



## РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 198–208  
*Izvestiya of Saratov University. Physics*, vol. 23, iss. 3, pp. 198–208  
<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-3-198-208>, EDN: UMBUSL

Научная статья  
УДК 517.9

### Синхронизация в сетях фазовых осцилляторов с топологиями связей «кольцо» и «малый мир» при различных видах зависимости частоты осциллятора от его положения в сети

А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко<sup>✉</sup>

Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

Короновский Алексей Александрович, доктор физико-математических наук, профессор, проректор по научной работе и цифровому развитию, заведующий кафедрой физики открытых систем, [alexey.koronovskii@sgu.ru](mailto:alexey.koronovskii@sgu.ru), <https://orcid.org/0000-0003-3585-317X>

Куровская Мария Константиновна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики открытых систем, [maria\\_kurovskaya@gmail.com](mailto:maria_kurovskaya@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0002-2805-8402>

Москаленко Ольга Игоревна, доктор физико-математических наук, доцент, начальник управления научной деятельности, профессор кафедры физики открытых систем, [o.i.moskalenko@gmail.com](mailto:o.i.moskalenko@gmail.com), <https://orcid.org/0000-0001-5727-5169>

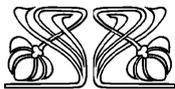
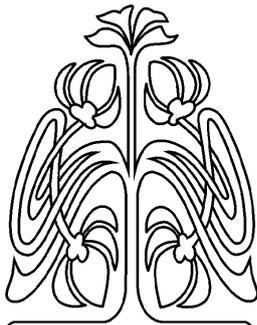
**Аннотация.** Теоретически и численно рассмотрен общий случай установления/разрушения полностью синхронного состояния сетей фазовых осцилляторов с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир», парциальные частоты узловых элементов которых распределены вдоль сети по произвольному закону. В качестве исследуемой системы была рассмотрена сеть осцилляторов Курамото, состоящая из 1000 узловых элементов. Было изучено влияние пространственной зависимости частоты осциллятора от его номера на границу возникновения полностью синхронного состояния сети фазовых осцилляторов и характер перехода к полностью синхронному режиму. Получено аналитическое выражение для критического значения параметра связи, соответствующего установлению полностью синхронного режима в рассматриваемой сети. Для иллюстрации результатов теоретического анализа и численного моделирования были использованы квадратичная и экспоненциальная зависимости парциальных частот осцилляторов от пространственной координаты, однако приведенный в настоящей работе подход справедлив для любой произвольной функции, интегрируемой на рассматриваемом пространственном интервале.

**Ключевые слова:** синхронизация, осцилляторы Курамото, сети нелинейных элементов, парциальные частоты, малый мир, кольцо

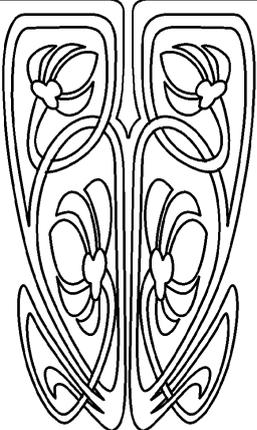
**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 19-12-00037).

**Для цитирования:** Короновский А. А., Куровская М. К., Москаленко О. И. Синхронизация в сетях фазовых осцилляторов с топологиями связей «кольцо» и «малый мир» при различных видах зависимости частоты осциллятора от его положения в сети // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2023. Т. 23, вып. 3. С. 198–208. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-3-198-208>, EDN: UMBUSL

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)



НАУЧНЫЙ  
ОТДЕЛ





Article

## Synchronization in phase oscillator networks with “ring” and “small world” link topologies and different dependences of the oscillator frequency on its network location

A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko✉

Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

Alexey A. Koronovskii, alexey.koronovskii@sgu.ru, <https://orcid.org/0000-0003-3585-317X>

Maria K. Kurovskaya, mariakurovskaya@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-2805-8402>

Olga I. Moskalenko, o.i.moskalenko@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-5727-5169>

**Abstract. Background and Objectives:** In this paper, we consider the general case of the establishment/destruction of a completely synchronous state of phase oscillator networks with topologies of links such as “ring” and “small world”. The natural frequencies of the node oscillators are supposed to be distributed along the network according to an arbitrary law. **Materials and Methods:** The network of Kuramoto oscillators, consisting of 1000 node elements, was considered as the system under study theoretically and numerically. **Results:** The influence of quantitative characteristics of the dependence of natural frequencies on the number (spatial coordinate) of the oscillator on the onset of a completely synchronous state of the network of phase oscillators as well as the mechanism of the transition to a completely synchronous regime has been studied. An analytical expression for the critical value of the coupling parameter corresponding to the establishment of a fully synchronous regime within the network under consideration has been deduced. The theoretical results obtained have been compared with the results of the direct numerical simulation of the oscillator network behavior, with the excellent agreement being observed. **Conclusion:** It has been found that the dependence of the natural frequencies of oscillators on the spatial coordinate (or, on the number of the oscillator in the network) in the case of networks with the topology of links such as “ring” and “small world” determines completely the properties of such networks from the point of view of establishing the phase synchronization. Having based on the “ring” and “small world” network properties, it is possible to solve not only the problem of finding the critical value of the coupling parameter for the known frequency dependences on the coordinate, but also the problem of synthesizing such networks with the predetermined properties.

**Keywords:** phase synchronization, Kuramoto oscillators, network, natural frequency, small world, ring

**Acknowledgements:** This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-12-00037).

**For citation:** Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Moskalenko O. I. Synchronization in phase oscillator networks with “ring” and “small world” link topologies and different dependences of the oscillator frequency on its network location. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2023, vol. 23, iss. 3, pp. 198–208 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-3-198-208>, EDN: UMBUSL

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

### Введение

Исследование динамики сложных сетей остается актуальной задачей, о чем свидетельствует, в частности, большое количество публикаций по данной тематике (см., например, [1, 2]). Среди множества направлений исследований в данной области можно отметить различные аспекты синхронной динамики узловых элементов, входящих в структуру сети, включая вопросы установления/разрушения полностью синхронного состояния сети, в том числе с учетом различных типов синхронной динамики связанных элементов [3, 4]. Одним из наиболее распространенных типов синхронной динамики связанных систем является режим фазовой синхронизации, когда имеет место совпадение частот взаимодействующих друг с другом осцилляторов, а их мгновенные фазы оказываются захваченными [5, 6].

Переход к полностью синхронному состоянию в сети фазовых осцилляторов в типичном случае происходит постепенно, по мере увеличения силы связи между элементами сети: с ростом величины параметра связи все больше и больше осцилляторов становятся синхронными пока,

при определенном пороговом (критическом) значении связи вся сеть не начинает демонстрировать полностью синхронное поведение [3, 7–9]. В то же самое время, при определенных условиях в сети нелинейных осцилляторов возможен резкий переход от слабо синхронного состояния к полностью синхронной динамике. Такой переход происходит внешне внезапно, сопровождается резким ростом числа синхронных элементов сети (от относительно небольшого значения до предельной величины, соответствующей полному числу элементов сети), в связи с чем получил название «взрывной синхронизации» [10–12]. Условия, при которых наблюдается такое явление, оказываются, как правило, весьма специфическими, сильно зависят от типа топологии межэлементных связей сети [13], при этом чрезвычайно важную роль играет распределение парциальных частот взаимодействующих элементов  $g(\omega)$ , которое определяет не только пороговое значение параметра связи, но и саму возможность взрывного резкого перехода к полностью синхронному состоянию.

Первоначально явление взрывной синхронизации было описано в регулярных («каждый



с каждым») сетях [13] и сетях со случайной [14] и масштабно-инвариантной [15,16] топологией межэлементных связей, а также в сетях с адаптивным характером связей [17]. Известны также другие разновидности сетей, для которых наблюдается явление взрывной синхронизации [18–20]. Несколько позднее [21] подобный взрывной переход к полностью синхронному состоянию фазовых осцилляторов был изучен в сетях с регулярной топологией связей типа «кольцо», а также в сетях с топологией связей «малый мир», построение которых опирается на метод Ваттса–Строгатца [22], при малой вероятности  $p$  переключения связей между отдельными элементами. Результаты исследований показали, что взрывной переход от слабосинхронного к полностью синхронному состоянию в этих сетях также наблюдается, но, в то же самое время, для сетей с топологией связей типа «кольцо» и «малый мир» есть ряд характерных особенностей. Одной из таких особенностей является тот факт, что определяющую роль в резком переходе к синхронному режиму играет не столько распределение парциальных частот  $g(\omega)$ , как в случаях сетей со случайной или масштабно-инвариантной топологиями связей, сколько зависимость парциальных частот от номера элемента,  $\omega_n = \omega(n)$ , или, что почти одно и то же, от пространственной координаты  $x$ , которую можно ввести в рассмотрение вдоль сети благодаря сильно регулярному характеру связей между элементами. В силу этой особенности, например, в таких сетях с одинаковым количеством элементов, характеризующихся одним и тем же распределением парциальных частот  $g(\omega)$ , но разными зависимостями этих частот от пространственной координаты  $\omega(x)$ , переход к полностью синхронному режиму происходит при различных значениях интенсивности связей между элементами [23].

В вышеупомянутых работах [21, 23] на примере сетей фазовых осцилляторов Курамото [24–26] взрывной характер перехода к полностью синхронному состоянию сетей с топологией межэлементных связей «кольцо» и «малый мир» был рассмотрен лишь для частных случаев линейного и гармонического характера зависимости парциальных частот осцилляторов от номера элемента сети. В настоящей работе изучается общий случай и проводится аналитическое рассмотрение и численное моделирование поведения сети, в которой собственные частоты узловых элементов подчиняются произвольной наперед заданной

функциональной зависимости от пространственной координаты, с единственным условием интегрируемости данной функции  $\omega(x)$  на рассматриваемом пространственном интервале длиной  $2L$ , соответствующей длине рассматриваемой сети в веденной системе координат.

Настоящее исследование существенно расширяет класс сложных сетей, в которых возможно описать, спрогнозировать и даже сконструировать установление полностью синхронного состояния при различных значениях управляющих параметров, в частности, определить точное значение глобального параметра связи, при котором наступает переход от слабосинхронной динамики элементов сети к состоянию, в котором все узловые элементы сети будут составлять единый синхронный кластер, характеризующийся синхронной частотой колебаний  $\Omega_s$ .

## 1. Модель и методы

В качестве исследуемой системы была рассмотрена сеть осцилляторов Курамото [24, 26], состоящая из  $N$  элементов (в настоящей работе  $N$  было выбрано равным 1000), с топологией межэлементных связей типа «кольцо», где каждый осциллятор связан с  $2K$  ближайшими соседями

$$\dot{\varphi}_i = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\varphi_j - \varphi_i). \quad (1)$$

В соотношении (1)  $\varphi_i$  и  $\omega_i$  – мгновенные фаза и частота  $i$ -го осциллятора в текущий момент времени. Изначально фазы  $\varphi_i$  взаимодействующих элементов были заданы случайно и распределены равномерно на интервале  $[0; 2\pi]$ . Управляющий параметр  $\lambda$  задает силу взаимодействия друг с другом осцилляторов в сети,  $a_{ij}$  являются элементами матрицы связи. В силу предположения о взаимном характере связей матрица является симметричной, при этом коэффициенты  $a_{ij} = a_{ji}$  матрицы равны единице в случае наличия связи между  $i$ -тым и  $j$ -тым элементами сети и нулю в случае ее отсутствия. По аналогии с более ранними работами [21, 23] значение  $K$  было выбрано равным 8, иными словами, каждый элемент сети был связан с 16 соседними элементами.

Сеть фазовых осцилляторов Курамото с топологией межэлементных связей «малый мир» при численном моделировании формируется из сети с регулярной топологией связей между элементами типа «кольцо» с помощью подхода, предложенного Д. Ваттсом и С. Строгатцом [22]. Согласно данному подходу при построении сети каждый элемент сначала связывается с  $2K$



ближайшими соседями, образуя «кольцо», а затем с малой вероятностью  $p$  осуществляется пере замыкание существующих связей на другие случайно выбранные узлы сети.

В силу ярко выраженной пространственно-протяженной структуры рассматриваемых сетей и при условии большого количества осцилляторов  $N \gg 1$  для описания их поведения возможно ввести в рассмотрение (аналогично работам [21, 23]) ось координат  $x$  с началом отсчета, выбранным таким образом, чтобы нулевая отметка находилась вблизи элемента сети с номером  $i = [N/2]$ , и направленную «вдоль» элементов сети с последовательно возрастающими номерами  $i$ , ( $i = 2, \dots, N$ ). Поскольку в исходной модели (1) нет заданного пространственного масштаба, то пространственное расстояние  $\Delta$  между соседними узлами сети может быть постулировано произвольным и достаточно малым (в данной работе используется  $\Delta = 10^{-3}$ ), и, соответственно, длина всей сети будет в этом случае составлять  $2L$ , где  $L = N\Delta/2$  (в рассматриваемом случае  $L = 0.5$ ), а значения пространственной координаты  $x$  ( $x_i = (2i - N)\Delta/2$ ) будут находиться в диапазоне  $x \in [-L; L]$ . Парциальные частоты  $\omega_i$  фазовых осцилляторов сети (1) будут представлены в данном случае в виде функциональной зависимости от пространственной координаты  $\omega(x)$ .

В рамках настоящей работы рассмотрим два достаточно произвольных вида зависимости парциальных частот осцилляторов от координаты  $x$ , а именно квадратичную

$$\omega(x) = \frac{ax^2}{2} + bx + c \quad (2)$$

и экспоненциальную

$$\omega(x) = ae^{bx} + c. \quad (3)$$

В рамках развитого подхода [21, 23] исходный оператор эволюции (1) может быть переписан в виде дифференциального уравнения в частных производных

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \omega(x) - \lambda \Delta \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x}, \quad (4)$$

где мгновенная фаза каждого осциллятора  $\phi(x, t)$  зависит от времени и координаты, а

$$\Phi(x, t) = -\frac{1}{\Delta^2} \int_0^{K\Delta} \eta \sin \left( \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} \eta \right) d\eta \quad (5)$$

является некоторой функцией, которую будем называть потенциальной (см. также [21, 23]).

Следует также отметить, что, в отличие от сетей с топологией межэлементных связей типа «кольцо», «длинные» связи, существующие в топологии сетей «малого мира» в силу построения, будут несколько искажать аналитические оценки, получаемые с помощью соотношений (4) и (5). В то же самое время, благодаря малым значениям вероятности пере замыкания связей  $p$  (при которых и возникает топология «малого мира» [22]), данные искажения носят несущественный характер, что в первом приближении позволяет использовать непрерывную пространственно-временную модель (4) – (5) и для сетей «малого мира».

## 2. Теоретическое описание

Для описания процессов разрушения/установления полностью синхронного режима в сети фазовых осцилляторов рассмотрим состояние сети вблизи, но несколько выше границы установления режима фазовой синхронизации всех элементов,  $\lambda \gtrsim \lambda_c$ . В этом случае все осцилляторы Курамото будут совершать колебания с одной общей синхронной частотой, которую можно оценить как

$$\Omega_s = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \omega(x) dx, \quad (6)$$

и, соответственно, можно полагать, что после завершения переходного процесса (данный момент времени мы можем принять за начало отсчета  $t=0$ ) в модели (4) – (5) зависимость мгновенной фазы от времени и координаты будет иметь вид

$$\phi(x, t) = \phi(x, 0) + \Omega_s t = \phi_0(x) + \Omega_s t, \quad (7)$$

что при известном виде зависимости  $\omega(x)$  позволяет с точностью до константы интегрирования  $C$  (зависящей от параметра связи  $\lambda$ ) получить явный вид потенциальной функции  $\Phi_s(x)$  для сети, находящейся в полностью синхронном состоянии

$$\Phi_s(x) = (\lambda) + \frac{1}{\lambda \Delta} \int_0^x (\omega(\eta) - \Omega_s) d\eta. \quad (8)$$

Как было показано в работе [23], в случае нахождения сети в полностью синхронном состоянии из соотношения (5) следует, что на рассматриваемом отрезке  $x \in [-L; L]$  значения потенциальной функции  $\Phi_s(x)$  должны удовлетворять требованию

$$|\Phi_s(x)| < \frac{K^2}{2} \quad (9)$$



и, соответственно, критерием разрушения полностью синхронного состояния сети является одновременное выполнение условий

$$\max \Phi_s(x) = \frac{K^2}{2} \quad (10)$$

и

$$\min \Phi_s(x) = -\frac{K^2}{2} \quad (11)$$

Из соотношений (8), (10), (11) можно найти критическое значение параметра связи, соответствующее моменту бифуркации, при которой в рассматриваемой сети осцилляторов Курамото происходит разрушение/установление полностью синхронного состояния

$$\lambda = \frac{\max \int_0^x (\omega(\eta) - \Omega_s) d\eta - \min \int_0^x (\omega(\eta) - \Omega_s) d\eta}{K^2 \Delta} \quad (12)$$

Аналогичным образом для критического значения параметра связи можно найти константу интегрирования ( $\lambda$ ), входящую в соотношение (8), в виде

$$C(\lambda) = -\frac{\max \int_0^x (\omega(\eta) - \Omega_s) d\eta + \min \int_0^x (\omega(\eta) - \Omega_s) d\eta}{2\lambda \Delta} \quad (13)$$

Таким образом, из полученного соотношения (12) следует, что именно функция  $\omega(x)$ , описывающая зависимость парциальных частот осцилляторов от пространственной координаты, однозначно определяет границу перехода от слабосинхронного состояния сети к полностью синхронизованному. Как следует из соотношения (12), если две сети с топологиями межэлементных связей «кольцо» и «малый мир» состоят из одинакового количества осцилляторов и характеризуются одной и той же зависимостью  $\omega(x)$ , то резкий переход между слабо синхронным и полностью синхронным состояниями в этих сетях будет происходить при близких значениях параметра связи  $\lambda_c$ , однако наличие в сети «малого мира» небольшого количества «длинных» связей, возникших по построению в силу метода Ваттса–Строгатца, должно приводить к отклонению в меньшую сторону критического значения параметра связи  $\lambda^{sw}$  по сравнению с величиной  $\lambda$ , предписываемой соотношением (12).

### 3. Результаты численного моделирования

Для верификации и иллюстрации полученных в разделе 2 аналитических результатов рассмотрим несколько численных примеров установления полностью синхронного состояния (в смысле режима фазовой синхронизации)

в сетях осцилляторов Курамото с топологией межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир» и зависимостями парциальных частот от пространственной координаты, описанными в разделе 1 «Модель и методы» и заданными соотношениями (2) и (3). Очевидно, что если известен явный вид функции  $\omega(x)$ , то критическое значение параметра связи  $\lambda_c$  может быть найдено аналитически, так же, как может быть получен и явный вид потенциальной функции  $\Phi_s(x)$ . Полученная зависимость потенциальной функции может быть сопоставлена с дискретным аналогом [21, 23]

$$\tilde{\Phi}_s(x_j) = \sum_{i=1}^K i \sin(\varphi_{j-i} - \varphi_j), \quad (14)$$

найденным численно, тогда как критическое значение параметра связи  $\lambda_c$  может быть верифицировано с помощью зависимости размера максимального синхронного кластера сети, опять же полученной с помощью численного моделирования динамики исходной сети (1).

В качестве первого примера рассмотрим симметричный случай квадратичной зависимости парциальной частоты осцилляторов от пространственной координаты ( $a = 8.0$ ,  $b = 0.0$ ,  $c = -0.5$ ). Для выбранных значений управляющих параметров можно получить, что  $C = 0$ , и, соответственно,

$$\Phi_s(x) = \frac{x(3bx + a(x^2 - \mathcal{L}^2))}{6\lambda \Delta}. \quad (15)$$

Критическое значение параметра связи, при котором в рассматриваемой сети с топологией межэлементных связей типа «кольцо» устанавливается полностью синхронное состояние, в симметричном случае задается соотношением

$$\lambda = \frac{1}{27a^2 K^2 \Delta^2} \left( 3b + \sqrt{9b^2 + 3a^2 \mathcal{L}^2} \right) \times \left( 2a^2 \mathcal{L}^2 + b \left( 3b + \sqrt{9b^2 + 3a^2 \mathcal{L}^2} \right) \right) \quad (16)$$

и для выбранных значений управляющих параметров  $\lambda \approx 2.005$ . Для сети нелинейных элементов с топологией межэлементных связей «малый мир» критическое значение параметра связи  $\lambda^{sw}$  должно быть несколько меньше  $\lambda$  из-за наличия «длинных» связей.

На рис. 1 профили потенциальной функции  $\Phi_s(x)$ , задаваемые теоретической зависимостью (15), сопоставлены с соответствующими профилями  $\tilde{\Phi}_s(x_j)$ , полученными с помощью непосредственного численного моделирования поведения сети осцилляторов Курамото (1) для

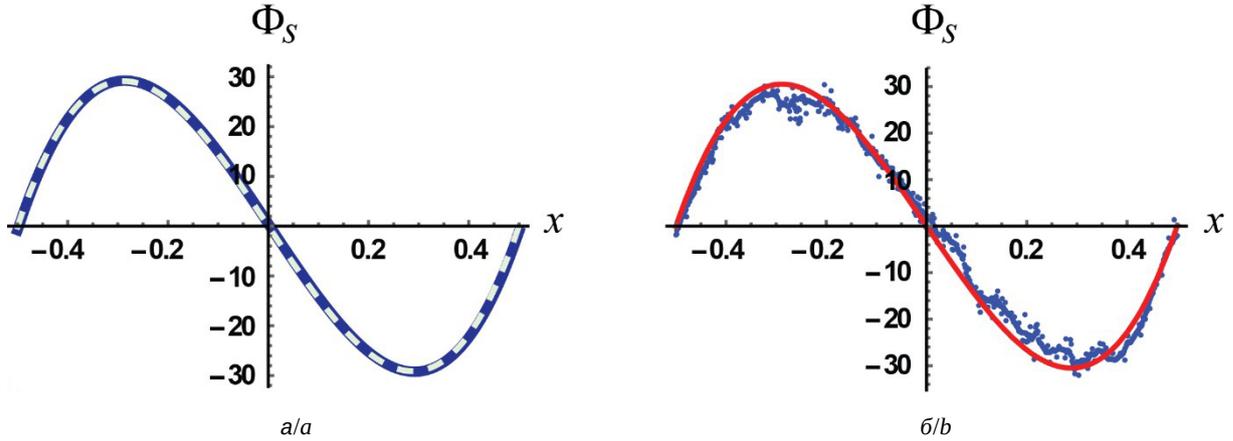


Рис. 1. Профиль потенциальной функции  $\Phi_S(x)$ , полученный для сети осцилляторов Курамото с топологиями межэлементных связей «кольцо» (а) и «малый мир» (б) и симметричной квадратичной зависимостью  $\omega(x)$ . Значения управляющих параметров  $a = 8.0, b = 0.0, c = -0.5$ . Теоретическая зависимость (15) показана белой пунктирной линией на рис. 1, а ( $\lambda = 2.2$ ) и красной сплошной линией – на рис. 1, б ( $\lambda = 2.1$ ). Потенциальная функция (14), полученная с помощью численного моделирования, показана синими точками (цвет онлайн)

Fig. 1. Potential function  $\Phi_S(x)$  obtained for the network of Kuramoto oscillators with the “ring” (a) and “small world” (b) topologies and symmetric quadratic function  $\omega(x)$ . The control parameters values are  $a = 8.0, b = 0.0, c = -0.5$ . The theoretical relation (15) is shown by a white dotted line in Fig. 1, a ( $\lambda = 2.2$ ) and a red solid line in Fig. 1, b ( $\lambda = 2.1$ ). Potential function (14) obtained by numerical simulation is shown by blue dots (color online)

сетей с топологией связей «кольцо» (рис. 1, а) и «малый мир» (рис. 1, б) в случае симметричной квадратичной зависимости ( $a = 8.0, b = 0.0, c = -0.5$ ) парциальных частот осцилляторов от координаты (2). Значение управляющего параметра связи выбрано чуть выше границы установления полностью синхронного состояния сети,  $\lambda = 2.2$  для сети с топологией межэлементных связей типа «кольцо» (рис. 1, а) и  $\lambda = 2.1$  для сети «малого мира» (рис. 1, б). Видно хорошее соответствие результатов численного моделирования и теоретических соотношений. Видно также, что максимальное и минимальное значения потенциальной функции находятся вблизи величин  $K^2/2$ , при достижении которых происходит разрушение полностью синхронного состояния.

Аналогичные зависимости приведены на рис. 2 для асимметричной зависимости  $\omega(x)$ . В данном случае значения управляющих параметров выбраны следующими:  $a = 8.0, b = 2.0, c = -0.5$ . Значение параметра связи выбрано также слегка выше границы установления/разрушения полностью синхронного состояния сети  $\lambda \approx 4.274, \lambda = 4.5$  для сети с топологией межэлементных связей типа «кольцо» (рис. 2, а) и  $\lambda = 4.4$  для сети «малого мира» (рис. 2, б). Видно, что и в случае асимметричного характера функции  $\omega(x)$  наблюдается хорошее соответствие теоретических и численных данных, хотя сам вид потенциальной функции  $\Phi_S(x)$

сильно отличается от предыдущего случая, показанного на рис. 1.

Для рассматриваемой асимметричной квадратичной зависимости  $\omega(x)$  и выбранных значений управляющих параметров вид потенциальной функции вблизи (чуть выше) точки перехода будет определяться соотношением

$$\Phi_S(x) \approx \frac{K^2}{2} + \frac{(x^2 - L^2)(3b + ax)}{6\Delta\lambda}, \quad (17)$$

тогда как критическое значение параметра связи будет определяться как

$$\lambda = \frac{9b(a^2L^2 - b^2) + (3b^2 + a^2L^2)\sqrt{9b^2 + 3a^2L^2}}{27a^2K^2\Delta}. \quad (18)$$

Наконец, в качестве третьего примера рассмотрим случай экспоненциальной зависимости парциальной частоты осцилляторов от пространственной координаты (3). Значения управляющих параметров были выбраны  $a = 0.1, b = 5.0, c = -0.5$ . В этом случае профиль потенциальной функции вблизи (чуть выше) точки бифуркации и критическое значение параметра связи будут определяться соотношениями

$$\Phi_S(x) \approx \frac{2ae^{bx}L + bK^2L\lambda\Delta - 2aL\text{ch}(bL) - 2ax\text{sh}(bL)}{2bL\lambda\Delta} \quad (19)$$

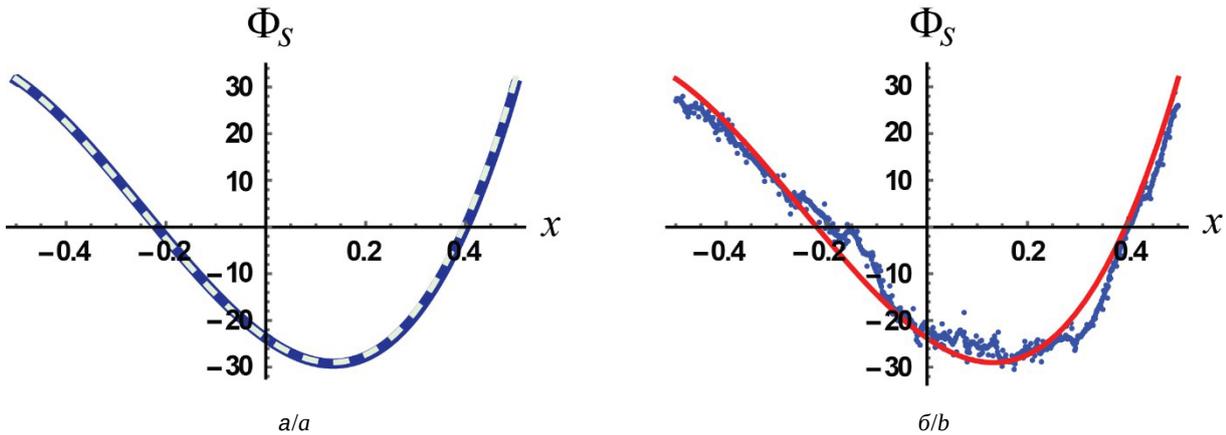


Рис. 2. Профиль потенциальной функции  $\Phi_S(x)$ , полученный для сети осцилляторов Курамото с топологиями межэлементных связей «кольцо» (а) и «малый мир» (б) и асимметричной квадратичной зависимостью  $\omega(x)$ . Значения управляющих параметров  $a = 8.0$ ,  $b = 2.0$ ,  $c = -0.5$ . Теоретическая зависимость (17) показана белой пунктирной линией на рис. 2, а ( $\lambda = 4.5$ ) и красной сплошной кладкой линией – на рис. 2, б ( $\lambda = 4.4$ ). Потенциальная функция (14), полученная с помощью численного моделирования, показана синими точками (цвет онлайн)

Fig. 2. Potential function  $\Phi_S(x)$  obtained for the network of Kuramoto oscillators with the “ring” (a) and “small world” (b) topologies and asymmetric quadratic function  $\omega(x)$ . The control parameters values are  $a = 8.0$ ,  $b = 2.0$ ,  $c = -0.5$ . The theoretical relation (17) is shown by a white dotted line in Fig. 2, a ( $\lambda = 4.5$ ) and a red solid line in Fig. 2, b ( $\lambda = 4.4$ ). Potential function (14) obtained by numerical simulation is shown by blue dots (color online)

и

$$\lambda = \frac{a \left( bL \left\langle (bL) + \left( \ln \left( \frac{\text{sh}(bL)}{bL} \right) - 1 \right) \text{sh}(bL) \right\rangle \right)}{b^2 K^2 L \Delta}. \quad (20)$$

При указанных значениях управляющих параметров  $\lambda \approx 1.828$ . Профиль потенциальной функции, соответствующий параметру связи,

слегка превышающему критический, приведен на рис. 3 вместе с данными численного моделирования динамики сетей с топологией связей типа «кольцо» (рис. 3, а) и «малый мир» (рис. 3, б). Снова наблюдается хорошее соответствие результатов численного моделирования  $\tilde{\Phi}_S(x_j)$  и теоретической зависимости  $\Phi_S(x)$ . Интересно также отметить схожесть профилей по-

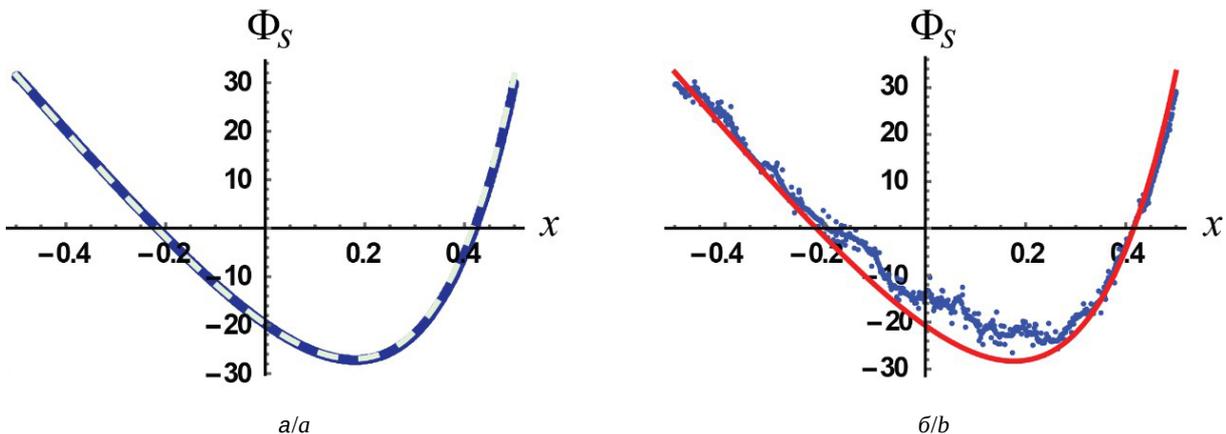


Рис. 3. Профиль потенциальной функции  $\Phi_S(x)$ , полученный для сети осцилляторов Курамото с топологиями межэлементных связей «кольцо» (а) и «малый мир» (б) и экспоненциальной зависимости  $\omega(x)$ . Значения управляющих параметров  $a = 0.1$ ,  $b = 5.0$ ,  $c = -0.5$ . Теоретическая зависимость (19) показана белой пунктирной линией на рис. 3, а ( $\lambda = 2.0$ ) и красной сплошной кладкой линией – на рис. 3, б ( $\lambda = 1.9$ ). Потенциальная функция (14), полученная с помощью численного моделирования, показана синими точками (цвет онлайн)

Fig. 3. Potential function  $\Phi_S(x)$  obtained for the network of Kuramoto oscillators with the “ring” (a) and “small world” (b) topologies and exponential function  $\omega(x)$ . The control parameters values are  $a = 0.1$ ,  $b = 5.0$ ,  $c = -0.5$ . The theoretical relation (19) is shown by a white dotted line in Fig. 3, a ( $\lambda = 2.0$ ) and a red solid line in Fig. 3, b ( $\lambda = 1.9$ ). Potential function (14) obtained by numerical simulation is shown by blue dots (color online)

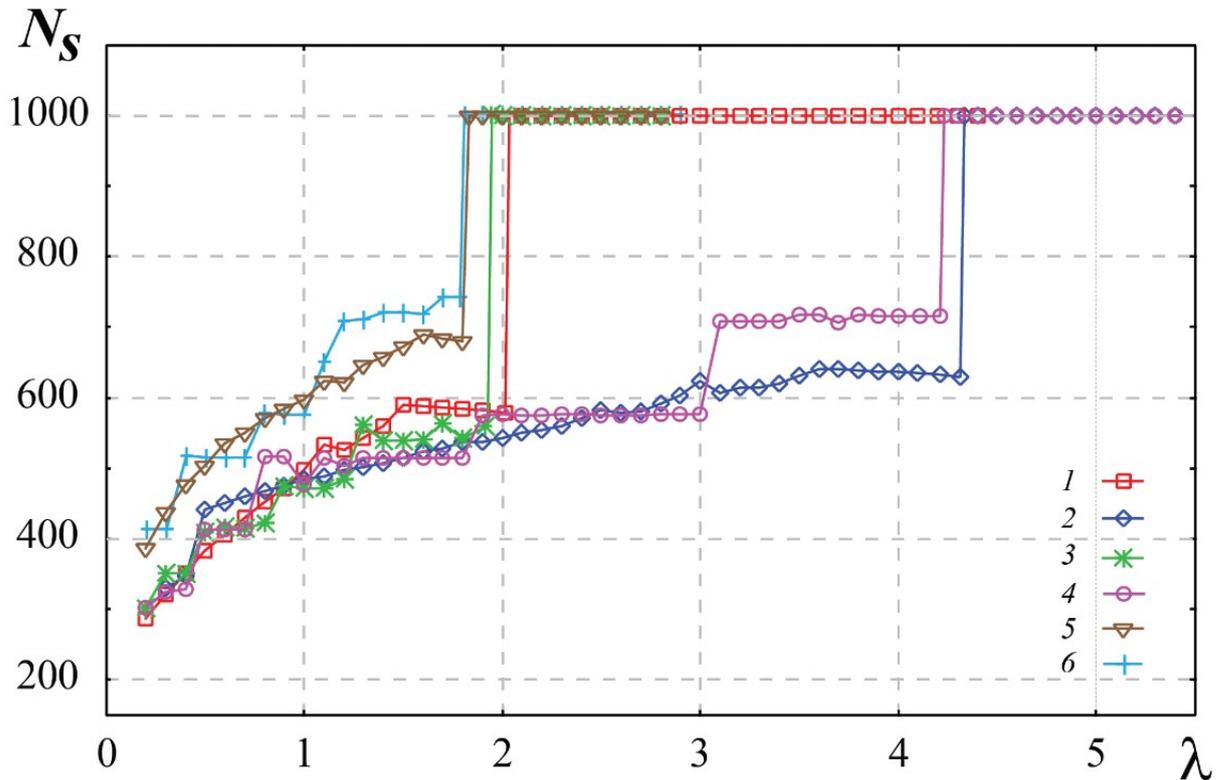


Рис. 4. Зависимость числа осцилляторов в наибольшем синхронном кластере  $N_s$  от параметра связи  $\lambda$  в сети осцилляторов Курамото (1) с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» (кривые 1, 2, 5) и «малый мир» (кривые 3, 4 и 6). Кривые получены при увеличении значения параметра  $\lambda$ . Кривые 1 и 3 соответствуют симметричной квадратичной зависимости (2),  $a = 8.0$ ,  $b = 0.0$ ,  $c = -0.5$ , кривые 2 и 4 – асимметричной зависимости (2),  $a = 8.0$ ,  $b = 2.0$ ,  $c = -0.5$ , кривые 5 и 6 – экспоненциальной зависимости (3) и значениям управляющих параметров  $a = 0.1$ ,  $b = 5.0$ ,  $c = -0.5$  (цвет онлайн)

Fig. 4. Dependence of the number of oscillators in the largest synchronous cluster  $N_s$  on the coupling parameter  $\lambda$  in the Kuramoto network (1) with the topologies of links of the “ring” type (curves 1, 2, 5) and the “small world” type (curves 3, 4, 6). Curves 1 and 3 correspond to symmetrical quadratic function (2),  $a = 8.0$ ,  $b = 0.0$ ,  $c = -0.5$ , curves 2 and 4 correspond to asymmetric function (2),  $a = 8.0$ ,  $b = 2.0$ ,  $c = -0.5$ , curves 5 and 6 correspond to exponential function (3),  $a = 0.1$ ,  $b = 5.0$ ,  $c = -0.5$  (color online)

тенциальной функции для асимметричной квадратичной и экспоненциальной зависимостей (ср. рис. 2 и рис. 3), что обусловлено некоторым сходством профилей зависимости (2) и (3) при выбранных значениях управляющих параметров.

Найденные критические значения параметра связи (16), (18) и (20) также хорошо соответствуют моментам резкого перехода к полностью синхронному состоянию сети, отчетливо видимым на зависимостях числа осцилляторов в максимальном синхронном кластере сети от величины связи, полученных численно (см. рис. 4). Зависимости  $N_s(\lambda)$ , приведенные на рис. 4, соответствуют трем рассмотренным выше случаям для двух вариантов топологии связей взаимодействующих элементов сети – «кольцо» и «малый мир» (с вероятностью перезамыкания связей  $p=0.01$ ). Видно, что при численном моделиро-

вании динамики сетей осцилляторов Курамото переход к полностью синхронному состоянию происходит при значениях параметра связи, близких к тем, которые были найдены теоретически:  $\lambda \approx 2.005$  для симметричной квадратичной зависимости  $\omega(x)$ ,  $\lambda \approx 4.274$  для асимметричной квадратичной зависимости частоты от пространственной координаты осциллятора и  $\lambda \approx 1.828$  для экспоненциальной зависимости  $\omega(x)$ .

### Заключение

Таким образом, в настоящей работе были рассмотрены различные функциональные зависимости частоты от пространственной координаты (номера) осциллятора в сетях фазовых осцилляторов с топологиями межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир», выявлены основные закономерности в поведении таких



сетей с точки зрения установления синхронного режима. Изучено влияние количественных характеристик зависимостей частот от пространственных координат осцилляторов на границу возникновения полностью синхронного состояния сети фазовых осцилляторов и характер перехода к синхронному режиму. В работе установлено, что зависимость парциальных частот осцилляторов от пространственной координаты (или от номера осциллятора в изначальной системе (1)) в случае сетей с топологией межэлементных связей типа «кольцо» и «малый мир» полностью определяет свойства таких сетей с точки зрения установления режима фазовой синхронизации. Кроме того, в отличие от сетей со случайной топологией связей или масштабно-инвариантных сетей, внешне проявляющийся взрывной характер перехода к синхронному состоянию является фактически типичным случаем и для его реализации в системе не требуется предъявлять каких-либо (подчас весьма специфических) требований к распределению парциальных частот осцилляторов  $g(\omega)$ . Более того, опираясь на вышеописанные свойства сетей с топологией связей «кольцо» и «малый мир», можно решать не только задачу нахождения критического значения параметра связи для известных зависимостей частоты от координаты, но и задачу синтеза таких сетей, обладающих наперед заданными свойствами. В частности, подбирая характер зависимости  $\omega(x)$ , можно обеспечить установление полностью синхронного состояния сети для наперед заданного критического значения интенсивности связи  $\lambda_c$ .

### Список литературы

1. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D. Complex networks: Structure and dynamics // Phys. Rep. 2006. Vol. 424, № 4–5. P. 175–308. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009>
2. Dey A., Tian Y., Gel Y. Community detection in complex networks: From statistical foundations to data science applications // Wiley Interdiscip. Rev. Comput. Stat. 2021. Vol. 14, № 2. P. e1566. <https://doi.org/10.1002/wics.1566>
3. Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C. Synchronization in complex networks // Phys. Rep. 2008. Vol. 469, № 3. P. 93–153. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.09.002>
4. Dörfler F., Bullo F. Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey // Automatica. 2014. Vol. 50, № 6. P. 1539–1564. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.04.012>
5. Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. Взаимосвязь частотных и фазовых характеристик хаоса. Два критерия синхронизации // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 1. С. 77–83.
6. Пиковский А. С., Розенблюм М. Г., Куртс Ю. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление. М.: Техносфера, 2003. 496 с.
7. Arenas A., Díaz-Guilera A., Pérez-Vicente C. J. Synchronization reveals topological scales in complex networks // Phys. Rev. Lett. 2006. Vol. 96, № 11. P. 114102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.114102>
8. Peron T., Messias F. De Resende B., Mata A. S., Rodrigues F. A., Moreno Y. Onset of synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks // Phys. Rev. E. 2019. Vol. 100, № 4. P. 042302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.042302>
9. Moreno Y., Pacheco A. F. Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks // Europhys. Lett. 2004. Vol. 68, № 4. P. 603–609. <https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10238-x>
10. Boccaletti S., Almendral J. A., Guan S., Leyva I., Liu Z., Sendiña-Nadal I., Wang Z., Zou Y. Explosive transitions in complex networks' structure and dynamics: Percolation and synchronization // Phys. Rep. 2016. Vol. 660. P. 1–94. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.10.004>
11. Leyva I., Sevilla-Escoboza R., Buldú J. M., Sendiña-Nadal I., Gómez-Gardeñes J., Arenas A., Moreno Y., Gómez S., Jaimes-Reátegui R., Boccaletti S. Explosive First-Order Transition to Synchrony in Networked Chaotic Oscillators // Phys. Rev. Lett. 2012. Vol. 108, № 16. P. 168702. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.168702>
12. Leyva I., Navas A., Sendiña-Nadal I., Almendral J. A., Buldú J. M., Zanin M., Papo D., Boccaletti S. Explosive transitions to synchronization in networks of phase oscillators // Sci. Rep. 2013. Vol. 3, № 1. P. 1281. <https://doi.org/10.1038/srep01281>
13. Pazó D. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72, № 4. P. 046211. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.046211>
14. Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Moskalenko O. I., Hramov A. E., Boccaletti S. Self-similarity in explosive synchronization of complex networks // Phys. Rev. E. 2017. Vol. 96, № 6. P. 062312. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.062312>
15. Zou Y., Pereira T., Small M., Liu Z., Kurths J. Basin of Attraction Determines Hysteresis in Explosive Synchronization // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112, № 11. P. 114102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.114102>
16. Peron T. K. D., Rodrigues F. A. Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations // Phys. Rev. E. 2012. Vol. 86, № 5. P. 056108. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.056108>
17. Danziger M. M., Moskalenko O. I., Kurkin S. A., Zhang X., Havlin S., Boccaletti S. Explosive synchronization coexists with classical synchronization in the Kuramoto model // Chaos Interdiscip. J. Nonlinear



- Sci. 2016. Vol. 26, № 6. P. 065307. <https://doi.org/10.1063/1.4953345>
18. Su G., Ruan Z., Guan S., Liu Z. Explosive synchronization on co-evolving networks // *Europhys. Lett.* 2013. Vol. 103, № 4. P. 48004. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/103/48004>
  19. Peron T. K. D., Rodrigues F. A. Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling // *Phys. Rev. E.* 2012. Vol. 86, № 1. P. 016102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016102>
  20. Leyva I., Sendiña-Nadal I., Almendral J. A., Navas A., Olmi S., Boccaletti S. Explosive synchronization in weighted complex networks // *Phys. Rev. E.* 2013. Vol. 88, № 4. P. 042808. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.042808>
  21. Короновски А. А., Куровская М. К., Москаленко О. И. О возможности явления взрывной синхронизации в сетях малого мира // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2021. Т. 29, № 4. С. 467–479. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479>
  22. Watts D. J., Strogatz S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks // *Nature.* 1998. Vol. 393, № 6684. P. 440–442. <https://doi.org/10.1038/30918>
  23. Короновский А. А., Куровская М. К., Москаленко О. И. О типичности явления взрывной синхронизации в сетях осцилляторов с топологиями связей типа «кольцо» и «малый мир» // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика.* 2023. Т. 31, № 1. С. 32–44. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003027>
  24. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators // *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics.* Berlin ; Heidelberg : Springer, 1975. P. 420–422 (Lecture Notes in Physics). <https://doi.org/10.1007/BFb0013365>
  25. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence.* Berlin ; Heidelberg : Springer, 1984. Vol. 19. 176 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-69689-3>
  26. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Rev. Mod. Phys.* 2005. Vol. 77, № 1. P. 137–185. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137>
  - vol. 50, no. 6, pp. 1539–1564. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2014.04.012>
  5. Vadivasova T. E., Anishchenko V. S. Relationship between frequency and phase characteristics of chaos: Two criteria of synchronization. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2004, vol. 49, no. 1, pp. 69–75 (in Russian).
  6. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences.* Cambridge, Cambridge University Press, 2003. 432 p.
  7. Arenas A., Díaz-Guilera A., Pérez-Vicente C. J. Synchronization reveals topological scales in complex networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2006, vol. 96, no. 11, pp. 114102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.114102>
  8. Peron T., Messias F. De Resende B., Mata A. S., Rodrigues F. A., Moreno Y. Onset of synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks. *Phys. Rev. E*, 2019, vol. 100, no. 4, pp. 042302. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.042302>
  9. Moreno Y., Pacheco A. F. Synchronization of Kuramoto oscillators in scale-free networks. *Europhys. Lett.*, 2004, vol. 68, no. 4, pp. 603–609. <https://doi.org/10.1209/epl/i2004-10238-x>
  10. Boccaletti S., Almendral J. A., Guan S., Leyva I., Liu Z., Sendiña-Nadal I., Wang Z., Zou Y. Explosive transitions in complex networks’ structure and dynamics: Percolation and synchronization. *Phys. Rep.*, 2016, vol. 660, pp. 1–94. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2016.10.004>
  11. Leyva I., Sevilla-Escoboza R., Buldú J. M., Sendiña-Nadal I., Gómez-Gardeñes J., Arenas A., Moreno Y., Gómez S., Jaimes-Reátegui R., Boccaletti S. Explosive First-Order Transition to Synchrony in Networked Chaotic Oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 2012, vol. 108, no. 16, pp. 168702. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.108.168702>
  12. Leyva I., Navas A., Sendiña-Nadal I., Almendral J. A., Buldú J. M., Zanin M., Papo D., Boccaletti S. Explosive transitions to synchronization in networks of phase oscillators. *Sci. Rep.*, 2013, vol. 3, no. 1, pp. 1281. <https://doi.org/10.1038/srep01281>
  13. Pazó D. Thermodynamic limit of the first-order phase transition in the Kuramoto model. *Phys. Rev. E*, 2005. Vol. 72, no. 4. pp. 046211. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.046211>
  14. Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Moskalenko O. I., Hramov A. E., Boccaletti S. Self-similarity in explosive synchronization of complex networks. *Phys. Rev. E*, 2017, vol. 96, no. 6, pp. 062312. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.96.062312>
  15. Zou Y., Pereira T., Small M., Liu Z., Kurths J. Basin of Attraction Determines Hysteresis in Explosive Synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 2014, vol. 112, no. 11, pp. 114102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.114102>
  16. Peron T. K. D., Rodrigues F. A. Determination of the critical coupling of explosive synchronization transitions in scale-free networks by mean-field approximations. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 86, no. 5, pp. 056108. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.056108>

## References

1. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys. Rep.*, 2006, vol. 424, no. 4–5, pp. 175–308. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009>
2. Dey A., Tian Y., Gel Y. Community detection in complex networks: From statistical foundations to data science applications. *Wiley Interdiscip. Rev. Comput. Stat.*, 2021, vol. 14, no. 2, pp. e1566. <https://doi.org/10.1002/wics.1566>
3. Arenas A., Díaz-Guilera A., Kurths J., Moreno Y., Zhou C. Synchronization in complex networks. *Phys. Rep.*, 2008, vol. 469, no. 3, pp. 93–153. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2008.09.002>
4. Dörfler F., Bullo F. Synchronization in complex networks of phase oscillators: A survey. *Automatica*, 2014,



17. Danziger M. M., Moskalenko O. I., Kurkin S. A., Zhang X., Havlin S., Boccaletti S. Explosive synchronization coexists with classical synchronization in the Kuramoto model. *Chaos Interdiscip. J. Nonlinear Sci.*, 2016, vol. 26, no. 6, pp. 065307. <https://doi.org/10.1063/1.4953345>
18. Su G., Ruan Z., Guan S., Liu Z. Explosive synchronization on co-evolving networks. *Europhys. Lett.*, 2013, vol. 103, no. 4, pp. 48004. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/103/48004>
19. Peron T. K. D., Rodrigues F. A. Explosive synchronization enhanced by time-delayed coupling. *Phys. Rev. E*, 2012, vol. 86, no. 1, pp. 016102. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.86.016102>
20. Leyva I., Sendiña-Nadal I., Almendral J. A., Navas A., Olmi S., Boccaletti S. Explosive synchronization in weighted complex networks. *Phys. Rev. E*, 2013, vol. 88, no. 4, pp. 042808. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.88.042808>
21. Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Moskalenko O. I. On the possibility of explosive synchronization in small world networks. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2021, vol. 29, no. 4, pp. 467–479 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-4-467-479>
22. Watts D. J., Strogatz S. H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 1998, vol. 393, no. 6684, pp. 440–442. <https://doi.org/10.1038/30918>
23. Koronovskii A. A., Kurovskaya M. K., Moskalenko O. I. On the typicity of the explosive synchronization phenomenon in oscillator networks with the link topology of the “ring” and “small world” types. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2023, vol. 31, no. 1, pp. 32–44 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003027>
24. Kuramoto Y. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*. Lecture Notes in Physics. Berlin, Heidelberg, Springer, 1975, pp. 420–422. <https://doi.org/10.1007/BFb0013365>
25. Kuramoto Y. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Berlin, Heidelberg, Springer, 1984, vol. 19. 176 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-69689-3>
26. Acebrón J. A., Bonilla L. L., Pérez Vicente C. J., Ritort F., Spigler R. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 2005, vol. 77, no. 1, pp. 137–185. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137>

Поступила в редакцию 01.04.2023; одобрена после рецензирования 20.05.2023; принята к публикации 15.06.2023  
The article was submitted 01.04.2023; approved after reviewing 20.05.2023; accepted for publication 15.06.2023