma^E \tau_\varepsilon^E)^\gamma + \right. \\ &\quad \left. + 9K \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) [(\omega \tau_\sigma^E)^\gamma + (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma] + i9K \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) [(\omega \tau_\sigma^E)^\gamma - (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma] \right\} \\ &\quad \left/ \left\{ (9K - E_0)^2 + 2(9K - E_0) \left[9K (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma \right] \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[9K (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma \right]^2 \right\}, \right. \\ |\tilde{\mu}|^2 &= (3KE_0)^2 \left[(\omega \tau_\sigma^E)^{2\gamma} + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma + 1 \right] \\ &\quad \left/ \left\{ 2 \left[9K (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma \right] (9K - E_0) \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[9K (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma \right]^2 + (9K - E_0)^2 \right\}, \right. \\ \varphi_t &= \arg \tilde{\mu} = \arctg \left\{ 9K \sin\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) [(\omega \tau_\sigma^E)^\gamma - (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma] \right/ \left(9K - E_0 - E_0 (\omega \tau_\sigma^E)^{2\gamma} - \right. \\ &\quad \left. - 2E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) (\omega \tau_\sigma^E)^\gamma + 9K (\omega^2 \tau_\sigma^E \tau_\varepsilon^E)^\gamma + 9K \cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right) [(\omega \tau_\sigma^E)^\gamma + (\omega \tau_\varepsilon^E)^\gamma] \right\}. \quad (37) \end{aligned}$$

Из полученных соотношений можно определить асимптотические значения скорости, коэффициента затухания и логарифмического декремента для поперечной волны:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_t = \sqrt{\frac{3KE_0}{(9K - E_0)\rho}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} = c_{t0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_t = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_t = 0; \quad (38)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_t = \sqrt{\frac{3KE_0}{\left[9K \left(\frac{\tau_\varepsilon^E}{\tau_\sigma^E} \right)^\gamma - E_0 \right] \rho}} = \sqrt{\frac{\mu_\infty}{\rho}} = c_{t\infty}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_t = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_t = 0; \quad (39)$$

для продольной волны:

при $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} c_l = \sqrt{\frac{3K(3K + E_0)}{(9K - E_0)\rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho}} = c_{l0}, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_l = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \delta_l = 0; \quad (40)$$

при $\omega \rightarrow \infty$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_l = \sqrt{\frac{3K \left[3K + E_0 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\varepsilon^E} \right)^\gamma \right]}{\left[9K - E_0 \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\varepsilon^E} \right)^\gamma \right] \rho}} = \sqrt{\frac{\lambda_\infty + 2\mu_\infty}{\rho}} = c_{l\infty}, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \alpha_l = \infty, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \delta_l = 0. \quad (41)$$

При выводе соотношений (39) и (41) учитывалось известное для модели стандартного линейного твердого тела соотношение между временами релаксации τ_ϵ^E и ретардации τ_σ^E , порядком дробной производной γ и релаксированным E_0 и нерелаксированным E_∞ значениями модуля Юнга [10]

$$\frac{E_\infty}{E_0} = \left(\frac{\tau_\sigma^E}{\tau_\epsilon^E} \right)^\gamma.$$

3. Численные исследования

На основании соотношений (9) и (10) в логарифмическом масштабе по обеим осям построены графики (рис. 1–4) зависимости скорости распространения установившихся гармонических трехмерных волн в вязкоупругих средах от частоты для рассмотренных выше моделей при четырех значениях параметра дробности γ : 0.4, 0.6, 0.8 и 1 (значение $\gamma = 1$ соответствует классическим моделям вязкоупругости). При этом рассматривается материал с релаксированным (для моделей Кельвина–Фойгта и стандартного линейного твердого тела) или нерелаксированным (для модели Максвелла) коэффициентом Пуассона, равным 0.3, исходя из чего определяется коэффициент объемного расширения-сжатия K .

Переход к безразмерным значениям скорости волн осуществляется путем деления текущего значения скорости на ее значение c_{t0} или c_{l0} при $\omega \rightarrow 0$ для модели Кельвина–Фойгта (которые, в свою очередь, определяются соотношениями (12), (27) и (14), (29)) и для модели стандартного линейного твердого тела (которые, в свою очередь, определяются соотношениями (22), (38) и (24), (40)) или на ее значение $c_{t\infty}$ или $c_{l\infty}$ при $\omega \rightarrow \infty$ для модели Максвелла (которые подсчитываются в соответствии с формулами (18), (33) и (20), (35)).

На рис. 1 приведены зависимости безразмерной скорости распространения продольных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред, модуль Юнга которых описывается моделями Кельвина–Фойгта (26), Максвелла (31) и стандартного линейного твердого тела (36) с дробными производными.

Асимптотическое поведение кривых на рис. 1 при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ для моделей Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела находится в полном соответствии с формулами (29)–(30), (34)–(35) и (40)–(41).

Все четыре графика на рис. 1 для продольных волн, построенные при различных значениях параметра дробности для модели Кельвина–Фойгта, пересекаются при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 3 ± 0.5 , для модели Максвелла — при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.89 ± 0.01 , для модели стандартного линейного твердого тела — при безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.3 ± 0.2 .

На рис. 2 приведены зависимости безразмерной скорости распространения продольных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред, модуль сдвига которых описывается моделями Кельвина–Фойгта (11), Максвелла (16) и стандартного линейного твердого тела (21) с дробными производными.

Асимптотическое поведение графиков на рис. 2 при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ для моделей Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела находится в полном соответствии с формулами (14)–(15), (19)–(20) и (24)–(25). Все четыре графика на рис. 2 для продольных волн в случае использования модели Кельвина–Фойгта пересекаются при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 2.2 ± 0.1 , для модели Максвелла — при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.82 ± 0.02 , а для стандартного линейного твердого тела — при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.3 ± 0.2 .

Из рис. 1 и 2 видно, что при фиксированном значении нерелаксированного коэффициента Пуассона $\nu_\infty = 0.3$ в модели Максвелла безразмерная скорость продольной волны c_l при $\omega \rightarrow 0$ асимптотически стремится к значению 0.8, поскольку в обоих случаях в соответствии с соотношениями (34)–(35) и (19)–(20): $c_l|_{\lim_{\omega \rightarrow 0}} = \sqrt{\frac{K_\infty}{\rho}}$ и $c_l|_{\lim_{\omega \rightarrow \infty}} = c_{l\infty} = \sqrt{\frac{3(1-\nu_\infty)K_\infty}{(1+\nu_\infty)\rho}}$,

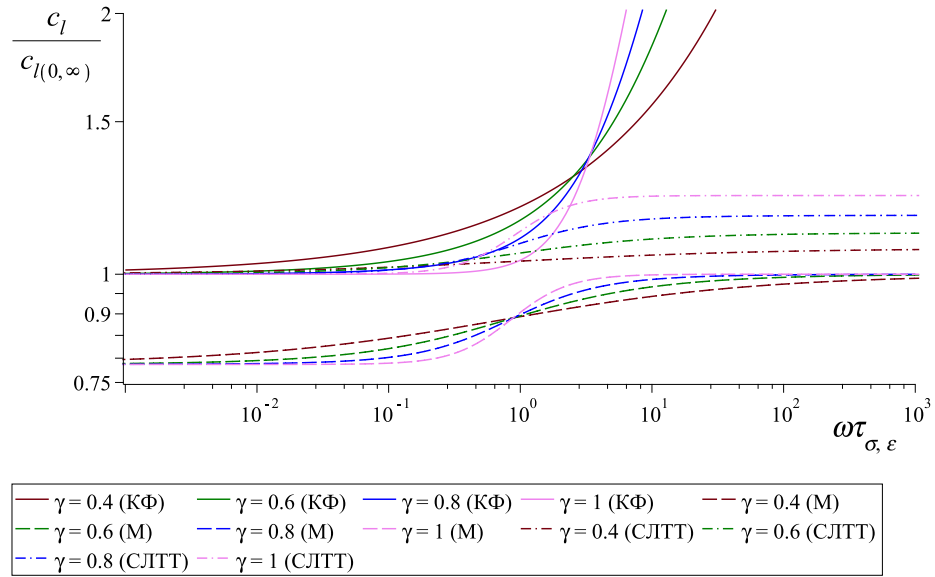


Рис. 1. Зависимость безразмерной скорости распространения продольных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред с модулем Юнга, описываемым моделями Кельвина – Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными (см. формулы (36), (26), (31) соответственно) (цвет онлайн)

Fig. 1. Dimensionless frequency dependence of the dimensionless velocity of longitudinal waves in viscoelastic media with the Young's modulus described by the Kelvin – Voigt, Maxwell and standard linear solid models with fractional derivatives (see formulas (36), (26), (31) respectively) (color online)

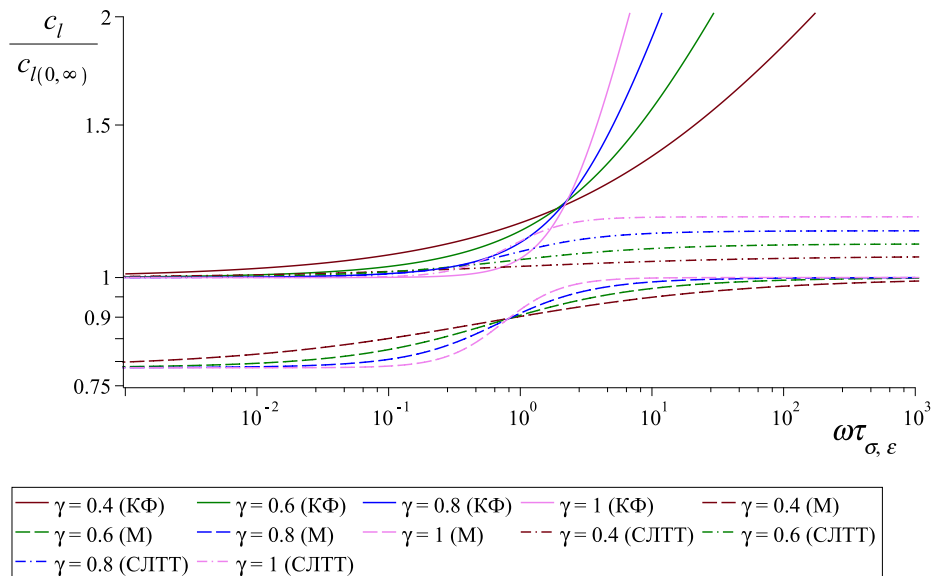


Рис. 2. Зависимость безразмерной скорости распространения продольных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред с модулем сдвига, описываемым моделями Кельвина – Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными (см. формулы (11), (16), (21) соответственно) (цвет онлайн)

Fig. 2. Dimensionless frequency dependence of the dimensionless velocity of longitudinal waves in viscoelastic media with the shear modulus described by the Kelvin – Voigt, Maxwell and standard linear solid models with fractional derivatives (see formulas (11), (16), (21) respectively) (color online)

следовательно,

$$\frac{c_l|_{\lim_{\omega \rightarrow 0}}}{c_l|_{\lim_{\omega \rightarrow \infty}}} = \sqrt{\frac{1 + \nu_{\infty}}{3(1 - \nu_{\infty})}} = \sqrt{\frac{1 + 0.3}{3(1 - 0.3)}} = \sqrt{\frac{13}{21}} \cong 0.7868.$$

Из приведенных на рис. 1 и 2 графиков видно, что параметр дробности незначительно влияет на качественное поведение продольной волны для моделей Максвелла и стандартного линейного твердого тела во всем диапазоне частот, для модели Кельвина – Фойгта — в области до точки пересечения кривых.

На рис. 3 и 4 приведены зависимости безразмерной скорости распространения поперечных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред, модуль Юнга (рис. 3) и модуль сдвига (рис. 4) которых описывается моделями Кельвина – Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными.

Асимптотическое поведение графиков на рис. 3 при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ для моделей Кельвина – Фойгта (26), Максвелла (31) и стандартного линейного твердого тела (36) находится в полном соответствии с формулами (27)–(28), (32)–(33) и (38)–(39).

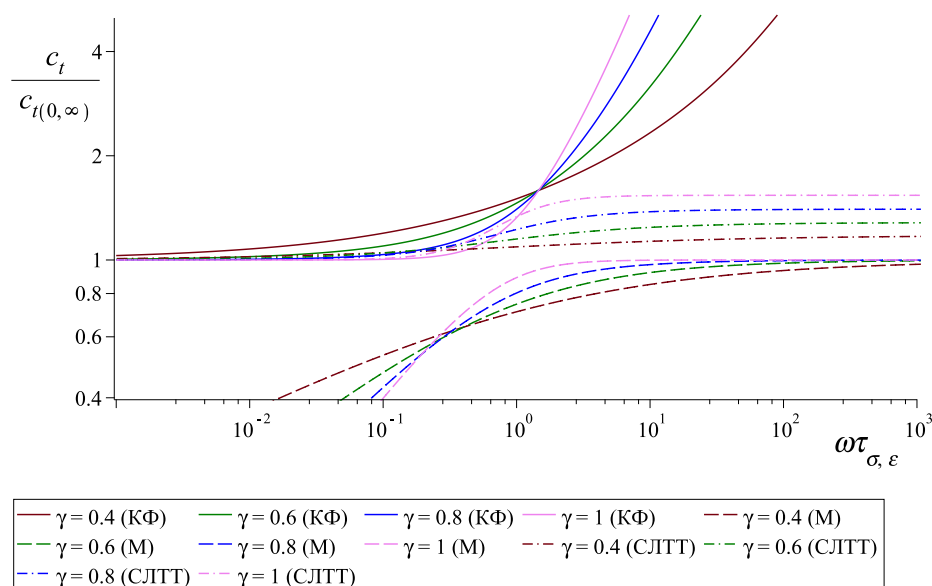


Рис. 3. Зависимость безразмерной скорости распространения поперечных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред с модулем Юнга, описываемым моделями Кельвина – Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными (см. формулы (26), (31), (36) соответственно) (цвет онлайн)

Fig. 3. Dimensionless frequency dependence of the dimensionless velocity of transverse waves in viscoelastic media with the Young's modulus described by the Kelvin – Voigt, Maxwell and standard linear solid models with fractional derivatives (see formulas (26), (31), (36) respectively) (color online)

Все четыре графика на рис. 3 для поперечных волн при использовании модели Кельвина – Фойгта для модуля Юнга пересекаются при примерно равных безразмерных частотах, находящихся в интервале 1.45 ± 0.04 , для модели Максвелла — при безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.3 ± 0.1 , а для модели стандартного линейного твердого тела — при безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.25 ± 0.15 .

Асимптотическое поведение графиков на рис. 4 при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ для моделей Кельвина – Фойгта (11), Максвелла (16) и стандартного линейного твердого тела (21) находится в полном соответствии с формулами (12)–(13), (17)–(18) и (22)–(23).

Все четыре графика на рис. 4 для поперечных волн в случае модели Кельвина – Фойгта для описания модуля сдвига пересекаются при примерно равных безразмерных частотах,



находящихся в интервале 1.31 ± 0.03 , для модели Максвелла — при безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.3 ± 0.1 , а для модели стандартного линейного твердого тела — при безразмерных частотах, находящихся в интервале 0.25 ± 0.15 .

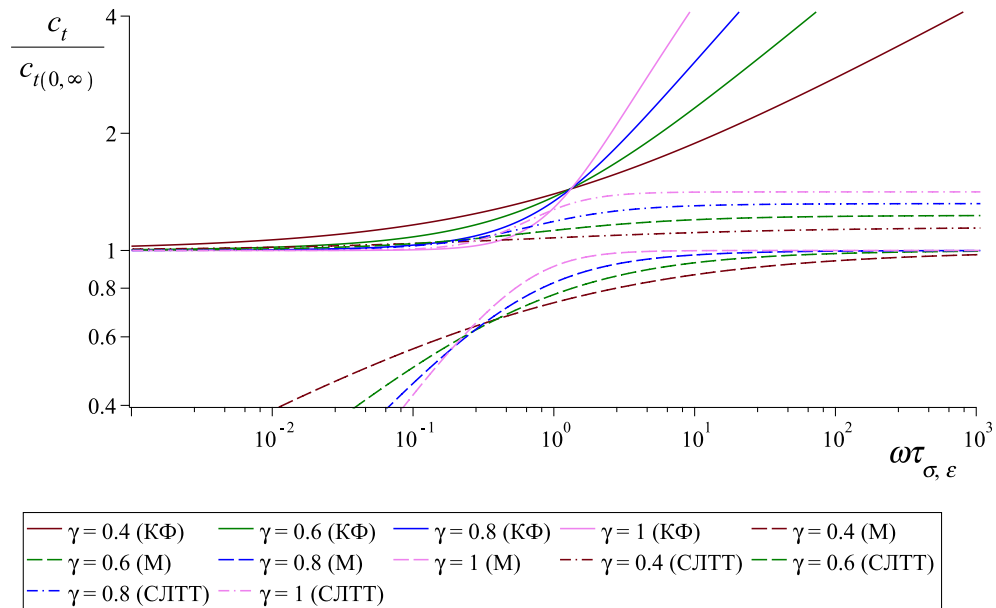


Рис. 4. Зависимость безразмерной скорости распространения поперечных волн от безразмерной частоты для вязкоупругих сред с модулем сдвига, описываемым моделями Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного твердого тела с дробными производными (см. формулы (11), (16), (21) соответственно)(цвет онлайн)

Fig. 4. Dimensionless frequency dependence of the dimensionless velocity of transverse waves in viscoelastic media with the shear modulus described by the Kelvin–Voigt, Maxwell and standard linear solid models with fractional derivatives (see formulas (11), (16), (21) respectively)(color online)

Из приведенных на рис. 3 и 4 графиков видно, что параметр дробности незначительно влияет на качественное поведение скорости поперечной волны для модели Максвелла в области после точки пересечения кривых, для модели Кельвина–Фойгта — в области до точки пересечения кривых, а для модели стандартного линейного твердого тела — в обеих областях.

Поскольку в моделях Максвелла и стандартного линейного твердого тела скорости волн на всем диапазоне частот принимают конечные значения, а в модели Кельвина–Фойгта их значения неограничены при $\omega \rightarrow \infty$, то первые две описывают процесс волнового, третья — диффузионно-волнового типа.

Заключение

В данной работе исследованы характеристики гармонических волн, распространяющихся в трехмерных изотропных вязкоупругих средах, с помощью моделей Кельвина–Фойгта, Максвелла и стандартного линейного тела с дробными производными, которые были использованы для описания зависящих от времени операторов Юнга и сдвига. Найдены асимптотические значения скоростей продольных и поперечных волн, их коэффициентов затухания и логарифмических декрементов. Показано, что модели Максвелла и стандартного линейного твердого тела описывают волновые процессы, а модель Кельвина–Фойгта описывает процесс диффузионно-волнового типа.



Список литературы

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. Москва : Наука, 2014. 752 с.
2. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. Москва : Мир, 1974. 340 с.
3. Бленд Д. Линейная теория вязкоупругости. Москва : Мир, 1965. 200 с.
4. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. Москва : Наука, 1977. 384 с.
5. Локшин А. А., Суворова Ю. В. Математическая теория распространения волн в средах с памятью. Москва : Изд-во МГУ, 1982. 151 с.
6. Tschoegl N. W. The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior: An introduction. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 1989. 769 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-73602-5>
7. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids // Applied Mechanics Reviews. 1997. Vol. 50, iss. 1. P. 15–67. <https://doi.org/10.1115/1.3101682>, EDN: LELUNP
8. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An introduction to mathematical models. London : Imperial College Press, 2010. 368 p. <https://doi.org/10.1142/p614>
9. Holm S. Waves with power-law attenuation. Cham : Springer, 2019. 312 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14927-7>
10. Шитикова М. В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела // Известия РАН. Механика твердого тела. 2022. № 1. С. 3–40. <https://doi.org/10.31857/S0572329921060118>, EDN: QMNKLY
11. Shitikova M. V., Krusser A. I. Models of viscoelastic materials: A review on historical development and formulation // Giorgio I., Placidi L., Barchiesi E., Abali B. E., Altenbach H. (eds.) Theoretical analyses, computations, and experiments of multiscale materials. Cham : Springer, 2022. P. 285–326. (Advanced Structured Materials. Vol. 175). https://doi.org/10.1007/978-3-031-04548-6_14, EDN: FPAUSU
12. Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Waves in fractional Zener type viscoelastic media // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2010. Vol. 365, iss. 1. P. 259–268. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.10.043>
13. Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Waves in viscoelastic media described by a linear fractional model // Integral Transforms and Special Functions. 2011. Vol. 22, iss. 4–5. P. 283–291. <https://doi.org/10.1080/10652469.2010.541039>
14. Atanacković T., Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Thermodynamical restrictions and wave propagation for a class of fractional order viscoelastic rods // Abstract and Applied Analysis. 2011. Vol. 2011. P. 1–32. <https://doi.org/10.1155/2011/975694>
15. Oparnica L., Zorica D., Okuka A. S. Fractional Burgers wave equation // Acta Mechanica. 2019. Vol. 230. P. 4321–4340. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02500-0>
16. Коссович Л. Ю., Сухоловская М. С. Решение задачи о нестационарных продольных волнах в тонком вязкоупругом стержне // Механика деформируемых сред : межвуз. науч. сб. Саратов : Изд-во Саратовского ун-та, 2002. Вып. 14. С. 93–98. EDN: SCOAL
17. Анофрикова Н. С., Коссович Л. Ю., Черненко В. П. Асимптотические методы построения решений в окрестностях фронтов волн в вязкоупругом стержне при больших значениях времени // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика, 2005, Т. 5, вып. 1. С. 82–88. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2005-5-1-82-88>, EDN: POHBVX
18. Cottone G., Di Paola M., Zingales M. Elastic waves propagation in 1D fractional non-local continuum // Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2009. Vol. 42, iss. 2. P. 95–103. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.09.006>
19. Brown T. S., Du S., Eruslu H., Sayas F.-J. Analysis of models for viscoelastic wave propagation // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. 2018. Vol. 3, iss. 1. P. 55–96. <https://doi.org/10.21042/amns.2018.1.00006>
20. Мешков С. И., Россихин Ю. А. О распространении звуковых волн в наследственно упругой среде // Прикладная механика и техническая физика. 1968. Т. 9, № 5. С. 89–93. EDN: YLUEIH
21. Мешков С. И., Россихин Ю. А. О распространении звуковых волн в упруго-наследственных средах // Всесоюзный симпозиум по распространению упругих и упруго-пластических волн. Кишинев : РИО Академии наук Молдавской ССР, 1968. С. 61–62. EDN: YUICAZ



22. Мешков С. И., Россихин Ю. А. О распространении звуковых волн в вязко-упругой среде, наследственные свойства которой определяются слабосингулярными ядрами // Волны в неупругих средах : сб. ст. Кишинев : РИО Академии наук Молдавской ССР, 1970. С. 162–172. EDN: YROEGJ
23. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. Москва : Наука, 1965. 202 с.

References

1. Rabotnov Yu. N. *Creep problems in structural members*. Amsterdam, North-Holland, 1969. (Russ. ed.: Moscow, Nauka, 2014. 752 p.).
2. Christensen R. M. *Theory of viscoelasticity: An introduction*. New York, Academic Press, 1982. 364 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1974. 340 p.).
3. Bland D. *The theory of linear viscoelasticity*. Oxford, New York, Pergamon Press, 1960. 125 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1965. 200 p.).
4. Rabotnov Yu. N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of hereditary solid mechanics]. Moscow, Nauka, 1980. 384 p. (in Russian).
5. Lokshin A. A., Suvorova Yu. V. *Matematicheskaya teoriya rasprostraneniya voln v sredakh s pamyat'yu* [Mathematical theory of wave propagation in hereditary media]. Moscow, Moscow University Press, 1982. 151 p. (in Russian).
6. Tschoegl N. W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior: An introduction*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1989. 769 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-73602-5>
7. Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V. Applications of fractional calculus to dynamic problems of linear and nonlinear hereditary mechanics of solids. *Applied Mechanics Reviews*, 1997, vol. 50, iss. 1, pp. 15–67. <https://doi.org/10.1115/1.3101682>, EDN: LELUNP
8. Mainardi F. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An introduction to mathematical models*. London, Imperial College Press, 2010. 368 p. <https://doi.org/10.1142/p614>
9. Holm S. *Waves with power-law attenuation*. Cham, Springer, 2019. 312 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-14927-7>
10. Shitikova M. V. Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: A review. *Mechanics of Solids*, 2022, vol. 57, iss. 1, pp. 1–33. <https://doi.org/10.3103/S0025654422010022>, EDN: TXOLIR
11. Shitikova M. V., Krusser A. I. Models of viscoelastic materials: A review on historical development and formulation. In: Giorgio I., Placidi L., Barchiesi E., Abali B. E., Altenbach H. (eds.) *Theoretical analyses, computations, and experiments of multiscale materials*. Advanced Structured Materials, vol. 175. Cham, Springer, 2022, pp. 285–326. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04548-6_14, EDN: FPAUSU
12. Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Waves in fractional Zener type viscoelastic media. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2010, vol. 365, iss. 1, pp. 259–268. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.10.043>
13. Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Waves in viscoelastic media described by a linear fractional model. *Integral Transforms and Special Functions*, 2011, vol. 22, iss. 4–5, pp. 283–291. <https://doi.org/10.1080/10652469.2010.541039>
14. Atanacković T., Konjik S., Oparnica L., Zorica D. Thermodynamical restrictions and wave propagation for a class of fractional order viscoelastic rods. *Abstract and Applied Analysis*, 2011, vol. 2011, pp. 1–32. <https://doi.org/10.1155/2011/975694>
15. Oparnica L., Zorica D., Okuka A. Fractional Burgers wave equation. *Acta Mechanica*, 2019, vol. 230, pp. 4321–4340. <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02500-0>
16. Kossovich L. Yu., Sukholovskaya M. S. Solution of a problem about nonstationary longitudinal waves in a thin viscoelastic rod. *Mechanics of Deformable Media*, Collective volume. Saratov, Saratov State University Publ., 2002, iss. 14, pp. 93–98 (in Russian). EDN: SCOAAL
17. Anofrikova N. S., Kossovich L. Yu., Chernenko V. P. Asymptotic methods of solution construction in the vicinity of wave fronts in a viscoelastic rod at large times. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2005, vol. 5, iss. 1, pp. 82–88 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2005-5-1-82-88>, EDN: POHBVX
18. Cottone G., Di Paola M., Zingales M. Elastic waves propagation in 1D fractional non-local continuum. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 2009, vol. 42, iss. 2, pp. 95–103. <https://doi.org/10.1016/j.physe.2009.09.006>



19. Brown T. S., Du S., Eruslu H., Sayas F.-J. Analysis of models for viscoelastic wave propagation. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences*, 2018, vol. 3, iss. 1, pp. 55–96. <https://doi.org/10.21042/amns.2018.1.00006>
20. Meshkov S. I., Rossikhin Yu. A. Propagation of acoustic waves in a hereditary elastic medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1968, vol. 9, iss. 5, pp. 589–592. <https://doi.org/10.1007/BF02614765>, EDN: YMTUFJ
21. Meshkov S. I., Rossikhin Yu. A. About the propagation of sound waves in elastic-inherited media. In: *Vsesoyuznyy simpozium po rasprostraneniyu uprugikh i uprugo-plasticheskikh voln* [All-Union symposium on the propagation of elastic and elasto-plastic waves]. Chisinau, Academy of Sciences of the Moldavian SSR, 1968, pp. 61–62 (in Russian). EDN: YUICAZ
22. Meshkov S. I., Rossikhin Yu. A. On the propagation of sound waves in a viscoelastic medium, whose inherited properties are determined by weakly singular kernels. In: *Volny v neuprugikh sredakh* [Waves in non-elastic media]. Chisinau, Academy of Sciences of the Moldavian SSR, 1970, pp. 162–172 (in Russian). EDN: YROEGJ
23. Landau L. D., Lifshits E. M. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Nauka, 1965. 202 p. (in Russian).

Поступила в редакцию / Received 10.08.2024

Принята к публикации / Accepted 15.11.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025



Научная статья

УДК 531/534:[57+61]

К вопросу об изучении структурных и механических характеристик губчатой костной ткани крупного рогатого скота

И. Ф. Паршина¹, Д. В. Иванов¹, А. В. Доль¹, И. В. Виндокуров²,
Л. В. Бессонов^{1✉}, М. А. Ташкинов²

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29

Паршина Ирина Феритовна, старший преподаватель кафедры математической теории упругости и биомеханики, abitovaif@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0735-6934>, SPIN: 2267-9136, AuthorID: 906494

Иванов Дмитрий Валерьевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической теории упругости и биомеханики, ivanovdv.84@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>, SPIN: 4459-1094, AuthorID: 201794

Доль Александр Викторович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник учебной лаборатории цифровых медицинских технологий, dolav86@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>, SPIN: 3881-2302, AuthorID: 601135

Виндокуров Илья Владимирович, младший научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории механики биосовместимых материалов и устройств, ivv@pstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1885-0404>, SPIN: 7586-3546, AuthorID: 966067

Бессонов Леонид Валентинович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической теории упругости и биомеханики, bessonov@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5636-1644>, SPIN: 9022-8177, AuthorID: 774968

Ташкинов Михаил Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Динамика и прочность машин», m.tashkinov@pstu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4660-0020>, SPIN: 7694-2129, AuthorID: 614886

Аннотация. Натурные эксперименты с человеческими костями затруднены, поэтому многие авторы исследуют механические параметры губчатой кости крупного рогатого скота, которая по своим свойствам близка к кости человека. Известны исследования по оценке эффективного модуля упругости губчатой кости позвонков и других костей коров. Однако ее механические свойства в зависимости от направления нагружения и структурных свойств не изучены. Цель работы состояла в комплексном исследовании механических свойств губчатой кости крупного рогатого скота в зависимости от направления нагружения, объемной минеральной плотности и пористости. Задачами данной работы являлись: разработка требований к размерам образцов при их одноосном сжатии для оценки эффективного модуля упругости в рамках стержневой теории; проведение одноосных механических экспериментов по сжатию образцов костей в трех направлениях; измерение объемной минеральной плотности и пористости образцов; построение регрессионных зависимостей, связывающих механические и структурные свойства губчатой кости. В результате исследования выявлены зависимости, связывающие эффективный модуль упругости с минеральной плотностью, а также пористостью губчатой кости. Была разработана и представлена авторская методика определения пористости губчатой кости. В работе также представлены требования к относительной высоте (отношение высоты к наибольшему размеру поперечного сечения) образцов губчатой кости. Выявлено, что при проведении одноосных



экспериментов по сжатию и дальнейшем расчете эффективного модуля упругости по стержневой теории относительная высота образцов должна составлять не менее 5 единиц.

Ключевые слова: губчатая кость, позвонки, коленный сустав, эффективный модуль упругости, коэффициент Пуассона, одноосное сжатие

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Государственного задания (проекты № FSRР-2023-0009 и № FSNM-2025-0001). Эксперименты по сжатию образцов выполнены при поддержке Фондом Потанина (проект № ПР23-000397).

Для цитирования: Паршина И. Ф., Иванов Д. В., Доль А. В., Виндокуров И. В., Бессонов Л. В., Ташкинов М. А. К вопросу об изучении структурных и механических характеристик губчатой костной ткани крупного рогатого скота // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 231–245. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-231-245>, EDN: QLRACF

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

On the issue of studying the structural and mechanical characteristics of bovine cancellous bone

I. F. Parshina¹, D. V. Ivanov¹, A. V. Dol¹, I. V. Vindokurov²,
L. V. Bessonov^{1✉}, M. A. Tashkinov²

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolsky Ave., Perm 614990, Russia

Irina F. Parshina, abitovaif@rambler.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0735-6934>, SPIN: 2267-9136, AuthorID: 906494

Dmitry V. Ivanov, ivanovdv.84@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1640-6091>, SPIN: 4459-1094, AuthorID: 201794

Alexander V. Dol, dolav86@ya.ru, <https://orcid.org/0000-0001-5842-1615>, SPIN: 3881-2302, AuthorID: 601135

Iliya V. Vindokurov, ivv@pstu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-1885-0404>, SPIN: 7586-3546, AuthorID: 966067

Leonid V. Bessonov, bessonov@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-5636-1644>, SPIN: 9022-8177, AuthorID: 774968

Mikhail A. Tashkinov, m.tashkinov@pstu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4660-0020>, SPIN: 7694-2129, AuthorID: 614886

Abstract. Mechanical experiments with human bones are difficult, so many authors study mechanical parameters of bovine cancellous bone, which is close to human bone in its properties. Studies on estimation of the effective modulus of elasticity of cancellous bone of vertebrae and other bovine bones are known. However, its mechanical properties depending on the direction of loading and structural properties have not been studied yet. The aim of this work was to comprehensively study the mechanical properties of bovine cancellous bone depending on the loading direction, volumetric mineral density and porosity. The objectives of this work were: to develop requirements for the size of samples in uniaxial compression to estimate the effective modulus of elasticity within the framework of the rod theory; to conduct uniaxial mechanical experiments on compression of bone specimens in three directions; to measure the volumetric bone mineral density and porosity; to construct regression relationships linking mechanical and structural properties of cancellous bone. As a result of the study, the dependences linking the effective modulus of elasticity with mineral density, as well as porosity of cancellous bone were revealed. The author's method of determining the porosity of cancellous bone was developed and presented. As a result of the study, the dependences linking the effective modulus of elasticity with mineral density and porosity of cancellous bone were revealed. The author's method of determining the porosity of cancellous bone was developed and presented. The paper also presents the requirements for the relative height (ratio of height to the largest cross-sectional dimension) of cancellous bone specimens. It was revealed that when conducting uniaxial compression experiments and further calculation of the effective modulus of elasticity according to the rod theory, the relative height of the specimens should be at least 5 units.



Keywords: cancellous bone, vertebrae, knee joint, effective modulus of elasticity, Poisson's ratio, uniaxial compression

Acknowledgements: This work was supported by the State Assignment (projects No. FSRR-2023-0009, and No. FSNM-2025-0001). The experiments on sample compression were carried out with the support of the Potanin Foundation (project No. PR23-000397).

For citation: Parshina I. F., Ivanov D. V., Dol A. V., Vindokurov I. V., Bessonov L. V., Tashkinov M. A. On the issue of studying the structural and mechanical characteristics of bovine cancellous bone. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 231–245 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-231-245>, EDN: QLRACF

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Минеральная плотность кости (МПК) применяется для оценки ее качества и диагностики остеопороза [1, 2]. Известно, что МПК сильно коррелирует с прочностью и эффективным модулем упругости костной ткани [3, 4]. При предоперационном планировании лечения травм и дегенеративных заболеваний позвоночника [5] по данным компьютерной томографии вычисляются единицы Хаунсфилда губчатой кости [6], которые определяют ее МПК. Однако разные компьютерные томографы (КТ), конволюционные ядра [7] оказывают существенное влияние на единицы Хаунсфилда, что может приводить к неадекватной оценке МПК и, соответственно, механических свойств кости [7–9].

В то же время объемную МПК образцов губчатой костной ткани можно измерить прямым методом посредством оценки их исходного объема и массы каркаса (зола) после сжигания. При этом для каждого такого образца с помощью экспериментов на одноосное сжатие можно измерить его механические характеристики. Требования к таким экспериментам, в том числе к параметрам стальных и полимерных образцов, участвующих в испытании на сжатие, описаны в стандартах (например, ASTM E9, ASTM D3410/D341 OM-03, ISO 604:2002), но для биологических материалов таких стандартов не существует. Следует отметить, что расчет эффективного модуля упругости по стержневой теории (при одноосном сжатии) может быть выполнен только для «длинных» образцов, отношение высоты которых к размерам их поперечного сечения должно быть не менее 5 к 1 для стали и выше для полимерных материалов. Далее будем это отношение называть относительной высотой.

Так как натурные эксперименты с человеческими костями (трупными или извлеченными во время операций) затруднены, многие авторы исследуют механические свойства губчатой кости крупного рогатого скота [10], которая по своим свойствам близка к кости человека. Известны исследования по оценке эффективного модуля упругости губчатой кости позвонков и других костей коров [11, 12]. Однако ее механические свойства в зависимости от направления нагружения и от ее объемной МПК не изучены. Так как губчатая кость — это ткань ячеистого вида, сформированная рыхло лежащими костными трабекулами, то при ее исследовании авторы оценивают такой параметр, как пористость (или отношение BV/TV , т.е. отношение объема костного каркаса к объему образца кости). Более того, известны работы [11, 13], в которых строят регрессионные зависимости, связывающие прочностные характеристики и BV/TV . При этом, так же как и МПК, BV/TV оценивают по данным КТ.

Построенные зависимости [14–16] между эффективным модулем упругости и объемной МПК могут быть использованы при дальнейшем изучении напряженно-деформированного состояния пациент-ориентированных биомеханических моделей элементов опорно-двигательного аппарата человека. Такие зависимости позволят для каждого конкретного пациента рассчитывать индивидуальные механические свойства костной ткани. Исследование эффективного модуля упругости и коэффициента Пуассона в разных направлениях (например, вдоль и поперек оси позвонков) позволит учитывать анизотропию костной ткани при биомеханическом моделировании.



Таким образом, цель данной работы состояла в комплексном исследовании механических свойств губчатой кости в зависимости от направления нагружения, объемной МПК и пористости. Соответственно, задачами исследования являлись:

- разработка требований к относительной высоте образцов;
- проведение механических одноосных экспериментов на сжатие образцов костей в трех направлениях (продольном и двух поперечных);
- измерение объемной МПК и пористости образцов;
- построение регрессионных зависимостей, связывающих механические свойства и объемную МПК губчатой кости;
- построение регрессионных зависимостей, связывающих механические свойства и пористость губчатой кости.

1. Материалы и методы

Образцы губчатой кости изготавливались из костей крупного рогатого скота (коровы), испытывались кости поясничных позвонков и коленного сустава. Возраст животных на момент забоя составлял 18–20 месяцев. Срок от забоя до проведения экспериментов составлял не более суток. При исследовании позвонков образцы готовились из костей пяти животных, коленного сустава — семи животных. Кости приобретались на мясном рынке после разделки туши животного.

Высота образцов варьировалась от 10 до 45 мм, ширина (длина) — от 3 до 10 мм. Проводились эксперименты по одноосному сжатию образцов, скорость нагружения равнялась 2 мм/мин. Эксперименты осуществлялись на универсальных испытательных машинах Instron. Регистрация неоднородных полей деформаций на лицевой поверхности образцов осуществлялась с использованием метода корреляции цифровых изображений (DIC) на базе бесконтактной трехмерной цифровой оптической системы Vic-3D (Correlated Solutions). Съемка производилась с помощью камер FLIR, скорость съемки составляла 5 кадров/сек. Системы синхронизировались с использованием блока АЦП (DAQ-STD-8D-2M). Подготовка образцов осуществлялась с помощью ручной ножовки по металлу, измерения размеров выполнялись с помощью цифрового штангенциркуля Mitutoyo (точность измерений 0.01 мм).

Далее приведем поэтапное распределение экспериментов в рамках данного исследования. Первый, третий и четвертый этапы осуществлялись в Саратовском национальном исследовательском государственном университете имени Н. Г. Чернышевского (СГУ), второй этап — в Пермском национальном исследовательском политехническом университете (ПНИПУ) и СГУ.

1.1. Первый этап. Разработка требований к относительной высоте образца

На первом этапе испытывали образцы губчатой кости коленного сустава (рис. 1, а). Образцы готовились вдоль оси Oz сустава (рис. 1, б). В экспериментах применялась машина Instron 3342 с нагрузочной ячейкой 500 Н. Исследовалось влияние относительной высоты образца (отношение высоты образца к среднему размеру поперечного сечения, далее — AR) на вычисляемый по стержневой теории эффективный модуль упругости. Относительная высота образцов варьировалась от 1 до 7 единиц. В рамках данной теории эффективный модуль упругости вычислялся по формуле

$$E = \frac{P \cdot l_0}{S \cdot \Delta l},$$

где E — эффективный модуль упругости (Па), P — сжимающая нагрузка (Н), l_0 — высота образца до нагружения (м), S — площадь поперечного нагружения образца (м²), Δl — перемещение подвижной траверсы испытательной машины (м).

Эффективный модуль упругости определяли на линейном участке диаграммы сжатия, соответствующем упругому поведению материала. Результаты экспериментов первого этапа обрабатывали в Microsoft Excel.



1.2. Второй этап. Оценка эффективных модулей упругости, коэффициентов Пуассона губчатой кости позвонков и коленного сустава в трех направлениях

На втором этапе для экспериментов по одноосному сжатию образцы губчатой кости выпиливались из коленного сустава и поясничных позвонков в трех направлениях. AR составляла не менее 5 единиц. Образцы из коленного сустава готовились вдоль оси вращения в суставе и в двух взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 1, б), а из позвонков — вдоль оси тела позвонка и двух других взаимно перпендикулярных направлениях (рис. 1, в). В экспериментах применялась машина Instron 68SC-5 с нагрузочной ячейкой 5000 Н. Эффективный модуль упругости также рассчитывался по стержневой теории (на основе данных испытательной машины).

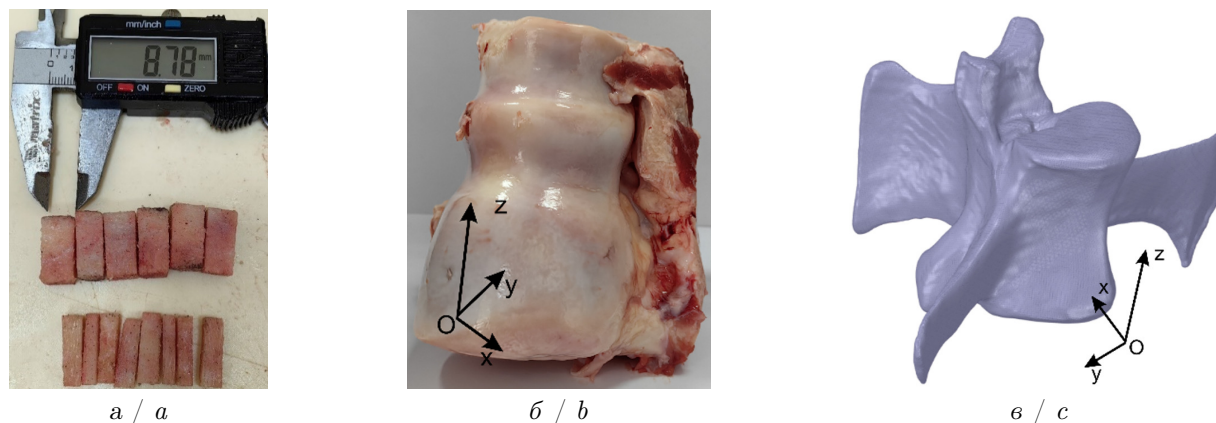


Рис. 1. Образцы из коленного сустава перед экспериментом (а). Направления выпиливания образцов из коленного сустава (б) и тел позвонков (в) (цвет онлайн)

Fig. 1. Knee joint samples before the experiment (a). Directions of sawing from knee joint (b) and vertebral bodies (c) (color online)

Для расчета коэффициента Пуассона продольные и поперечные деформации каждого образца фиксировались с помощью видеосистемы Vic 3D Micro-DIC digital image correlation system (рис. 2, а). Для этого в день эксперимента образцы покрывались белым акриловым грунтом (рис. 2, б), далее с помощью краскопульта на одну из плоских граней каждого образца наносили специальные метки черной эмалью (рис. 2, в).

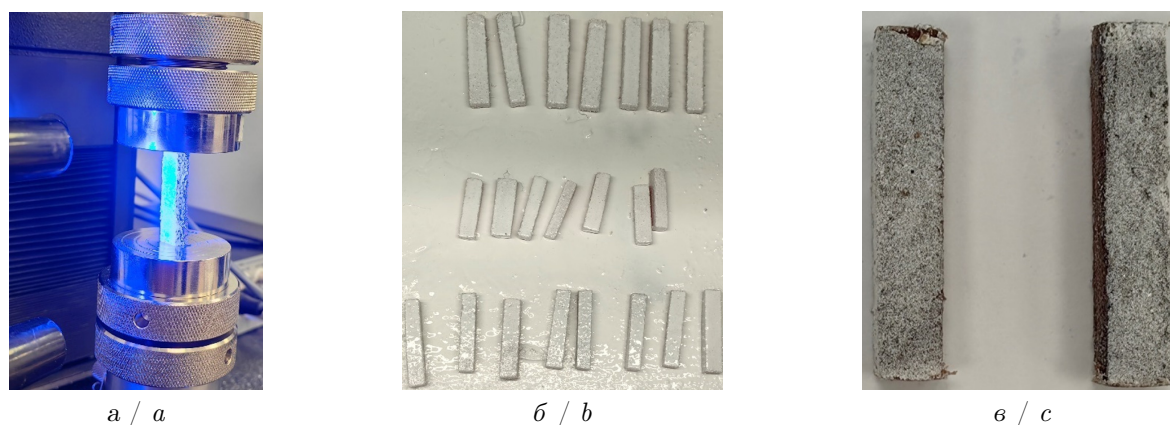


Рис. 2. Образцы до и во время эксперимента: а — образец в испытательной машине; б — грунтованные образцы; в — образцы с нанесенными черными метками (напыление черной краской равномерно по всей грани) (цвет онлайн)

Fig. 2. Specimens before and during the experiment: a — specimen in the testing machine; b — primed specimens; c — specimens with black marks applied (spraying with black paint evenly over the entire face) (color online)

Коэффициент Пуассона вычислялся по формуле

$$\nu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon_l},$$

где ε_t — поперечная деформация, ε_l — продольная деформация, вычисляемые на основе исходных данных видеосистемы. Синхронизация испытательной машины и видеосистемы позволила вычислять коэффициент Пуассона в интервале упругого деформирования образцов.

1.3. Третий этап. Вычисление минеральной плотности и пористости костной ткани

Отметим, что перед экспериментами на сжатие измерялись высота, длина и ширина, а также масса каждого образца. Для измерения массы использовались весы Ohaus ax5202 (точность измерений 0.01 г).

После выполнения экспериментов по сжатию каждый образец сжигался в муфельной печи. Предварительно на установке для термогравиметрического анализа TGA Q500 был проведен эксперимент по сжиганию малого объема кости для определения параметров сжигания образцов. Необходимо было определить время и температуру сжигания, которые бы позволили достичь полного выгорания органических соединений.

Объем пор измерялся на сожженных образцах посредством измерения объема вытесняемого ими этилового спирта из мерного цилиндра. Для этого этиловый спирт наливали в мерный цилиндр (объем 5 мл, 1 класс точности, цена деления 0.1 мл) и замеряли его

объем. Затем в цилиндр помещали сожженный образец и снова замеряли объем спирта в мерном цилиндре (рис. 3, а). Таким образом, с точностью до 0.1 мл получали объем каркаса образца. Затем из общего объема образца вычитали объем его каркаса и получали объем пор.

На рис. 3, б представлен график зависимости массы образца (в мг) от температуры в камере сгорания. Из графика видно, что при температуре 600°C и выше наблюдается полное выгорание органики, образец перестает терять массу: остается только минеральный каркас.

Выход на постоянное значение

массы происходил после 1 часа 25 минут эксперимента. Таким образом, в экспериментах было принято решение обжигать образцы не менее 2 часов (с запасом по времени) при температуре 600°C до появления признаков белого каления. После сжигания каждый образец повторно взвешивался на весах, а затем вычислялась его минеральная плотность по формуле

$$\text{МПК} = \frac{m_{ash}}{V_{wet}},$$

где m_{ash} — масса образца после сжигания (г), V_{wet} — объем образца до эксперимента (см³).

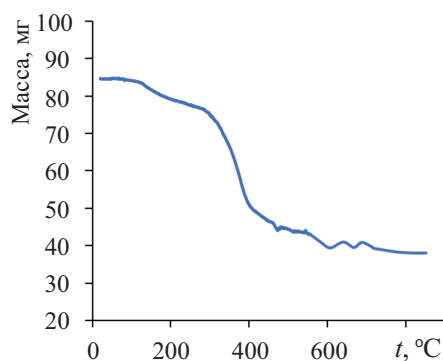
Пористость костной ткани вычислялась как отношение объема пор к общему объему образца:

$$\eta = \frac{V_p}{V_{wet}},$$

где V_p — объем пор (см³), V_{wet} — объем образца (см³).



а / а



б / б

Рис. 3. Образец в мерном цилиндре со спиртом при измерении его пористости (а) и график зависимости массы образца от температуры сжигания (б)

Fig. 3. The specimen in a measuring cylinder with ethanol when measuring its porosity (a), and the dependence between mass of the specimen and combustion temperature (b)



1.4. Четвертый этап. Оценка зависимостей эффективного модуля упругости от МПК и пористости. Обработка результатов экспериментов

Работы в рамках четвертого этапа были направлены на оценку влияния МПК и пористости на механические свойства губчатой кости в продольном и поперечном направлениях.

Статистическая обработка результатов экспериментов осуществлялась в следующем порядке: проверка выборок на нормальность распределения, вычисление описательных статистик, оценка различий между выборками с помощью ANOVA, построение регрессионных зависимостей, связывающих эффективный модуль упругости с МПК и пористостью. Статистическая обработка результатов осуществлялась в Microsoft Excel. Для оценки различий между регрессионными кривыми, связывающими эффективный модуль упругости и МПК (а также пористость), использовали инструмент косинусного сходства, позволяющий оценить «похожесть» этих кривых на основе оценки углов наклона между векторами в выборках. Для этого строили зависимости между нормированными значениями эффективных модулей упругости и МПК, определяли попарные косинусы между векторами из каждой выборки, которые затем представляли в виде таблиц с описательными статистиками.

2. Результаты

На рис. 4 представлена диаграмма, демонстрирующая зависимость вычисляемого по стержневой теории эффективного модуля упругости от AR губчатой кости коленного сустава коров (все образцы выпилены вдоль оси сустава) для образцов, изготовленных из костей семи животных. Она показывает, что с увеличением AR вычисляемый эффективный модуль упругости увеличивается и выходит на «стационарное» значение при AR от 5 единиц и выше. Пиковые значения эффективного модуля упругости достигают порядка 750 МПа. Точки на диаграмме аппроксимированы кубической зависимостью.

Приведем результаты экспериментов по одноосному сжатию губчатой кости коленного сустава, позвонков, а также значения минеральной плотности для исследованных костей (табл. 1). Нормальность распределения значений эффективного модуля упругости, коэффициента Пуассона и минеральной плотности была проверена с помощью теста Шапиро – Уилка, поэтому в табл. 1 данные приведены в виде средних значений и стандартных отклонений.

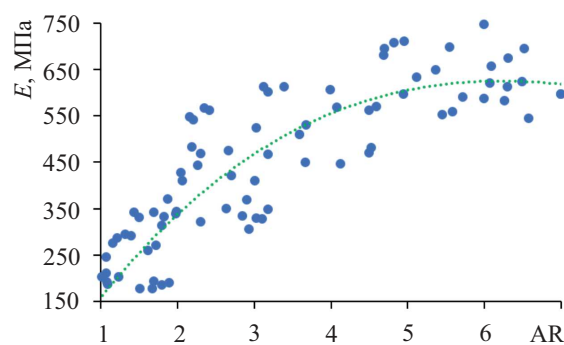


Рис. 4. Диаграмма зависимости вычисляемого по стержневой теории эффективного модуля упругости от относительной высоты образца $R^2 = 0.8$

Fig. 4. The dependence of the effective elasticity modulus calculated according to the rod theory on the specimen relative height $R^2 = 0.8$

Таблица 1 / Table 1

Значения эффективного модуля упругости, минеральной плотности и коэффициента Пуассона губчатой кости

Values of the effective modulus of elasticity, mineral density, and Poisson's ratio of cancellous bone

| Тип кости | Направление выпиления образца | Число образцов | E , МПа | МПК, г/см ³ | Коэффициент Пуассона |
|-----------------|-------------------------------|----------------|-------------------|------------------------|----------------------|
| Позвонок | Вдоль Oz | 12 | 815.8 ± 162.6 | 0.24 ± 0.03 | 0.29 ± 0.03 |
| | Вдоль Ox | 13 | 220.6 ± 91.7 | 0.22 ± 0.03 | 0.28 ± 0.04 |
| | Вдоль Oy | 13 | 240.1 ± 92.3 | 0.26 ± 0.03 | 0.28 ± 0.04 |
| Коленный сустав | Вдоль Oz | 7 | 602.9 ± 162.7 | 0.43 ± 0.08 | 0.28 ± 0.02 |
| | Вдоль Ox | 6 | 553.3 ± 177.6 | 0.41 ± 0.06 | 0.30 ± 0.01 |
| | Вдоль Oy | 6 | 580.4 ± 103.0 | 0.41 ± 0.10 | 0.28 ± 0.04 |



Значения из табл. 1 далее представим в виде диаграмм «ящики с усами» на рис. 5.

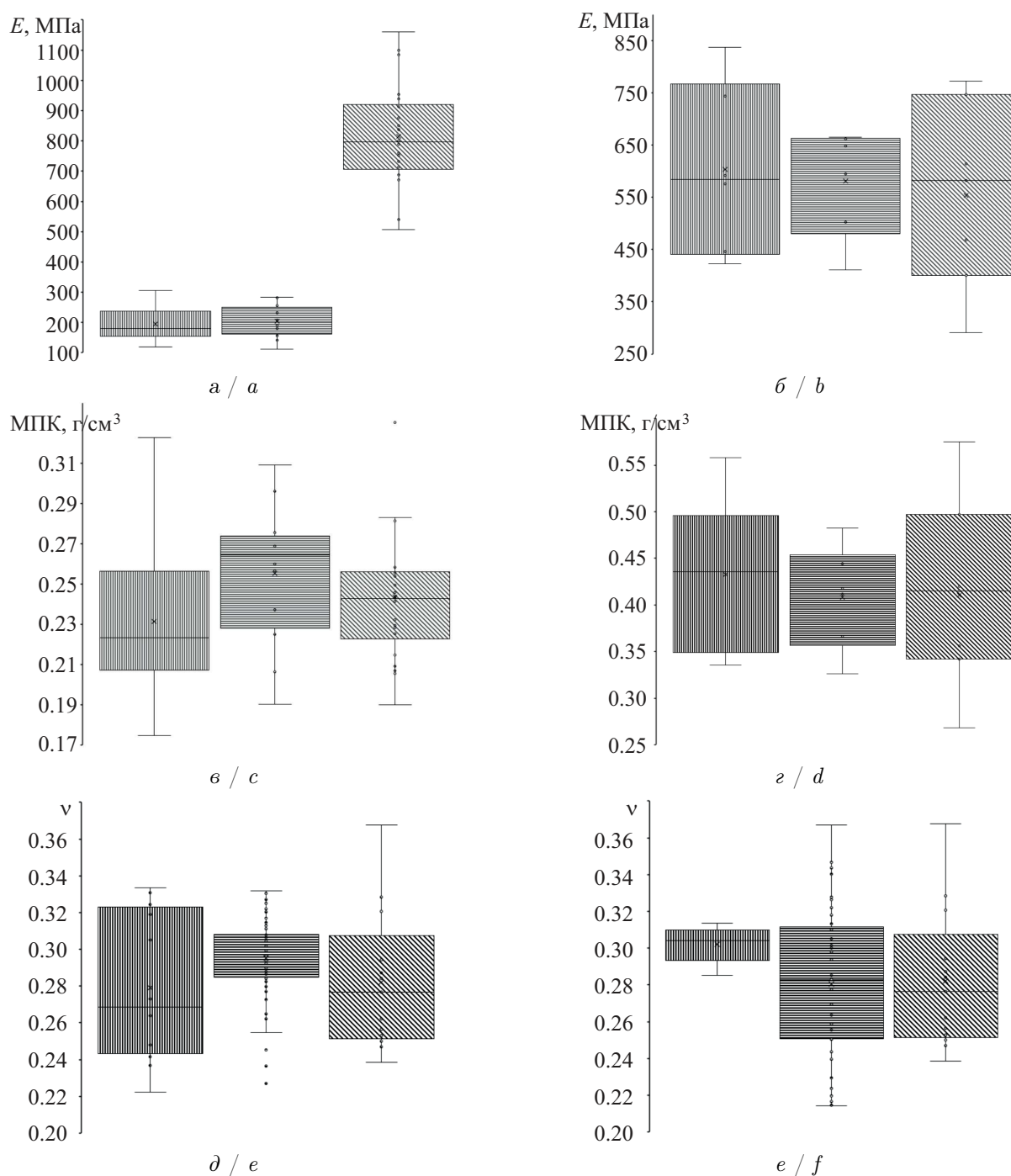


Рис. 5. Диаграммы распределения: а, б — эффективных модулей упругости (E , МПа); в, г — минеральной плотности (МПК, г/см³); д, е — коэффициентов Пуассона (ν); а, в, д — для позвонков; б, г, е — для коленного сустава. Вертикальная штриховка — вдоль оси Ox , горизонтальная штриховка — вдоль оси Oy , наклонная штриховка — вдоль оси Oz

Fig. 5. Distribution diagrams: а, б — effective elastic moduli (E , МПа); в, г — mineral density (MDC, г/см³); д, е — Poisson's ratios (ν); а, в, д — for vertebrae; б, г, е — for knee joint. Vertical shading — along Ox -axis, horizontal shading — along Oy -axis, oblique shading — along Oz -axis

Попарное сравнение выборок с помощью дисперсионного анализа показало статистически значимое отличие эффективных модулей упругости позвонков в направлении оси Oz от модулей упругости в двух других направлениях. Для модулей упругости коленного су-



става таких различий выявлено не было. Коэффициенты Пуассона, а также минеральная плотность кости также не зависели от направления выпиливания образцов.

В табл. 2 приведены зависимости нормализованного эффективного модуля упругости губчатой кости позвонков и коленного сустава от нормализованной МПК.

Таблица 2 / Table 2

Регрессионные зависимости, связывающие нормализованный эффективный модуль упругости (y) и нормализованную минеральную плотность кости (x)
Regression relationships linking the normalized effective modulus of elasticity (y) and the normalized bone mineral density (x)

| Направление | Позвонки | | Коленный сустав | |
|----------------|---------------------|--------------------------------|---------------------|--------------------------------|
| | Уравнение | Коэффициент детерминации R^2 | Уравнение | Коэффициент детерминации R^2 |
| Вдоль оси Ox | $y = 0.19x - 0.009$ | 0.7 | $y = 1.10x - 0.018$ | 0.9 |
| Вдоль оси Oy | $y = 0.18x + 0.014$ | 0.8 | $y = 0.95x + 0.098$ | 0.8 |
| Вдоль оси Oz | $y = 0.68x + 0.371$ | 0.8 | $y = 0.92x + 0.053$ | 0.9 |

Сравнение зависимостей из табл. 2 осуществлено с помощью косинусной меры [17]. Результаты его в виде описательных статистик представлены в табл. 3. Еще один параметр, который был оценен для губчатой кости в данной работе, это пористость (табл. 4).

Таблица 3 / Table 3

Описательные статистики косинусных мер при сравнительном анализе зависимостей из табл. 2 (здесь Q1 — первый квартиль, Q3 — третий квартиль, Median — медиана)

Descriptive statistics of cosine similarity in a comparative analysis of dependencies from Table 2 (here Q1 is the first quartile, Q3 is the third quartile, Median is the median)

| Направление | Позвонки | | | Коленный сустав | | |
|--------------------------|----------|--------|------|-----------------|--------|------|
| | Q1 | Median | Q3 | Q1 | Median | Q3 |
| Вдоль Ox VS вдоль Oy | 0.98 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| Вдоль Ox VS вдоль Oz | 0.45 | 0.52 | 0.58 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |
| Вдоль Oy VS вдоль Oz | 0.52 | 0.62 | 0.68 | 0.99 | 0.99 | 0.99 |

Таблица 4 / Table 4

Пористость образцов губчатой кости
Porosity of cancellous bone specimens

| Тип кости | Пористость (Mean \pm SD) |
|------------------------|----------------------------|
| Позвонки (вдоль оси) | 0.79 ± 0.07 |
| Позвонки (поперек оси) | 0.86 ± 0.02 |
| Коленный сустав | 0.77 ± 0.07 |

Таким образом, были получены регрессионные зависимости эффективного модуля упругости от МПК: две зависимости (рис. 6, а) для губчатой кости позвонков (в направлении вдоль оси тела позвонка и поперек оси тела позвонка) и единая зависимость для губчатой кости коленного сустава (рис. 6, б). Также построены зависимости эффективного модуля упругости от пористости, которые представлены на рис. 6, в.

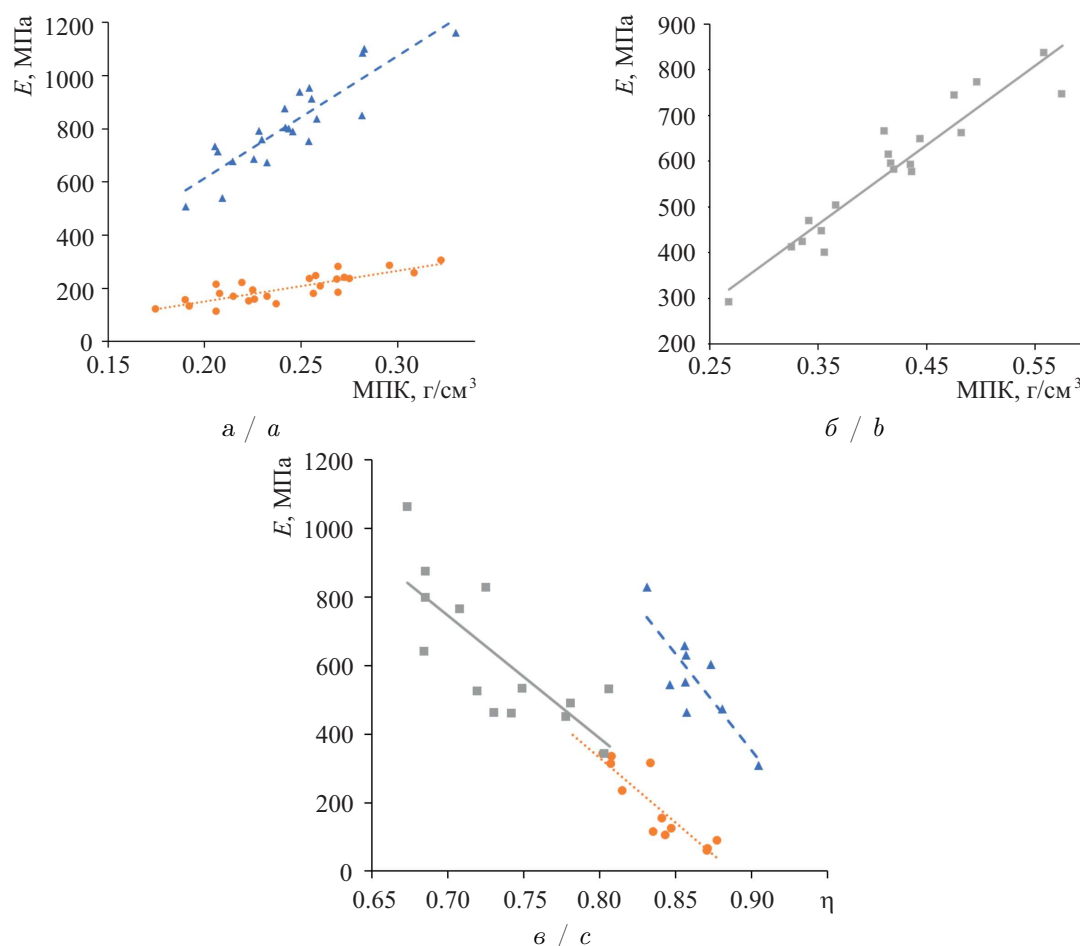


Рис. 6. Регрессионные зависимости эффективного модуля упругости: a — от минеральной плотности позвонков (треугольники — позвонки вдоль оси Oz , $E = 4613.9 \cdot \text{МПК} - 308.84$, $R^2 = 0.8$; круги — позвонки поперек оси Oz , $E = 1147.3 \cdot \text{МПК} - 78.614$, $R^2 = 0.7$); b — от минеральной плотности коленного сустава ($E = 1737.3 \cdot \text{МПК} - 146.3$, $R^2 = 0.9$); c — от пористости (треугольники — позвонки вдоль оси Oz , $E = -5652.4 \cdot \eta + 5438.8$, $R^2 = 0.7$; круги — позвонки поперек оси Oz , $E = -3802.6 \cdot \eta + 3373.5$, $R^2 = 0.8$; квадраты — коленный сустав, $E = -3802.6 \cdot \eta + 3373.5$, $R^2 = 0.8$)

Fig. 6. Regression dependences of the effective modulus of elasticity: a — on the mineral density of the vertebrae (triangles — vertebrae along the Oz axis, $E = 4613.9 \cdot \text{MPC} - 308.84$, $R^2 = 0.8$; circles — vertebrae across the Oz axis, $E = 1147.3 \cdot \text{MPC} - 78.614$, $R^2 = 0.7$); b — from the mineral density of the knee joint ($E = 1737.3 \cdot \text{MPC} - 146.3$, $R^2 = 0.9$); c — from porosity (triangles — vertebrae along the Oz axis, $E = -5652.4 \cdot \eta + 5438.8$, $R^2 = 0.7$; circles — vertebrae across the Oz axis, $E = -3802.6 \cdot \eta + 3373.5$, $R^2 = 0.8$; squares — knee joint, $E = -3802.6 \cdot \eta + 3373.5$, $R^2 = 0.8$)

3. Обсуждение результатов

Стандарты по проведению экспериментов на сжатие и определение эффективного модуля упругости по результатам таких экспериментов требуют, чтобы относительная высота образца была не менее 5 единиц. В то же время для биологических тканей таких стандартов не существует, а исследователи проводят эксперименты с «короткими» образцами [11], которые при одноосном сжатии находятся не в одноосном напряженном состоянии, что приводит к тому, что вычисляемые по стержневой теории модули упругости могут не соответствовать действительности. Единственная современная работа, в которой авторы сделали попытку стандартизировать механические эксперименты на сжатие губчатой кости, — это обзорная статья [18]. В ее разделе, касающемся подготовки образцов и их размеров, есть ссылки на довольно давние работы 90-х гг. прошлого века [19], в которых предлагается готовить образцы с относительной высотой 2 единицы, что идет вразрез со стандартами и требованиями стержневой теории.



В этой связи в данной работе была исследована связь между вычисляемым эффективным модулем упругости губчатой кости крупного рогатого скота и относительной высотой образца (AR). Было показано (см. рис. 4), что на самом деле при выполнении одноосного сжатия с целью вычисления эффективного модуля упругости требуется изготавливать образцы с AR не менее 5 единиц. Иначе вычисляемый эффективный модуль упругости может быть существенно занижен. Если рассуждать на эту тему, то теоретически полученные регрессионные зависимости (см. рис. 4), связывающие вычисляемый эффективный модуль упругости и AR образца, можно использовать для корректировки результатов. Другими словами, при невозможности провести эксперимент с длинными образцами проводится эксперимент с «короткими», а рассчитанный эффективный модуль упругости корректируется с помощью зависимостей, указанных на рис. 4. Однако этот вопрос требует дальнейшего изучения, так как, строго говоря, стержневую теорию нельзя применять для объектов, не являющихся стержнями.

Продолжая обсуждение результатов, следует заметить, что коэффициент Пуассона, являющийся важнейшим механическим параметром, необходимым для моделирования и характеристики механических свойств материала, во многих статьях берется из литературы. Вообще говоря, мы не нашли современных работ, в которых бы эта характеристика губчатой кости исследовалась в рамках экспериментов, поэтому в данном исследовании решили задействовать современную систему для его определения. В итоге были получены значения, близкие к литературным. Важно еще и то, что от направления (для позвонков и коленного сустава) этот параметр не зависит, в отличие от эффективного модуля упругости. Последний для позвонков существенно зависит от направления, что объясняется тем, что позвонки коровы работают в основном на растяжение вдоль оси. Поэтому в направлении Oz эффективный модуль упругости в разы превышает (см. табл. 1, рис. 5) модуль в поперечном направлении Ox (Oy).

Для коленного сустава выявлено, что для всех трех направлений можно использовать одну зависимость (см. рис. 6, б) для расчета эффективного модуля упругости от минеральной плотности кости (МПК). В то же время для позвонков таких зависимостей было получено две: вдоль оси тела позвонка и поперек (см. рис. 6, а). Эти выводы сделаны исходя из оценки косинусного сходства зависимостей для нормализованных модулей и МПК (см. табл. 3). Отметим, что наибольший коэффициент детерминации (0.9) в этих зависимостях был получен для коленного сустава: МПК объясняет 90% вариации эффективного модуля упругости его губчатой кости. Полагаем, что это объясняется более однородной структурой кости в суставе, нежели в позвонках. Для позвонков соответствующие коэффициенты детерминации равняются 0.8 и 0.7 для продольного и поперечного направлений соответственно. Аналогичная картина прослеживается и для зависимостей эффективного модуля упругости от пористости: для коленного сустава коэффициент детерминации получился равным 0.8 против 0.7 для позвонков.

Связь между пористостью компактной кости человека и ее эффективным модулем упругости изучалась еще в конце 80-х гг. прошлого века [20]. Для губчатой кости крупного рогатого скота такие исследования были проведены относительно недавно [11]. Однако в этих работах авторы оценивали влияние не пористости, а объемной доли каркаса (величина, равная единице минус пористость). В данной работе исследовалась пористость по авторской методике, причем были получены соотношения, связывающие эффективный модуль упругости кости и ее пористость для разных типов костей, а также в различных направлениях сжатия кости. Стоит отметить, что авторская методика дает значения пористости, сравнимые с числами, полученными по КТ [21]. Скорее всего, данный метод является более точным для оценки объемной доли кости. Так, в настоящей работе пористость губчатой кости варьировалась в пределах от 0.70 до 0.86 (табл. 4), а в работе [11] — от 0.48 до 0.95. Разброс значений объясняется тем, что в данной работе исследовались позвонки и коленный сустав, а в [11] — бедренная кость.



Если говорить об ограничениях нашего исследования, то стоит отметить относительно малое число образцов кости, подвергшихся испытаниям, однако число образцов соответствует количеству в других исследованиях. Отметим также, что в статье проведены испытания на губчатой кости коров, хотя более интересными были бы исследования человеческих костей. Тем не менее, Hodgkinson и Currey [22] показали, что зависимости между эффективным модулем упругости губчатой кости и ее плотностью для человеческих и коровьих костей достаточно близки, что доказывает актуальность исследования прочностных свойств губчатой кости на образцах крупного рогатого скота. Можно предположить, что характер зависимостей, полученных в нашем исследовании, может быть аналогичным и для человеческих костей.

Выводы

В данной работе исследованы механические и структурные свойства губчатой кости позвонков и коленного сустава крупного рогатого скота. Выявлены зависимости, связывающие эффективный модуль упругости с минеральной плотностью, а также пористостью губчатой кости. Была разработана и представлена авторская методика определения пористости губчатой кости. Также представлены требования к относительной высоте (отношение высоты к наибольшему размеру поперечного сечения) образцов губчатой кости. Выявлено, что при проведении одноосных экспериментов по сжатию и дальнейшем расчете эффективного модуля упругости по стержневой теории относительная высота образцов должна составлять не менее 5 единиц.

Список литературы

1. Haseltine K. N., Chukir T., Smith P. J., Jacob J. T., Bilezikian J. P., Farooki A. Bone mineral density: Clinical relevance and quantitative assessment // *Journal of Nuclear Medicine*. 2021. Vol. 62, iss. 4. P. 446–454. <https://doi.org/10.2967/jnumed.120.256180>
2. Park C. S., Kang S. R., Kim J. E., Huh K. H., Lee S. S., Heo M. S., Han J. J., Yi W. J. Validation of bone mineral density measurement using quantitative CBCT image based on deep learning // *Scientific Reports*. 2023. Vol. 13, iss. 1. Art. 11921. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-38943-8>
3. Toyras J., Nieminen M. T., Kroger H., Jurvelin J. S. Bone mineral density, ultrasound velocity, and broadband attenuation predict mechanical properties of trabecular bone differently // *Bone*. 2002. Vol. 31, iss. 4. P. 503–507. [https://doi.org/10.1016/s8756-3282\(02\)00843-8](https://doi.org/10.1016/s8756-3282(02)00843-8)
4. Haba Y., Lindner T., Fritsche A., Schiebenhofer A. K., Souffrant R., Kluess D., Skripitz R., Mittelmeier W., Bader R. Relationship between mechanical properties and bone mineral density of human femoral bone retrieved from patients with osteoarthritis // *The Open Orthopaedics Journal*. 2012. Vol. 6. P. 458–463. <https://doi.org/10.2174/1874325001206010458>
5. Бессонов Л. В., Кириллова И. В., Фалькович А. С., Иванов Д. В., Доль А. В., Коссович Л. Ю. Методология «Планирование – Моделирование – Прогнозирование» для предоперационного планирования в травматологии-ортопедии // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2024. Т. 24, вып. 3. С. 359–380. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-359-380>, EDN: IQBZWJ
6. Rho J. Y., Hobatho M. C., Ashman R. B. Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone // *Medical Engineering & Physics*. 1995. Vol. 17, iss. 5. P. 47–55. [https://doi.org/10.1016/1350-4533\(95\)97314-f](https://doi.org/10.1016/1350-4533(95)97314-f)
7. Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Bessonov L. V., Petraikin A. V., Dol A. V., Ahmad E. S., Morozov S. P., Vladzimirsky A. V., Sergunova K. A., Kharlamov A. V. Influence of convolution kernel and beam-hardening effect on the assessment of trabecular bone mineral density using quantitative computed tomography // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2020. Т. 20, вып. 2. С. 205–219. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-205-219>, EDN: BFUICL
8. Lu Y., Engelke K., Puschel K., Morlock M. M., Huber G. Influence of 3D QCT scan protocol on the QCT-based finite element models of human vertebral cancellous bone // *Medical Engineering*



- & Physics. 2014. Vol. 36, iss. 8. P. 1069–1073. <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2014.05.001>
9. Giambini H., Dragomir-Daescu D., Nassr A., Yaszemski M. J., Zhao C. Quantitative computed tomography protocols affect material mapping and quantitative computed tomography-based finite-element analysis predicted stiffness // *Journal of Biomechanical Engineering*. 2016. Vol. 138, iss. 9. Art. 0910031. <https://doi.org/10.1115/1.4034172>
 10. Zhang A., Zhang S., Bian C. Mechanical properties of bovine cortical bone based on the automated ball indentation technique and graphics processing method // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2018. Vol. 78. P. 321–328. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2017.11.039>
 11. Endo K., Yamada S., Todoh M., Takahata M., Iwasaki N., Tadano S. Structural strength of cancellous specimens from bovine femur under cyclic compression // *PeerJ*. 2016. Vol. 25, iss. 4. Art. e1562. <https://doi.org/10.7717/peerj.1562>
 12. Yu B., Zhao G. F., Lim J. I., Lee Y. K. Compressive mechanical properties of bovine cortical bone under varied loading rates // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H*. 2011. Vol. 225, iss. 10. P. 941–947. <https://doi.org/10.1177/0954411911415470>
 13. Arnold E. L., Clement J., Rogers K. D., Garcia-Castro F., Greenwood C. The use of CT and fractal dimension for fracture prediction in osteoporotic individuals // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2020. Vol. 103. Art. 103585. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2019.103585>
 14. Öhman-Mägi C., Holub O., Wu D., Hall R. M., Persson C. Density and mechanical properties of vertebral trabecular bone-A review // *JOR Spine*. 2021. Vol. 4, iss. 4. Art. e1176. <https://doi.org/10.1002/jsp2.1176>
 15. Mosekilde L., Bentzen S. M., Ortoft G., Jørgensen J. The predictive value of quantitative computed tomography for vertebral body compressive strength and ash density // *Bone*. 1989. Vol. 10, iss. 6. P. 465–470. [https://doi.org/10.1016/8756-3282\(89\)90080-x](https://doi.org/10.1016/8756-3282(89)90080-x)
 16. Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dmitriev P. O., Dol A. V., Zolotov V. S., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Y., Titova Yu. I., Ulyanov V. Yu., Kharlamov A. V. Constructing the dependence between the Young's modulus value and the Hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021. Т. 21, вып. 2. С. 182–193. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-182-193>, EDN: SNBJNB
 17. Islam M., Zunair H., Mohammed N. CosSIF: Cosine similarity-based image filtering to overcome low inter-class variation in synthetic medical image datasets // *Computers in Biology and Medicine*. 2024. Vol. 172. Art. 108317. <https://doi.org/10.1016/j.compbimed.2024.108317>
 18. Zhao S., Arnold M., Ma S., Abel R. L., Cobb J. P., Hansen U., Boughton O. Standardizing compression testing for measuring the stiffness of human bone // *Bone & Joint Research*. 2018. Vol. 7, iss. 8. P. 524–538. <https://doi.org/10.1302/2046-3758.78.BJR-2018-0025.R1>
 19. Keaveny T. M., Borchers R. E., Gibson L. J., Hayes W. C. Theoretical analysis of the experimental artifact in trabecular bone compressive modulus // *Journal of Biomechanics*. 1993. Vol. 26, iss. 4–5. P. 599–607. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(93\)90021-6](https://doi.org/10.1016/0021-9290(93)90021-6)
 20. Currey J. D. The effect of porosity and mineral content on the Young's modulus of elasticity of compact bone // *Journal of Biomechanics*. 1988. Vol. 21, iss. 2. P. 131–139. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(88\)90006-1](https://doi.org/10.1016/0021-9290(88)90006-1)
 21. Nazarian A., von Stechow D., Zurakowski D., Müller R., Snyder B. D. Bone volume fraction explains the variation in strength and stiffness of cancellous bone affected by metastatic cancer and osteoporosis // *Calcified Tissue International*. 2008. Vol. 83, iss. 6. P. 368–379. <https://doi.org/10.1007/s00223-008-9174-x>
 22. Hodgkinson R., Currey J. D. The effect of variation in structure on the Young's modulus of cancellous bone: A comparison of human and non-human material // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H*. 1990. Vol. 204, iss. 2. P. 115–121. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1990_204_240_02

References

1. Haseltine K. N., Chukir T., Smith P. J., Jacob J. T., Bilezikian J. P., Farooki A. Bone mineral density: Clinical relevance and quantitative assessment. *Journal of Nuclear Medicine*, 2021, vol. 62, iss. 4, pp. 446–454. <https://doi.org/10.2967/jnumed.120.256180>
2. Park C. S., Kang S. R., Kim J. E., Huh K. H., Lee S. S., Heo M. S., Han J. J., Yi W. J. Validation



- of bone mineral density measurement using quantitative CBCT image based on deep learning. *Scientific Reports*, 2023, vol. 13, iss. 1, art. 11921. <https://doi.org/10.1038/s41598-023-38943-8>
3. Toyras J., Nieminen M. T., Kroger H., Jurvelin J. S. Bone mineral density, ultrasound velocity, and broadband attenuation predict mechanical properties of trabecular bone differently. *Bone*, 2002, vol. 31, iss. 4, pp. 503–507. [https://doi.org/10.1016/s8756-3282\(02\)00843-8](https://doi.org/10.1016/s8756-3282(02)00843-8)
 4. Haba Y., Lindner T., Fritsche A., Schiebenhofer A. K., Souffrant R., Kluess D., Skripitz R., Mittelmeier W., Bader R. Relationship between mechanical properties and bone mineral density of human femoral bone retrieved from patients with osteoarthritis. *The Open Orthopaedics Journal*, 2012, vol. 6, pp. 458–463. <https://doi.org/10.2174/1874325001206010458>
 5. Bessonov L. V., Kirillova I. V., Falkovich A. S., Ivanov D. V., Dol A. V., Kossovich L. Yu. The “Planning – Modelling – Prediction” methodology for preoperative planning in trauma orthopaedics. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2024, vol. 24, iss. 3, pp. 359–380 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2024-24-3-359-380>, EDN: IQBZWJ
 6. Rho J. Y., Hobatho M. C., Ashman R. B. Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone. *Medical Engineering & Physics*, 1995, vol. 17, iss. 5, pp. 47–55. [https://doi.org/10.1016/1350-4533\(95\)97314-f](https://doi.org/10.1016/1350-4533(95)97314-f)
 7. Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Yu., Bessonov L. V., Petraikin A. V., Dol A. V., Ahmad E. S., Morozov S. P., Vladzimirsky A. V., Sergunova K. A., Kharlamov A. V. Influence of convolution kernel and beam-hardening effect on the assessment of trabecular bone mineral density using quantitative computed tomography. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2020, vol. 20, iss. 2, pp. 205–219. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-2-205-219>, EDN: BFUICL
 8. Lu Y., Engelke K., Puschel K., Morlock M. M., Huber G. Influence of 3D QCT scan protocol on the QCT-based finite element models of human vertebral cancellous bone. *Medical Engineering & Physics*, 2014, vol. 36, iss. 8, pp. 1069–1073. <https://doi.org/10.1016/j.medengphy.2014.05.001>
 9. Giambini H., Dragomir-Daescu D., Nassr A., Yaszemski M. J., Zhao C. Quantitative computed tomography protocols affect material mapping and quantitative computed tomography-based finite-element analysis predicted stiffness. *Journal of Biomechanical Engineering*, 2016, vol. 138, iss. 9, art. 0910031. <https://doi.org/10.1115/1.4034172>
 10. Zhang A., Zhang S., Bian C. Mechanical properties of bovine cortical bone based on the automated ball indentation technique and graphics processing method. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2018, vol. 78, pp. 321–328. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2017.11.039>
 11. Endo K., Yamada S., Todoh M., Takahata M., Iwasaki N., Tadano S. Structural strength of cancellous specimens from bovine femur under cyclic compression. *PeerJ*, 2016, vol. 25, iss. 4, art. e1562. <https://doi.org/10.7717/peerj.1562>
 12. Yu B., Zhao G. F., Lim J. I., Lee Y. K. Compressive mechanical properties of bovine cortical bone under varied loading rates. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H*, 2011, vol. 225, iss. 10, pp. 941–947. <https://doi.org/10.1177/0954411911415470>
 13. Arnold E. L., Clement J., Rogers K. D., Garcia-Castro F., Greenwood C. The use of CT and fractal dimension for fracture prediction in osteoporotic individuals. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 2020, vol. 103, art. 103585. <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2019.103585>
 14. Öhman-Mägi C., Holub O., Wu D., Hall R. M., Persson C. Density and mechanical properties of vertebral trabecular bone-A review. *JOR Spine*, 2021, vol. 4, iss. 4, art. e1176. <https://doi.org/10.1002/jsp2.1176>
 15. Mosekilde L., Bentzen S. M., Ortoft G., Jørgensen J. The predictive value of quantitative computed tomography for vertebral body compressive strength and ash density. *Bone*, 1989, vol. 10, iss. 6, pp. 465–470. [https://doi.org/10.1016/8756-3282\(89\)90080-x](https://doi.org/10.1016/8756-3282(89)90080-x)
 16. Bessonov L. V., Golyadkina A. A., Dmitriev P. O., Dol A. V., Zolotov V. S., Ivanov D. V., Kirillova I. V., Kossovich L. Y., Titova Yu. I., Ulyanov V. Yu., Kharlamov A. V. Constructing the dependence between the Young’s modulus value and the Hounsfield units of spongy tissue of human femoral heads. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, iss. 2, pp. 182–193. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-182-193>, EDN: SNBJNB
 17. Islam M., Zunair H., Mohammed N. CosSIF: Cosine similarity-based image filtering to overcome



- low inter-class variation in synthetic medical image datasets. *Computers in Biology and Medicine*, 2024, vol. 172, art. 108317. <https://doi.org/10.1016/j.compbiomed.2024.108317>
18. Zhao S., Arnold M., Ma S., Abel R. L., Cobb J. P., Hansen U., Boughton O. Standardizing compression testing for measuring the stiffness of human bone. *Bone & Joint Research*, 2018, vol. 7, iss. 8, pp. 524–538. <https://doi.org/10.1302/2046-3758.78.BJR-2018-0025.R1>
 19. Keaveny T. M., Borchers R. E., Gibson L. J., Hayes W. C. Theoretical analysis of the experimental artifact in trabecular bone compressive modulus. *Journal of Biomechanics*, 1993, vol. 26, iss. 4–5, pp. 599–607. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(93\)90021-6](https://doi.org/10.1016/0021-9290(93)90021-6)
 20. Currey J. D. The effect of porosity and mineral content on the Young's modulus of elasticity of compact bone. *Journal of Biomechanics*, 1988, vol. 21, iss. 2, pp. 131–139. [https://doi.org/10.1016/0021-9290\(88\)90006-1](https://doi.org/10.1016/0021-9290(88)90006-1)
 21. Nazarian A., von Stechow D., Zurakowski D., Müller R., Snyder B. D. Bone volume fraction explains the variation in strength and stiffness of cancellous bone affected by metastatic cancer and osteoporosis. *Calcified Tissue International*, 2008, vol. 83, iss. 6, pp. 368–379. <https://doi.org/10.1007/s00223-008-9174-x>
 22. Hodgskinson R., Currey J. D. The effect of variation in structure on the Young's modulus of cancellous bone: A comparison of human and non-human material. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part H*, 1990, vol. 204, iss. 2, pp. 115–121. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1990_204_240_02

Поступила в редакцию / Received 20.12.2024

Принята к публикации / Accepted 19.02.2025

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 246–258

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 246–258

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-246-258>, EDN: RLHSL

Научная статья

УДК 532.5

Влияние тепловой нагрузки на конвекцию в системе двух бинарных смесей с фазовым переходом

И. В. Степанова

Институт вычислительного моделирования Сибирского отделения РАН, Россия, 660036, г. Красноярск, ул. Академгородок, д. 50/44

Степанова Ирина Владимировна, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, stepiv@icm.krasn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4255-2762>, SPIN: 5744-4133, AuthorID: 618000

Аннотация. В работе рассматривается математическая модель конвективного течения в горизонтальном канале с испарением на границе раздела бинарной жидкости и газопаровой смеси, выведенная на основе уравнений Навье–Стокса в приближении Обербека–Буссинеска с учетом эффекта термодиффузии. С помощью построенного точного решения уравнений, описывающих течение, проводится апробация различных типов граничных условий для температуры на стенках канала, внутри которого находится двухслойная система сред с фазовым переходом. В качестве граничных условий может рассматриваться нагрев обеих стенок, теплоизоляция обеих стенок или комбинация этих условий. Учитывается разный характер зависимости (линейная и квадратичная) поверхностного натяжения от концентрации одного из компонентов в жидком слое. Изучено, какие из исследуемых постановок задач имеет смысл обсуждать с точки зрения анализа процесса испарения. На примере рассчитанных характеристик течения в системе «70%-й водный раствор этанола — смесь паров этанола и азота» показано, что построенное решение адекватно отражает основные признаки процесса испарения: связь скорости испарения с тепловой нагрузкой стенки канала и расходом спутного потока газа. Проведено качественное сравнение с имеющимися экспериментальными данными.

Ключевые слова: испарительная конвекция, бинарная смесь, уравнения термодиффузии, граничные условия, термокапиллярный эффект, интенсивность испарения

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-11-00243>).

Для цитирования: Степанова И. В. Влияние тепловой нагрузки на конвекцию в системе двух бинарных смесей с фазовым переходом // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 246–258. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-246-258>, EDN: RLHSL

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

The influence of thermal load on convection in a system of two binary mixtures with a phase transition

I. V. Stepanova

Institute of Computational Modeling SB RAS, 50/44 Akademgorodok, Krasnoyarsk 660036, Russia

Irina V. Stepanova, stepiv@icm.krasn.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4255-2762>, SPIN: 5744-4133, AuthorID: 618000

Abstract. A mathematical model of convective flow in a horizontal channel with evaporation at the interface between a binary liquid and a gas-vapor mixture, derived on the basis of the Navier–Stokes equations in the



Oberbeck–Boussinesq approximation taking into account thermal diffusion effect is under consideration. Using the constructed exact solution of the governing equations, various types of boundary conditions for the temperature on the walls of the channel, inside which the two-layer system of media with a phase transition is located, are tested. The boundary conditions can be the following: heating of the both walls, thermal insulation of the both walls, or a combination of these conditions. The different nature of the dependence (linear and quadratic) of surface tension on the concentration of one components is taken into account. It has been studied which of the problem statements under consideration make sense to discuss from the point of view of analyzing the evaporation process. The application of the constructed solution for description of the flow in the system «70% aqueous solution of ethanol – a mixture of ethanol vapor and nitrogen» shows that the solution adequately reflects the main characteristics of the process: the relationship of the evaporation mass flow rate with the thermal load of the channel wall and flow rate of co-current gas. A qualitative comparison with available experimental data is provided.

Keywords: evaporative convection, binary mixture, thermal diffusion equations, boundary conditions, thermocapillary effect, evaporation mass flow rate

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00243, <https://rscf.ru/project/22-334>).

For citation: Stepanova I. V. The influence of thermal load on convection in a system of two binary mixtures with a phase transition. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 246–258 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-246-258>, EDN: RLHSL

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Теоретическое изучение процессов тепломассопереноса в условиях фазовых переходов востребовано в связи с развитием технологий жидкостного охлаждения и термостабилизации различных микроустройств. Для улучшения существующих технологий и создания новых необходим детальный анализ влияния различных факторов на характеристики испарения. Поскольку в настоящее время общая теория описания динамики двух сред, находящихся в разных агрегатных состояниях, все еще находится в разработке [1], существуют различные подходы к моделированию совместного течения систем, состоящих из рабочей жидкости и парогазовой смеси. В теоретических исследованиях, как правило, используются уравнения Навье–Стокса, дополненные уравнениями тепломассообмена и соответствующими условиями на границе раздела сред, учитывающими возникновение испарения (см., например, [2]). Для решения таких задач в полной постановке (нестационарных, существенно трехмерных, с учетом не только диффузионного, но и конвективного испарения на границе раздела) следует применять методы прямого численного моделирования, которые, как известно, требуют значительных временных и вычислительных ресурсов. Недостатком этого подхода является то, что расчеты проводятся для фиксированных параметров, снижая способность модели к прогнозированию. Другим методом исследования является использование упрощенных по сравнению с полной постановкой математических моделей, позволяющих проинтегрировать уравнения и получить решение в конечных формулах [3]. Несмотря на то, что упрощенные модели не охватывают всех факторов, влияющих на процесс, с помощью построенных точных решений можно исследовать зависимость течения от геометрии системы, граничных режимов, физических свойств используемых сред. Наиболее изученным и хорошо себя зарекомендовавшим для описания однонаправленных течений в неоднородно нагреваемых каналах решением уравнений тепловой конвекции является класс решений Остроумова–Бириха [4]. На их основе, например, построена иерархия моделей испарительной конвекции в системе «теплопроводная жидкость – парогазовая смесь», подробнее об этом можно прочитать в [5].

В данной работе точное решение типа Остроумова–Бириха построено для уравнений математической модели диффузионного испарения в предположении, что рабочая жидкость является бинарной смесью. Полученное решение используется для апробации гра-

нических условий, отражающих температурный режим на стенках канала, которые могут одновременно или независимо быть теплоизолированными или нагреваться. Кроме того, изучаются две зависимости поверхностного натяжения от концентрации одного из компонентов в испаряющейся жидкости: линейная и квадратичная. Полученные восемь постановок краевых задач исследуются с точки зрения их применения для прогнозирования характеристик процесса испарения. Подробное описание предположений о математической модели, построение точного решения, постановка граничных условий и анализ полученных результатов приведены в следующих разделах статьи.

1. Предположения о математической модели. Определяющие уравнения

Для математического моделирования процессов испарительной конвекции в системе жидкость – пар для обеих сред используются двумерные уравнения Навье – Стокса в приближении Обербека – Буссинеска, дополненные уравнениями тепломассопереноса. В уравнении диффузии легкой компоненты учитывается эффект Соре – перенос вещества вследствие изменения температуры. Считается, что обе среды несжимаемые, а изменение плотности учитывается только в члене, отвечающем за силу плавучести в уравнениях импульса. Тем самым определяющие уравнения имеют вид [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p &= \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{g} \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \theta_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta &= \chi \Delta \theta, \quad c_t + \mathbf{u} \cdot \nabla c = D(\Delta c + \alpha \Delta \theta), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь t обозначает время, $\mathbf{x} = (x, y)$ – вектор координат, оператор градиента ∇ вычисляется по пространственным переменным, Δ – оператор Лапласа, $\mathbf{g} = (0, -g)$, где g – ускорение силы тяжести, \mathbf{u} – вектор скорости, p – давление, θ и c – малые отклонения температуры и массовой концентрации одного из компонентов от их средних равновесных значений. Концентрация второго компонента определяется как $1 - c$. Коэффициенты кинематической вязкости ν , температуропроводности χ , диффузии D , параметр термодиффузии α и средняя плотность смеси ρ_0 постоянны. В уравнениях (1) нет обозначений, определяющих, для какого слоя – жидкого или парогазового – они написаны. Это будет сделано ниже.

Предположения о математической модели рассматриваемого течения:

– считается, что течение возникает в центральной части протяженного горизонтального канала (рис. 1), ширина которого много меньше длины. Это позволяет допустить математическую идеализацию: считать, что канал не ограничен в горизонтальном направлении, а значит, все источники и стоки отнесены на бесконечность и могут быть исключены из рассмотрения;

– рассматривается установившееся однонаправленное течение. Только горизонтальная компонента скорости, зависящая от вертикальной координаты, отлична от нуля. Скорости в обоих слоях малы, перепады температур и концентраций умеренные. Это позволяет считать коэффициенты переноса постоянными, а также использовать уравнения несжимаемой среды для описания течения в газопаровой смеси;

Рис. 1. Схема течения
Fig. 1. Flow sketch



– предполагается, что плотность линейно зависит от параметров состояния (уравнение состояния в форме Обербека – Буссинеска): $\rho = \rho_0(1 - \beta_T \theta - \beta_C c)$, здесь β_T , β_C – коэффициенты теплового и концентрационного расширения.

Указанные ограничения позволяют вывести из (1) уравнения для нахождения характе-



ристик течения в следующей форме:

$$\begin{aligned} \nu^j u_{yy}^j &= \frac{1}{\rho_0^j} p_x^j, \quad g(\beta_T^j \theta^j + \beta_C^j c^j) = \frac{1}{\rho_0^j} p_y^j, \\ u^j \theta_x^j &= \chi^j (\theta_{xx}^j + \theta_{yy}^j), \quad u^j c_x^j = D^j (c_{xx}^j + c_{yy}^j + \alpha^j (\theta_{xx}^j + \theta_{yy}^j)). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее верхний индекс $j = 1, 2$ обозначает принадлежность характеристики к слою: 1 — для характеристик нижнего жидкого слоя, 2 — для верхнего газопарового. Давление p^j определено с точностью до гидростатического, u^j — горизонтальная компонента вектора скорости.

Решение уравнений (2) строится в предположении, что функции температуры и концентрации в каждом слое имеют следующий вид:

$$\theta^j(x, y) = (a_2^j y + a_1^j)x + \Theta^j(y), \quad c^j(x, y) = (b_2^j y + b_1^j)x + C^j(y), \quad (3)$$

здесь $a_i^j, b_i^j, i = 1, 2$, — постоянные, $\Theta^j(y), C^j(y)$ — некоторые гладкие функции, которые определяются после подстановки вида решения (3) в систему (2). Линейные зависимости функций θ^j и c^j (3) от горизонтальной координаты x представляют собой обобщение решения Остроумова–Бирixa [4] на случай описания совместного течения двух бинарных смесей.

Подставляя выражения (3) в систему (2), расщепляя полученные равенства по переменной x , получим систему дифференциальных уравнений, прямое интегрирование которой дает функции u^j, Θ^j, C^j для каждого слоя:

$$u^j = \frac{U_1^j y^4}{24} + \frac{U_2^j y^3}{6} + \frac{u_0^j y^2}{2} + u_1^j y + u_2^j, \quad (4)$$

$$\Theta^j = \frac{t_1^j y^7}{42} + \frac{t_2^j y^6}{30} + \frac{t_3^j y^5}{20} + \frac{t_4^j y^4}{12} + \frac{t_5^j y^3}{6} + \frac{t_6^j y^2}{2} + \theta_0^j y + \theta_1^j, \quad (5)$$

$$C^j = \frac{q_1^j y^7}{42} + \frac{q_2^j y^6}{30} + \frac{q_3^j y^5}{20} + \frac{q_4^j y^4}{12} + \frac{q_5^j y^3}{6} + \frac{q_6^j y^2}{2} + \kappa_0^j y + \kappa_1^j. \quad (6)$$

Давление определяется из первых двух уравнений системы (2) с помощью выражений из формул (4)–(6) таким образом:

$$p^j = \rho_0^j \nu^j u_{yy}^j x + \rho_0^j g \int (\beta_T^j \Theta^j(y) + \beta_C^j C^j(y)) dy + p_0^j. \quad (7)$$

В равенствах (4)–(7) постоянные интегрирования $u_i^j, i = 0, 1, 2, \theta_{0,1}^j, \kappa_{0,1}^j, p_0^j$ пока произвольные, остальные параметры выражаются через них с использованием соотношений:

$$\begin{aligned} U_1^j &= \frac{g}{\nu^j} (\beta_T^j a_2^j + \beta_C^j b_2^j), \quad U_2^j = \frac{g}{\nu^j} (\beta_T^j a_1^j + \beta_C^j b_1^j); \\ t_1^j &= \frac{a_2^j U_1^j}{24 \chi^j}, \quad t_2^j = \frac{1}{\chi^j} \left(\frac{a_2^j U_2^j}{6} + \frac{a_1^j U_1^j}{24} \right), \quad t_3^j = \frac{1}{\chi^j} \left(\frac{a_2^j u_0^j}{2} + \frac{a_1^j U_2^j}{6} \right), \\ t_4^j &= \frac{1}{\chi^j} \left(\frac{a_1^j u_0^j}{2} + a_2^j u_1^j \right), \quad t_5^j = \frac{1}{\chi^j} \left(a_1^j u_1^j + a_2^j u_2^j \right), \quad t_6^j = \frac{a_1^j u_2^j}{\chi^j}; \\ q_1^j &= \frac{k_2^j U_1^j}{24}, \quad q_2^j = \frac{k_2^j U_2^j}{6} + \frac{k_1^j U_1^j}{24}, \quad q_3^j = \frac{k_2^j u_0^j}{2} + \frac{k_1^j U_2^j}{6}, \\ q_4^j &= \frac{k_1^j u_0^j}{2} + k_2^j u_1^j, \quad q_5^j = k_1^j u_1^j + k_2^j u_2^j, \quad q_6^j = k_1^j u_2^j, \\ \kappa_1^j &= \frac{1}{D^j \chi^j} (b_1^j \chi^j - a_1^j D^j \alpha^j), \quad \kappa_2^j = \frac{1}{D^j \chi^j} (b_2^j \chi^j - a_2^j D^j \alpha^j). \end{aligned}$$



2. Граничные условия

Для определения шестнадцати постоянных интегрирования $u_{0,1,2}^j, \theta_{0,1}^j, \kappa_{0,1}^j, p_0^j$ в выражениях (4)–(6) и четырех параметров $a_{1,2}^j, b_{1,2}^j$ из (2) необходимо замкнуть задачу с помощью граничных условий на твердых стенках канала $y = -h_1$ и $y = h_2$, а также соотношений на недеформируемой границе раздела $y = 0$ (см. рис. 1).

2.1. Условия на границе раздела

Постулируются равенства скоростей и температур двух сред на границе раздела:

$$u^1(x, 0) = u^2(x, 0), \quad \theta^1(x, 0) = \theta^2(x, 0). \quad (8)$$

Кинематическое условие выполняется автоматически вследствие используемого вида вектора скорости. Разложение динамического условия на касательное и нормальное направления приводит к соотношениям

$$\rho_0^1 \nu^1 \frac{\partial u^1}{\partial y} = \rho_0^2 \nu^2 \frac{\partial u^2}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad p^1(x, 0) = p^2(x, 0). \quad (9)$$

Здесь посредством функции σ задается поверхностное натяжение в жидком слое. В общем случае σ зависит от температуры θ^1 и концентрации c^1 , характер зависимости будет обсуждаться ниже.

Равенство потоков вещества выражается формулой

$$D^1 \rho_0^1 \left(\frac{\partial c^1}{\partial y} + \alpha^1 \frac{\partial \theta^1}{\partial y} \right) \Big|_{(x, 0)} = D^2 \rho_0^2 \left(\frac{\partial c^2}{\partial y} + \alpha^2 \frac{\partial \theta^2}{\partial y} \right) \Big|_{(x, 0)}. \quad (10)$$

Условие теплообмена через границу раздела имеет вид

$$\left(\lambda^1 \frac{\partial \theta^1}{\partial y} - \lambda^2 \frac{\partial \theta^2}{\partial y} \right) \Big|_{(x, 0)} = -L M, \quad (11)$$

здесь L — скрытая теплота парообразования, λ^j — коэффициенты теплопроводности смесей, величина

$$M = -D^2 \rho_0^2 \left(\frac{\partial c^2}{\partial y} + \alpha^2 \frac{\partial \theta^2}{\partial y} \right) \Big|_{(x, 0)} \quad (12)$$

определяет массовую скорость испарения. Необходимо отметить, что параметр M является качественной характеристикой испарительной конвекции. Положительные значения M означают, что происходит испарение с границы раздела, отрицательные соответствуют конденсации [2, 5].

В качестве еще одного условия зададим концентрацию пара на границе раздела:

$$c^2(x, 0) = C_* (1 + \epsilon (\theta^2(x, 0) - T_0)), \quad (13)$$

где C_* — концентрация насыщенного пара, T_0 — средняя температура системы, $\epsilon = L\mu/(RT_0^2)$, μ — молярная масса испаряющейся компоненты, R — универсальная газовая постоянная. Соотношение (13) есть следствие линеаризации уравнения Клапейрона – Клаузиуса для давления насыщенного пара (подробнее о выводе данного условия можно прочитать в работе [7]).

2.2. Условия на твердых стенках

На обеих твердых стенках задаются условия прилипания:

$$u_1(-h_1) = u_2(h_2) = 0. \quad (14)$$



Считается, что через твердые стенки отсутствует поток вещества:

$$\left(\frac{\partial c^1}{\partial y} + \alpha^1 \frac{\partial \theta^1}{\partial y}\right)\Big|_{(x, -h_1)} = 0, \quad \left(\frac{\partial c^2}{\partial y} + \alpha^2 \frac{\partial \theta^2}{\partial y}\right)\Big|_{(x, h_2)} = 0, \quad (15)$$

а средняя концентрация легкой компоненты C_0 в нижнем слое задана и соответствует закону:

$$\int_{-h_1}^0 c^1(x=0, y) dy = h_1 C_0. \quad (16)$$

Для функции температуры допустимы четыре типа граничных условий:

ГУ-Д — на обеих стенках задано распределение температуры

$$\theta^1(x, -h_1) = A_1 x + \vartheta_1, \quad \theta^2(x, h_2) = A_2 x + \vartheta_2, \quad (17)$$

здесь и далее $A_{1,2}, \vartheta_{1,2}$ — заданные постоянные;

ГУ-Н — обе стенки считаются теплоизолированными

$$\frac{\partial \theta^1}{\partial y}\Big|_{(x, -h_1)} = \frac{\partial \theta^2}{\partial y}\Big|_{(x, h_2)} = 0; \quad (18)$$

ГУ-См1 — нижняя стенка нагревается, верхняя — теплоизолирована

$$\theta^1(x, -h_1) = A_1 x + \vartheta_1, \quad \frac{\partial \theta^2}{\partial y}\Big|_{(x, h_2)} = 0; \quad (19)$$

ГУ-См2 — нижняя стенка теплоизолирована, верхняя стенка нагревается

$$\frac{\partial \theta^1}{\partial y}\Big|_{(x, -h_1)} = 0, \quad \theta^2(x, h_2) = A_2 x + \vartheta_2. \quad (20)$$

Постоянные интегрирования в выражениях (3)–(7) находятся с помощью перечисленных граничных условий (8)–(16) и одного из условий (17)–(20). Подробное описание приведено в следующем разделе.

3. Построение решения

Прежде чем приступить к нахождению постоянных интегрирования, следует уточнить характер зависимости поверхностного натяжения от температуры и концентрации в касательной проекции динамического условия в (9). Считается, что для большинства жидкостей поверхностное натяжение линейно меняется с температурой. Аналогичное утверждение для концентрации не всегда верно. Например, используя экспериментальные данные из [8, 9], можно видеть, что для водных спиртовых растворов зависимость поверхностного натяжения от концентрации близка к квадратичной. Для анализа, с каким характером зависимости поверхностного натяжения решение будет более точно отражать характеристики испарения, рассмотрим и линейную, и квадратичную зависимость σ от концентрации легкой компоненты:

$$\sigma_{lin} = \sigma_0 - \sigma_T(\theta^1 - T_0) - \sigma_C(c^1 - C_0), \quad (21)$$

$$\sigma_{quad} = \sigma_0 - \sigma_T(\theta^1 - T_0) - \sigma_{C1}(c^1 - C_0) - \sigma_{C2}(c^1 - C_0)^2. \quad (22)$$

Постоянные интегрирования находятся с учетом обоих перечисленных законов для поверхностного натяжения. Для получения системы с целью определения постоянных интегрирования $u_{0,1,2}^j, \theta_{0,1}^j, \kappa_{0,1}^j, a_{1,2}^j, b_{1,2}^j$ следует подставить соотношения для скорости (4), температуры и концентрации (3) с учетом (5), (6) в граничные условия (8)–(16) и одно из условий (17)–(20), а затем расцепить полученные равенства по переменной x . Полная система



для определения постоянных интегрирования и ее решение целиком здесь не выписывается из-за громоздкости. Отметим лишь основные моменты.

1. В формулу (9) входит производная функции σ по x . Тогда, принимая во внимание формулы (3), (21), (22), получим следующие равенства:

$$\frac{\partial \sigma_{lin}}{\partial x} = -\sigma_T a_1^1 - \sigma_C b_1^1, \quad \frac{\partial \sigma_{quad}}{\partial x} = -\sigma_T a_1^1 - \sigma_{C1} b_1^1 - 2\sigma_{C2} (b_1^1)^2 x.$$

Замечание 1. Поскольку соотношение в левой части равенства (9) не зависит от переменной x , то подстановка вычисленных производных функции σ в правую часть (9) ведет к тому, что для квадратичной зависимости поверхностного натяжения от концентрации постоянная $b_1^1 \equiv 0$.

2. Постоянные $a_i^j, b_i^j, i, j = 1, 2$, из (3) определяют продольные градиенты температуры и концентрации и являются важными характеристиками физического процесса. Они находятся из замкнутой системы линейных уравнений, выражения для них приведены в табл. 1 (обозначение $\Delta = h_2 \lambda^1 + h_1 \lambda^2$). Постоянная b_1^1 зануляется в случае, когда в качестве функции σ выбирается σ_{quad} . Для σ_{lin} эта постоянная на данном этапе остается неизвестной, как и константа a_1^1 при реализации граничных условий для температуры (18).

Таблица 1 / Table 1

Постоянные $a_i^j, i, j = 1, 2, b_1^1, b_2^1, b_2^2$
 Constants $a_i^j, i, j = 1, 2, b_1^1, b_2^1, b_2^2$

| Постоянная | Граничные условия | | | |
|------------|--|----------------------|----------------------|----------------------|
| | ГУ-Д | ГУ-Н | ГУ-См1 | ГУ-См2 |
| a_1^1 | $(A_1 h_2 \lambda^1 + A_2 h_1 \lambda^2) / \Delta$ | — | A_1 | A_2 |
| a_2^1 | $\lambda^2 (A_2 - A_1) / \Delta$ | 0 | 0 | 0 |
| a_1^2 | a_1^1 | a_1^1 | a_1^1 | a_1^1 |
| a_2^2 | $\lambda^1 (A_2 - A_1) / \Delta$ | 0 | 0 | 0 |
| b_1^1 | $\epsilon C_* a_1^1$ | $\epsilon C_* a_1^1$ | $\epsilon C_* a_1^1$ | $\epsilon C_* a_1^1$ |
| b_2^1 | $-\alpha^1 a_2^1$ | 0 | 0 | 0 |
| b_2^2 | $-\alpha^2 a_2^2$ | 0 | 0 | 0 |

3. Далее следует найти шесть постоянных $u_{0,1,2}^j$, для этого имеется пять линейных уравнений. Надо учесть, что при использовании σ_{quad} постоянная b_1^1 известна (равна нулю), и из пяти уравнений на шесть постоянных можно найти все через, например, u_0^1 . При использовании σ_{lin} постоянная b_1^1 не определена, и указанную систему из пяти уравнений следует дополнить еще одним условием, в качестве которого естественно задать расход q в газовой фазе:

$$\int_0^{h_2} \rho_2 u_2(y) dy = q. \quad (23)$$

В этом случае все $u_{0,1,2}^j$ можно выразить через b_1^1 .

4. Заключительный этап — определение восьми постоянных $\theta_i^j, \kappa_i^j, i = 0, 1$, а также u_0^1 или b_1^1 в зависимости от использования формулы (21) или (22) (см. предыдущий пункт).

Замечание 2. При линейной зависимости поверхностного натяжения от концентрации система уравнений на постоянные интегрирования нелинейна. В результате ее решения находятся два набора констант $u_{0,1,2}^j, \theta_{0,1}^j, \kappa_{0,1}^j$. Необходимо проводить дополнительный анализ, выбирая, какой набор постоянных может привести к решению, имеющему физический смысл.



Замечание 3. Как было упомянуто выше, при применении формулы для поверхностного натяжения σ_{quad} расход газа в верхнем слое не задается, он может быть вычислен по найденной скорости в верхнем слое. Если в случае использования σ_{lin} задать расход q в формуле (23), полученный для квадратичного распределения поверхностного натяжения, можно показать предельный переход между одним из решений задачи для σ_{lin} и решением для σ_{quad} при прочих совпадающих параметрах задачи.

Замечание 4. В случае квадратичной зависимости поверхностного натяжения от концентрации подстановка полученных постоянных интегрирования в задачах (18)–(20) приводит к тому, что основная характеристика испарительного процесса — массовая скорость испарения M , которую можно найти по формуле (12), — зануляется. Тем самым указанные постановки задач не имеют физического смысла при описании фазового перехода и далее рассматриваться не могут.

Замечание 5. В случае линейной зависимости поверхностного натяжения от концентрации при условии отсутствия потока тепла через обе стенки (условия (18)) находятся все постоянные интегрирования, кроме θ_0^j , для них имеется лишь равенство $\theta_0^1 = \theta_0^2$. Для замыкания задачи необходимо еще одно условие на функцию температуры. В качестве такого условия может выступить задание средней температуры жидкого слоя в сечении $x = 0$ подобно интегральному условию на среднюю концентрацию (16).

5. Относительно постоянных p_0^j отметим, что второе условие из (9) с использованием равенства (7) приводит лишь к равенству $p_0^1 = p_0^2$, поэтому данные постоянные в функциях давления в слоях остаются неопределенными. Это достаточно распространенная ситуация для стационарных задач в гидродинамике [6].

Перечисленные замечания для наглядности сведены в табл. 2.

Таблица 2 / Table 2

Решение задач для линейной и квадратичной зависимости поверхностного натяжения от концентрации
Solution of boundary problems for linear and quadratic dependence of surface tension on concentration

| σ | Расход газа q | Граничные условия | | | |
|-----------------|-------------------------------|--|---|--------|---|
| | | ГУ-Д | ГУ-См1 | ГУ-См2 | ГУ-Н |
| σ_{quad} | Высчитывается | решение в конечных формулах | Постановки не имеют физического смысла, см. замечание 4 | | |
| σ_{lin} | Задается как входной параметр | Решение в конечных формулах, см. замечание 3 | | | Необходимо дополнительное условие для замыкания задачи, см. замечание 5 |

4. Пример использования построенного решения

Для демонстрации того, как построенные решения могут описывать основные характеристики испарительной конвекции, рассмотрим двухслойную систему: водно-спиртовой раствор с концентрацией этанола 70% ($C_0 = 0.7$) занимает нижний слой толщины $h_1 = 3$ мм, газопаровая смесь, состоящая из паров испаряющегося этанола и азота, находится в верхнем слое толщины $h_2 = 5$ мм. Физические параметры для обеих систем, использующиеся в уравнениях (2) и граничных условиях (8)–(16), приведены в табл. 3 при средней температуре системы $T_0 = 25^\circ\text{C}$. Данные для смесей взяты из монографии [10], статьи [2] и справочника [11]. Решение задачи будет проанализировано с учетом граничных условий для



Таблица 3 / Table 3

Физические параметры рабочих смесей
Physical parameters of working mixtures

| Параметр | Жидкая смесь | Газопаровая смесь |
|-----------------------------|------------------------|-----------------------|
| ν , м ² /с | $2.345 \cdot 10^{-6}$ | $1.5 \cdot 10^{-5}$ |
| χ , м ² /с | $0.843 \cdot 10^{-7}$ | $0.3 \cdot 10^{-4}$ |
| D , м ² /с | $4.481 \cdot 10^{-10}$ | $0.135 \cdot 10^{-4}$ |
| α , К ⁻¹ | $-4.093 \cdot 10^{-3}$ | $1 \cdot 10^{-4}$ |
| λ , Вт/(м·К) | 0.245 | 0.02717 |
| ρ , кг/м ³ | 863.4 | 1.2 |
| β_T , К ⁻¹ | $0.994 \cdot 10^{-3}$ | $3.67 \cdot 10^{-3}$ |
| β_C | 0.277 | -0.62 |
| L , Дж/кг | $12.938 \cdot 10^5$ | — |
| C_* | — | 0.081 |
| ϵ | — | 0.0805 |

температуры (17), т.е. на обеих твердых стенках задано распределение температуры:

$$\theta^1 \Big|_{y=-h_1} = A_1 x + T_0, \quad \theta^2 \Big|_{y=h_2} = 5x + T_0,$$

где A_1 будет изменяться от 6 до 10 К/м. Тем самым нижняя стенка всегда более нагрета, чем верхняя. Поверхностное натяжение в формулах (21), (22) восстановлено методом наименьших квадратов по данным для водно-спиртовых растворов, приведенным в [9]. Получены следующие зависимости:

$$\sigma_{quad} = (42.14 - 0.0873 \theta^1 - 29.41 c^1 + 11.40 (c^1)^2) \text{ мН/м},$$

$$\sigma_{lin} = (37.02 - 0.0873 \theta^1 - 13.443 c^1) \text{ мН/м}.$$

Расход газа q в верхнем слое для расчетов с учетом линейной зависимости поверхностного натяжения от концентрации примем равным $8.33 \cdot 10^{-6}$ кг/(м·с) (данные из [12]). Следует напомнить, что задача решалась в предположении, что канал бесконечен в горизонтальном направлении. Тем не менее для построения зависимостей температуры и концентрации от обеих переменных x и y необходимо задать величину, в пределах которой изменяется горизонтальная координата. Поскольку под неограниченностью длины канала подразумевается, что толщина слоя должна быть много меньше его длины, пусть $x \in [0, L_h]$, $L_h = 0.1$ м. Тогда соотношение $(h_1 + h_2)/L_h = 0.08 \ll 1$.

Подстановка физических и геометрических параметров в решение (4), (3) с учетом (5), (6) и граничные условия (8)–(16), (17) дает выражение для скоростей, температур и концентраций в обоих слоях. Кроме этого, можно вычислить параметр M (см. соотношения (11), (12)) — основную характеристику интенсивности испарения. С помощью полученных соотношений проследим влияние тепловой нагрузки нижней стенки канала (A_1 будет меняться от 6 до 10 К/м с шагом 1 К/м) на характеристики течения на границе раздела $y = 0$.

В табл. 4 выписаны значения на границе раздела $y = 0$ для функции температуры, концентраций этанола в жидкой фазе и паров этанола в газовой фазе при расчетах с поверхностным натяжением $\sigma = \sigma_{quad}$, в табл. 5 приведены те же величины для одного из

решений при $\sigma = \sigma_{lin}$. ностным натяжением $\sigma = \sigma_{quad}$, в табл. 5 приведены те же величины для одного из решений при $\sigma = \sigma_{lin}$.

Из данных, представленных в табл. 4, 5, видно, что с ростом градиента температуры на нижней стенке A_1 возрастает температура и концентрация паров этанола в газе на границе раздела (второй и четвертый столбцы в табл. 4, 5). При этом концентрация этанола (третий столбец в табл. 4, 5) в слое жидкой смеси снижается.

Рост температуры на границе раздела ведет к интенсификации испарения,

Таблица 4 / Table 4

Изменение температуры, концентрации этанола и концентрации паров этанола на границе раздела

 $y = 0$ при $\sigma = \sigma_{quad}$ в зависимости от A_1 Changes in temperature, ethanol concentration, and ethanol vapor concentration at the interface $y = 0$ at $\sigma = \sigma_{quad}$ in dependence on A_1

| A_1 | $\theta^1 = \theta^2$ | c^1 | c^2 |
|-------|-----------------------|---------|-------------------|
| 6 | $5.94x + 25.11$ | 0.70002 | $0.039x + 0.0817$ |
| 7 | $6.88x + 25.12$ | 0.6999 | $0.045x + 0.0819$ |
| 8 | $7.81x + 25.19$ | 0.6997 | $0.051x + 0.0822$ |
| 9 | $8.75x + 25.24$ | 0.6995 | $0.057x + 0.0825$ |
| 10 | $9.67x + 25.29$ | 0.6992 | $0.063x + 0.0829$ |



что можно увидеть на рис. 2, где кривыми 1, 2 показаны зависимости величины M от градиента температуры нижней стенки A_1 . Рост скорости испарения этанола с границы раздела при повышении температуры объясняет уменьшение содержания этанола в жидкой фазе и увеличение его содержания в газовой (величины c^1 и c^2 в табл. 4, 5). Подтверждением того, что построенное решение правильно отражает процесс испарительной конвекции, служит также и то, что скорость испарения $M(A_1)$ и расход газа в газовой фазе $q(A_1)$ одновременно растут при увеличении A_1 (кривые 1, 3 на рис. 2), т. е. скорость обдува и интенсивность испарения находятся в прямопропорциональной зависимости.

Таблица 5 / Table 5

Изменение температуры, концентрации этанола и концентрации паров этанола на границе раздела $y = 0$ при $\sigma = \sigma_{lin}$ в зависимости от A_1

Changes in temperature, ethanol concentration, and ethanol vapor concentration at the interface $y = 0$ at $\sigma = \sigma_{lin}$ in dependence on A_1

| A_1 | $\theta^1 = \theta^2$ | c^1 | c^2 |
|-------|-----------------------|-------------------------------|-------------------|
| 6 | $5.94x + 25.10$ | $4.1 \cdot 10^{-4}x + 0.6999$ | $0.039x + 0.0817$ |
| 7 | $6.88x + 25.14$ | $3.3 \cdot 10^{-4}x + 0.6994$ | $0.045x + 0.0818$ |
| 8 | $7.81x + 25.18$ | $2.4 \cdot 10^{-4}x + 0.6993$ | $0.051x + 0.0822$ |
| 9 | $8.75x + 25.23$ | $1.6 \cdot 10^{-4}x + 0.6992$ | $0.057x + 0.0825$ |
| 10 | $9.67x + 25.28$ | $0.7 \cdot 10^{-4}x + 0.6991$ | $0.063x + 0.0828$ |

Из данных, приведенных в табл. 4, 5, видно, что расчетные значения всех параметров для $\sigma = \sigma_{quad}$ и $\sigma = \sigma_{lin}$ достаточно близки. При этом сравнение кривых 1, 2 на рис. 2 показывает, что решение, построенное для $\sigma = \sigma_{quad}$, дает более низкие значения параметра испарения M (кривая 1), чем решение, построенное для $\sigma = \sigma_{lin}$ (кривая 2). Возможно, это связано

с тем, что задаваемое значение расхода для расчетов при линейной зависимости поверхностного натяжения от концентрации выше, чем расчетные значения при квадратичной зависимости. В работе [12] имеются данные измерений величины M при испарении чистого этанола в воздух, продуваемый с заданным расходом, демонстрирующие значения на два порядка больше представленных на рис. 2. При этом все тренды, указанные в результатах эксперимента, совпадают с тем, что показывает построенное точное решение: увеличение температуры границы раздела ведет к росту величины M и концентрации пара этанола в газопаровом слое.

Как было упомянуто выше, при использовании зависимости $\sigma = \sigma_{lin}$ для построения решения существует еще второй набор постоянных интегрирования, при котором построенное решение удовлетворяет уравнению и граничным условиям. Анализ этого решения привел к выводу, что характеристики течения, расчи-

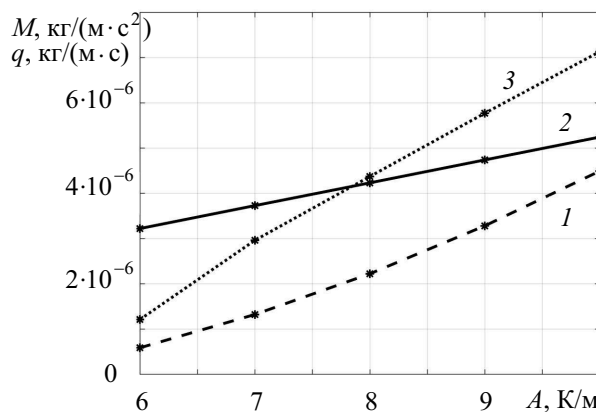


Рис. 2. Зависимость величин M и q от градиента температуры на нижней стенке A_1 : кривая 1 соответствует $M(A_1)$ для $\sigma = \sigma_{quad}$; кривая 2 соответствует $M(A_1)$ для $\sigma = \sigma_{lin}$; кривая 3 соответствует $q(A_1)$ для $\sigma = \sigma_{quad}$

Fig. 2. Dependence of the quantities M and q on the temperature gradient at the lower wall A_1 : curve 1 corresponds to $M(A_1)$ for $\sigma = \sigma_{quad}$; curve 2 corresponds to $M(A_1)$ for $\sigma = \sigma_{lin}$; curve 3 corresponds to $q(A_1)$ for $\sigma = \sigma_{quad}$

танные на его основе, противоречат физическому смыслу процесса испарения. Данное решение при используемых рабочих смесях, температурных режимах и геометрии области, по-видимому, является чисто математическим.

На рис. 3–5 изображены скорость в обоих слоях, поле температуры и концентраций в каждом слое при $A_1 = 10$ К/м для $\sigma = \sigma_{quad}$. Можно видеть, что решение адекватно отражает термокапиллярный эффект: на границе раздела температура увеличивается

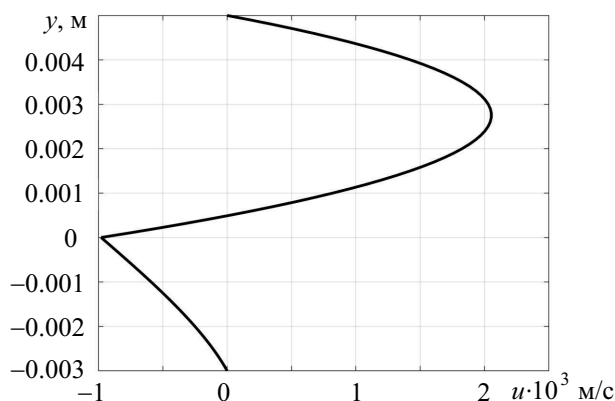


Рис. 3. Скорость течения при $A_1 = 10$ К/м для $\sigma = \sigma_{quad}$
Fig. 3. Velocity of flow at $A_1 = 10$ K/m for $\sigma = \sigma_{quad}$

вдоль $y = 0$ (рис. 4), а жидкость движется в сторону уменьшения температуры и увеличения поверхностного натяжения (рис. 3). Что касается термодиффузионного эффекта, решение предсказывает, что температура растет от прямой $x = 0$ до прямой $x = 0.1$ м, как и концентрация этанола в газовом слое (рис. 4 и рис. 5, а). Это означает, что термодиффузионный эффект отображается решением корректно. В слое с жидкой бинарной смесью максимальные значения концентрации наблюдаются в центральной области слоя (рис. 5, б), что связано с испарением этанола с границы раздела и формированием приграничной области с более

низкой концентрацией. При конкуренции термодиффузии и испарения воздействие последнего проявляется сильнее.

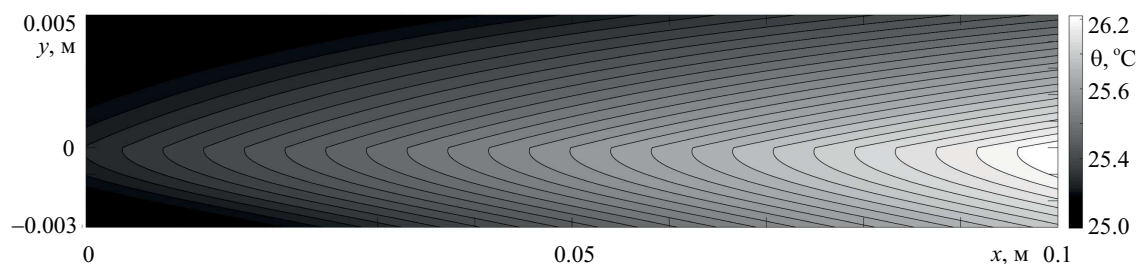


Рис. 4. Поле температур при $A_1 = 10$ К/м для $\sigma = \sigma_{quad}$
Fig. 4. Temperature field at $A_1 = 10$ K/m for $\sigma = \sigma_{quad}$

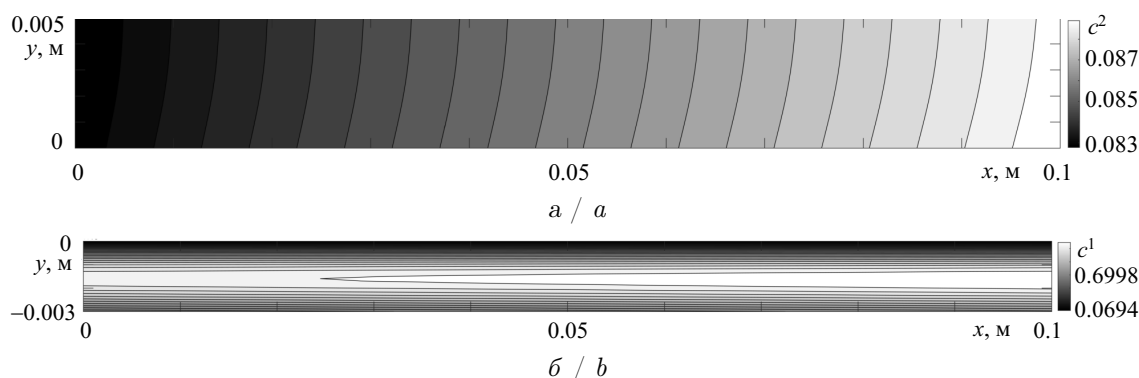


Рис. 5. Поле концентраций в верхнем (а) и нижнем (б) слоях при $A_1 = 10$ К/м для $\sigma = \sigma_{quad}$
Fig. 5. Concentration field in the upper (a) and lower (b) layers at $A_1 = 10$ K/m for $\sigma = \sigma_{quad}$



Заключение

Проведенный в работе анализ постановок граничных условий для функции температуры при описании испарительной конвекции на границе раздела двухкомпонентной жидкости и газопаровой смеси показал, что для моделирования диффузионного испарения могут быть использованы как условия Дирихле или Неймана, так и их комбинации в случае линейной зависимости поверхностного натяжения от концентрации одного из компонентов жидкости. В случае нелинейного (квадратичного) характера зависимости поверхностного натяжения от состава испаряющейся жидкости только линейное по продольной координате распределение температуры на стенках дает физически содержательное решение задачи.

Верификация построенного решения проведена на имеющихся экспериментальных данных о характеристиках испарения чистого этанола в воздух [12]. Показано, что решение качественно верно предсказывает рост массовой скорости испарения при увеличении тепловой нагрузки нижней стенки канала. При этом вычисления также указывают на формирование приповерхностного слоя, где концентрация испаряющегося компонента в жидком слое убывает, а в верхнем — растет за счет увеличения температуры на границе раздела. Кроме того, рассчитанные значения расхода газа в верхнем слое прямо пропорциональны скорости испарения, что подтверждает усиление испарения при интенсификации обдува. Все полученные на основе анализа построенного решения выводы согласуются с результатами экспериментов на качественном уровне. Для сравнения количественных характеристик необходимо получить данные именно о течениях бинарных смесей, которые, как известно, имеют более сложную по сравнению с однородными жидкостями структуру течения.

Список литературы

1. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н. Задачи испарительной конвекции (обзор) // Прикладная математика и механика. 2018. Т. 82, № 2. С. 219–260. EDN: [ORSKZP](#)
2. Шломис М. И., Якушин В. И. Конвекция в двухслойной бинарной смеси с испарением // Гидродинамика. 1972. Вып. 4. С. 129–141.
3. Goncharova O. N., Hennenberg M., Rezanova E. V., Kabov O. A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer systems // Interfacial Phenomena and Heat Transfer. 2013. Vol. 1, iss. 4. P. 317–338. <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.20>
4. Бирях П. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика. 1966. № 3. С. 69–72. EDN: [FWKBOW](#)
5. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions // Microgravity Science and Technology. 2020. Vol. 32. P. 139–154. <https://doi.org/10.1007/s12217-019-09764-0>
6. Андреев В. К., Гапоненко Ю. А., Гончарова О. Н., Пухначев В. В. Современные математические модели конвекции. Москва : Физматлит, 2008. 368 с. EDN: [UGLJZD](#)
7. Гончарова О. Н., Резанова Е. В. Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях при наличии испарения на границе раздела // Прикладная механика и техническая физика. 2014. Т. 55, № 2. С. 68–79. EDN: [SMGNUZ](#)
8. Стабников В. Н., Ро́йтер И. М., Про́цюк Т. Б. Этиловый спирт. Москва : Пищевая промышленность, 1976. 273 с.
9. Vazquez G., Alvarez E., Navaza J. M. Surface tension of alcohol + water from 20 to 50° // Journal of Chemical and Engineering Data. 1995. Vol. 40, iss. 3. P. 611–614. <https://doi.org/10.1021/jc00019a016>
10. Рыжков И. И. Термодиффузия в смесях: уравнения, симметрии, решения и их устойчивость. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2013. 200 с. EDN: [RUKUMF](#)
11. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. Москва : Наука, 1972. 722 с.
12. Бекежанова В. Б., Гончарова О. Н., Люлин Ю. В. Теоретическое и экспериментальное исследование течений с испарением на термокапиллярной границе раздела: особенности моделирования, анализ характеристик // Многофазные системы. 2023. Т. 18, № 3. С. 97–99. <https://doi.org/10.21662/mfs2023.3.018>, EDN: [ASCVIA](#)



References

1. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Problems of the evaporative convection (Review). *Fluid Dynamics*, 2018, vol. 53, suppl. 1, pp. S69–S102. <https://doi.org/10.1134/S001546281804016X>, EDN: [SGIICV](#)
2. Shliomis M. I., Yakushin V. I. Convection in two-layer binary mixture with evaporation. *Gidrodinamika* [Hydrodynamics], 1972, iss. 4, pp. 129–141 (in Russian).
3. Goncharova O. N., Hennenberg M., Rezanova E. V., Kabov O. A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer systems. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2013, vol. 1, iss. 4, pp. 317–338. <https://doi.org/10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.20>
4. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, vol. 7, iss. 3, pp. 43–44. <https://doi.org/10.1007/bf00914697>, EDN: [FWKBOW](#)
5. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Analysis of characteristics of two-layer convective flows with diffusive type evaporation based on exact solutions. *Microgravity Science and Technology*, 2020, vol. 32, pp. 139–154. <https://doi.org/10.1007/s12217-019-09764-0>
6. Andreev V. K., Gaponenko Yu. A., Goncharova O. N., Pukhnachov V. V. *Mathematical Models of Convection*. De Gruyter Studies in Mathematical Physics, vol. 5. Berlin, Boston, De Gruyter, 2020. 432 p. (Russ. ed.: Moscow, Fizmatlit, 2008. 368 p.).
7. Goncharova O. N., Rezanova E. V. Example of an exact solution of the stationary problems of two-layer flows with evaporation at the interface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, iss. 2, pp. 247–257. <https://doi.org/10.1134/S0021894414020072>, EDN: [SKSWQZ](#)
8. Stabnikov V. N., Royter I. M., Protsyuk T. B. *Etylovyy spirt* [Ethyl Alcohol]. Moscow, Pishchevaya Promyshlennost, 1976. 273 p. (in Russian).
9. Vazquez G., Alvarez E., Navaza J. M. Surface tension of alcohol + water from 20 to 50°C. *Journal of Chemical and Engineering Data*, 1995, vol. 40, iss. 3, pp. 611–614. <https://doi.org/10.1021/je00019a016>
10. Ryzhkov I. I. *Termodiffuziya v smesyakh: uravneniya, simmetrii, resheniya i ikh ustoychivost'* [Thermodiffusion in mixtures: Equations, symmetries, solutions and their stability]. Novosibirsk, SB RAS Publ., 2013. 200 p. (in Russian). EDN: [RUKUMF](#)
11. Vargaftik N. B. *Spravochnik po teplofizicheskim svoystvam gazov i zhidkostey* [Handbook on the thermophysical properties of gases and liquids]. Moscow, Nauka, 1972. 722 p. (in Russian).
12. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N., Lyulin Yu. V. Theoretical and experimental study of flows with evaporation at a thermocapillary interface: Modeling features, analysis of characteristics. *Mnogofaznye sistemy* [Multiphase Systems], 2023, vol. 18, iss. 3, pp. 97–99 (in Russian). <https://doi.org/10.21662/mfs2023.3.018>, EDN: [ASCVIA](#)

Поступила в редакцию / Received 12.03.2024

Принята к публикации / Accepted 10.09.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 259–270

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 259–270

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-259-270>, EDN: WIEVBM

Научная статья

УДК 539.374

Пластическое деформирование биметаллической трубы под действием внутреннего давления

С. В. Фирсов

Хабаровский федеральный исследовательский центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Россия, 681005, Хабаровский край, г. Комсомольск-на-Амуре, ул. Metallurgov, д. 1

Фирсов Сергей Викторович, кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Института машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения Российской академии наук, firsov.s.new@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7446-6231>, SPIN: 8267-2329, AuthorID: 783315

Аннотация. Рассмотрена задача деформирования двухслойной (биметаллической) толстостенной трубы под воздействием внутреннего давления. Выведена зависимость для определения критической нагрузки, при которой впервые зародится область пластического течения либо в начале внутреннего слоя, либо в начале внешнего, в зависимости от физико-геометрических параметров изделия. Выведены соотношения для полуаналитического решения задачи необратимого деформирования двухслойной трубы под воздействием внутреннего давления. Рассмотрен частный случай деформирования биметаллической трубы из стали 09Г2С с внутренним плакирующим слоем из коррозионностойкой стали 13ХФА при различных толщинах последнего. Произведён расчёт задачи автофреттирования с целью повышения эксплуатационных свойств изделия. Делаются выводы о выборе оптимальной (в плане прочностных свойств) толщины плакирующего слоя, исходя из физических параметров используемых материалов и геометрических размеров изделия.

Ключевые слова: упругость, пластичность, вязкопластичность, плоская деформация, малые деформации, биметаллическая труба, внутреннее давление

Благодарности: Выполнено в рамках госзадания Хабаровского федерального исследовательского центра Дальневосточного отделения Российской академии наук.

Для цитирования: Фирсов С. В. Пластическое деформирование биметаллической трубы под действием внутреннего давления // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 259–270. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-259-270>, EDN: WIEVBM

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Plastic strain of the bimetal tube subjected to inner pressure

S. V. Firsov

Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences, 1 Metallurgov St., Komsomolsk-na-Amure 681005, Russia

Sergey V. Firsov, firsov.s.new@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-7446-6231>, SPIN: 8267-2329, AuthorID: 783315

Abstract. The problem of deformation of a two-layer (bimetallic) thick tube under inner pressure is considered. A dependence of critical load from physical and geometrical properties of the product at which plastic flow is occurred at the beginning of either inner or outer layer is derived. The relations for the semi-analytical solution



of the problem of irreversible deformation of a two-layer pipe under the influence of internal pressure are derived. A special case of deformation of a bimetallic pipe made of 09G2C steel with an internal plating layer made of corrosion-resistant 13XFA steel at various thicknesses is considered. The calculation of the autofrettage process was performed in order to improve the operational properties of the product. Conclusions about the choice of the optimal (in terms of strength properties) thickness of the cladding layer, based on the physical parameters of the materials used and the geometric dimensions of the product are drawn.

Keywords: elasticity, plasticity, viscoplasticity, plain strain, small strain, bimetal tube, inner pressure

Acknowledgements: The work was carried out within the framework of the state task of the Khabarovsk Federal Research Center of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences.

For citation: Firsov S. V. Plastic strain of the bimetal tube subjected to inner pressure. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 259–270 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-259-270>, EDN: WIEVBM

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Расчёты одномерных напряжённо-деформированных состояний в длинной трубе относятся к классической задаче механики деформируемых тел. В теории упругости такую задачу называют задачей Ламе [1]. Под таким названием она входит в большинство учебников [2, 3]. Точное решение задачи Ламе в теории идеального пластического деформирования было дано Блендом [4]. Оно в значительной степени опиралось на использование кусочно-линейного условия пластичности максимальных касательных напряжений (условия Треска – Сен-Венана).

При гладком условии максимальных октаэдрических напряжений (условие Мизеса) получить точное решение упругопластической задачи не удаётся. В [5] приведено сравнение результатов расчётов, проведённых при условии максимальных октаэдрических напряжений, с точными решениями, полученными при использовании кусочно-линейных пластических потенциалов, т. е. при максимальных касательных напряжениях или максимальных приведённых напряжениях (условия Ишлинского – Ивлева). Оказалось, что численное решение совпадает с полусуммой аналитических по своему уровню и распределению напряжений по радиальной координате. То же относится и к распределению остаточных напряжений после снятия внешних нагружающих усилий.

Радиальные напряжения максимальны, если расчёт провести в рамках максимальных приведённых напряжений, и минимальны при проведении расчётов в рамках условия максимальных касательных напряжений. Этот результат практически нашёл своё подтверждение при решении задач термопластичности [6]. Важно отметить, что решение в [6] проведено с учётом вязкого сопротивления пластическому течению, т. е. в рамках упруговязкопластической модели.

В [7, 8] разрешается подобная задача с учётом приобретения материалом больших упругопластических деформаций. Неизбежность больших деформаций связывается с малым размером внутренней цилиндрической полости (дефект сплошности), когда возникающие перемещения оказываются соизмеримыми с принимаемым радиусом полости. Установлен [8] эффект приспособляемости дефекта сплошности в идеальном упругопластическом материале, когда геометрия дефекта и уровень остаточных напряжений в его окрестности остаются неизменными после каждой разгрузки при циклическом нагружении по типу «нагрузка – разгрузка». Выход из такой парадоксальной ситуации продемонстрирован в статье [9]. Связывается он с учётом вязкости в условиях пластического деформирования.

В нефтегазовой и нефтехимической отраслях остро стоят проблемы защиты от коррозии и обеспечения высокой надёжности оборудования и трубопроводов [10]. Одним из способов решения этих проблем является использование двухслойных или многослойных труб и сосудов с основным слоем низколегированной стали типа 09Г2С и плакирующим слоем нержа-



вующих сталей. Материалы слоёв отличаются по своим механическим и теплофизическим свойствам, что приводит к сложному напряжённому-деформированному состоянию таких изделий [11]. Исследуется как коррозионная стойкость различных плакирующих поверхностей [12], так и возможность биметаллических труб переносить различные нагрузки [11, 13]. Целью данной работы является изучение напряжённому-деформированного состояния таких биметаллических труб с плакирующей внутренней поверхностью под воздействием критических значений внутреннего давления.

1. Исходные соотношения принимаемой математической модели

Деформируемый материал полагаем упруговязкопластическим, допускающим лишь малые деформации. Полные деформации \mathbf{d} в материале считаем представленными суммой его обратимых (упругих) деформаций \mathbf{e} и необратимых (вязкопластических) \mathbf{p} деформаций

$$\mathbf{d} = \mathbf{e} + \mathbf{p} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}). \quad (1)$$

В (1) \mathbf{u} — вектор перемещений. Упругие деформации \mathbf{e} задают напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ в деформируемом материале.

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\mathbf{e}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e}. \quad (2)$$

Здесь λ , μ — параметры Ламе, \mathbf{I} — единичный тензор, составленный из символов Кронекера. Пластические деформации в материале производятся в условиях принадлежности напряжений поверхности нагружений (текучести) $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0) = 0$ (σ_0 — предел текучести) в пространстве напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. В условиях принятия принципа Мизеса [14] функция $f(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_0)$ оказывается пластическим потенциалом со следованием ассоциированного с поверхностью нагружения закона пластического течения

$$\boldsymbol{\theta}^p = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \phi \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad \phi > 0, \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\theta}^p = \boldsymbol{\varepsilon}^p - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^p) \mathbf{I},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — девиатор тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$; $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ — тензор скоростей пластических деформаций, а $\boldsymbol{\theta}^p$ — его девиатор.

В качестве условия пластического течения (поверхности нагружения) будем использовать следующее обобщение условия максимальных октаэдрических напряжений Мизеса на случай вязкопластического течения [15, 16]:

$$\frac{3}{2} (\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\theta}^p) \cdot \cdot (\boldsymbol{\tau} - \eta \boldsymbol{\theta}^p) = \sigma_0^2.$$

Здесь η — коэффициент вязкого сопротивления пластическому течению.

Данные формулы можно привести к виду

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^p &= \frac{3\phi}{1 + 3\phi\eta} \boldsymbol{\tau}, \quad \phi = \frac{1}{3\eta} \left(\frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \boldsymbol{\tau}} - 1 \right), \\ \boldsymbol{\varepsilon}^p &= \frac{1}{\eta} \frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma} \boldsymbol{\tau}, \quad \Sigma^2 = \frac{3}{2} \boldsymbol{\tau} \cdot \cdot \boldsymbol{\tau}. \end{aligned} \quad (3)$$

Вместе с уравнением движения (равновесия) система уравнений (1)–(3) составляет замкнутую систему, которой подчинено деформирование упруговязкопластического тела.

2. Постановка задачи

Рассматриваем двухслойный полый вал, другими словами, биметаллическую трубу, радиус внутренней полости которой равен R_1 . Сама труба состоит из двух слоёв, являющихся деформируемыми, разделённых граничной поверхностью $r = R_2$. Боковая поверхность трубы $r = R_3$ полагается свободной от нагружения. Деформирование трубы происходит под действием давления $P = P(t)$, приложенного к поверхности внутренней полости



$r = R_1$. Для деформаций материала такой трубы имеем в цилиндрической системе координат r, φ, z

$$\begin{aligned} u_r &= u(r, t), \quad u_\varphi = u_z = 0, \quad d_{rr} = e_{rr} + p_{rr} = u_{,r}, \\ d_{\varphi\varphi} &= e_{\varphi\varphi} + p_{\varphi\varphi} = r^{-1}u, \quad d_{zz} = e_{zz} + p_{zz} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение равновесия запишется в виде

$$\sigma_{rr,r} + r^{-1}(\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}) = 0. \quad (5)$$

Граничные условия для трубы:

$$\sigma_{rr}(R_1, t) = p(t) = -P(t), \quad \sigma_{rr}(R_3, t) = 0. \quad (6)$$

На границе между слоями примем условия прилипания

$$\sigma_{rr}^{[1]}(R_2, t) = \sigma_{rr}^{[2]}(R_2, t), \quad u^{[1]}(R_2, t) = u^{[2]}(R_2, t). \quad (7)$$

Здесь $f^{[l]}$ обозначает значение параметра или переменной на слое l .

3. Первоначальное упругое деформирование

В начале деформирования напряжения малы и не возникает области пластического течения. Иными словами, необратимые деформации \mathbf{p} будут равны нулю. Используя соотношения (1), (2), уравнение равновесия (5) можно свести к двум дифференциальным уравнениям второго порядка для двух слоёв рассматриваемой трубы

$$u_{,rr}^{[l]} + r^{-1}u_{,r}^{[l]} - r^{-2}u^{[l]} = 0, \quad l = 1, 2. \quad (8)$$

Проинтегрировав данные уравнения (8) с учётом граничных условий (6) и условий на границе между слоями (7), получим следующее решение задачи упругого деформирования:

$$\begin{aligned} u^{[l]} &= c_1^{[l]}r + c_2^{[l]}r^{-1}, \quad \sigma_{rr}^{[l]} = 2(\lambda^{[l]} + \mu^{[l]})c_1^{[l]} - 2\mu^{[l]}c_2^{[l]}r^{-2}, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{[l]} &= 2(\lambda^{[l]} + \mu^{[l]})c_1^{[l]} + 2\mu^{[l]}c_2^{[l]}r^{-2}, \quad \sigma_{zz}^{[l]} = 2\lambda^{[l]}c_1^{[l]} - 2\mu^{[l]}c_2^{[l]}r^{-2}, \\ c_1^{[1]} &= pAD^{-1}, \quad c_2^{[1]} = pR_1^2BD^{-1}, \quad c_1^{[2]} = pR_1^2R_2^2\mu^{[2]}(\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]})D^{-1}, \\ c_2^{[2]} &= pR_1^2R_2^2R_3^2(\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]})(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]})D^{-1}, \\ A &= R_1^2R_2^2\mu^{[2]}(\mu^{[1]} + \lambda^{[2]} + \mu^{[2]}) + R_1^2R_3^2(\mu^{[1]} - \mu^{[2]})(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]}), \\ B &= R_2^4\mu^{[2]}(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]} - \lambda^{[1]} - \mu^{[1]}) - R_2^2R_3^2(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]})(\lambda^{[1]} + \mu^{[1]} + \mu^{[2]}), \\ D &= 2(\lambda^{[1]} + \mu^{[1]})A + 2\mu^{[1]}B. \end{aligned} \quad (9)$$

Из соотношений (3) следует, что пластичность в среде появится при условии $\Sigma > \sigma_0$, так как только при этом условии скорости пластического течения будут выше нуля. С помощью (9) найдём выражения для давления, при котором начнётся пластическое течение в деформируемой среде. Получим соответственного для первого и второго слоёв трубы

$$p^{[1]} = \pm \frac{1}{2\mu^{[1]}} \frac{r^2\sigma_0^{[1]}D}{\sqrt{A^2r^4 + 3B^2R_1^4}}, \quad p^{[2]} = \pm \frac{1}{2\mu^{[2]}} \frac{(\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]})^{-1}R_1^{-2}R_2^{-2}r^2\sigma_0^{[2]}D}{\sqrt{(\mu^{[2]})^2r^4 + 3R_3^4(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]})^2}}.$$

Полученные функции являются монотонно возрастающими, соответственно, наименьшее значение (по модулю) они будут принимать при минимально возможном значении r .



Для первого слоя это $r = R_1$, а для второго — $r = R_2$. С учётом ранее сказанного, пластическое течение начнётся при

$$p^{[1]} = \pm \frac{1}{2\mu^{[1]}} \frac{\sigma_0^{[1]} D}{\sqrt{A^2 + 3B^2}}, \quad p^{[2]} = \pm \frac{1}{2\mu^{[2]}} \frac{(\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]})^{-1} R_1^{-2} \sigma_0^{[2]} D}{\sqrt{(\mu^{[2]})^2 R_2^4 + 3R_3^4 (\lambda^{[2]} + \mu^{[2]})^2}}. \quad (10)$$

В случае деформирования однослойной трубы (без упрочняющего слоя), исходя из аналогичных соображений, пластическое течение начнётся при

$$p = \pm \frac{(\lambda + \mu)(R_2^2 - R_1^2)\sigma_0}{\sqrt{\mu^2 R_1^4 + 3(\lambda + \mu)^2 R_2^4}}. \quad (11)$$

Изучим, какое влияние на пластическое течение оказывают различные параметры. Предположим, что упругие модули совпадают и различны только пределы текучести. В этом случае первая формула из (10) сведётся к (11), а вторая запишется в виде

$$p^{[2]} = \pm \alpha \frac{R_2^2}{R_1^2} \frac{(\lambda + \mu)(R_3^2 - R_1^2)\sigma_0}{\sqrt{\mu^2 R_2^4 + 3(\lambda + \mu)^2 R_3^4}}, \quad \sigma_0^{[1]} = \sigma_0, \quad \sigma_0^{[2]} = \alpha \sigma_0.$$

Приравняв эти два условия, можно найти значение коэффициента α , при котором пластическое течение начнётся одновременно во внутреннем и внешнем слоях биметаллической трубы:

$$\alpha = \frac{R_1^2}{R_2^2} \sqrt{\frac{\mu^2 R_2^4 + 3(\lambda + \mu)^2 R_3^4}{\mu^2 R_1^4 + 3(\lambda + \mu)^2 R_3^4}}. \quad (12)$$

При α , меньшем приведённого значения, пластическое течение впервые будет появляться именно в начале второго слоя. При больших значениях пластичность будет зарождаться на границе первого слоя. Иными словами, α^{-1} — это во сколько раз предел текучести первого слоя должен быть больше второго, чтобы пластическое течение зародилось в основном слое.

В качестве примера рассмотрим толстостенную трубу наружным диаметром 68 мм, толщина стенки которой 16 мм. В наших обозначениях получим $R_1 = 0,018$ м и $R_2 = 0,034$ м для однослойной трубы. В качестве основного материала возьмём Ст 09Г2С, а для плакирующего слоя рассмотрим коррозионностойкий сплав Ст 13ХФА. Их параметры приводятся в таблице.

Согласно приведённым параметрам и формуле (11) подобная труба способна выдержать давление вплоть до $P = 165.864$ МПа в случае стали 13ХФА и $P = 121.854$ МПа для Ст 09Г2С перед началом пластического течения.

Рассмотрим двухслойную биметаллическую трубу с данными размерами, внутренний слой которой выполнен из коррозионностойкой стали 13ХФА, а внешний — из нелегированной стали Ст 09Г2С. Из формул (10) найдём такое положение разграничивающей слоёв поверхности $r = R_2$, при котором пластическое течение начнётся одновременно в первом и втором слоях. Получим значение $R_2 \approx 0.020471$ м.

Далее рассмотрим три случая, в которых толщина плакирующего внутреннего слоя будет равна 1.5, 2.5 и 3.5 мм. Получим соответственно $R_2 = 0.0195$, $R_2 = 0.0205$ и $R_2 = 0.0215$. В первом случае пластическое течение впервые появится во втором слое при давлении выше 144.406 МПа, во втором — в первом слое при $P > 160.026$ МПа, а в третьем — во внутреннем слое при $P > 160.712$ МПа. На рис. 1 приводится распределение перемещений и напряжений в материале двухслойной трубы перед началом пластического течения для всех трёх случаев.

Параметры материала
Table. Material Parameters

| Материал | λ , ГПа | μ , ГПа | σ_0 , МПа |
|----------|-----------------|-------------|------------------|
| Ст 09Г2С | 97 | 77 | 294 |
| Ст 13ХФА | 121 | 81 | 400 |

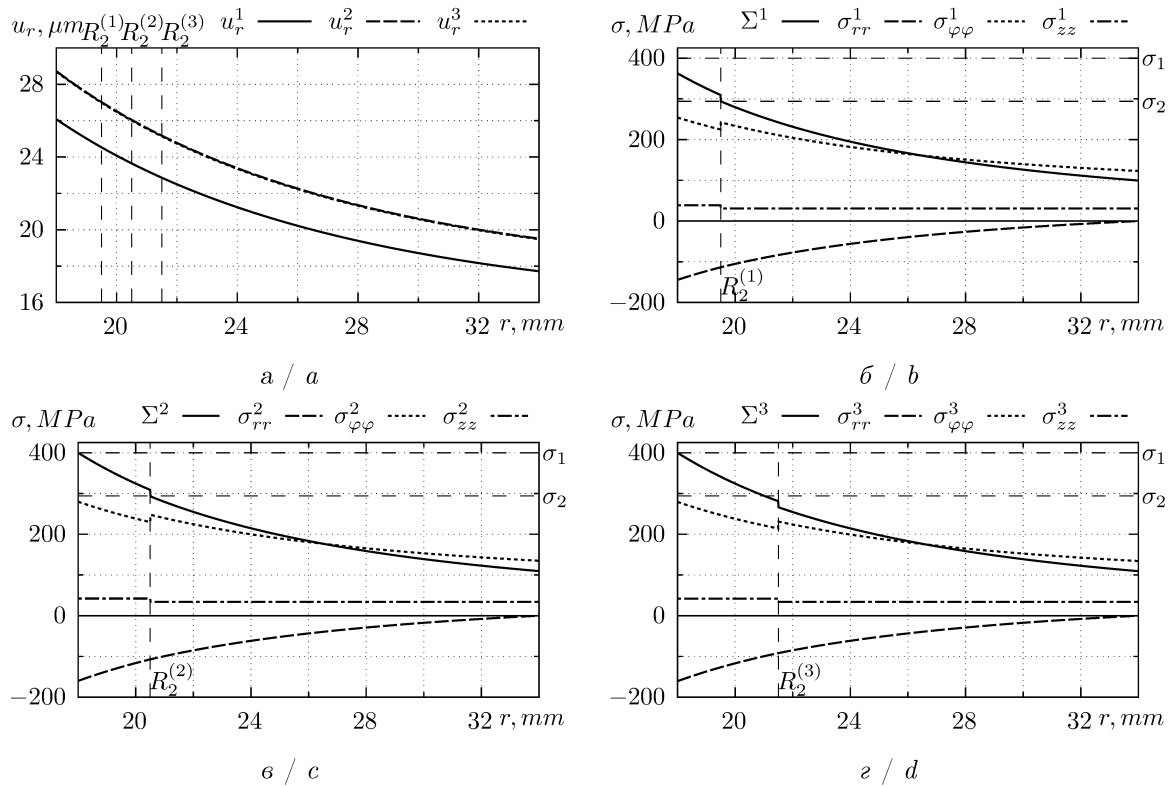


Рис. 1. Напряжённо-деформированное состояние перед началом пластического течения при различной толщине внутреннего слоя (1 — 1.5 мм, 2 — 2.5 мм, 3 — 3.5 мм): перемещения (а) и напряжения для первого (б), второго (в) и третьего (г) случаев

Fig. 1. Stress-strain state before the start of plastic flow at different inner layer thicknesses (1—1.5 mm, 2—2.5 mm, and 3—3.5 mm): displacements (a) and voltage for the first (b), second (c) and third (d) cases

4. Вязкопластическое течение

Когда давление превысит критическое значение (10), в материале двухслойной трубы начнут накапливаться необратимые деформации за счёт вязкопластического течения. Скорость их накопления рассчитываем по формулам (3), которые в нашем случае примут вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^p &= \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{zz}), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi}^p &= \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma} (2\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} - \sigma_{zz}), \\ \varepsilon_{zz}^p &= \frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma - \sigma_0}{\Sigma} (2\sigma_{zz} - \sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi})\end{aligned}\quad (13)$$

для каждого слоя материала трубы. Чтобы не загромождать формулы, индексы слоёв не приводятся.

Используя соотношения (1), (2), уравнение равновесия (5) можно свести к двум дифференциальным уравнениям второго порядка вида

$$u_{,rr}^{[l]} + r^{-1}u_{,r}^{[l]} - r^{-2}u^{[l]} = r^{-1} \frac{2\mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} (p_{rr}^{[l]} - p_{\varphi\varphi}^{[l]}) + p_{rr,r}^{[l]} + \frac{\lambda^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} (p_{\varphi\varphi,r}^{[l]} + p_{zz,r}^{[l]}). \quad (14)$$

Представив левую часть данного уравнения (14) в форме [17]

$$u_{,rr} + r^{-1}u_{,r} - r^{-2}u = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right),$$



проинтегрируем его и получим соотношения для нахождения компоненты вектора перемещений [18, 19] в каждом из слоёв:

$$\begin{aligned}
 u^{[l]} &= \frac{1}{2} C_1^{[l]} r + C_2^{[l]} r^{-1} + \frac{\mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} r I_1^{[l]} + r^{-1} I_2^{[l]}, \\
 I_1^{[l]}(r, t) &= \int_{R_l}^r x^{-1} \left(p_{rr}^{[l]}(x, t) - p_{\varphi\varphi}^{[l]}(x, t) \right) dx, \\
 I_2^{[l]}(r, t) &= \int_{R_l}^r x \left(\frac{\lambda^{[l]} + \mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} (p_{rr}^{[l]}(x, t) + p_{\varphi\varphi}^{[l]}(x, t)) + \frac{\lambda^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} p_{zz}^{[l]}(x, t) \right) dx.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений примут вид

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}^{[l]} &= (\lambda^{[l]} + \mu^{[l]}) C_1^{[l]} - 2\mu^{[l]} C_2^{[l]} r^{-2} + 2\mu^{[l]} \frac{\lambda^{[l]} + \mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} I_1^{[l]} - 2\mu^{[l]} r^{-1} I_2^{[l]}, \\
 \sigma_{\varphi\varphi}^{[l]} &= (\lambda^{[l]} + \mu^{[l]}) C_1^{[l]} + 2\mu^{[l]} C_2^{[l]} r^{-2} + 2\mu^{[l]} \frac{\lambda^{[l]} + \mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} I_1^{[l]} + 2\mu^{[l]} r^{-1} I_2^{[l]} - \\
 &\quad - \frac{2\mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} \left(\lambda^{[l]} p_{zz}^{[l]} + 2(\lambda^{[l]} + \mu^{[l]}) p_{\varphi\varphi}^{[l]} \right), \\
 \sigma_{zz}^{[l]} &= \lambda^{[l]} C_1^{[l]} + 2\mu^{[l]} \left(\frac{\lambda^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} I_1^{[l]} - 2 \frac{\lambda^{[l]} + \mu^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} p_{zz}^{[l]} - \frac{\lambda^{[l]}}{\lambda^{[l]} + 2\mu^{[l]}} p_{\varphi\varphi}^{[l]} \right).
 \end{aligned} \tag{16}$$

Подставив полученные значения перемещения (15) и напряжений (16) в граничные условия (6), (7), найдём значения коэффициентов интегрирования

$$\begin{aligned}
 C_1^{[1]} &= 2pAD^{-1} - 4\mu^{[1]} D^{-1} \left(\frac{\mu^{[1]}}{\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]}} B J_1^{[1]} + A J_2^{[1]} R_1^{-2} \right) + \\
 &\quad + 4\mu^{[1]} \mu^{[2]} R_2^2 D^{-1} \left((\lambda^{[2]} + \mu^{[2]}) R_3^2 J_1^{[2]} - (\lambda^{[2]} + 2\mu^{[2]}) J_2^{[2]} \right), \\
 C_2^{[1]} &= -pR_1^2 B D^{-1} - 2(\lambda^{[1]} + \mu^{[1]}) D^{-1} \left(\frac{\mu^{[1]}}{\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]}} R_1^2 B J_1^{[1]} + A J_2^{[1]} \right) + \\
 &\quad + 2\mu^{[2]} (\lambda^{[1]} + \mu^{[1]}) R_1^2 R_2^2 D^{-1} \left((\lambda^{[2]} + \mu^{[2]}) R_3^2 J_1^{[2]} - (\lambda^{[2]} + 2\mu^{[2]}) J_2^{[2]} \right), \\
 C_1^{[2]} &= 2p\mu^{[2]} (\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]}) R_1^2 R_2^2 D^{-1} + 4\mu^{[2]} E D^{-1} \left(\frac{\lambda^{[2]} + \mu^{[2]}}{\lambda^{[2]} + 2\mu^{[2]}} R_3^2 J_1^{[2]} - J_2^{[2]} \right) + \\
 &\quad + 4\mu^{[1]} \mu^{[2]} R_2^2 D^{-1} \left((\lambda^{[1]} + \mu^{[1]}) R_1^2 J_1^{[1]} - (\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]}) J_2^{[1]} \right), \\
 C_2^{[2]} &= p \left(\lambda^{[1]} + 2\mu^{[1]} \right) \left(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]} \right) R_1^2 R_2^2 R_3^2 D^{-1} + \\
 &\quad + 2\mu^{[1]} \left(\lambda^{[1]} + \mu^{[1]} \right) \left(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]} \right) R_1^2 R_2^2 R_3^2 D^{-1} J_1^{[1]} + \\
 &\quad + 2\mu^{[1]} D^{-1} \left(A R_1^{-2} R_2^2 + B - \mu_2 \left(2\lambda^{[2]} + 2\mu^{[2]} - \lambda^{[1]} \right) R_2^4 \right) J_2^{[1]} + \\
 &\quad + 2\mu^{[2]} R_2^2 F D^{-1} \left(\frac{\lambda^{[2]} + \mu^{[2]}}{\lambda^{[2]} + 2\mu^{[2]}} R_3^2 J_1^{[2]} - J_2^{[2]} \right), \\
 J_1^{[l]} &= I_1^{[l]}(R_{l+1}, t) = \int_{R_l}^{R_{l+1}} x^{-1} \left(p_{rr}^{[l]}(x, t) - p_{\varphi\varphi}^{[l]}(x, t) \right) dx, \quad J_2^{[l]} = I_2^{[l]}(R_{l+1}, t), \\
 E &= \mu^{[1]} \left(\lambda^{[1]} + \mu^{[1]} + \mu^{[2]} \right) R_2^2 - \left(\lambda^{[1]} + \mu^{[1]} \right) \left(\mu^{[1]} - \mu^{[2]} \right) R_1^2, \\
 F &= R_1^2 \left(\lambda^{[1]} + \mu^{[1]} \right) \left(\mu^{[1]} + \lambda^{[2]} + \mu^{[2]} \right) + \mu^{[1]} \left(\lambda^{[2]} + \mu^{[2]} - \lambda^{[1]} - \mu^{[1]} \right) R_2^2.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь сокращения A , B и D аналогичны таковым из (9).

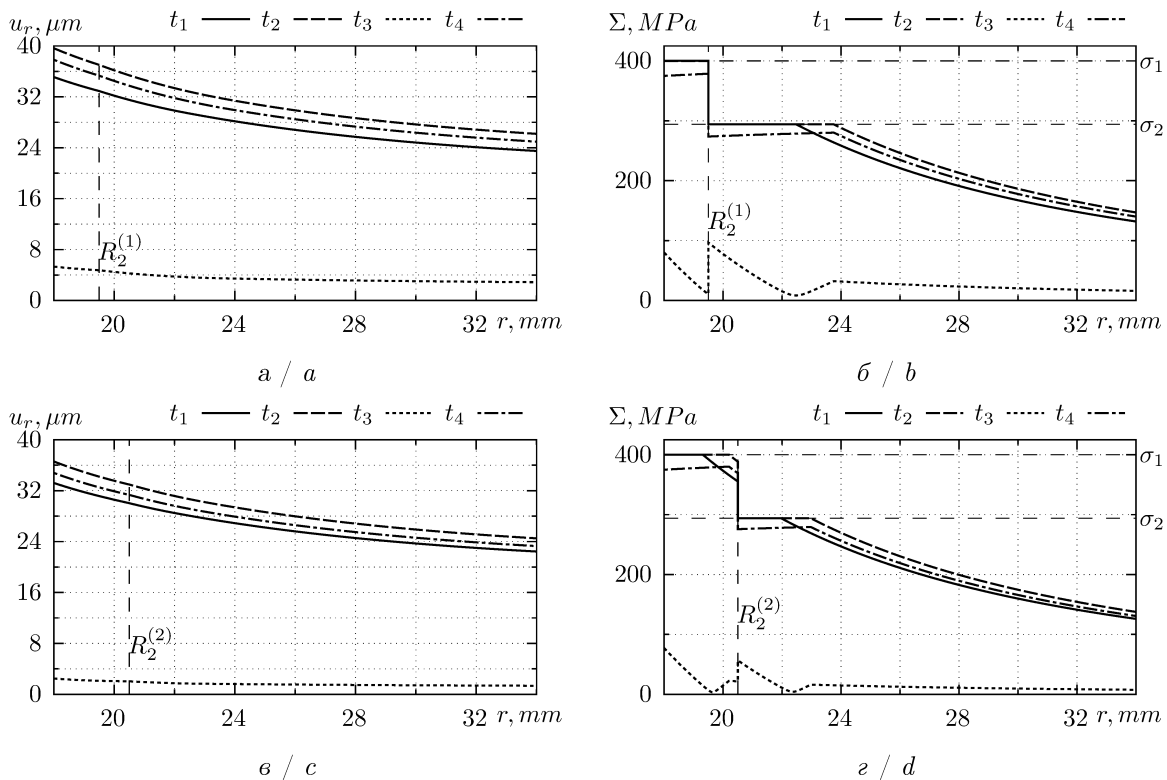
Полученные соотношения (15)–(17) можно использовать для нахождения точного решения задачи при заданных значениях нагружения $p = p(t)$ и накопленных необратимых деформаций \mathbf{p} . К сожалению, нахождение точного решения для необратимых деформаций из соотношений (13), (16) вызывает затруднения, поэтому их значения будем искать численно:

$$\begin{aligned} p_{rr}^{j+1} &= p_{rr}^j + ht \left(\frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma^j - \sigma_0}{\Sigma^j} (2\sigma_{rr}^j - \sigma_{\varphi\varphi}^j - \sigma_{zz}^j) \right), \\ p_{\varphi\varphi}^{j+1} &= p_{\varphi\varphi}^j + ht \left(\frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma^j - \sigma_0}{\Sigma^j} (2\sigma_{\varphi\varphi}^j - \sigma_{rr}^j - \sigma_{zz}^j) \right), \\ p_{zz}^{j+1} &= p_{zz}^j + ht \left(\frac{1}{3\eta} \frac{\Sigma^j - \sigma_0}{\Sigma^j} (2\sigma_{zz}^j - \sigma_{rr}^j - \sigma_{\varphi\varphi}^j) \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $f^j = f(t^j)$ — значение функции f при $t = t^j$, при этом $t^j = ht \cdot j$, где ht — шаг по времени.

При расчёте находим напряжённо-деформированное состояние материала трубы на текущем шаге в соответствии с формулами (15)–(17) при известных нагрузках и накопленных необратимых деформациях. Затем в соответствии с найденными напряжениями и формулами (18) находим значение необратимых деформаций на следующем шаге по времени и повторяем процесс. В дальнейших расчётах коэффициент вязкопластического сопротивления принимался равным $\eta^{[l]} = 600 \text{ МПа} \cdot \text{с}^{-1}$.

Как ранее было сказано, однослойная труба из сплава 13ХФА выдерживает давление порядка 165 МПа. Биметаллическая труба в лучшем из рассматриваемых случаев начинает пластически деформироваться уже при давлении в 161 МПа. Предположим, что необходимо повысить предел критического давления до границы в 180 МПа. Для этого можно воспользоваться известным процессом автофреттирования [20], т. е. предварительно подвергнуть образец более высокой нагрузке, чтобы накопленные пластические деформации позволяли выдержать большую рабочую нагрузку. Для этого рассмотрим задачу предварительного нагружения в 190 МПа и сравним поведение труб при давлении в 180 МПа без автофреттирования и после него. Результаты расчётов приведены на рис. 2 и 3.



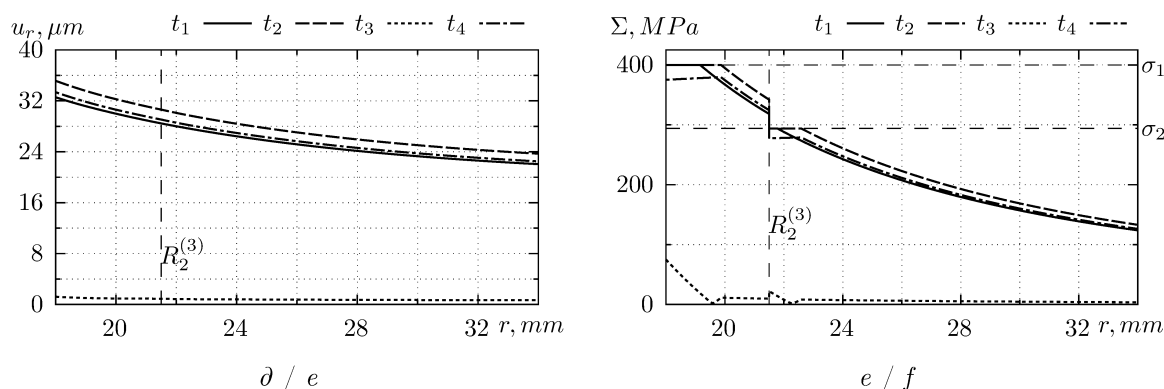


Рис. 2. Распределение перемещений u_r (а, в, д) и интенсивности напряжений Σ (б, г, е) в материале двухслойной трубы при первичной нагрузке до $P = 180$ МПа (t_1), максимальном давлении в $P = 190$ МПа (t_2), последующей разгрузке до $P = 0$ МПа (t_3) и повторном нагружении до рабочего давления $P = 180$ МПа после процесса автофреттирования при различной толщине внутреннего слоя: 1.5 мм (а, б), 2.5 мм (в, г) и 3.5 мм (д, е)

Fig. 2. Distribution of displacements u_r (a, c, e) and stress intensity Σ (b, d, e) in the double-layer pipe material at primary load up to $P = 180$ MPa (t_1), maximum pressure of $P = 190$ MPa (t_2), subsequent unloading to $P = 0$ MPa (t_3) and reloading to operating pressure of $P = 180$ MPa after the autofretting process at different thickness of the inner layer: 1.5 mm (a, b), 2.5 mm (c, d), and 3.5 mm (e, f)

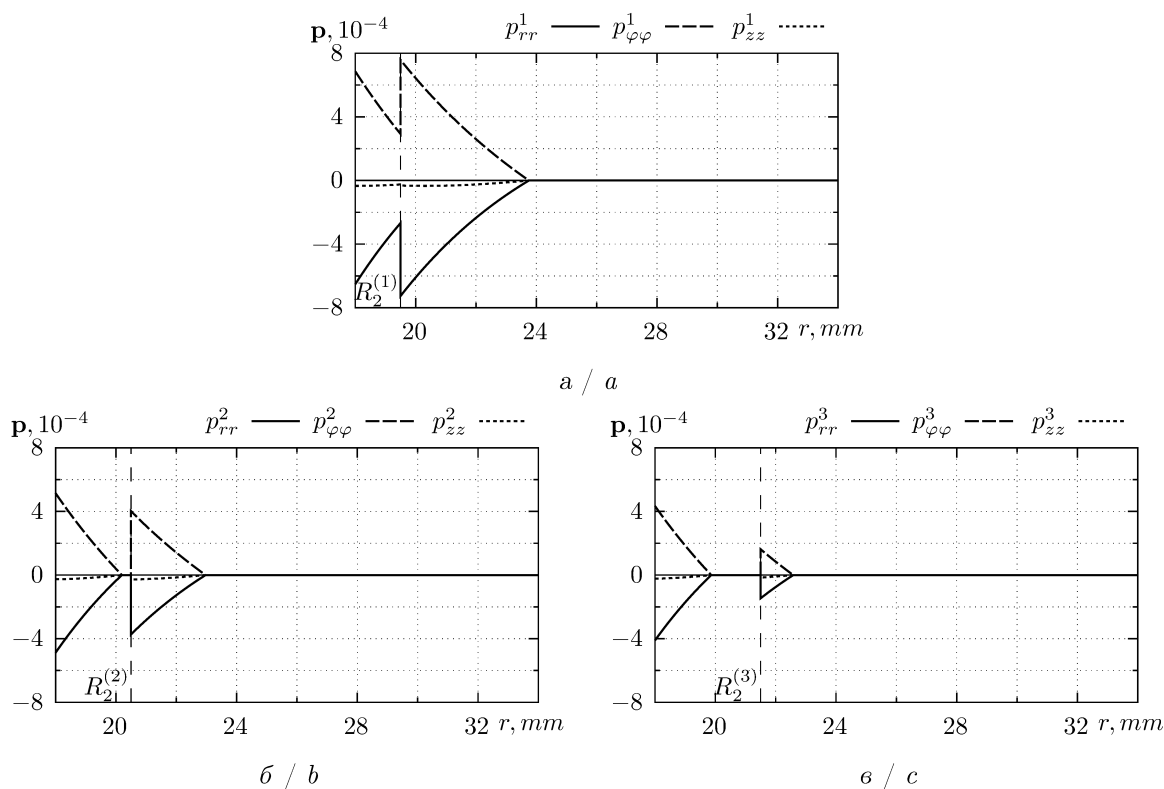


Рис. 3. Накопленные в процессе автофреттирования пластические деформации для труб с различной толщиной внутреннего слоя: 1.5 мм (а), 2.5 мм (б), 3.5 мм (в)

Fig. 3. Plastic deformations accumulated during the autofretting process for pipes with different inner layer thicknesses: 1.5 mm (a), 2.5 mm (b), 3.5 mm (c)

Как можно видеть из представленных графиков (см. рис. 2), при росте нагрузки сначала происходит упругое деформирование, затем на внутренней поверхности одного, а затем и другого слоёв (порядок зависит от рассматриваемого случая) сначала зарождаются,



а затем и развиваются области пластического течения. При заданной рабочей нагрузке $P = 180$ МПа ($t = t_1$, на графиках обозначено как t_1) во всех рассматриваемых случаях пластическое течение зарождается как во внутреннем (плакирующем) слое ($R_1 \leq r \leq R_2$), так и в основном внешнем ($R_2 \leq r \leq R_3$). При этом в первом случае (при тонком плакирующем слое толщиной в 1,5 мм) пластическое течение распространяется по всему внутреннему слою. С увеличением нагрузки до максимальных значений $P = 190$ МПа (случай t_2 на графиках) области пластического течения также увеличиваются. При этом чем толще плакирующий слой, тем меньшую область занимает пластическое течение.

После снятия нагрузки ($t = t_3$) можно заметить, что остаточные напряжения во внутреннем слое имеют схожее распределение во всех трёх случаях, в то время как во внешнем слое они тем больше, чем тоньше был плакирующий слой. При повторном нагружении до рабочих значений давления в $P = 180$ МПа ($t = t_4$) остаточное напряжение имеет схожее распределение во всех трёх случаях: оно немного не достигает тех значений, которые принимало при максимальной нагрузке. Соответственно, во всех трёх случаях пластическое течение не наблюдается. Однако наблюдается большой скачок напряжений на месте стыковки плакирующего слоя с основным, особенно в первом случае, с наиболее тонким внутренним слоем.

Из рис. 3 можно видеть, что в первом случае, с наиболее тонким внутренним слоем, накоплены наибольшие пластические деформации. С увеличением толщины слоя уменьшаются суммарные пластические деформации, накопленные в процессе автофреттирования.

Стоит отметить, что если между первым (толщина 1.5 мм) и вторым (толщина 2.5 мм) случаем разница ощутима, то между вторым и третьим (толщина 3.5 мм) случаями она уже не так значительна. Иными словами, толщина внутреннего слоя, найденная из условия одновременного зарождения пластического течения в двух слоях биметаллической трубы, является наиболее оптимальной. При меньших её значениях происходит значительная потеря прочностных свойств. Превышение данного значения хоть и позволяет повысить прочностные свойства, но незначительно.

Список литературы

1. Новожиллов В. В. Теория упругости. Ленинград : Судпромгиз, 1958. 370 с.
2. Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. Москва : Высшая школа, 1979. 318 с.
3. Новацкий В. Теория упругости. Москва : Мир, 1975. 872 с.
4. Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 1956. Vol. 4, iss. 4. P. 209–229. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(56\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8)
5. Дац Е. П., Мурашкин Е. В., Ткачева А. В., Щербатюк Г. А. Температурные напряжения в упругопластической трубе в зависимости от выбора условия пластичности // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 1. С. 32–43. EDN: YOFWCD
6. Буренин А. А., Ткачева А. В. Задача Гадолина о процессе сборки двухслойной предварительно напряженной трубы // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 5 (381). С. 225–240. <https://doi.org/10.15372/PMTF202315249>, EDN: XGBQDW
7. Ковтанюк Л. В., Полоник М. В. Задача Ламе о равновесии толстостенной трубы, изготовленной из несжимаемого упругопластического материала // Проблемы механики сплошных сред и элементов конструкций / отв. ред. А. А. Буренин, В. П. Мясников. Владивосток : Дальнаука, 1998. С. 94–113.
8. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Полоник М. В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, № 2. С. 315–325. EDN: OOMUOZ
9. Буренин А. А., Ковтанюк Л. В., Панченко Г. Л. Об изменениях в остаточных напряжениях в окрестности дефекта сплошности упруговязкопластического материала при повторном нагружении // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2023. № 6. С. 113–124. <https://doi.org/10.31857/S0572329923600275>, EDN: BNCCFU
10. Реформатская И. И., Завьялов В. В., Подобаев А. Н., Ащеулова И. И., Сульженко А. Н. Влияние структурно-фазовых неоднородностей углеродистых и низколегированных трубных



- сталей на развитие локальных коррозионных процессов // Защита металлов. 1999. Т. 35, № 5. С. 472–480.
11. Бикбулатов А. Л., Багманов Р. Р., Гумеров К. М. Особенности напряженно-деформированного состояния двухслойных труб в условиях нестационарных термомеханических воздействий // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2015. № 2 (100). С. 120–126. EDN: UGAVVL
 12. Реформатская И. И., Завьялов В. В., Родионова И. Г., Подобаев А. Н., Ащеулова И. И. Перспективы использования биметаллических труб на промысловых нефтегазопроводах Западной Сибири // Защита металлов. 2000. Т. 36, № 1. С. 51–57. EDN: UKAAJJ
 13. Kuanhai D., Jialian Li, Bin Li, Lin P., Wanying L., Yuanhua L. Study of internal pressure strength of the titanium-steel composite tube based on yield and shear failure mechanisms // International Journal of Hydrogen Energy. 2019. Vol. 44, iss. 5. P. 2997–3012. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2018.11.201>
 14. Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д. Теория пластичности. Владивосток : Дальнаука, 1998. 528 с.
 15. Мосолов П. П., Мясников В. П. Механика жесткопластических сред. Москва : Наука, 1981. 208 с.
 16. Ковтанюк Л. В., Шитиков А. В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестник Дальневосточного отделения РАН. 2006. № 4. С. 87–93. EDN: HZMRVR
 17. Буренин А. А., Ткачева А. В. О сборке двухслойной металлической трубы способом горячей посадки // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2019. № 3. С. 86–99. <https://doi.org/10.1134/S0572329919030073>, EDN: YPOULA
 18. Фирсов С. В. Пластическое течение и ползучесть в полом цилиндре с жестким внешним покрытием под действием внутреннего давления // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2021. Т. 25, № 4. С. 696–715. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1877>, EDN: TMRVNH
 19. Фирсов С. В. О влиянии деформаций ползучести материала вращающегося цилиндра на последующее пластическое течение // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2023. Т. 27, № 1. С. 102–118. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1955>, EDN: ZHFNQY
 20. Барвинок В. А., Федотов Ю. В., Родин Н. П., Кирилин А. Н. Упруго-пластическое самоупрочнение (автофретирование) толстостенных контейнеров давлением эластичной среды // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 1999. Т. 1, № 1. С. 157–160. EDN: FPHWPF

References

1. Novozhilov V. V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Leningrad, Sudpromgiz, 1958. 370 p. (in Russian).
2. Tolokonnikov L. A. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of a deformable solid]. Moscow, Vysshaya shkola, 1979. 318 p. (in Russian).
3. Nowacki W. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Mir, 1975. 872 p. (in Russian).
4. Bland D. R. Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening material subject to internal and external pressures and to temperature gradients. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1956, vol. 4, iss. 4, pp. 209–229. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(56\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(56)90030-8)
5. Dats E. P., Murashkin E. V., Tkacheva A. V., Shcherbatyuk G. A. Thermal stresses in an elastoplastic tube depending on the choice of yield conditions. *Mechanics of Solids*, 2018, vol. 53, iss. 1, pp. 23–32. <https://doi.org/10.3103/S002565441801003X>, EDN: YBOIYP
6. Burenin A. A., Tkacheva A. V. Gdolin problem of assembling a prestressed two-layer pipe. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2024, vol. 64, iss. 5, pp. 929–942. <https://doi.org/10.1134/S002189442305022X>
7. Kovtanuk L. V., Polonik M. V. Lamé's problem of the equilibrium of a thick-walled pipe made of an incompressible elastoplastic material. In: Burenin A. A., Myasnikov V. P. (eds.) *Problems of continuum mechanics and elements of constructions*. Vladivostok, Dal'nauka, 1998, pp. 94–113 (in Russian).
8. Burenin A. A., Kovtanuk L. V., Polonik M. V. The formation of a one-dimensional residual stress field in the neighbourhood of a cylindrical defect in the continuity of an elastoplastic medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, vol. 67, iss. 2, pp. 283–292. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(03\)90014-1](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(03)90014-1)
9. Burenin A. A., Kovtanuk L. V., Panchenko G. L. Changes in residual stresses in the vicinity of



- a continuity defect in an elastoviscoplastic material under repeated loading. *Mechanics of Solids*, 2023, vol. 58, iss. 6, pp. 2024–2033. <https://doi.org/10.3103/S0025654423600642>
10. Reformatskaya I. I., Podobaev A. N., Ashcheulova I. I., Sul'zhenko A. N., Zav'yalov V. V. The effect of the structure-phase inhomogeneity of carbon and low-alloyed steels on the development of local corrosion processes. *Protection of Metals*, 1999, vol. 35, iss. 5, pp. 429–436. EDN: [LFIVYF](#)
 11. Bikbulatov A. L., Bagmanov R. R., Gumerov K. M. Peculiarities of stress-strain state of two-layer pipes exposed to non-stationary thermal and mechanical conditions. *Problems of Gathering, Treatment and Transportation of Oil and Oil Products*, 2015, iss. 2 (100), pp. 120–126 (in Russian). EDN: [UGAVVL](#)
 12. Reformatskaya I. I., Zav'yalov V. V., Rodionova I. G., Podobaev A. N., Ashcheulova I. I. Prospects for use of bimetal pipes in field oil and gas pipelines of West Siberia. *Protection of Metals*, 2000, vol. 36, iss. 1, pp. 46–51. <https://doi.org/10.1007/BF02766738>, EDN: [LGASCR](#)
 13. Kuanhai D., Jialian Li, Bin Li, Lin P., Wanying L., Yuanhua L. Study of internal pressure strength of the titanium-steel composite tube based on yield and shear failure mechanisms. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2019, vol. 44, iss. 5, pp. 2997–3012. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2018.11.201>
 14. Bykovtsev G. I., Ivlev D. D. *Teoriya plastichnosti* [Theory of plasticity]. Vladivostok, Dal'nauka, 1998. 528 p. (in Russian).
 15. Mosolov P. P., Myasnikov V. P. *Mekhanika zhestkoplasticheskikh sred* [Mechanics of rigid plastic media]. Moscow, Nauka, 1981. 208 p. (in Russian).
 16. Kovtanyuk L. V., Shitikov A. V. On the theory of finite elastoplastic deformations of materials taking into account temperature and reological effects. *Vestnik of the Far East Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2006, iss. 4, pp. 87–93 (in Russian). EDN: [HZMRVR](#)
 17. Burenin A. A., Tkacheva V. E. Assembly of a two-layered metal pipe by using shrink fit. *Mechanics of Solids*, 2019, vol. 54, iss. 4, pp. 559–569. <https://doi.org/10.3103/S0025654419040095>, EDN: [BSSTLA](#)
 18. Firsov S. V. Plastic and creep deformations of thick-walled cylinder with a rigid casing under internal pressure. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2021, vol. 25, iss. 4, pp. 696–715 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1877>, EDN: [TMRVNH](#)
 19. Firsov S. V. The influence of creep deformations on the subsequent plastic flow in a material of rotating cylinder. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2023, vol. 27, iss. 1, pp. 102–118 (in Russian). <https://doi.org/10.14498/vsgtu1955>, EDN: [ZHFNQY](#)
 20. Barvinok V. A., Fedotov Yu. V., Rodin N. P., Kirilin A. N. Elasto-plastic self-reinforcement (autofretting) of thick-walled containers by pressure of elastic agent. *Izvestia of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*, 1999, vol. 1, iss. 1, pp. 157–160 (in Russian). EDN: [FPHWPF](#)

Поступила в редакцию / Received 13.03.2024

Принята к публикации / Accepted 4.10.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025

ИНФОРМАТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика.
Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 271–280

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025,
vol. 25, iss. 2, pp. 271–280

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-271-280>

EDN: WOGCCJ

Научная статья

УДК 681.5.015

Структурно-параметрическая идентификация граничных условий в обратных задачах теплопроводности с использованием ансамбля классов корректности

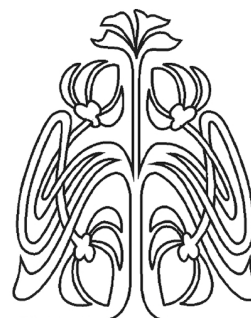
А. Н. Дилигенская[✉], В. В. Золотарёва

Самарский государственный технический университет, Россия, 443100,
г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244

Дилигенская Анна Николаевна, доктор технических наук, профессор кафедры автоматизации и управления в технических системах, adilenskaya@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9867-9781>, SPIN: 6950-2416, AuthorID: 312097

Золотарёва Виктория Владимировна, аспирант кафедры автоматизации и управления в технических системах, zolotarvika@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0003-9877-8178>, SPIN: 2972-3715, AuthorID: 1214855

Аннотация. Предложен подход к структурно-параметрической идентификации граничных условий процессов технологической теплофизики на основе решения обратных задач теплопроводности. В условиях априорной неопределенности этап структурной идентификации сводится к генерации альтернатив возможных классов решений, заданных в виде компактных множеств. Производится декомпозиция исходной некорректно поставленной задачи к совокупности условно-корректных задач, учитывающих ограничения на принадлежность решения соответствующим классам. На этапе параметрической идентификации с учетом заданной модельной структуры проводится параметризация идентифицируемой характеристики и соответствующей ей результирующей функции состояния и осуществляется редукция полученных задач к задаче параметрической оптимизации. Их решение реализуется на основе методов оптимального управления системами с распределенными параметрами при оценивании температурной невязки в равномерной метрике. Аналитический метод минимаксной оптимизации, учитывающий альтернативные свойства оптимальных распределений, обеспечивает решение задач математического программирования относительно значений вектора параметров для каждой из сформулированных альтернатив. Выбор адекватной математической модели из всех доступных вариантов осуществляется на базе минимаксного критерия, и ее структура может быть уточнена за счет расширения классов решений. Представленный подход демонстрирует удовлетворительное качество идентификации при типовых режимах работы тепловых установок на множествах достаточно гладких функций с минимально возможным для требуемой точности решения числом параметров. Подход направлен на обеспечение информационной поддержки процесса принятия решения



Научный
отдел





о структуре модельного оператора в обратных задачах теплопроводности. Улучшение качества идентификации при сложных режимах работы оборудования осуществляется за счет генерации гипотез в виде классов корректности, параметризуемых вектором параметров более высокой размерности.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности, структурная идентификация, параметрическая идентификация, генерирование модельных операторов, компактные множества решений, минимаксная оптимизация, принятие решения

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-29-00521, <https://rscf.ru/project/23-29-00521/>).

Для цитирования: Дилигенская А. Н., Золотарёва В. В. Структурно-параметрическая идентификация граничных условий в обратных задачах теплопроводности с использованием ансамбля классов корректности // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 271–280. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-271-280>, EDN: WOGCCJ

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Structural-parametric identification of boundary conditions in inverse heat conduction problems using an ensemble of correctness classes

A. N. Diligenskaya✉, V. V. Zolotaryova

Samara State Technical University, 244 Molodogvardeyskaya St., Samara 443100, Russia

Anna N. Diligenskaya, adiligenskaya@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9867-9781>, SPIN: 6950-2416, AuthorID: 312097

Victoria V. Zolotaryova, zolotarvika@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0003-9877-8178>, SPIN: 2972-3715, AuthorID: 1214855

Abstract. An approach to structural-parametric identification of boundary conditions of technological thermal physics processes based on the solution of inverse heat conduction problems is proposed. The stage of structural identification under conditions of a priori uncertainty is reduced to generation of alternatives of possible classes of solutions, which are given in the form of compact sets. Taking into account the restrictions on the membership of the solution to the corresponding classes, the initial incorrectly posed problem was decomposed into a set of conditionally correct problems. Parametrization of the identified characteristic and the resulting state function corresponding to it is carried out at the stage of parametric identification on the basis of the given model structure. Thus, the obtained problems are reduced to parametric optimization problems. Its solution is realized on the basis of methods of optimal control of systems with distributed parameters estimating of temperature discrepancy in a uniform metric. The analytical method of minimax optimisation, considering alternance properties of optimal distributions, allows solving mathematical programming problems concerning the values of the parameter vector for each of the formulated alternatives. The minimax criterion is used to select an appropriate mathematical model from all available variants. If necessary, the structure of the model can be refined by extending the classes of solutions. The presented approach demonstrates satisfactory quality of identification at typical modes of operation of thermal plants on sets of sufficiently smooth functions with the minimum possible number of parameters for the required accuracy of the solution. The aim of the approach is to provide information support for the decision making process on the structure of the model operator in inverse heat conduction problems. By generating hypotheses in the form of correctness classes parameterised by a vector of parameters of higher dimensionality, the quality of identification is improved in complex equipment operating modes.

Keywords: inverse heat conduction problem, structural identification, parametric identification, generation of model operators, compact sets of solutions, minimax optimization, decision making

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-29-00521, <https://rscf.ru/en/project/23-29-00521/>).

For citation: Diligenskaya A. N., Zolotaryova V. V. Structural-parametric identification of boundary conditions in inverse heat conduction problems using an ensemble of correctness classes. *Izvestiya of Saratov University*.



Введение

Одним из ключевых факторов, определяющих эффективность решения задач управления технологическими процессами и проектирования технических систем, является достоверность, точность и адекватность их математического описания. В сфере технологической теплофизики методы и средства математического моделирования, основанные на заданной проектно или экспериментально полученной информации, играют одну из ведущих ролей при получении всесторонней информации о тепловом состоянии процесса. Несмотря на рост и развитие большого числа методов, направленных на восстановление информации о математической модели сложных теплотехнических систем, проблема их структурной идентификации остается чрезвычайно широкой, сложной и трудноформализуемой. В большинстве случаев ее решение осуществляется применительно к частным случаям и сводится к параметрической или функциональной идентификации [1].

Одним из эффективных средств идентификации тепловых процессов по их косвенным проявлениям или оптимального проектирования теплотехнических систем и в то же время фундаментальным научным направлением является методология решения обратных задач теплопроводности (ОЗТ). Разработанные методы итерационной регуляризации [2, 3], автоматизированного подбора [4], оптимальной динамической фильтрации [4, 5], спектральных функций [4] и другие [6–8] доказали свою эффективность при решении широкого спектра ОЗТ при идентификации начальных и граничных условий, теплофизических, внутренних и геометрических характеристик [9, 10].

Использование методов теории оптимального управления, применение к решению ОЗТ экстремального подхода позволяет свести обратную задачу к вариационной, осуществляющей минимизацию целевого функционала в пространстве возможных решений. Сужение множества решений до класса корректности обеспечивает переход к условно-корректным задачам, для которых могут быть найдены устойчивые приближения решения [11, 12]. Сложностью такого подхода является отсутствие в большинстве случаев априорной информации о возможных классах решений. Для преодоления этого в статье рассмотрены стандартные для тепловых процессов множества корректности, соответствующие типовым режимам работы оборудования.

В реальных условиях идентификацию процессов теплообмена приходится производить в условиях структурно-параметрической неопределенности, относящейся как к структуре, так и к характеристикам изучаемого объекта. В такой ситуации возрастает необходимость разработки научных подходов, обеспечивающих информационную поддержку и позволяющих свести исходную трудноформализованную проблему к серии хорошо формализуемых [13, 14].

Сочетание традиционных методов теории некорректных задач и теплопроводности, учитывающих сущность протекающих явлений, и средств искусственного интеллекта, поддерживающих процедуру принятия решения в условиях неопределенности, способствует повышению качества идентификации. Совместное применение элементов системного подхода и гипотетико-дедуктивного метода научных исследований может повысить достоверность построения математической модели процессов технологической теплофизики, в первую очередь, за счет решения задачи структурной идентификации.

В работе рассмотрены задачи построения математических моделей процессов и систем технологической теплофизики, относящихся к бесконечномерным системам и описываемых уравнениями математической физики параболического типа. Предлагается возможный подход к структурно-параметрической идентификации, на первом этапе генерирующий набор



возможных альтернатив для математического оператора модели, каждая из которых задается на выбранных классах корректности и параметризуется соответствующим вектором параметров. На втором этапе решается задача параметрической идентификации с использованием методов оптимального управления системами с распределенными параметрами. Аналитический метод минимаксной оптимизации [15, 16] позволяет последовательно строить устойчивые приближения к решению на основе минимизации максимального отклонения модельного температурного распределения от заданного. Далее реализуется этап проверки гипотез и выбора наилучшей адекватной математической модели на базе принятого функционального (минимаксного) критерия. При необходимости производится расширение возможных классов решений, и процедура поиска решений повторяется.

1. Декомпозиция некорректной задачи

Исследуется граничная обратная задача теплопроводности, относящаяся к классу некорректно поставленных задач, в экстремальной постановке. Предлагаемый подход универсален по отношению к виду математической модели исследуемого явления. В работе для сохранения особенностей бесконечномерных процессов он рассмотрен на примере базового процесса теплопроводности, который описывается типовым аналитическим линейным одномерным уравнением математической физики параболического типа, дополненным начальными и граничными условиями:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < R, \quad 0 < t < t^*; \quad (1)$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=R} = q(t). \quad (2)$$

Граничная обратная задача сформулирована в экстремальной постановке, при которой в задаче (1), (2) входной доступной информацией является результирующая функция состояния — температура $T(x^*, t)$, заданная проектно или полученная экспериментально на заданном интервале $t \in [0, t^*]$ в некоторой фиксированной точке x^* , а выходной искомой величиной — плотность граничного теплового потока $q(t)$. Тем самым ставится задача восстановления сосредоточенной функции $q(t)$, обеспечивающей минимизацию максимального абсолютного значения температурного отклонения $T(x^*, t) - T_M(x^*, q_M(t), t)$ экспериментального распределения $T(x^*, t)$ от модельного $T_M(x^*, q_M(t), t)$, соответствующего искомой функции

$$I(q_M(t)) = \max_{t \in [0, t^*]} |T(x^*, t) - T_M(x^*, t, q_M(t))| \rightarrow \min_{q_M(t) \in V}. \quad (3)$$

Оценка невязки реализуется в равномерной метрике, исключающей локальные выбросы в отдельных точках, как правило, на границах интервала идентификации.

Задача формулируется как задача оптимального управления, в которой необходимо отыскать подчиненное условию принадлежности некоторому заданному множеству V достаточно гладких функций управляющее воздействие, доставляющее минимакс на интервале идентификации. Использование аналитического представления решения позволяет провести всесторонний анализ существенных свойств и характеристик объекта.

В условиях априорной структурной неопределенности искомой характеристики $q(t)$ производится декомпозиция задачи (3) на серию задач, оперирующих в каждом случае с отдельным классом V_i , $i = 1, \dots, N$ физически реализуемых функций, принадлежащих компактному множеству. Задание конкретных классов решений в форме компактных множеств соответствует редукции исходной задачи к совокупности условно-корректных задач. Вопрос выбора компактных множеств не имеет очевидного решения. В общем случае такой выбор осуществляется на основе очевидных физических соображений в предметной области, теоретических сведений о физических закономерностях и априорной информации о процессе для каждой конкретной ситуации. Как правило, процессы технологической теплофизики



характеризуются инерционностью, что приводит к отсутствию резких скачкообразных изменений в характеристиках объекта, во внешних воздействиях и в выходной величине, которые, соответственно, могут быть описаны достаточно гладкими функциями. При отсутствии импульсных воздействий класс решений зачастую может быть ограничен непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми функциями.

В рассматриваемой задаче выбор компактных множеств производился на основе анализа [17], и в качестве классов решений были выделены множества постоянных, экспоненциальных (возрастающих, убывающих), линейных, параболических и т.д. функций [18].

Тем самым на первом этапе на основе физического смысла задачи генерируется совокупность конечного числа N альтернатив для модельного оператора искомой функции, которые однозначно определены своими векторами параметров. Таким образом, этап структурной идентификации сводится к выработке гипотез о возможном модельном операторе, которые будут подтверждены или опровергнуты на последующем этапе параметрической идентификации и редукции исходной некорректной задачи к совокупности условно-корректных задач.

2. Минимаксная оптимизация на классах корректности

Принадлежность заданным множествам корректности рассматривается как ограничение на класс решения. На этапе декомпозиции получена совокупность условно корректных задач, в каждой из которых требуется найти подчиненное условию принадлежности $q_M(t) \in V_i$, $i = 1, \dots, N$ заданному классу корректности управляющее воздействие $q_M(t)$, при котором на интервале идентификации достигается выполнение минимаксного соотношения (3).

Модельная температурная реализация, соответствующая решению $q_M(t)$, получена на основе точной математической модели процесса теплопроводности, позволяющей учесть все существенные особенности процесса, в виде бесконечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{T}_n(\mu_n, t)}{dt} = -\mu_n^2 \bar{T}_n(\mu_n, t) + \bar{g}_n(\mu_n, t), \quad \bar{T}_n(\mu_n, 0) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (4)$$

где $\bar{T}_n(\mu_n, t)$, $\bar{g}_n(\mu_n, t)$, $\bar{T}_n(\mu_n, 0)$ — коэффициенты разложения в бесконечный ряд по собственным функциям тепловой задачи функции температуры, граничного воздействия и начального пространственного распределения.

Предварительная параметризация идентифицируемой характеристики $q_M(\Delta, t)$ на множествах корректности приводит к ее однозначному представлению с помощью вектора параметров Δ . На основе точного решения краевой задачи осуществляется переход к параметрическому представлению температурной реализации $T_M(x^*, \Delta, t)$ на замкнутом множестве параметров. Тем самым осуществляется редукция задачи (3) к специальным негладким задачам математического программирования

$$I(\Delta_i^{(K)}) = \max_{t \in (0, t^*)} |T(x^*, t) - T_M(x^*, t, \Delta_i^{(K)})| \rightarrow \min_{\Delta_i^{(K)} \in V_i} \quad (5)$$

относительно искомого вектора параметров $\Delta_i^{(K)}$ для каждого множества решений V_i , $i = 1, \dots, N$.

Полученная задача (5) реализует оценивание температурного отклонения расчетного состояния от заданного на временном интервале в равномерной (чебышевской) метрике. Эта задача предусматривает экстремизацию минимаксного функционала конечного числа K переменных с бесконечным числом ограничений по временной переменной. Далее, для решения полученных задач параметрической оптимизации (ЗПО) могут быть использованы различные численные подходы теории некорректных задач.



Авторами применен основанный на теории оптимального управления системами с распределенными параметрами специальный метод параметрической оптимизации, учитывающий альтернативные свойства оптимальных решений [15, 16]. Данные свойства позволяют задать конфигурацию температурной невязки, которая характеризуется тем, что ее величина достигает знакопеременяющихся предельных значений в отдельных точках на интервале идентификации. Отличительным свойством предложенного метода является то, что число таких точек однозначно связано с числом искомых параметров, а конкретнее, превышает его на единицу. Для каждого варианта $i = 1, \dots, N$ предложенных компактных множеств в зависимости от числа искомых параметров $K = K_i$ в параметризованном представлении идентифицируемой функции $q_M(\Delta_i^{(K)}, t)$ составляется замкнутая система расчетных соотношений для максимальных по абсолютной величине значений температурной невязки относительно всех неизвестных – вектора параметров и величины минимаксного отклонения. Последовательное численное решение всех полученных систем расчетных соотношений приводит к приближенным решениям на выбранных компактных множествах, с разной степенью точности аппроксимирующих искомую характеристику.

3. Анализ альтернатив и принятие решения

На заключительном этапе выполняется проверка выдвинутых гипотез об адекватности полученных моделей с заданными структурными операторами искомому воздействию. Выбор достоверной математической модели из возможных вариантов осуществляется на базе минимаксного или квадратичного критерия подобия на доступных для наблюдения экспериментальных (или проектных) $T(x^*, t)$ и расчетных $T_M(x^*, \Delta_i^{(K)}, t)$ данных для температурного состояния.

В типовых случаях, когда при реализации теплового процесса используются базовые режимы работы технологического оборудования (постоянные значения управляющего воздействия, линейно нарастающие, апериодические режимы), найденное приближенное решение на одном из представленных множеств может обладать достаточной точностью. По результатам начальных этапов структурно-параметрической идентификации делается заключение об адекватности полученной модели или о необходимости расширения ансамбля классов решений. Если ни одна из полученных моделей не удовлетворяет требованиям точности, проводится анализ решений и предусматриваются рекомендации по генерации альтернатив, содержащих функциональные зависимости более высокого порядка, обладающие необходимой динамикой. При идентификации более сложных тепловых режимов даже гипотеза с наименьшим отклонением может не удовлетворять физическому смыслу и требованиям точности. В таком случае, например, может быть использована кусочно-параболическая аппроксимация, позволяющая теоретически получить любую требуемую точность за счет увеличения числа параметров кубической сплайн-аппроксимации [15, 16]. Изложенный подход к структурно-параметрической идентификации представлен на рис. 1.

4. Демонстрация результатов

Для демонстрации предложенного подхода были выполнены исследования на некоторых модельных функциях, приближенно описывающих типовые режимы работы теплового оборудования. Была проведена серия вычислительных экспериментов, где в качестве идентифицируемых функций использовалась линейная комбинация из экспоненциальных, затухающих колебательных, синусоидальных составляющих с весовыми коэффициентами, которые задавали наличие той или иной тенденции. Остальные составляющие имитировали присутствие возмущающих факторов. Проведенные эксперименты симулировали режимы работы оборудования: плавное увеличение управляющего воздействия (эксперимент № 1), плавное нарастание и убывание (эксперимент № 2), плавный пуск и выход на установившийся режим (эксперимент № 3).

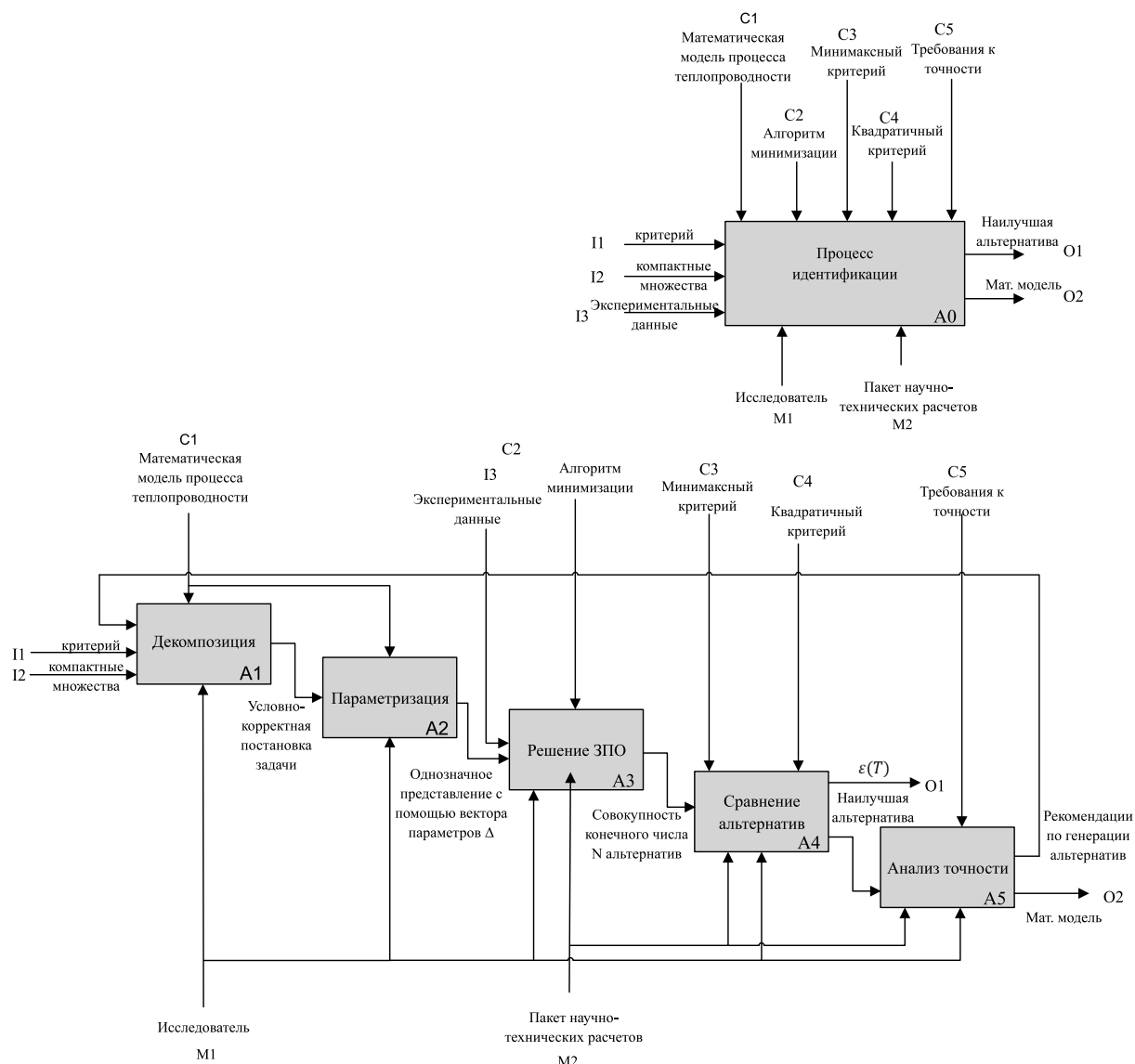


Рис. 1. Схема структурно-параметрической идентификации процессов теплопроводности с использованием ансамбля классов корректности

Fig. 1. Scheme of structural-parametric identification of heat conduction processes using an ensemble of correctness classes

В качестве классов решений были выбраны следующие компактные множества:

- множество V_1 постоянных функций $f(t) = \Delta = \text{const}$, заданных одним параметром $\Delta_1^{(1)}$;
- множество V_2 линейных функций $f(t) = \Delta_1 t + \Delta_2$ с вектором параметров $\Delta_2^{(2)}$;
- множество V_3 экспоненциально возрастающих функций $f(t) = \Delta_1(e^{\Delta_2 t} - 1)$ с вектором $\Delta_3^{(2)}$;
- множество V_4 экспоненциальных зависимостей с выходом на установившийся режим $f(t) = \Delta_1(1 - e^{\Delta_2 t})$ с вектором $\Delta_4^{(2)}$;
- множество V_5 синусоидальных функций $f(t) = \Delta_1(\sin \Delta_2 \pi t + \Delta_3)$ с вектором $\Delta_5^{(3)}$;
- множество V_6 параболических функций $f(t) = \Delta_1 t^2 + \Delta_2 t + \Delta_3$ с вектором $\Delta_6^{(3)}$.

Некоторые результаты проведенных исследований представлены в табл. 1 и на рис. 2, 3.

На рис. 2 представлены ошибки аппроксимации температурного распределения (эксперимент № 3) на компактных множествах V_4 и V_6 . На рис. 3 представлены заданная зависимость (эксперимент № 3) и построенные модельные распределения на компактах V_4 и V_6 .

Таблица 1 / Table 1

Точность решения задачи на множествах корректности, %
Accuracy of problem solving on correctness sets, %

| Номер эксперимента | Погрешность | Компактное множество решений | | | | | |
|--------------------|------------------------|------------------------------|--------|-------|--------|-------|--------|
| | | V_1 | V_2 | V_3 | V_4 | V_5 | V_6 |
| 1 | $\varepsilon^{(1)}(T)$ | — | 6.411 | 0.83 | 13.984 | — | 1.258 |
| | $\varepsilon^{(1)}(q)$ | — | 53.255 | 11.63 | >80 | — | 17.074 |
| 2 | $\varepsilon^{(2)}(T)$ | 5.7 | 1.576 | — | 1.961 | 0.414 | 0.182 |
| | $\varepsilon^{(2)}(q)$ | 6.45 | 9.259 | — | 9.143 | 2.071 | 1.387 |
| 3 | $\varepsilon^{(3)}(T)$ | 22.1 | 5.93 | — | 2.44 | 2.63 | 1.47 |
| | $\varepsilon^{(3)}(q)$ | >80 | 19.8 | — | 6.9 | 8.6 | 5.2 |

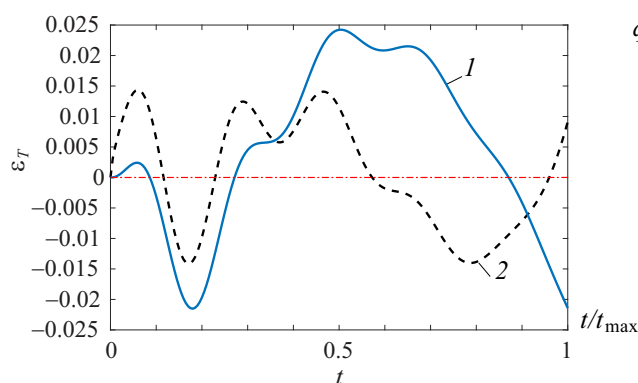


Рис. 2. Оптимальная конфигурация температурной погрешности: 1 — $(T(x^*, t) - T_M(x^*, \Delta_4^{(2)}, t))$; 2 — $(T(x^*, t) - T_M(x^*, \Delta_6^{(3)}, t))$
Fig. 2. Optimal configuration of temperature error: 1 — $(T(x^*, t) - T_M(x^*, \Delta_4^{(2)}, t))$; 2 — $(T(x^*, t) - T_M(x^*, \Delta_6^{(3)}, t))$

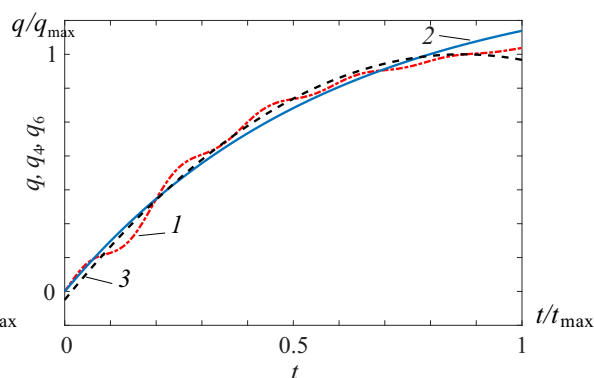


Рис. 3. Аппроксимация плотности теплового потока: 1 — $q(t)$; 2 — $q(\Delta_4^{(2)}, t)$; 3 — $q(\Delta_6^{(3)}, t)$
Fig. 3. Approximation of heat flux density: 1 — $q(t)$; 2 — $q(\Delta_4^{(2)}, t)$; 3 — $q(\Delta_6^{(3)}, t)$

Анализ полученных результатов показывает, что практически для всех случаев сохраняется общая тенденция зависимости между абсолютными значениями погрешности $\varepsilon(T) = |T(x^*, t) - T_M(x^*, \Delta_i^{(K)}, t)|$ температурной аппроксимации и ошибки приближения граничных условий $\varepsilon(q) = |q^*(t) - q_M(\Delta_i^{(K)}, t)|$. Уменьшение невязки между заданной $T(x^*, t)$ и расчетной $T_M(x^*, \Delta_i^{(K)}, t)$ температурными кривыми соответствует снижению отклонения модельного распределения $q_M(\Delta_i^{(K)}, t)$ от идентифицируемого $q^*(t)$ и наоборот (за исключением решения на V_1 в эксперименте № 2). Отсутствие численных значений в оценках температурной невязки и погрешности соответствуют тому, что выбранная функциональная зависимость, соответствующая рассматриваемому классу решений, противоречит физической сущности идентифицируемого режима, и полученное решение расходится или точность решения излишне велика.

Заклучение

В работе получены результаты, направленные на развитие методов решения проблемы структурно-параметрической идентификации процессов технологической теплофизики. Общая проблема структурной идентификации, сопровождающаяся априорной неопределенностью, является чрезвычайно широкой и содержащей трудноформализуемые условия.

Тем не менее, сформулирован новый подход к исследованию рассматриваемой проблемы, в условиях принятых ограничений позволяющий получить удовлетворительные результаты; определены необходимые этапы, представлены возможные классы моделей. Использование



представленного подхода для идентификации типовых режимов, особенно на начальных этапах исследования, сопровождается поиском структуры и построением модели, обладающей требуемой точностью, в пространстве решений с наименьшим числом параметров. Последующее развитие направлено на расширение множеств решений, содержащих более сложные зависимости идентифицируемых характеристик и параметризуемых векторами параметров большей размерности. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки методологического и математического обеспечения информационной поддержки выработки решения о структуре идентифицируемых характеристик.

Список литературы

1. Мацевитый Ю. М., Гайшун И. В., Борухов В. Т., Костилов А. О. Параметрическая и функциональная идентификация тепловых процессов // Проблемы машиностроения. 2011. Т. 14, № 3. С. 40–47. EDN: [VQXXCT](#)
2. Алифанов О. М., Вабищевич П. Н., Михайлов В. В., Ненарокомов А. В., Полежаев Ю. В., Резник С. В. Основы идентификации и проектирования тепловых процессов и систем : учеб. пособие. Москва : Логос, 2001. 400 с.
3. Алифанов О. М., Ненарокомов А. В., Салосина М. О. Обратные задачи в тепловом проектировании и испытаниях космических аппаратов. Москва : Изд-во МАИ, 2021. 160 с. EDN: [QCQEIV](#)
4. Мацевитый Ю. М. Обратные задачи теплопроводности : в 2 т. Киев : Наукова думка, 2002. Т. 1. 405 с.
5. Мацевитый Ю. М., Маляренко В. А., Мултановский А. В. Применение метода оптимальной фильтрации при решении нелинейных задач теплопроводности // Проблемы машиностроения. 1977, № 5. С. 61–65.
6. Swati Agarwala, K. Narayan Prabhu. An experimental approach based on inverse heat conduction analysis for thermal characterization of phase change materials // Thermochimica Acta. 2020. Vol. 685. Art. 178540. <https://doi.org/10.1016/j.tca.2020.178540>
7. Ping Xiong Jian Deng, Tao Lu, Qi Lu, Yu Liu, Yong Zhang. A sequential conjugate gradient method to estimate heat for nonlinear inverse heat conduction problem // Annals of Nuclear Energy. 2020. Vol. 149. Art. 107798. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2020.107798>
8. Bowen Zhang, Jie Mei, Miao Cui, Xiao-wei Gao, Yuwen Zhang. A general approach for solving three-dimensional transient nonlinear inverse heat conduction problems in irregular complex structures // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2019. Vol. 140. P. 909–917. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.06.049>
9. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. Москва : Наука, 1981. 400 с.
10. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи : учебник для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. Новосибирск : Изд-во Сибирского отд-ния РАН, 2018. 508 с. <https://doi.org/10.15372/INVERSE2018KSI>, EDN: [UQAVAO](#)
11. Вапник В. Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. Москва : Наука, 1979. 448 с.
12. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва : Наука, 1978. 206 с.
13. Прангизвили И. В., Лотоцкий В. А., Гинсберг К. С., Смолянинов В. В. Идентификация систем и задачи управления: на пути к современным системным методологиям // Проблемы управления. 2004. № 4. С. 2–15. EDN: [HSQSZP](#)
14. Гинсберг К. С. Концептуальные основы методологии структурной идентификации для создания систем автоматического управления с требуемыми свойствами // Информационные технологии и вычислительные системы. 2019. № 1. С. 38–48. <https://doi.org/10.14357/20718632190104>, EDN: [ZAJQWT](#)
15. Рапопорт Э. Я., Плещивцева Ю. Э. Специальные методы оптимизации в обратных задачах теплопроводности // Известия Российской академии наук. Энергетика. 2002. № 5. С. 144–155.
16. Diligenskaya A. N., Rapoport E. Ya. Analytical methods of parametric optimization in inverse heat-conduction problems with internal heat release // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2014. Vol. 87, iss. 5. P. 1126–1134. <https://doi.org/10.1007/s10891-014-1114-1>
17. Алифанов О. М. Обратные задачи теплообмена. Москва : Машиностроение, 1988. 280 с.
18. Дилигенская А. Н., Золотарёва В. В. Параметрическая идентификация граничного воздействия на компактных множествах заданной формы // Математические методы в технологиях и технике. 2022. № 12, ч. 1. С. 7–10. https://doi.org/10.52348/2712-8873_MMTT_2022_12_07, EDN: [TGGYQJ](#)



References

1. Matsevityi Yu. M., Gayshun I. V., Borukhov V. T., Kostikov A. O. Parametric and functional identification of thermal processes. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of Mechanical Engineering], 2011, vol. 14, iss. 3, pp. 40–47 (in Russian). EDN: [VQXXCT](#)
2. Alifanov O. M., Vabischevich P. N., Mikhailov V. V., Nenarokomov A. V., Polezhaev Yu. V., Reznik S. V. *Osnovy identifikatsii i proektirovaniya teplovykh protsessov i system* [Fundamentals of identification and design of thermal processes and systems]. Moscow, Logos, 2001. 400 p. (in Russian).
3. Alifanov O. M., Nenarokomov A. V., Salosina M. O. *Obratnye zadachi v teplovom proektirovanii i ispytaniyakh kosmicheskikh apparatov* [Inverse problems in thermal design and testing of spacecrafts]. Moscow, MAI Publ., 2021. 160 p. (in Russian). EDN: [QCQEIV](#)
4. Matsevityi Yu. M. *Obratnye zadachi teploprovodnosti* [Inverse heat-conduction problems]. Vol. 1. Kiev, Naukova dumka, 2002. 405 p. (in Russian).
5. Matsevityi Yu. M., Malyarenko V. A., Multanovsky A. V. Application of the optimal filtering method in solving nonlinear heat conduction problems. *Problemy mashinostroeniya* [Problems of Mechanical Engineering], 1977, iss. 5, pp. 61–65 (in Russian).
6. Swati Agarwala, K. Narayan Prabhu. An experimental approach based on inverse heat conduction analysis for thermal characterization of phase change materials. *Thermochimica Acta*, 2020, vol. 685, art. 178540. <https://doi.org/10.1016/j.tca.2020.178540>
7. Ping Xiong Jian Deng, Tao Lu, Qi Lu, Yu Liu, Yong Zhang. A sequential conjugate gradient method to estimate heat for nonlinear inverse heat conduction problem. *Annals of Nuclear Energy*, 2020, vol. 149, art. 107798. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2020.107798>
8. Bowen Zhang, Jie Mei, Miao Cui, Xiao-wei Gao, Yuwen Zhang. A general approach for solving three-dimensional transient nonlinear inverse heat conduction problems in irregular complex structures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019, vol. 140, pp. 909–917. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2019.06.049>
9. Vasiliev F. P. *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach* [Methods for solving extreme problems]. Moscow, Nauka, 1981. 400 p. (in Russian).
10. Kabanikhin S. I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and uncorrected problems]. Novosibirsk, Siberian Scientific Publishing House, 2009. 457 p. (in Russian).
11. Vapnik V. N. *Vosstanovlenie zavisimostey po empiricheskim dannym* [Restoration of dependencies on empirical data]. Moscow, Nauka, 1979. 448 p. (in Russian).
12. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [Theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow, Nauka, 1978. 206 p. (in Russian).
13. Prangishvili I. V., Lotockii V. A., Ginsberg K. S., Smoljaninov V. V. System identification and control problems: On the way to modern system methodologies. *Problemy Upravleniya*, 2004, iss. 4, pp. 2–15 (in Russian). EDN: [HSQSZP](#)
14. Ginsberg K. S. The structure identification methodology conceptual basis for the purpose of creating automatic control systems with the required properties. *Journal of Information Technologies and Computing Systems*, 2019, iss. 1, pp. 38–48 (in Russian). <https://doi.org/10.14357/20718632190104>, EDN: [ZAJQWT](#)
15. Rapoport E. Ya., Pleshivtseva Yu. E. Special optimization methods in inverse heat-conduction problems. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2002, iss. 5, pp. 144–155 (in Russian).
16. Diligenskaya A. N., Rapoport E. Ya. Analytical methods of parametric optimization in inverse heat-conduction problems with internal heat release. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2014, vol. 87, iss. 5, pp. 1126–1134. <https://doi.org/10.1007/s10891-014-1114-1>
17. Alifanov O. M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse heat-transfer problems]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 280 p. (in Russian).
18. Diligenskaya A. N., Zolotaryova V. V. Parametric identification of the boundary action on the specified compact sets. *Mathematical Methods in Technologies and Technics*, 2022, iss. 12, pt. 1, pp. 7–10 (in Russian). https://doi.org/10.52348/2712-8873_MMTT_2022_12_07, EDN: [TGGYQJ](#)

Поступила в редакцию / Received 12.11.2024

Принята к публикации / Accepted 22.11.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 281–294

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 281–294

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-281-294>, EDN: ZNKFMP

Научная статья

УДК 51.73

Статистическое моделирование деполяризующих свойств оптически плотных дисперсных систем в режиме малоуглового рассеяния зондирующего излучения

А. А. Исаева¹, Е. А. Исаева¹, Ан. В. Скрипаль², Д. А. Зимняков^{1,2,3}✉

¹Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., Россия, 410054, г. Саратов, ул. Политехническая, д. 77

²Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

³Институт проблем точной механики и управления РАН (ИПТМУ РАН), Россия, 410028, г. Саратов, ул. Рабочая, д. 24

Исаева Анна Андреевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, isanna.1987@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2925-2733>, SPIN: 6741-7956, AuthorID: 732490

Исаева Елена Андреевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики, 27isaeva@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0407-312X>, SPIN: 1166-2738, AuthorID: 631180

Скрипаль Анатолий Владимирович, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой медицинской физики, skripalav@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9080-0057>, SPIN: 3794-5749, AuthorID: 33340

Зимняков Дмитрий Александрович, доктор физико-математических наук, ¹заведующей кафедрой физики; ²профессор кафедры медицинской физики; ³главный научный сотрудник, zimnyakov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9787-7903>, SPIN: 1918-5220, AuthorID: 29094

Аннотация. Представлены результаты статистического моделирования эффекта убывания степени поляризации линейно поляризованного лазерного пучка при распространении вперед в многократно рассеивающих ансамблях сферических диэлектрических частиц с различными значениями волнового параметра. Алгоритм моделирования основан на итеративной процедуре трансформации векторов Джонса парциальных составляющих рассеянного светового поля в последовательностях актов рассеяния, реализуемой с использованием метода Монте-Карло. В качестве параметров, характеризующих скорость убывания степени линейной поляризации лазерного излучения, рассмотрены среднее число актов рассеяния, соответствующее убыванию степени поляризации в e раз, и отношение характерной длины поляризации к транспортной длине распространения излучения в ансамбле частиц. Установлено, что максимальное значение длины деполяризации достигается при значениях волнового параметра частиц в окрестностях первого резонанса Ми на зависимости фактора эффективности рассеяния от диаметра частиц. Результаты моделирования сопоставлены с экспериментальными и теоретическими данными, полученными с использованием гибридного подхода в рамках диффузионного приближения теории переноса излучения.

Ключевые слова: статистическое моделирование, дисперсные системы, перенос излучения, деполяризация

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 25-29-00679).

Для цитирования: Исаева А. А., Исаева Е. А., Скрипаль Ан. В., Зимняков Д. А. Статистическое моделирование деполяризующих свойств оптически плотных дисперсных систем в режиме малоуглового рассеяния зондирующего излучения // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 281–294. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-281-294>, EDN: ZNKFMP

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



Article

Statistical modeling of the depolarizing properties of optically dense dispersive systems in the small-angle scattering mode of probe light propagation

A. A. Isaeva¹, E. A. Isaeva¹, An. V. Skripal², D. A. Zimnyakov^{1,2,3}✉

¹Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, 77 Politechnicheskaya St., Saratov 410054, Russia

²Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

³Institute of Precision Mechanics and Control Problems of the Russian Academy of Sciences (IPTMU RAS), 24 Rabochaya St., Saratov 410028, Russia

Anna A. Isaeva, isanna.1987@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2925-2733>, SPIN: 6741-7956, AuthorID: 732490

Elena A. Isaeva, 27isaevaea@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-0407-312X>, SPIN: 1166-2738, AuthorID: 631180

Anatoly V. Skripal, skripalav@info.sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9080-0057>, SPIN: 3794-5749, AuthorID: 33340

Dmitry A. Zimnyakov, zimnykov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-9787-7903>, SPIN: 1918-5220, AuthorID: 29094

Abstract. Results of statistical modeling of the polarization degree decay in the case of forward propagation of a linearly polarized laser beam in multiple scattering dispersive systems are presented. Disordered ensembles of dielectric spherical particles with various values of the wave parameter are considered as these dispersive systems. The modeling algorithm is based on an iterative transformation of the Jones vectors for partial components of the multiple scattered light fields in the considered systems due to random sequences of scattering events; the transformation procedure is provided using the Monte-Carlo simulation. The average number of scattering events corresponding to the $1/e$ decay of the polarization degree, and the ratio of the depolarization length to the mean transport free path of probe light in the scattering systems are considered as the key parameters. It was found that the maximal depolarization length is achieved in the case when the wave parameter of scattering particles is close to the value corresponding to the first Mie resonance of the dependence of the scattering efficiency on the wave parameter. The modeling results are compared to the experimental and theoretical data obtained using a hybrid approach in the framework of the diffusion approximation of radiative transfer theory.

Keywords: statistical modeling, dispersed systems, radiative transfer, depolarization

Acknowledgements: This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 25-29-00679).

For citation: Isaeva A. A., Isaeva E. A., Skripal An. V., Zimnyakov D. A. Statistical modeling of the depolarizing properties of optically dense dispersive systems in the small-angle scattering mode of probe light propagation. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 281–294 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-281-294>, EDN: ZNKFMP

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Эффект деполяризации света при многократном рассеянии в случайно-неоднородных средах является одним из фундаментальных проявлений стохастичности распространения излучения в подобных системах [1–6]. При использовании квазимонохроматических световых пучков для зондирования случайно-неоднородных сред подобная стохастичность приводит к спекл-модуляции рассеянных световых полей [7, 8]. При этом формируемые спеклы характеризуются случайными состояниями поляризации с различной степенью эллиптичности от линейной до близкой к круговой. С точки зрения диагностических приложений при описании поляризационных характеристик рассеянных световых полей целесообразно использовать интегральные параметры, получаемые в результате усреднения локальных



состояний поляризации по всему ансамблю формируемых спеклов. В частности, к числу подобных обобщенных интегральных характеристик относится степень полной поляризации рассеянного излучения, выражаемая через компоненты вектора Стокса I, Q, U, V [9, 10]:

$$P = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}.$$

С ростом кратности рассеяния N_{sc} зондирующего излучения в среде величина P асимптотически стремится к 0, причем скорость убывания степени полной поляризации при увеличении N_{sc} определяется как режимом рассеяния (рассеяние вперед или обратное рассеяние), так и волновым параметром $\pi d n_m / \lambda_0$ рассеивающих центров и их относительным показателем преломления $\tilde{n}_p = n_p / m_m$ (здесь d — характерный размер рассеивающих центров, n_m — абсолютный показатель преломления матричной среды, содержащей частицы, λ_0 — длина волны излучения в вакууме, n_p — абсолютный показатель преломления частиц). Это обстоятельство может быть использовано в качестве основы одного из подходов в поляризационной диагностике для применений в биомедицине и материаловедении. В частности, поляризационные методы морфофункциональной диагностики широко применяются в современной биомедицине [11–16]. При использовании линейно поляризованных зондирующих лазерных пучков процедура подобной поляризационной диагностики может быть сведена к нахождению степени остаточной линейной поляризации рассеянного излучения:

$$P_L^{sc} = \frac{I_y^{sc} - I_x^{sc}}{I_y^{sc} + I_x^{sc}},$$

где I_x^{sc}, I_y^{sc} — значения интенсивностей x - и y -линейно поляризованных составляющих рассеянного светового поля на выходе из зондируемой среды при условии, что степень линейной поляризации зондирующего пучка на входе в среду $P_L^{in} = 1$ (соответственно, $I_x^{in} = 0$). При возрастании оптической толщины зондируемой среды и детектировании рассеянного вперед излучения (малоугловой режим рассеяния) значение P_L^{sc} асимптотически стремится к 0 со скоростью убывания, определяемой структурными и оптическими характеристиками среды.

Решение обратных задач поляризационного зондирования случайно-неоднородных сред, связанных с восстановлением оптических и структурных параметров среды по измеренным в эксперименте поляризационным характеристикам рассеянного излучения, требует создания адекватной теоретической модели преобразования исходного состояния поляризации зондирующего пучка в процессе его распространения в зондируемом объекте. В настоящее время существуют различные подходы к решению этой проблемы, основанные на аналитической теории многократного рассеяния [17–19] или векторного уравнения переноса излучения [20–23]. Однако эти подходы в ряде случаев неприменимы на практике вследствие недостаточности или отсутствия необходимой априорной информации об особенностях взаимосвязи характеристик среды с модельными параметрами, описывающими трансформацию локальных состояний поляризации распространяющегося излучения (например, с матрицей рассеяния света, входящей в интегро-дифференциальное уравнение переноса излучения). Кроме того, за исключением простейших случаев, обращение решений интегро-дифференциальных уравнений в рамках этих подходов требует значительных вычислительных затрат и зачастую является неустойчивым и расходящимся процессом.

Альтернативой сложным и в ряде случаев неустойчивым методам моделирования взаимодействия поляризованного света со случайно-неоднородными средами на основе аналитической теории многократного рассеяния и векторной теории переноса излучения является гибридный подход [24–26]. В рамках этого подхода, основанного на дискретной модели рассеяния, используется «скалярное» описание многократно рассеянного светового поля в среде с использованием функции плотности вероятности $\rho(s)$ путей распространения парциальных составляющих рассеянного излучения для заданных условий освещения и де-



тектирования. Наиболее удобный метод получения функции $\rho(s)$ — статистическое моделирование переноса излучения в среде с использованием Монте-Карло метода, в результате которого генерируется массив значений путей распространения парциальных составляющих $\{s_i\}$. Массив $\{s_i\}$ подвергается частотному анализу с величиной интервалов выборки, обеспечивающей робастность оценок относительных частот попадания s_i в тот или иной интервал. Общее число выборочных интервалов N_s , используемых для восстановления выборочной функции плотности вероятности $\rho(s)$, может быть определено с использованием следующего эмпирического правила [27]: $N_s \approx \sqrt{N_i}$, где N_i — число значений $\{s_i\}$ в сгенерированном массиве.

В рамках гибридного подхода различные статистические моменты рассеянного поля и производные от них величины (например, среднее значение интенсивности рассеянного света, временная автокорреляционная функция флуктуаций рассеянного поля в случае динамических рассеивающих сред, степень линейной или циркулярной поляризации) могут быть получены с помощью односторонних линейных интегральных преобразований функции $\rho(s)$ с соответствующим образом выбранными ядрами, характеризующими динамику затухания анализируемой характеристики при возрастании пути распространения парциальных составляющих. Ранее в результате сопоставления экспериментальных и модельных данных [24–26] установлено, что ядра интегральных преобразований могут быть представлены с приемлемой точностью экспоненциальными функциями вида $f(s, \xi) \propto \exp(-s/\xi)$, где ξ — характерная длина затухания соответствующего параметра рассеянного поля. Экспоненциальная форма ядер обусловлена стохастичностью процесса распространения излучения в многократно рассеивающих средах и статистической независимостью парциальных составляющих рассеянного поля. Следует отметить, что экспоненциальная форма характерна для режима многократного рассеяния, когда транспортная длина распространения излучения в среде l^* [28] существенно меньше характерного размера среды. Таким образом, расчет характеристик рассеянного поля (в том числе и степени линейной поляризации) в режиме многократного рассеяния может быть сведен к вычислению одностороннего преобразования Лапласа $\rho(s)$.

В рамках гибридного подхода при описании деполяризующих свойств многократно рассеивающих сред могут быть рассмотрены два характерных пространственных масштаба — средняя длина распространения парциальных составляющих в среде $\langle s \rangle = \int_0^\infty s \rho(s) ds$ и длина деполяризации ξ_L линейно поляризованного излучения. Величина ξ_L зависит как от свойств рассеивающих центров и длины волны λ излучения, так и от режима детектирования. Так, в случае малоуглового детектирования рассеянного вперед излучения средой, состоящей из непоглощающих частиц с характерным размером $d \gg \lambda$, P_L убывает с ростом толщины слоя L в гораздо меньшей степени по сравнению со средой, состоящей из мелких (релеевских) частиц.

Несмотря на значительное число экспериментальных и теоретических работ, посвященных анализу деполяризующих свойств рассеивающих сред, вопросы взаимосвязи характерных масштабов распространения и преобразования поляризованного света (т. е. $\langle s \rangle$, ξ_L , l^* , l) в ряде случаев требуют дальнейшего уточнения. Здесь l — длина рассеяния зондирующего излучения, обратно пропорциональная коэффициенту рассеяния среды, l^* — транспортная длина распространения излучения, соответствующая характерному масштабу преобразования направленного светового потока в диффузный. Целью данной работы явился теоретический анализ подобной взаимосвязи в случае поляризационного зондирования многократно рассеивающих ансамблей сферических диэлектрических частиц в режиме малоуглового детектирования рассеянного вперед излучения. Подобная геометрия поляризационного зондирования представляет интерес для решения диагностических задач в биомедицинской оптике и материаловедении. В качестве метода исследования применено статистическое моделирование переноса поляризованного света в ансамблях частиц с различными значениями волнового параметра. При моделировании применен поляризационно-чувствительный



Монте-Карло метод, имитирующий преобразование текущих состояний поляризации парциальных составляющих рассеянного поля в последовательностях актов рассеяния.

1. Методика статистического моделирования деполяризующих свойств дисперсных систем

Рассмотренный метод статистического моделирования деполяризующих свойств многократно рассеивающих случайно-неоднородных сред основан на итеративной процедуре преобразования текущих состояний поляризации распространяющихся в среде парциальных составляющих рассеянного светового поля. Моделируемая среда предполагается состоящей из сферических диэлектрических частиц, случайным образом распределенных в пространстве с заданным значением объемной доли f . Текущее состояние поляризации произвольно выбранной составляющей, моделируемой плоской волной с эллиптическим состоянием поляризации, трансформируется случайным образом в последовательности актов рассеяния. Каждая трансформация приводит к случайным изменениям амплитуд ортогонально поляризованных компонент парциальной составляющей и сдвигам фаз между ними, которые описываются в рамках формализма Джонса [29].

Для каждого акта рассеяния, приводящего к изменению направления распространения парциальной составляющей, вводится (2×2) матрица Джонса, комплексные элементы которой определяются углом между волновыми векторами составляющей до (\vec{k}_{n-1}) и после (\vec{k}_n) акта рассеяния (углом рассеяния θ_n). В системе декартовых координат, связанных с плоскостью рассеяния, проходящей через \vec{k}_{n-1} и \vec{k}_n , матрица Джонса для данного акта рассеяния на сферической частице сводится к диагональной форме. Поскольку изменение направления распространения парциальной составляющей характеризуется не только углом рассеяния θ_n , но и азимутальным углом ϕ_n , необходимо осуществлять преобразование ортогонально поляризованных компонент парциальной составляющей к системе координат, привязанной к текущей плоскости рассеяния для n -го акта (рис. 1).

Таким образом, процесс трансформации поляризационного состояния парциальной составляющей в единичном акте рассеяния может быть описан с помощью следующего уравнения:

$$\begin{pmatrix} E_{x'}^n \\ E_{y'}^n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^n(\theta^n) & 0 \\ 0 & J_{22}^n(\theta^n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi^n & -\sin \phi^n \\ \sin \phi^n & \cos \phi^n \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x^{n-1} \\ E_y^{n-1} \end{pmatrix},$$

где E_x^{n-1} , E_y^{n-1} — ортогонально поляризованные комплексные компоненты амплитуды электрического поля парциальной составляющей до n -го акта рассеяния; соответственно, $E_{x'}^n$ и $E_{y'}^n$ — ортогональные компоненты после акта рассеяния. Отметим, что координатные оси (x, y) привязаны к плоскости рассеяния для предшествующего $(n-1)$ акта, в то время как система координат (x', y') соответствует плоскости рассеяния в текущем акте. Угол рассеяния θ^n и азимутальный угол ϕ^n являются величинами, случайным образом изменяющимися от одного акта рассеяния к другому. Преобразование состояния поляризации в последовательности из N актов описывается следующим выражением:

$$\begin{pmatrix} E_x^N \\ E_y^N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^N(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{12}^N(\theta^1, \phi^1) \\ \tilde{J}_{21}^N(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{22}^N(\theta^1, \phi^1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^{N-1}(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{12}^{N-1}(\theta^1, \phi^1) \\ \tilde{J}_{21}^{N-1}(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{22}^{N-1}(\theta^1, \phi^1) \end{bmatrix} \times \dots$$

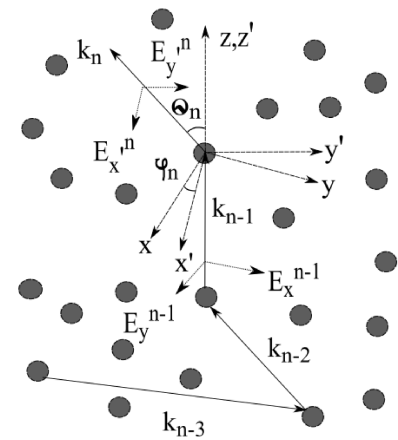


Рис. 1. Изменение состояния компонент вектора электрического поля в процессе рассеяния в случайно-неоднородной среде

Fig. 1. The change of the electric field vector components during the scattering in a randomly inhomogeneous medium



$$\times \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^2(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{12}^2(\theta^1, \phi^1) \\ \tilde{J}_{21}^2(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{22}^2(\theta^1, \phi^1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^1(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{12}^1(\theta^1, \phi^1) \\ \tilde{J}_{21}^1(\theta^1, \phi^1) & \tilde{J}_{22}^1(\theta^1, \phi^1) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_x^0 \\ E_y^0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $J_{11}^n(\theta^n, \phi^n), \dots, J_{22}^n(\theta^n, \phi^n)$ — элементы модифицированной матрицы Джонса для n -го акта рассеяния; модификация осуществляется в соответствии с выражением

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_{11}^n(\theta^n, \phi^n) & \tilde{J}_{12}^n(\theta^n, \phi^n) \\ \tilde{J}_{21}^n(\theta^n, \phi^n) & \tilde{J}_{22}^n(\theta^n, \phi^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^n(\theta^n) & 0 \\ 0 & J_{22}^n(\theta^n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi^n & -\sin \phi^n \\ \sin \phi^n & \cos \phi^n \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Отметим, что на завершающем N -ом шаге моделирования входящая в выражение (2) матрица поворота выбирается таким образом, что система координат на выходе из последовательности соответствовала бы системе координат на входе в последовательность.

Выражение (1) наглядно иллюстрирует эффект деполяризации света, распространяющегося в многократно рассеивающей случайно-неоднородной среде; элементы на побочных диагоналях модифицированных матриц Джонса, принимающие ненулевые значения вследствие ненулевых азимутальных углов в актах рассеяния, приводят к появлению ненулевой составляющей E_x^N при вводе в среду линейно поляризованного света с $E_x^0 = 0$, $E_y^0 = E_0$.

Процедура моделирования деполяризации линейно поляризованного света сводится к циклическому повторению описываемой выражением (1) итеративной процедуры для заданного числа актов рассеяния N_s . В ходе итеративной процедуры в каждом цикле формируются последовательности случайных значений ϕ^1, \dots, ϕ^N ; $\theta^1, \dots, \theta^N$, по которым рассчитываются случайные значения элементов матриц Джонса для всех актов рассеяния в данной последовательности. По окончании цикла формируются случайные значения $E_x^{N_s}, E_y^{N_s}$. В результате прогона M циклов формируется массив данных $\{E_x^{N_s,1}, \dots, E_x^{N_s,M}; E_y^{N_s,1}, \dots, E_y^{N_s,M}\}$, по которым затем вычисляется степень остаточной линейной поляризации P_L прошедшего через среду излучения:

$$P_L = \frac{\sum_{k=1}^M (E_y^{N_s,k})^2 - \sum_{k=1}^M (E_x^{N_s,k})^2}{\sum_{k=1}^M (E_y^{N_s,k})^2 + \sum_{k=1}^M (E_x^{N_s,k})^2}. \quad (3)$$

Формула (3) соответствует случаю некогерентного суммирования вкладов от M составляющих в наблюдаемый оптический сигнал. Правомерность подобного подхода обусловлена стохастичностью процесса многократного рассеяния излучения в среде. Диагональные элементы немодифицированных матриц Джонса $J_{11}^n(\theta^n)$, $J_{22}^n(\theta^n)$ для каждого акта рассеяния могут быть вычислены в соответствии с теорией рассеяния Ми (см., например, [29]), используя следующие выражения:

$$J_{11}^n(\theta) = \sum_{k=1}^{k_{stop}} \frac{2k+1}{k(k+1)} \cdot (a_k \pi_k + b_k \tau_k), \quad J_{22}^n(\theta) = \sum_{k=1}^{k_{stop}} \frac{2k+1}{k(k+1)} \cdot (a_k \pi_k + b_k \tau_k), \quad (4)$$

где π_k и τ_k определяются присоединенными функциями Лежандра $P_k^1(\theta)$ как $\pi_k = \frac{P_k^1(\theta)}{\sin \theta}$,

$\tau_k = \frac{dP_k^1(\theta)}{d\theta}$, а коэффициенты a_k и b_k рядов рассеяния (4) рассчитываются с использованием сферических функций Бесселя первого и второго рода. Предельное число суммируемых членов k_{stop} ряда (4) определяется волновым параметром рассеивающих центров $\rho = \pi n_m d \lambda_0$, где d — диаметр частиц. При разыгрывании случайных значений азимутального угла ϕ^n и угла рассеяния θ^n необходимо воспользоваться следующими предположениями:

- значения ϕ^n и θ^n являются статистически независимыми величинами;
- функция плотности вероятности значений ϕ^n определяется равномерным распределением $\rho(\phi^n)$ в интервале от 0 до 2π ;



– функция $\rho(\theta^n)$ моделируется с использованием функции Хеньи – Гринштейна [30]), являющейся универсальной для широкого класса модельных задач по рассеянию излучения:

$$\rho_{HG}(\cos \theta) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}}, \quad (5)$$

где g — средний косинус угла рассеяния (параметр анизотропии рассеяния). Величина g определяется ρ , \widetilde{n}_p и n_m и может быть получена с использованием различных онлайн-калькуляторов Ми (например, https://omlc.org/calc/mie_calc.html). При статистическом моделировании случайные значения θ^n разыгрываются с использованием следующего соотношения:

$$\theta^n = \arccos \left[\frac{1}{2g} \left(1 + g^2 - \left(\frac{1 - g^2}{1 - g + 2g\chi^n} \right)^2 \right) \right], \quad (6)$$

где χ^n — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0, 1]$. Статистическое моделирование деполяризующих свойств ансамблей случайным образом расположенных сферических диэлектрических частиц для режима малоуглового рассеяния вперед осуществлялось по следующей схеме:

- 1) исходя из заданных значений λ_0 , ρ , \widetilde{n}_p и n_m и с использованием онлайн-калькулятора Ми определялось значение g для анализируемой системы;
- 2) для заданного значения N_s в интервале от 1 до 40 осуществлялось статистическое моделирование переноса излучения в ансамбле частиц с заданным ρ в направлении распространения зондирующего пучка, в результате чего формировались наборы из M случайных значений $E_x^{N_s, k}$, $E_y^{N_s, k}$;
- 3) по полученным наборам значений $E_x^{N_s, k}$, $E_y^{N_s, k}$ для каждого N_s в соответствии с выражением (3) вычислялась степень остаточной линейной поляризации покидающего ансамбль частиц излучения.

Рассмотренный метод реализовывался с помощью специально разработанного программного обеспечения на языке программирования C++ на 4-ядерном процессоре Intel Core i7. Набор случайных значений $E_x^{N_s, k}$, $E_y^{N_s, k}$ получался в результате 10^5 прогонов разработанного алгоритма, с общей длительностью на один численный эксперимент около 25 мин.

2. Результаты моделирования и их обсуждение

В качестве модельных деполяризующих систем рассматривались многократно рассеивающие ансамбли сферических частиц диоксида титана с желатином в качестве матричной среды. Выбор подобных систем обусловлен их широким использованием в качестве фантомов (имитаторов оптических свойств) биологических сред (см., например, [31]). Предполагалось, что зондирование осуществляется линейно поляризованным лазерным излучением с длиной волны 532 нм (вторая гармоника излучения АИГ:Nd лазера). Показатель преломления желатина измерялся с помощью рефрактометра ИРФ-454 и равен 1.535, показатель преломления частиц диоксида титана принят равным 2.37 (<https://refractiveindex.info>). В ходе моделирования значения диаметра частиц диоксида титана варьировались в широких пределах (от 25 нм до 7 мкм).

На рис. 2 в качестве примера представлены значения P_L от числа актов рассеяния зондирующего излучения (3). Здесь же приведены аппроксимирующие зависимости вида $P_L = A \exp(-N_s/N_s^e)$; мотивация для выбора подобной формы аппроксимации обсуждена ниже. Отметим, что используемая экспоненциальная аппроксимация с высокой точностью представляет поведение полученных модельных данных, за исключением случая существенно малократного рассеяния, когда $N_s = 1 - 2$.

В таблице приведены значения A и N_s^e для наборов данных, представленных на рис. 2, вместе с погрешностями их определения и интегральными характеристиками точности аппроксимации, выражаемыми по величине скорректированного коэффициента детерминации R_{adj}^2 . Значения N_s характеризуют скорость убывания степени остаточной линейной

поляризации по мере возрастания кратности рассеяния. Полученные результаты моделирования позволяют сделать вывод о существенно немонотонном поведении данного параметра при возрастании диаметра рассеивающих частиц (и, соответственно, волнового параметра ρ).

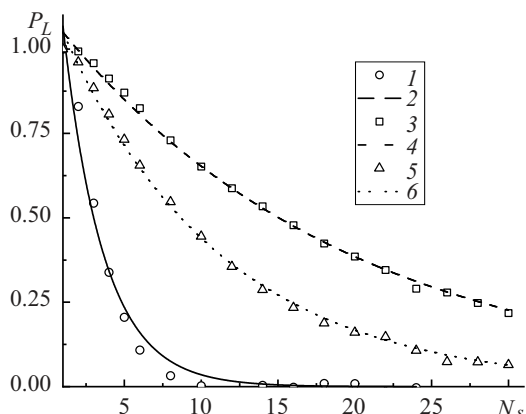


Рис. 2. Зависимости степени остаточной линейной поляризации от числа актов рассеяния для рассеивающих частиц с различными диаметрами d : 1 — $d = 0.025$ мкм; 3 — $d = 0.4$ мкм; 5 — $d = 1$ мкм; 2, 4, 6 — аппроксимирующие экспоненциальные зависимости

Fig. 2. The dependencies of the residual linear polarization degree on the number of scattering events for scattering particles of different diameters: 1 — $d = 0.025$ μm ; 3 — $d = 0.4$ μm ; 5 — $d = 1$ μm ; 2, 4, 6 — approximating exponential dependences

На рис. 3, а представлены модельные значения для ансамблей частиц диоксида титана в желатине в зависимости от диаметра частиц, демонстрирующие чрезвычайно высокую вариабельность. Анализ полученных данных позволяет сделать вывод, что их значительный разброс обусловлен не случайными погрешностями моделирования, а особенностями распространения парциальных составляющих рассеянного поля в ансамблях частиц с одинаковыми размерами (хотя и расположенными случайным образом). В частности, рис. 3, б наглядно демонстрирует выраженную интерференционную структуру зависимости $N_s^e = f(d)$ в интервале значений диаметра частиц от 0.025 мкм до 1 мкм. Подобные интерференционные эффекты в определенной степени аналогичны модуляции теоретических зависимостей сечения экстинкции сферических частиц от длины волны или диаметра частицы (так называемой ряби) [29].

Значения параметров аппроксимации для модельных данных, представленных на рис. 2

Table. Values of approximation parameters for the model data presented in Fig. 2

| Диаметр частиц, мкм | A | $\delta(A)$ | N_s^e | $\delta(N_s^e)$ | $R_a d j^2$ |
|---------------------|-------|-------------|---------|-----------------|-------------|
| 0.025 | 1.560 | ± 0.086 | 2.64 | ± 0.17 | 0.983 |
| 0.400 | 1.110 | ± 0.010 | 18.94 | ± 0.33 | 0.996 |
| 1.000 | 1.157 | ± 0.013 | 10.35 | ± 0.20 | 0.997 |

Безразмерный параметр N_s определяет размерную длину деполаризации излучения в ансамбле частиц как $\xi_L \approx N_s^e l$, где длина рассеяния l характеризует средний путь распространения парциальных составляющих рассеянного поля между двумя последовательными актами рассеяния. С другой стороны, ключевым параметром, контролирующим перенос излучения в многократно рассеивающих средах, является транспортная длина $l^* = l/(1 - g)$, асимптотически приближающаяся к l в случае изотропного рассеяния малыми частицами и существенно превышающая длину рассеяния в режиме рассеяния Ми, когда $g \ll 0$. Если рассматривать отношение длины деполаризации не к длине рассеяния l , а к транспортной длине l^* , то можно ввести безразмерный параметр $\tilde{N}_s^e = \xi/l^* = N_s^e(1 - g)$. Как длина рассеяния, так и транспортная длина существенным образом зависят от фактора эффективности рассеяния Q_{sca} [29], определяемого отношением сечения рассеяния частицы к ее геометрическому сечению и зависящего от набора параметров λ_0 , ρ , \tilde{n}_p и n_m .

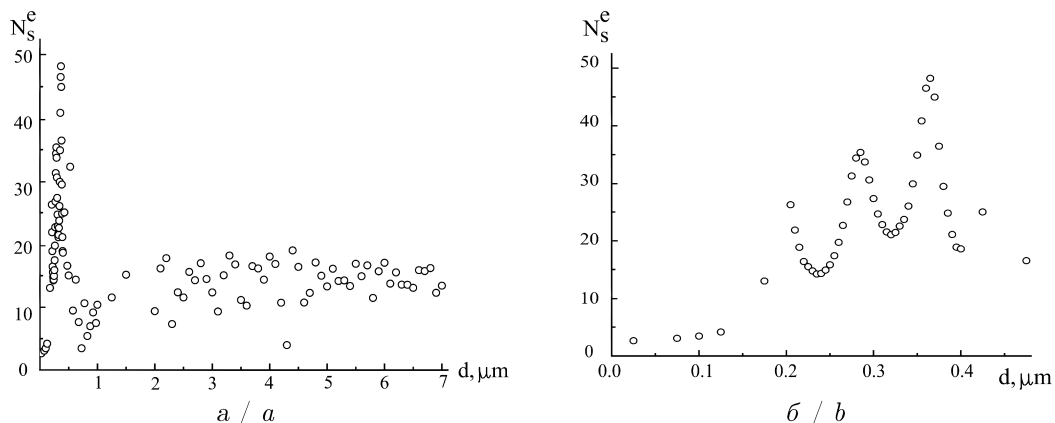


Рис. 3. Зависимость модельных значений N_s^e от диаметра частиц диоксида титана в желатине: $a - d \in [0, 7]$ мкм; b — увеличенный фрагмент для $d \in [0, 0.5]$ мкм

Fig. 3. The dependence of model values N_s^e on the titanium dioxide particles diameter in gelatin: $a - d \in [0, 7]$ μm ; b —enlarged fragment for $d \in [0, 0.5]$ μm

Представляет значительный интерес сопоставление полученных модельных данных с зависимостями Q_{sca} и g от диаметра частиц, восстановленными для исследуемых рассеивающих систем с использованием онлайн-калькулятора Ми (https://omlc.org/calc/mie_calc.html). На рис. 4 эти зависимости сравнены с зависимостью $\tilde{N}_s^e = f(d)$, рассчитанной на основе полученных модельных данных и сглаженной с использованием скользящего окна с шириной в девять равноотстоящих значений. Сглаживание проводилось с целью выделения общих тенденций в поведении $\tilde{N}_s^e = f(d)$. Кроме того, следует отметить, что тонкая интерференционная структура, имеющая место для модельных зависимостей $N_s^e = f(d)$ (см. рис. 3, а) и $\tilde{N}_s^e = f(d)$, в случае реальных рассеивающих систем с большей или меньшей полидисперсностью рассеивающих центров будет в значительной степени сглаживаться.

Характерной особенностью зависимостей фактора эффективности рассеяния от диаметра сферических диэлектрических частиц при фиксированной длине волны зондирующего излучения является убывающая квазипериодическая модуляция, связанная с существованием так называемых резонансов Ми (отмечены на рисунке стрелками). Первый резонанс Ми характеризуется максимальной амплитудой; при этом сечение рассеяния частицы в несколько раз превышает ее геометрическое сечение. Резонансы Ми высших порядков постепенно затухают, и Q_{sca} асимптотически стремится к 2 (проявление так называемого дифракционного парадокса [28]).

Из графиков, представленных на рис. 4, очевидно, что максимальные значения (порядка 9.0–9.5) сглаженной зависимости $\tilde{N}_s^e = f(d)$ достигаются в области локализации первого резонанса Ми. Для малых ($d < 0.1$ мкм), равно как и для больших ($d > 3$ мкм), сглаженные значения \tilde{N}_s^e близки к трем.

Отметим, что в одной из ранних основополагающих работ по анализу деполяризующих свойств многократно рассеивающих дисперсных систем [32]) предложена феноменологи-

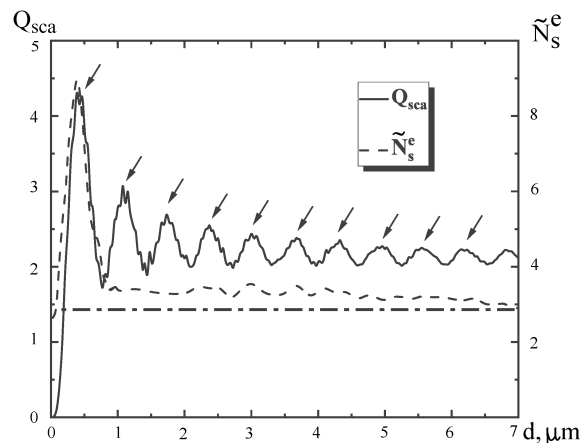


Рис. 4. Зависимости фактора эффективности рассеяния и модельных значений от диаметра диэлектрической частицы

Fig. 4. The dependencies of the scattering efficiency factor and model values on the size of dielectric particle

ческая модель для описания деполяризации линейно поляризованного света в случайных последовательностях актов рассеяния в форме, соответствующей упомянутому выше гибриднему подходу:

$$P_L = \frac{\int_0^\infty f_L(N_s)G(N_s)dN_s}{\int_0^\infty G(N_s)dN_s}, \quad (7)$$

где $G(N_s)$ характеризует распределение парциальных составляющих рассеянного светового поля по числам актов рассеяния в среде, а $f_L(N_s)$ — модельная функция, описывающая деполяризацию единичной парциальной составляющей. В случае изотропного рассеяния малыми частицами для $f_L(N_s)$ рассмотрена следующая модель:

$$f_L(N_s) \cong \frac{3}{2} \exp\left(-N_s \frac{l}{\xi_L}\right), \quad (8)$$

где ξ_L — деполяризация для малых релеевских частиц принимается равной $\approx l/\ln(10/7) \approx 2.8l$. Таким образом, в соответствии с феноменологической моделью [32] для малых сферических частиц $A \approx 1.5$, а $N_s^e \approx 2.8$, что хорошо согласуется с полученными в результате статистического моделирования данными (см. таблицу, A и N_s^e для частиц диоксида титана диаметром 0.025 мкм). В случае же более крупных частиц, характеризующихся режимом рассеяния Ми, в [32] предложена модификация этой модели путем простого замещения длины рассеяния l на транспортную длину l^* в выражениях (7), (8). Отметим, что подобное замещение приводит к постоянному значению $N_s^e \approx 2.8$, не зависящему от размера рассеивающих частиц (эта величина показана на рис. 4 штрих-пунктирной горизонтальной линией).

В то же время представленные в [32] экспериментальные данные о деполяризующих свойствах водных суспензий полистироловых сфер различных диаметров на длине волны 0.67 мкм демонстрируют существенное увеличение отношения длины деполяризации к длине рассеяния по мере возрастания волнового параметра частиц от близких к 0 значений до величины порядка 5–6. Высказано предположение, что подобное расхождение обусловлено возможным проявлением резонансов Ми при рассеянии [32]. Полученные в данной работе результаты моделирования позволяют сделать вывод о значительном (не менее чем

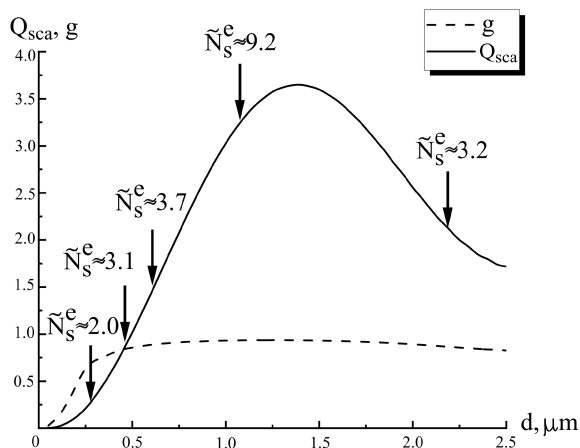


Рис. 5. Зависимости фактора эффективности рассеяния Q_{sca} и параметра анизотропии рассеяния g от диаметра полистироловых сфер в воде для длины волны зондирующего излучения $\lambda_0 = 532$ нм

Fig. 5. The dependencies of scattering efficiency factor and scattering anisotropy parameter on the polystyrene spheres diameter in water for a probing radiation wavelength of $\lambda_0 = 532$ nm

в 3–4 раза) увеличении длины деполяризации линейно поляризованного света ансамблями сферических диэлектрических частиц вблизи первого резонанса Ми. Вдали от первого резонанса Ми значение \tilde{N}_s^e асимптотически стремится к величине, близкой к 2.8 (см. рис. 4). Этот вывод хорошо согласуется с экспериментальными данными о значениях \tilde{N}_s^e для монодисперсных полистироловых частиц с различными диаметрами в воде на длине волны 532 нм, представленными в работе [24].

На рис. 5 представлены фрагменты теоретических зависимостей Q_{sca} и $g(d)$ в случае полистироловых сфер в воде для $\lambda_0 = 532$ нм в интервале значений диаметра от 0 до 2.2 мкм. На графике также приведены значения \tilde{N}_s^e для пяти исследованных в работе размеров частиц. Следует отметить вполне удовлетворительное соответствие между двумя наборами данных, представленными на рис. 4 и 5.



Заключение

Таким образом, в результате проведенного статистического моделирования деполяризирующих свойств ансамблей сферических диэлектрических частиц на примере сфер диоксида титана в желатине показано существенное ослабление деполяризирующих свойств подобных систем при рассеянии вперед в случае, когда структурные и оптические свойства рассеивающей системы, равно как и длина волны зондирующего излучения, соответствуют условию появления первого резонанса Ми. По мере ухода от области локализации резонанса в стороны меньших и больших значений диаметров рассеивающих центров при фиксированной длине волны излучения (либо больших или меньших значений длины волны при постоянном диаметре частиц) деполяризирующие свойства ансамблей частиц резко возрастают. Данный эффект может быть положен в основу новых подходов к поляризационной диагностике многократно рассеивающих сред в биомедицинской оптике и материаловедении. В дальнейшем планируется развитие разработанного алгоритма моделирования и соответствующего программного обеспечения с целью учета влияния различных факторов, проявляющихся при поляризационной диагностике многократно рассеивающих сред (полидисперсности рассеивающих центров, некогерентности зондирующего излучения и т.д.).

Список литературы

1. Aiello A., Woerdman J. P. Physical bounds to the entropy-depolarization relation in random light scattering // *Physical Review Letters*. 2005. Vol. 94, iss. 9. Art. 090406. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.090406>
2. Puentes G., Voigt D., Aiello A., Woerdman J. P. Experimental observation of universality in depolarized light scattering // *Optics Letters*. 2005. Vol. 30, iss. 23. P. 3216–3218. <https://doi.org/10.1364/OL.30.003216>
3. Brosseau C., Bricout D. Entropy production in multiple scattering of light by a spatially random medium // *Physical Review E*. 1994. Vol. 50, iss. 6. P. 4997–5005. <https://doi.org/10.1103/physreve.50.4997>
4. Vynck K., Pierrat R. Multiple scattering of polarized light in disordered media exhibiting short-range structural correlations // *Physical Review A*. 1994. Vol. 94, iss. 3. Art. 033851. <https://doi.org/10.1103/physreva.94.033851>
5. MacKintosh F. C., Zhi J. X., Pine D. J., Weitz D. A. Polarization memory of multiply scattered light // *Physical Review B*. 1989. Vol. 40, iss. 13. P. 9342–9345. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.9342>
6. Pires H. D., Monken C. H. On the statistics of the entropy-depolarization relation in random light scattering // *Optics Express*. 2008. Vol. 16, iss. 25. P. 210059–210068. <https://doi.org/10.1364/oe.16.021059>
7. MacKintosh F. C., John S. Diffusing-wave spectroscopy and multiple scattering of light in correlated random media // *Physical Review B*. 1989. Vol. 40, iss. 4. P. 2383–2406. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.2383>
8. Nieuwenhuizen Th. M., Van Rossum M. C. W. Intensity distributions of waves transmitted through a multiple scattering medium // *Physical Review Letters*. 1995. Vol. 74, iss. 14. P. 2674–2677. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2674>
9. Simon B. N., Simon S., Mukunda N., Gori F., Santarsiero M., Borghi R., Simon R. A complete characterization of pre-Mueller and Mueller matrices in polarization optics // *Journal of the Optical Society of America A*. 2010. Vol. 27, iss. 2. P. 188–199. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.27.000188>
10. Ortega-Quijano N., Arce-Diego J. L. Mueller matrix differential decomposition // *Optics Letters*. 2011. Vol. 36, iss. 10. P. 1942–1946. <https://doi.org/10.1364/OL.36.001942>
11. Dremine V., Zharkikh E. V., Lopushenko I., Marcinkevics Z., Bykov A. V., Meglinski I. Incremental residual polarization caused by aging in human skin // *Journal of Biomedical Optics*. 2024. Vol. 29, iss. 5. P. 052912–052922. <https://doi.org/10.1117/1.JBO.29.5.052912>
12. Mann P., Thapa P., Nayyar V., Surya V., Mishra D., Mehta D. Multispectral polarization microscopy of different stages of human oral tissue: A polarization study // *Journal of Biophotonics*. 2024. Vol. 17, iss. 2. P. e202300236–e202300246. <https://doi.org/10.1002/jbio.202300236>



13. Gassner C., Vongsivut J., Ng S. H., Ryu M., Tobin M. J., Juodkasis S., Morikawa J., Wood B. R. Linearly polarized infrared spectroscopy for the analysis of biological materials // Society for Applied Spectroscopy. 2023. Vol. 77, iss. 9. P. 977–1008. <https://doi.org/10.1177/00037028231180233>
14. Song J., Zeng N., Guo W., Guo J., Ma H. Stokes polarization imaging applied for monitoring dynamic tissue optical clearing // Biomedical Optics Express. 2021. Vol. 12, iss. 8. P. 4821–4836. <https://doi.org/10.1364/BOE.426653>
15. Kapahi C., Silva A. E., Cory D. G., Kulmaganbetov M., Mungalsingh M. A., Pushin D. A., Singh T., Thompson B., Sarenac D. Measuring the visual angle of polarization-related entoptic phenomena using structured light // Biomedical Optics Express. 2024. Vol. 15, iss. 2. P. 1278–1287. <https://doi.org/10.1364/BOE.507519>
16. Pham T. T. H., Quach T. N. N., Vo Q. H. Q. Analysis of polarization features of human breast cancer tissue by Mueller matrix visualization // Journal of Biomedical Optics. 2024. Vol. 29, iss. 5. Art. 052917. <https://doi.org/10.7868/S0869565214260041>
17. Twersky V. On propagation in random media of discrete scatterers // Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. 1964. Vol. 16. P. 84–116. <https://doi.org/10.1090/psapm/016/0163605>
18. Parnell W. J., Abrahams I. D. Multiple point scattering to determine the effective wavenumber and effective material properties of an inhomogeneous slab // Waves in Random Complex Media. 2010. Vol. 20, iss. 4. P. 678–701. <https://doi.org/10.1080/17455030.2010.510858>
19. Gower A. L., Parnell W. J., Abrahams I. D. Multiple waves propagate in random particulate materials // SIAM Journal on Applied Mathematics. 2019. Vol. 79, iss. 6. P. 2569–2592. <https://doi.org/10.1137/18M122306X>
20. Mishchenko M. I. Vector radiative transfer equation for arbitrarily shaped and arbitrarily oriented particles: A microphysical derivation from statistical electromagnetics // Applied Optics. 2002. Vol. 41, iss. 33. P. 7114–7134. <https://doi.org/10.1364/AO.41.007114>
21. Yang W., Jin X., Gao X. Vector radiative transfer equation for arbitrary shape particles derived from Maxwell's electromagnetic theory // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2021 Vol. 265. Art. 107307. <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2020.107307>
22. Ghosh N., Wood M. F. G., Vitkin I. A. Mueller matrix decomposition for extraction of individual polarization parameters from complex turbid media exhibiting multiple scattering, optical activity, and linear birefringence // Journal of Biomedical Optics. 2008. Vol. 13, iss. 4. Art. 044036. <https://doi.org/10.1117/1.2960934>
23. Wood M. F. G., Guo X., Vitkin I. A. Polarized light propagation in multiply scattering media exhibiting both linear birefringence and optical activity: Monte Carlo model and experimental methodology // Journal of Biomedical Optics. 2007. Vol. 12, iss. 1. Art. 014029. <https://doi.org/10.1117/1.2434980>
24. Zimnyakov D. A. On some manifestations of similarity in multiple scattering of coherent light // Waves Random Media. 2000. Vol. 10, iss. 4. P. 417–434. <https://doi.org/10.1088/0959-7174/10/4/302>
25. Зимняков Д. А., Синичкин Ю. П. О предельном значении степени остаточной поляризации некогерентного обратно рассеянного излучения при многократном рассеянии линейно поляризованного света // Оптика и спектроскопия. 2001. Т. 91, № 1. С. 113–119. EDN: MQESRR
26. Зимняков Д. А., Синичкин Ю. П. Поляризационная визуализация рассеивающих сред с помощью непрерывного лазерного излучения // Оптика и спектроскопия. 2000. Т. 88, № 6. С. 1015–1022.
27. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешности результатов измерений. Ленинград : Энергоатомиздат, 1991. 304 с.
28. Ishimaru A. Wave propagation and scattering in random media. New York : Academic, 1978. 600 p.
29. Борен К., Хафмен Д. Рассеяние и поглощение света малыми частицами. Москва : Мир, 1986. 564 с.
30. Henyey L. G., Greenstein J. L. Diffuse radiation in the Galaxy // Astrophysical Journal. 1941. Vol. 93. P. 70–83. <https://doi.org/10.1086/144246>
31. Bezludnaya I. S., Chernova S. P., Pravdin A. B. On one approach to description of multilayer tissue fluorescence // Proceedings. Vol. 4241: Saratov Fall Meeting 2000: Optical Technologies in



- Biophysics and Medicine II. 2001. P. 290–296. <https://doi.org/10.1117/12.431534>
32. Bicout D., Brosseau C., Martinez A. S., Schmitt J. M. Depolarization of multiply scattering waves by spherical diffusers: Influence of size parameter // *Physical Review E*. 1994. Vol. 49, iss. 2. P. 1767–1770. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.1767>

References

1. Aiello A., Woerdman J. P. Physical bounds to the entropy-depolarization relation in random light scattering. *Physical Review Letters*, 2005, vol. 94, iss. 9, art. 090406. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.94.090406>
2. Puentes G., Voigt D., Aiello A., Woerdman J. P. Experimental observation of universality in depolarized light scattering. *Optics Letters*, 2005, vol. 30, iss. 23, pp. 3216–3218. <https://doi.org/10.1364/OL.30.003216>
3. Brosseau C., Bicout D. Entropy production in multiple scattering of light by a spatially random medium. *Physical Review E*, 1994, vol. 50, iss. 6, pp. 4997–5005. <https://doi.org/10.1103/physreve.50.4997>
4. Vynck K., Pierrat R. Multiple scattering of polarized light in disordered media exhibiting short-range structural correlations. *Physical Review A*, 1994, vol. 49, iss. 3, art. 033851. <https://doi.org/10.1103/physreva.49.033851>
5. MacKintosh F. C., Zhi J. X., Pine D. J., Weitz D. A. Polarization memory of multiply scattered light. *Physical Review B*, 1989, vol. 40, iss. 13, pp. 9342–9345. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.9342>
6. Pires H. D., Monken C. H. On the statistics of the entropy-depolarization relation in random light scattering. *Optics Express*, 2008, vol. 16, iss. 25, pp. 210059–210068. <https://doi.org/10.1364/oe.16.021059>
7. MacKintosh F. C., John S. Diffusing-wave spectroscopy and multiple scattering of light in correlated random media. *Physical Review B*, 1989, vol. 40, iss. 4, pp. 2383–2406. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.40.2383>
8. Nieuwenhuizen Th. M., Van Rossum M. C. W. Intensity distributions of waves transmitted through a multiple scattering medium. *Physical Review Letters*, 1995, vol. 74, iss. 14, pp. 2674–2677. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.2674>
9. Simon B. N., Simon S., Mukunda N., Gori F., Santarsiero M., Borghi R., Simon R. A complete characterization of pre-Mueller and Mueller matrices in polarization optics. *Journal of the Optical Society of America A*, 2010, vol. 27, iss. 2, pp. 188–199. <https://doi.org/10.1364/JOSAA.27.000188>
10. Ortega-Quijano N., Arce-Diego J. L. Mueller matrix differential decomposition. *Optics Letters*, 2011, vol. 36, iss. 10, pp. 1942–1946. <https://doi.org/10.1364/OL.36.001942>
11. Dremine V., Zharkikh E. V., Lopushenko I., Marcinkevics Z., Bykov A. V., Meglinski I. Incremental residual polarization caused by aging in human skin. *Journal of Biomedical Optics*, 2024, vol. 29, iss. 5, pp. 052912–052922. <https://doi.org/10.1117/1.JBO.29.5.052912>
12. Mann P., Thapa P., Nayyar V., Surya V., Mishra D., Mehta D. Multispectral polarization microscopy of different stages of human oral tissue: A polarization study. *Journal of Biophotonics*, 2024, vol. 17, iss. 2, pp. e202300236–e202300246. <https://doi.org/10.1002/jbpo.202300236>
13. Gassner C., Vongsivut J., Ng S. H., Ryu M., Tobin M. J., Juodkazy S., Morikawa J., Wood B. R. Linearly polarized infrared spectroscopy for the analysis of biological materials. *Society for Applied Spectroscopy*, 2023, vol. 77, iss. 9, pp. 977–1008. <https://doi.org/10.1177/00037028231180233>
14. Song J., Zeng N., Guo W., Guo J., Ma H. Stokes polarization imaging applied for monitoring dynamic tissue optical clearing. *Biomedical Optics Express*, 2021, vol. 12, iss. 8, pp. 4821–4836. <https://doi.org/10.1364/BOE.426653>
15. Kapahi C., Silva A. E., Cory D. G., Kulmaganbetov M., Mungalsingh M. A., Pushin D. A., Singh T., Thompson B., Sarenac D. Measuring the visual angle of polarization-related entoptic phenomena using structured light. *Biomedical Optics Express*, 2024, vol. 15, iss. 2, pp. 1278–1287. <https://doi.org/10.1364/BOE.507519>
16. Pham T. T. H., Quach T. N. N., Vo Q. H. Q. Analysis of polarization features of human breast cancer tissue by Mueller matrix visualization. *Journal of Biomedical Optics*, 2024, vol. 29, iss. 5, art. 052917. <https://doi.org/10.7868/S0869565214260041>
17. Twersky V. On propagation in random media of discrete scatterers. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics*, 1964, vol. 16, pp. 84–116. <https://doi.org/10.1090/psapm/016/0163605>



18. Parnell W. J., Abrahams I. D. Multiple point scattering to determine the effective wavenumber and effective material properties of an inhomogeneous slab. *Waves in Random Complex Media*, 2010, vol. 20, iss. 4, pp. 678–701. <https://doi.org/10.1080/17455030.2010.510858>
19. Gower A. L., Parnell W. J., Abrahams I. D. Multiple waves propagate in random particulate materials. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2019, vol. 79, iss. 6, pp. 2569–2592. <https://doi.org/10.1137/18M122306X>
20. Mishchenko M. I. Vector radiative transfer equation for arbitrarily shaped and arbitrarily oriented particles: A microphysical derivation from statistical electromagnetics. *Applied Optics*, 2002, vol. 41, iss. 33, pp. 7114–7134. <https://doi.org/10.1364/AO.41.007114>
21. Yang W., Jin X., Gao X. Vector radiative transfer equation for arbitrary shape particles derived from Maxwell's electromagnetic theory. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 2021, vol. 265, art. 107307. <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2020.107307>
22. Ghosh N., Wood M. F. G., Vitkin I. A. Mueller matrix decomposition for extraction of individual polarization parameters from complex turbid media exhibiting multiple scattering, optical activity, and linear birefringence. *Journal of Biomedical Optics*, 2008, vol. 13, iss. 4, art. 044036. <https://doi.org/10.1117/1.2960934>
23. Wood M. F. G., Guo X., Vitkin I. A. Polarized light propagation in multiply scattering media exhibiting both linear birefringence and optical activity: Monte Carlo model and experimental methodology. *Journal of Biomedical Optics*, 2007, vol. 12, iss. 1, art. 014029. <https://doi.org/10.1117/1.2434980>
24. Zimnyakov D. A. On some manifestations of similarity in multiple scattering of coherent light. *Waves Random Media*, 2000, vol. 10, iss. 4, pp. 417–434. <https://doi.org/10.1088/0959-7174/10/4/302>
25. Zimnyakov D. A., Sinichkin Yu. P. Ultimate degree of residual polarization of incoherently backscattered light for multiple scattering of linearly polarized light. *Optics and Spectroscopy*, 2001, vol. 91, iss. 1, pp. 103–108. <https://doi.org/10.1134/1.1388331>, EDN: LGMUBJ
26. Zimnyakov D. A., Sinichkin Yu. P. Polarization visualization of scattering media with CW laser radiation. *Optics and Spectroscopy*, 2000, vol. 88, iss. 6, pp. 926–932. <https://doi.org/10.1134/1.626902>
27. Novitsky P. V., Zograf I. A. *Otsenka pogreshnostey rezul'tatov izmereniy* [Estimation of the measurement results error]. Leningrad, Energoatomizdat, 1991. 304 p. (in Russian).
28. Ishimaru A. *Wave propagation and scattering in random media*. New York, Academic, 1978. 600 p.
29. Bohren C. F., Huffman D. R. *Absorption and scattering of light by small particles*. 1st ed. New York, Wiley VCH, 1983. 544 p. (Russ. ed.: Moscow, Mir, 1986. 564 p.).
30. Henyey L. G., Greenstein J. L. Diffuse radiation in the Galaxy. *Astrophysical Journal*, 1941, vol. 93, pp. 70–83. <https://doi.org/10.1086/144246>
31. Bezludnaya I. S., Chernova S. P., Pravdin A. B. On one approach to description of multilayer tissue fluorescence. *Proceedings, vol. 4241: Saratov Fall Meeting 2000: Optical Technologies in Biophysics and Medicine II*, 2001, pp. 290–296. <https://doi.org/10.1117/12.431534>
32. Bicout D., Brosseau C., Martinez A. S., Schmitt J. M. Depolarization of multiply scattering waves by spherical diffusers: Influence of size parameter. *Physical Review E*, 1994, vol. 49, iss. 2, pp. 1767–1770. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.49.1767>

Поступила в редакцию / Received 20.05.2024

Принята к публикации / Accepted 10.09.2024

Опубликована онлайн / Published online 30.05.2025



Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 295–302

Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 295–302

<https://mmi.sgu.ru>

<https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-295-302>, EDN: ZTYLML

Article

Heuristic optimization methods for linear ordering of automata

R. A. Farakhutdinov

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Renat A. Farakhutdinov, renatfara@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2877-8557>, SPIN: 7667-3987, AuthorID: 1078801

Abstract. The rapid development of society is associated with two key areas of science and technology: methods of working with Big Data and Artificial Intelligence. There is a common belief that up to 80% of the data analysis process is the time spent on data preparation. One aspect of preparing data for analysis is structuring and organizing data sets (also known as data tidying). Order relations are ubiquitous, we meet them when we consider numbers, Boolean algebras, partitions, multisets, graphs, logical formulas, and many other mathematical entities. On the one hand, order relations are used for representing data and knowledge, on the other hand, they serve as important tools for describing models and methods of data analysis, such as decision trees, random forests, version spaces, association rules, and so on. Since a serious limitation of many methods of pattern mining is computational complexity, it is important to have an efficient algorithm for ordering data. In this paper, we consider deterministic automata without output signals and investigate the problem of linear ordering of such automata, which consists of building a linear order on the set of states of an automaton, that will be consistent with the action of each input signal of the automaton. To solve this problem, we consider heuristic methods of global optimization: simulated annealing method and artificial bee colony algorithm. For both methods, we made a software implementation and performed testing on a special kind of automata.

Keywords: data science, optimization, automata, linear order, simulated annealing, bee colony

Acknowledgements: The author expresses gratitude to his scientific supervisor V. A. Molchanov for the assigned task and comprehensive assistance.

For citation: Farakhutdinov R. A. Heuristic optimization methods for linear ordering of automata. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2025, vol. 25, iss. 2, pp. 295–302. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-295-302>, EDN: ZTYLML

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Научная статья

УДК 519.688

Эвристические методы оптимизации для линейного упорядочивания автоматов

Р. А. Фарахутдинов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Фарахутдинов Ренат Абуханович, аспирант кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии, renatfara@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0002-2877-8557>, SPIN: 7667-3987, AuthorID: 1078801



Аннотация. Стремительное развитие общества связано с двумя ключевыми направлениями науки и технологий: методами работы с большими данными (Big Data) и искусственным интеллектом (Artificial Intelligence). Есть распространенное мнение, что до 80% процесса анализа данных — это время, потраченное на их подготовку. Одним из аспектов подготовки данных к анализу является структурирование и приведение в порядок наборов данных, так называемое data tidying. Отношения порядка встречаются повсеместно: мы встречаем их, когда рассматриваем числа, булевы алгебры, разбиения, мультимножества, графы, логические формулы и многие другие математические объекты. С одной стороны, отношения порядка используются для представления данных и знаний, с другой стороны, они служат важными инструментами для описания моделей и методов анализа данных, таких как деревья решений, случайные леса, пространства версий, правила ассоциации и т. д. Поскольку серьезным ограничением многих методов анализа шаблонов является вычислительная сложность, важно иметь эффективный алгоритм упорядочивания данных. В данной работе рассматриваются детерминированные автоматы без выходных сигналов и исследуется задача линейного упорядочения таких автоматов, заключающаяся в построении на множестве состояний автомата данного линейного порядка, который будет согласован с действием каждого входного сигнала автомата. Для решения этой задачи мы рассматриваем эвристические методы глобальной оптимизации: метод имитации отжига и алгоритм пчелиной колонии. Для обоих методов написана программная реализация и проведено тестирование на автоматах специального вида.

Ключевые слова: наука о данных, оптимизация, автомат, линейный порядок, имитация отжига, пчелиная колония

Благодарности: Автор выражает благодарность своему научному руководителю В. А. Молчанову за поставленную задачу и всестороннюю помощь.

Для цитирования: Farakhutdinov R. A. Heuristic optimization methods for linear ordering of automata [Фарахутдинов Р. А. Эвристические методы оптимизации для линейного упорядочивания автоматов] // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025. Т. 25, вып. 2. С. 295–302. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2025-25-2-295-302>, EDN: ZTYLML

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Introduction

Big data are large volume structured or unstructured data sets. They are processed using special dedicated tools to be used for statistics, analysis, forecasts, and decision-making. Simply stated, work with big data occurs according to the following schema:

- 1) information is collected from various sources;
- 2) the data is stored in databases and repositories;
- 3) the data is processed and analyzed;
- 4) the processed data is output using visualization tools or used for machine learning.

When analyzing big data, it is important to be able to organize data for more efficient and convenient use. The process of data sorting involves arranging the data into some meaningful order to make it easier to understand, analyze, or visualize. When working with research data, sorting is a common method used for visualizing data in a form that makes it easier to comprehend the story the data is telling. In this case, the ordering of data must be consistent with the action of their special transformations, such as reducing information to canonical form, encoding, encryption, and so on. In this regard, data can be considered as the set of states of the automaton and various special transformations can be considered as input signals of the automaton [1]. That is why for the ordering of data we consider the problem of linear ordering of deterministic automata without output signals. This problem lies in the fact that it is necessary to build such a linear order on the set of states of an automaton, which will be consistent with all input signals of this automaton. By this means, solving the problem of linear ordering of automata will make it possible to develop more efficient algorithms for studying various theoretical and applied problems, related to the development of effective algorithms and methods for analyzing structured and unstructured data of large volumes and diversity.



In [2], to solve the problem of linear ordering of automata, the authors considered a search algorithm with backtracking and cutting. Test results showed the effectiveness of this algorithm compared to the brute force algorithm. However, the complexity of this algorithm is still factorial. In this regard, interest naturally arises in heuristic algorithms for global optimization. In this paper, we consider two such algorithms: The simulated annealing method and the artificial bee colony algorithm.

1. Simulated annealing method

A simulated annealing algorithm is a method for solving various optimization problems. The exotic name of this algorithm is associated with simulation methods in statistical physics [3] based on the Monte Carlo technique. In 1953, N. Metropolis developed an algorithm for simulating the establishment of equilibrium in a system with many degrees of freedom at a given temperature [4]. The study of the crystal lattice and the behavior of atoms during the slow cooling of a body led to the emergence of probabilistic algorithms that turned out to be extremely effective in combinatorial optimization. This was first noticed in 1983 by S. Kirkpatrick [5]. Today, this algorithm is popular both among practitioners due to its simplicity, flexibility, and efficiency, and among theorists, since for this algorithm, it is possible to analytically study its properties and prove asymptotic convergence (see, for example, [6, 7]).

One of the main advantages of the annealing method is its ability to avoid getting stuck in a local minimum while continuing to search for a global minimum. This is achieved by accepting not only changes in parameters that lead to a decrease in the value of the function but also some changes that increase its value depending on the so-called temperature.

The simulated annealing algorithm belongs to the class of threshold algorithms and is used to search for the global minimum of some function $f(x)$ defined for values x from some space S . The elements of the set S represent the states of a conditional physical system (its energy levels), and the value of the function f at these points is interpreted as the energy of the system $E = f(x)$. At each moment of time, the system has a temperature T , which decreases. After generating a new state x' , the system moves to the next step to state x' with probability $h(\Delta E, T)$. By ΔE we mean the increment of the energy function $f(x') - f(x)$, and the value $h(\Delta E, T)$ is called the probability of accepting a new state [8].

In general, the simulated annealing algorithm looks like this.

1. Randomly select a starting point x_0 , $x_0 \in S$.
2. Set $x := x_0$, calculate $E := f(x)$.
3. At the i th iteration of the main loop, the following steps are performed:
 - a) generate a new point $x_i := G(x, T(i))$, where $G(x, T(i))$ is a random element from S , which is selected according to the given generating family of probability distributions $\zeta(x, T)$. Calculate $E_i := f(x_i)$;
 - b) compare the energy of the system E_i in state x_i with the currently found global minimum E . If $E_i < E$, then set the global minimum equal to $E := E_i$ and set the state $x := x_i$. Go to the next iteration of the loop;
 - c) otherwise, generate a random number $\alpha \in [0; 1]$;
 - d) if $\alpha < h(E' - E, T(i))$, then put $x := x_i$, $E := E_i$ and go to the next iteration of the loop;
 - e) exit the loop if the system has reached the global minimum.

There are various schemes for choosing the parameters of the annealing method: Boltzmann annealing, Cauchy annealing (fast annealing), ultrafast annealing, Xin Yao algorithm, and others. A detailed description of each scheme, as well as its advantages and disadvantages, can be found in [8].



2. Linear ordering of automata using simulated annealing method

Let X be a non-empty set. A binary relation $\omega \in X \times X$ is called an order on the set X if it is reflexive, antisymmetric, and transitive. An order ω is called linear if for any $x, y \in X$ either $(x, y) \in \omega$ or $(y, x) \in \omega$ [9].

An ordered set is an algebraic system (X, \leq) , where X is some non-empty set, \leq is an order on it. An ordered set with a linear order is called a linearly ordered set.

By automaton we mean an algebraic system $A = (X, S, \delta)$, where X is a finite non-empty set of states, S is a finite non-empty set of input signals, $\delta : X \times S \rightarrow X$ is a transition function.

The problem of linear ordering of a finite automaton $A = (X, S, \delta)$ is as follows: it is necessary to construct on the set of states X a linear order \leq_X , for which for any $s \in S$ from the condition $x_1 \leq_X x_2$ follows $\delta(x_1, s) \leq_X \delta(x_2, s)$ ($x_1, x_2 \in X$).

Criteria for linear orderability of automata were investigated in [10]. Beyond that, the problem of linear ordering of automata relates to the problem of orderability of different kinds of algebras [11]. Apart from that, the problem arises in the theory of formal languages [12, 13].

Let us apply the simulated annealing method to solve the problem of linear ordering of finite automata. Let the input to the algorithm be a finite automaton $A = (X, S, \delta)$ with a set of states $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. The algorithm consists of the following steps.

1. Randomly generate a chain $\omega_0 := [x_{0_1} \leq x_{0_2} \leq \dots \leq x_{0_n}]$ on the set of states X .
2. Calculate the initial energy $E_0 := f(\omega_0)$.
3. If $E_0 = 0$, then return ω_0 as a positive result (linear order).
4. Set $E := E_0$, $T := T_{max}$, $\omega := \omega_0$.
5. While $T > T_{min}$ and $E > 0$, do the following steps:
 - a) calculate $\omega' := reverse(\omega, i_1, i_2)$, where *reverse* is a function that reverses elements in the chain ω between two randomly selected indices i_1 and i_2 ;
 - b) calculate $E' := f(\omega')$;
 - c) if $E' < E$, then set $\omega := \omega'$ and $E := E'$, otherwise:
 - generate random number $\alpha \in [0; 1]$;
 - if $\alpha < h(\Delta E, T)$, then set $\omega := \omega'$ and $E := E'$;
 - d) decrease temperature: $T := t(T)$.
6. If $E = 0$, then return ω as a positive result (global minimum, i.e. linear order), otherwise return ω as a negative result (local minimum).

The value of the target function $f(\omega)$ for a chain $\omega = [x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n}]$ in the automaton $A = (X, S, \delta)$ with n states is calculated using the following algorithm:

- 1) set $res := 0$;
- 2) in a loop for each input signal $s \in S$:
 - a) calculate orbit $O_s(\omega) := (\delta(x_{i_1}, s), \delta(x_{i_2}, s), \dots, \delta(x_{i_n}, s))$;
 - б) in the orbit $O_s(\omega)$ find a number of elements k_s inconsistent with the chain ω ;
 - в) $res := res + k_s$;
- 3) return the result res .

It is worth noting that this procedure for calculating the target function allows parallelization across input signals, since for each input signal the calculation of the orbit and the counting of inconsistent elements in it do not depend on other input signals.

The temperature of the system changes according to the law $t(T) = \frac{T}{1+\alpha T}$, where α is a randomly selected coefficient from the interval $[0; 1]$.

3. Artificial bee colony algorithm

Among optimization methods, swarm intelligence algorithms are widely used, which imitate the collective behavior of complex self-organizing living systems. Bioinspired algorithms include the bee colony algorithm, which is based on modeling the behavior of a colony of honey bees when collecting nectar in nature. This algorithm was proposed in 2005 by D. Karaboga [14]. The main activity of a bee swarm is a two-stage search for optimal solutions in a certain space. For



this purpose, there are different types of bees in a bee swarm: scout bees and forager bees. In the first stage, scout bees explore the area surrounding the hive and provide other bees with information about promising places where the largest amount of nectar was found. In the second stage, forager bees fly to the vicinity of the places reported by scout bees and carry out local exploration in order to find a place richer in nectar, and scout bees continue to search for other areas.

The bee colony algorithm can be used to solve discrete (combinatorial) and continuous global optimization problems. Compared to other algorithms, the bee colony algorithm has a simpler structure, fewer control parameters, and more powerful search capabilities. In this regard, the algorithm has found wide application in different optimization problems [15–17].

In general, the bee colony algorithm consists of four phases: the initialization phase, the work phase of scout bees, the information exchange phase, and the work phase of forager bees. The bees can change their roles until the termination condition is reached.

The algorithm uses the following control parameters:

- a number of scout bees T_1 , a number of forager bees T_2 ;
- L is a limit on the number of iterations when a forager bee does not improve the solution;
- M is the maximum number of iterations.

Main steps of the algorithm:

- 1) generation of a swarm of bees numbering $T = T_1 + T_2$;
- 2) exploration of space by scout bees from initial positions. Each scout bee generates a random solution for which the value of the target function is calculated;
- 3) local exploration of the vicinity of the solutions found by scout bees in order to improve them;
- 4) if the forager bee has improved the solution, then she communicates it to the entire swarm of bees;
- 5) if the forager bee has not improved the solution in L iterations, then it turns into a scout bee for one iteration in order to find a new solution, after which it returns to its role as a forager;
- 6) the algorithm terminates if any bee has found an optimal solution or when the maximum number of iterations M has been reached.

It should be noted that the time and complexity of executing the described algorithm directly depends on the number of iterations, the size of the bee colony, and the complexity of calculating the target function.

4. Linear ordering of automata using artificial bee colony algorithm

Let us apply the artificial bee colony algorithm to solve the problem of linear ordering of finite automata. Let the input to the algorithm be a finite automaton $A = (X, S, \delta)$ with a set of states $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Let's define algorithm parameters:

$T'_1 = k \times n$ ($k \in \mathbb{N}$) — the initial number of scout bees;

T''_1 — the number of scout bees after the initialization phase;

T_2 — the number of forager bees;

M — the maximum number of cycles.

The algorithm consists of the following steps.

1. For each state $x \in X$ of the automaton A , randomly generate k different chains

$$\omega_i := [x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n}]$$

on the set of states X ($1 \leq i \leq k$). This step simulates a flight of scout bees from the initial states.

2. Calculate the target function value $E_{\omega_i} := f(\omega_i)$ for each chain ω_i , where $1 \leq i \leq T'_1$.



3. For each state $x \in X$ of the automaton A , find a chain ω_x with the best (i.e. minimum) value of the target function. Store this information in an associative array B with the key, being state x , and the value, being the best chain ω_x .
4. Define a queue Q of all states of the automaton, which will be used by forager bees.
5. While the solution is not found and the number of iterations is less than M , do:
 - 5.1. For each forager bee fb_i , $1 \leq i \leq T_2$:
 - a) poll a state from the queue Q . Let it be x ;
 - b) find the currently best chain ω_x for the state x in the array B ;
 - c) randomly shuffle the tail of ω_x , where the tail is the last 20% of states in the chain ω_x . Let's denote the result chain as ω'_x ;
 - d) calculate the target function value $E_{\omega'_x} = f(\omega'_x)$;
 - e) if $E_{\omega'_x} < E_{\omega_x}$, then update the array B with new chain ω'_x by the key x ;
 - f) push the state x back to queue Q .
 - 5.2. For each scout bee sb_i , $1 \leq i \leq T_1''$:
 - a) randomly select some state $x \in X$ of the automaton;
 - b) randomly generate a chain ω'_x on the set of states X ;
 - c) calculate the target function value $E_{\omega'_x} = f(\omega'_x)$;
 - d) compare the target function value $E_{\omega'_x}$ of new chain ω'_x with the target function value E_{ω_x} of the best chain ω_x for the state x in the array B . If $E_{\omega'_x} < E_{\omega_x}$, then update the array B with new chain ω'_x by the key x .
6. If $E_{\omega_x} = 0$ of some state x , then return ω_x as a positive result (global minimum, i.e. linear order), otherwise return a chain with the lowest target function value.

Let us note that the value of the target function $f(\omega)$ for a chain $\omega = [x_{i_1} \leq x_{i_2} \leq \dots \leq x_{i_n}]$ in the automaton $A = (X, S, \delta)$ with n states is calculated in the same way as it is described in the Section 2.

It is worth noting that the artificial bee colony algorithm allows parallelization across bees since each bee can fly independently, only a safe update of the global array B with the best chains per state is required.

5. Test results

For both considered algorithms, we implemented programs in the Java programming language. Programs were tested on automata $A = (X, S, \delta)$ with a set of states $X = \{1, 2, \dots, n\}$ and transition functions U_i , $1 \leq i \leq n - 1$, V_k , $2 \leq k \leq n$, which are determined by the following formulas:

$$U_i(j) = \begin{cases} i + 1 & \text{for } j = i, \\ j & \text{otherwise,} \end{cases} \quad V_k(j) = \begin{cases} k - 1 & \text{for } j = k, \\ j & \text{otherwise.} \end{cases}$$

It is known [18] that the transformations U_i , V_k generate the entire semigroup of endomorphisms of a linearly ordered set. Consequently, such automata are automata with the most complex semigroup of input signals, moreover, they definitely have a linear order on the set states (for example, natural order on the set $\{1, 2, \dots, n\}$).

The program of the linear ordering of automata using the simulated annealing method runs at $T_{max} = 100$, $T_{min} = 0,0000001$. To measure the minimum execution time for each number of states of the automaton, the program was launched simultaneously on all available logical processors.

The program of the linear ordering of automata using the artificial bee colony algorithm run with parameters $k = 50$ (i.e. $T_1' = 50 \times n$), $T_1'' = 0.3 \times P$, $T_2 = 0.7 \times P$, where P is a number of logical processors, $M = 2^{32}$. For this algorithm, we used parallel implementation, which allows the execution of flights of different kinds of bees independently, based on the number of available logical processors P .



Testing was carried out using an Intel Core i7-6500U 2.50 GHz processor. The test results are presented in the Table.

Table. Test results of different programs of linear ordering of automata

| Amount of states | Backtracking algorithm execution time, sec | Average execution time of simulated annealing algorithm, sec | Minimum execution time of simulated annealing algorithm, sec | Execution time of artificial bee colony algorithm, sec |
|------------------|--|--|--|--|
| 10 | 0.9 | 0.918 | 0.007 | 0.162 |
| 20 | 44.4 | 3.173 | 0.117 | 2.137 |
| 30 | 387.7 | 7.319 | 0.150 | 4.538 |
| 40 | 1883.9 | 10.848 | 0.654 | 9.855 |
| 50 | 6016.6 | 25.606 | 1.693 | 8.146 |
| 60 | 9654.8 | 104.745 | 4.159 | 13.56 |
| 70 | 32510.4 | 436.278 | 9.558 | 84.951 |
| 80 | 58627.9 | 561.394 | 20.526 | 71.325 |
| 90 | 79478.2 | 867.496 | 27.269 | 544.047 |
| 100 | 90176.4 | 3857.963 | 53.977 | 1297.260 |
| 150 | — | 11452.712 | 410.033 | 7859.972 |
| 200 | — | 14859.536 | 1837.811 | 11635.203 |
| 300 | — | 18769.451 | 13817.571 | 21851.645 |

The test results show a significant superiority of considered heuristic optimization methods compared to the brute-force algorithm with backtracking and cutting. It is easy to see, that parallel implementation of the simulated annealing method is more efficient than the parallel implementation of the artificial bee colony algorithm. Thus, the heuristic optimization methods considered are effective ways to solve the problem of linear ordering of finite automata.

References

1. Evsyutin O. O., Rossoshek S. K. Use of cellular automata for problems solving of information transformation. *Doklady TUSUR*, 2010, vol. 21, iss. 1–1, pp. 173–174 (in Russian).
2. Molchanov V. A., Farakhutdinov R. A. Linear ordering of automata. *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics], 2019, vol. 21, pp. 45–48 (in Russian).
3. Binder K. *Monte Carlo methods in statistical physics*. Berlin, Springer, 1979. 376 p.
4. Metropolis N., Rosenbluth A. W., Rosenbluth M. N., Teller A. H., Teller E. Equation of state calculations by fast computing machines. *The Journal of Chemical Physics*, 1953, vol. 21, pp. 1087–1092. <https://doi.org/10.1063/1.1699114>
5. Kirkpatrick S., Gelatt C. D. Jr., Vecchi M. P. Optimization by simulated annealing. *Science*, 1983, vol. 220, pp. 671–680.
6. Savin A. N., Timofeeva N. E. The application of optimization algorithm using simulated annealing method for parallel computing systems. *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, iss. 1, pp. 110–116 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2012-12-1-110-116>, EDN: OUPILL
7. Doerr B., Rajabi A., Witt C. Simulated annealing is a polynomial-time approximation scheme for the minimum spanning tree problem. *Algorithmica*, 2024, vol. 86, pp. 64–89. <https://doi.org/10.1007/s00453-023-01135-x>
8. Lopatin A. S. Simulated Annealing Method. *Stokhasticheskaya Optimizatsiya v Informatike*, 2005, vol. 1, pp. 133–149. (in Russian). EDN: KYIMEB
9. Bogomolov A. M., Saliy V. N. *Algebraicheskie osnovy teorii diskretnykh sistem* [Algebraic foundations of the theory of discrete systems]. Moscow, Nauka, 1997. 368 p. (in Russian).
10. Kats M. M. Criterion for linear ordering of a partial automaton. *Izvestiya Vysshih Uchebnyh Zavedenij. Matematika*, 1997, iss. 10, pp. 37–43 (in Russian). EDN: HQUVBJ



11. Gabovich E. Ya. Fully ordered semigroups and their applications. *Russian Mathematical Surveys*, 1976, vol. 31, iss. 1, pp. 147–216. <https://doi.org/10.1070/RM1976v031n01ABEH001447>
12. Klíma O., Polák L. On varieties of ordered automata. In: Martin-Vide C., Okhotin A., Shapira D. (eds.) *Language and automata theory and applications. LATA 2019*. Lecture notes in computer science, vol. 11417. Springer, Cham, 2019, pp. 108–120. https://doi.org/10.1007/978-3-030-13435-8_8
13. Cotumaccio N., D'Agostino G., Policriti A., Prezma N. Co-lexicographically ordering automata and regular languages. Part I. *Journal of the ACM*, 2023, vol. 70, iss. 4, pp. 1–73. <https://doi.org/10.1145/3607471>
14. Karaboga D. An idea based on honey bee swarm for numerical optimization. *Technical Report, Erciyes University*, 2005. Available at: https://abc.erciyes.edu.tr/pub/tr06_2005.pdf (accessed November 22, 2023).
15. Pham D. T., Castellani M. The bees algorithm: Modelling foraging behaviour to solve continuous optimization problems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2009, vol. 223, iss. 12, pp. 2919–2938. <https://doi.org/10.1243/09544062JMES1494>
16. Cuevas E., Sencion-Echauri F., Zaldivar D., Perez-Cisneros M. Multi-circle detection on images using Artificial Bee Colony (ABC) optimization. *Soft Computing*, 2012, vol. 16, iss. 2, pp. 281–296. <https://doi.org/10.1007/s00500-011-0741-0>
17. Toktas A. Multi-objective design of multilayer microwave dielectric filters using artificial bee colony algorithm. In: Carbas S., Toktas A., Ustun D. (eds.) *Nature-Inspired Metaheuristic Algorithms for Engineering Optimization Applications*. Springer Tracts in Nature-Inspired Computing. Springer, Singapore, 2021, pp. 357–372. https://doi.org/10.1007/978-981-33-6773-9_16
18. Aizenshtat A. Ya. The defining relations of the endomorphism semigroup of a finite linearly ordered set. *Sibirskii Matematicheskii Zhurnal*, 1962, vol. 3, iss. 2, pp. 161–169 (in Russian).

Received / Поступила в редакцию 22.11.2023

Accepted / Принята к публикации 04.03.2024

Published online / Опубликовано онлайн 30.05.2025



ISSN 1816-9791 (Print). ISSN 2541-9005 (Online)
Известия Саратовского университета. Новая серия.
Серия: Математика. Механика. Информатика. 2025.
Том 25, выпуск 2

ИЗВЕСТИЯ САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА Новая серия

Серия: Акмеология образования. Психология развития
Серия: История. Международные отношения

Серия: Математика. Механика. Информатика

Серия: Науки о Земле
Серия: Социология. Политология

Серия: Физика
Серия: Филология. Журналистика
Серия: Философия. Психология. Педагогика

Серия: Химия. Биология. Экология
Серия: Экономика. Управление. Право

