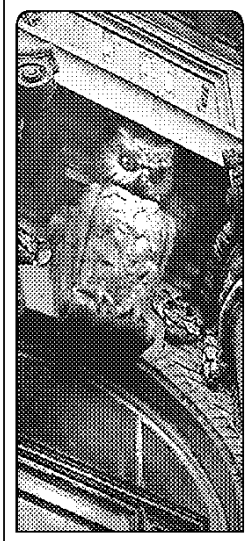


НАУЧНЫЙ ОТДЕЛ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 328–339
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 328–339
https://fizika.sgu.ru https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-4-328-339, EDN: AKRGLX

Обзорная статья
УДК 530.182

Химерные состояния в системах супердиффузионно связанных нейронов

И. С. Фатеев✉, А. А. Полежаев

Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук, Россия, 119991, г. Москва, Ленинский проспект, д. 53

Фатеев Илья Сергеевич, аспирант, высококвалифицированный младший научный сотрудник лаборатории нелинейной динамики и теоретической биофизики, i.fateev@lebedev.ru, https://orcid.org/0000-0001-9255-7196, AuthorID: 1245592
Полежаев Андрей Александрович, доктор физико-математических наук, высококвалифицированный главный научный сотрудник, polezhaevaa@lebedev.ru, https://orcid.org/0000-0003-0276-5341, AuthorID: 6181

Аннотация. Одни из самых интригующих коллективных явлений, которые могут наблюдаться в системах связанных осцилляторов различной природы, – это химерные состояния. Они характеризуются возникновением согласованной пространственной синхронизации и рассинхронизации в изначально однородной системе. В данной работе обсуждаются результаты исследований одномерной и двухмерной систем взаимодействующих нейронов, организованных на основе дробного оператора Лапласа и супердиффузионного кинетического механизма. Их использование существенно расширяет возможности описания химероподобных явлений с позиции классического реакционно-диффузионного подхода. Ввиду собственной математической лаконичности и способности воспроизвести почти все известные сценарии точечной нейронной активности, в качестве нелинейной части были использованы функции модели Hindmarsh–Rose. В обсуждаемых исследованиях демонстрируется, что одномерные и двухмерные системы двух- и трехкомпонентных реакционно-супердиффузионных уравнений, организованных на основе дробного оператора Лапласа, способны воспроизводить химерные состояния. Проанализированы динамические режимы в параметрическом пространстве параметров дробного оператора Лапласа, связанные с формообразующими особенностями сетей взаимодействующих нейронов. Обсуждаются параметрические области возникновения режимов синхронизации, режимов некогерентного поведения и химерных состояний. Результаты представленных исследований могут быть использованы в задачах вычислительных нейронаук и различных междисциплинарных исследований в качестве альтернативы существующим сетевым моделям.

Ключевые слова: химерные состояния, супердиффузия, дробный оператор Лапласа, системы взаимодействующих нейронов, сложные системы

Благодарности: Данная работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Для цитирования: *Фатеев И. С., Полежаев А. А.* Химерные состояния в системах супердиффузионно связанных нейронов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 328–339. https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-4-328-339, EDN: AKRGLX

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

© Фатеев И. С., Полежаев А. А., 2024

Review

Chimera states in systems of superdiffusively coupled neurons

I. S. Fateev✉, A. A. Polezhaev

P. N. Lebedev Physical Institute of the Russian Academy of Sciences, 53 Leninskiy Prospekt, Moscow 119991, Russia

Ilya S. Fateev, i.fateev@lebedev.ru, https://orcid.org/0000-0001-9255-7196
Andrey A. Polezhaev, polezhaevaa@lebedev.ru, https://orcid.org/0000-0003-0276-5341

Abstract. ***Background and Objectives*****:** One of the most intriguing collective phenomena, which arise in systems of coupled oscillators of different nature, are chimera states. They are characterized by the emergence of coordinated spatial synchronization and desynchronization, in an initially homogeneous system. ***Materials and Methods*****:** This paper discusses the results of studies of one-dimensional and two-dimensional systems of interacting neurons organized on the basis of the fractional Laplace operator and the superdiffusion kinetic mechanism. Their use significantly extends the possibilities of describing chimera-like phenomena from the position of the classical reaction-diffusion approach. Due to mathematical brevity and its ability to reproduce almost all known scenarios of point neural activity, Hindmarsh–Rose model functions were used as a nonlinear part. ***Results*****:** The studies under discussion demonstrate that one-dimensional and two-dimensional systems, two and three-component reaction-superdiffusion equations organized on the basis the fractional Laplace operator are able to reproduce chimera states. Dynamic regimes in the parameter space of the fractional Laplace operator exponents associated with the shape-forming features of networks of interacting neurons have been analyzed. Parameter regions of synchronization modes, modes of incoherent behavior, and chimera states are discussed. ***Conclusion*****:** The results of the presented studies can be used in computational neuroscience tasks and various interdisciplinary studies as an alternative to existing network models.

Keywords: chimera states, superdiffusion, fractional Laplace operator, systems of interacting neurons, complex systems

Acknowledgements: The work was supported by the Foundation for the Advancement of Theoretical Physics and Mathematics "BASIS".

For citation: Fateev I. S., Polezhaev A. A. Chimera states in systems of superdiffusively coupled neurons. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 328–339 (in Russian). https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-4-328-339, EDN: AKRGLX

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Системы взаимодействующих осцилляторов способны продуцировать сложную пространственно-временную динамику, связанную как с особенностями активации локальных элементов, так и с их формообразующей сетевой структурой. Важным примером данного динамического проявления могут считаться химерные состояния [1–3]. Их особенность заключается в согласованном существовании пространственно когерентных и некогерентных областей, формируемых в изначально однородной системе. Данное, во многом контринтуитивное, коллективное явление было обнаружено в ансамблях фазовых [4], механических [5], оптических [6], химических [7] и, наконец, биологических осцилляторов, в частности нейронов [8–10].

На данный момент химерные состояния отождествляют с бамповыми режимами, которые связаны как с процессами обработки информации в коре головного мозга, однополушарным сном, а также многочисленными патологическими состояниями, возникающими из-за нарушения синхронизационной активности нейронов [11, 12]. Ввиду первоначально динамической природы данного явления, для более глубокого понимания процессов синхронизации, актуальной задачей является исследование различных динамических моделей сетевых структур, в которых возможно возникновение химерных состояний.

С точки зрения биологических приложений, было рассмотрено широкое разнообразие всевозможных систем с различной динамикой активации локальных подсистем, организованных на основе непрерывных моделей нейронов, например: Hindmarsh–Rose, FitzHugh–Nagumo и Hodgkin–Huxley. С другой стороны, особое внимание также уделялось исследованиям различных конфигураций их соединений. В частности, подробно исследуются различные одномерные модели [13–16]. Они позволяют оценить влияние основных законов формирования связей на результирующую коллективную динамику. Пристальное внимание уделяется системам больших размерностей, в рамках которых могут формироваться более разнообразные паттерны коллективной активности. Среди важных примеров коллективной динамики можно выделить спиральные и кольцевые волны [17–19]. С нейрофизиологической точки зрения они могут быть отождествлены с обработкой информации и переводом памяти из краткосрочной формы в долгосрочную [20]. Важно, что именно двухмерные структуры проще сравнить с наблюдаемыми эмпирическими данными. Это обстоятельство указывает на особую важность их математического исследования. Более того,

именно в рамках систем больших размерностей уже наблюдали удивительные коллективные явления, сочетающие в себе свойства как спиральных и кольцевых волн, так и химерных состояний [21–23]. Следует также отметить исследования трехмерных систем, для которых существует еще большее разнообразие форм и структур, сочетающих в себе особенности как когерентных, так и некогерентных динамических проявлений [24].

Дробно-дифференциальное исчисление – важный инструмент описания различных физических, химических, социальных и экономических явлений. С актуальными направлениями исследований, задействующими аппарат дробно-дифференциального исчисления, можно подробно ознакомиться в [25]. В частности, влияние дробных временных производных в уравнениях динамических систем оценивалось в перспективе задач синхронизации [26–28]. Степенные законы, лежащие в основе данных математических объектов, а также во многих смежных с задачами нейронаук областях [29–35], дают возможность эффективно использовать аппарат дробно-дифференциального исчисления в задачах математического моделирования. Дробные пространственные производные используются для формирования резко неоднородных сетей взаимодействующих элементов [36–38]. Обоснование применения супердиффузионного кинетического механизма к задачам коллективной динамики систем взаимодействующих нейронов можно найти в [39, 40].

В данной работе мы обсуждаем результаты исследований, в которых была предложена модель построения сети взаимодействующих нейронов на основе супердиффузионного кинетического механизма [15, 23]. В этой модели классический оператор Лапласа, формирующий локальный тип взаимодействия между элементами, был заменен на дробный оператор Лапласа. Данная замена позволила внедрить нелокальный и глобальный тип взаимодействия между элементами и задать направление для возможных вариаций и обобщений. В качестве нелинейных функций была использована нелинейная модель Hindmarsh–Rose, сочетающая в себе как математическую лаконичность, так и широкие возможности описания активационных свойств точечных нейронов.

1. Исследуемая модель и методы анализа

1.1. Модель супердиффузионной связи нейронов

Подобно исследованиям [9, 10], в работах [15, 23] была рассмотрена система реакционно-супер-диффузионных уравнений

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = -D_u(-\Delta)^{\alpha_u/2}u(x,t) + f_u(u,v,m), \\ \partial_t v(x,t) = -D_v(-\Delta)^{\alpha_v/2}v(x,t) + f_v(u,v), \\ \partial_t m(x,t) = f_m(u,m), \end{cases} \tag{1}$$

с нелинейными функциями, соответствующими модели Hindmarsh–Rose:

$$\begin{cases} f_u(u,v,m) = v - au^3 + bu^2 - m + I_{ext}, \\ f_v(u,v) = c - du^2 - v, \\ f_m(u,m) = r[s(u-u_0) - m]. \end{cases} \tag{2}$$

В состав системы (1) входит дробный оператор Лапласа $-(-\Delta)^{\alpha_i/2}$, $i = \{u,v\}$, формирующий нелокальную связь между элементами соответствующих компонент системы. Исчерпывающую информацию о дробном операторе Лапласа можно получить в [41]. Для дальнейшего важно уточнить, что значение показателя $\alpha_i = 2$, $i = \{u,v\}$ соответствует классической диффузионной связи и локальному типу взаимодействия (взаимодействия лишь с ближайшими соседями), а система (1) сводится к классической реакционно-диффузионной задаче. Внедрение соединений сразу по двум компонентам определено несколькими соображениями. С одной стороны, необходимо ориентировать результаты обсуждаемых исследований на уже имеющиеся работы, в которых использовался нелокальный тип соединения по обеим компонентам [9,10]. С другой стороны, имеется особая заинтересованность в обобщенном исследовании возникающих динамических режимов, в параметрическом пространстве показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v). Внедрение слабой связи по второй компоненте сглаживает синхронизационный переход в пространстве (α_u, α_v), позволяя более подробно отследить изменения в динамических режимах.

В одномерном случае, а также в присутствии уточнений, указанных в [38, 42], разностная схема аппроксимации, которая соответствует системе (1), может быть представлена в следующей форме:

$$\begin{cases} u_i^{k+1} = u_i^k + D_u r_u{}^{(x+)} \sum\limits_{j=0}^{l_+(i)} g_u{}^{(j)} u_{i-j+1}^k + \\ + D_u r_u{}^{(x-)} \sum\limits_{j=0}^{l_-(i)} g_u{}^{(j)} u_{i+j-1}^k + dt f_u(u_i^k, v_i^k, m_i^k), \\ v_i^{k+1} = v_i^k + D_v r_v{}^{(x+)} \sum\limits_{j=0}^{l_+(i)} g_v{}^{(j)} v_{i-j+1}^k + \\ + D_v r_v{}^{(x-)} \sum\limits_{j=0}^{l_-(i)} g_v{}^{(j)} v_{i+j-1}^k + dt f_v(u_i^k, v_i^k), \\ m_i^{k+1} = m_i^k + dt f_m(u_i^k, m_i^k). \end{cases} \tag{3}$$

С одной стороны, точное математическое описание разностной схемы аппроксимации двухмерного дробного оператора Лапласа является трудоемкой задачей. С другой стороны, для исследования сетевых структур, организованных на основе дробного кинетического механизма, можно воспользоваться следующей формой записи (см., например, [38, 43]):

$$\begin{cases} u_{i,n}^{k+1} = u_{i,n}^k + \Bigg[D_u r_u{}^{(x+)} \sum\limits_{j=0}^{l_+(i)} g_u{}^{(j)} u_{i-j+1,n}^k + \\ \quad + D_u r_u{}^{(x-)} \sum\limits_{j=0}^{l_-(i)} g_u{}^{(j)} u_{i+j-1,n}^k \Bigg] + \\ \quad + \Bigg[D_u r_u{}^{(y+)} \sum\limits_{j=0}^{l+(i)} g_u{}^{(j)} u_{i,n-j+1}^k + \\ \quad + D_u r_u{}^{(y-)} \sum\limits_{j=0}^{l_+(i)} g_u{}^{(j)} u_{i,n+j-1}^k \Bigg] + \\ \quad + dt\, f_u(u_{i,n}^k, v_{i,n}^k, m_{i,n}^k), \\ v_{i,n}^{k+1} = v_{i,n}^k + \Bigg[D_v r_v{}^{(x+)} \sum\limits_{j=0}^{l_+(i)} g_v{}^{(j)} v_{i-j+1,n}^k + \\ \quad + D_v r_v{}^{(x-)} \sum\limits_{j=0}^{l_-(i)} g_v{}^{(j)} v_{i+j-1,n}^k \Bigg] + \\ \quad + \Bigg[D_v r_v{}^{(y+)} \sum\limits_{j=0}^{l_+(i)} g_v{}^{(j)} v_{i,n-j+1}^k + \\ \quad + D_v r_v{}^{(y-)} \sum\limits_{j=0}^{l_-(i)} g_v{}^{(j)} v_{i,n+j-1}^k \Bigg] + \\ \quad + dt\, f_v(u_{i,n}^k, v_{i,n}^k), \\ m_{i,n}^{k+1} = m_{i,n}^k + dt\, f_m(u_{i,n}^k, m_{i,n}^k). \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) подразумевает анизотропное соединение компонент по двум выделенным направлениям. Параметры дискретизации, а также весовые коэффициенты задаются следующими соотношениями для одномерной и двухмерной системы:

$$\begin{aligned} r_q{}^{(x+)} &= r_q{}^{(x-)} = -\frac{1}{2}\sec(\pi\alpha_q/2) dt\, (dx)^{-\alpha_q}, \\ r_q{}^{(y+)} &= r_q{}^{(y-)} = -\frac{1}{2}\sec(\pi\alpha_q/2) dt\, (dy)^{-\alpha_q}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$g_q^{(j)} = (-1)^j \binom{\alpha_q}{j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha_q+1)}{\Gamma(\alpha_q - j + 1)\Gamma(j+1)}, \tag{6}$$

в которых $q = \{u, v\}$.

В системах (3) и (4) индексы i и n связаны с пространственной дискретизацией по выделенным направлениям. Индекс k характеризует временной такт, для которого рассматривается состояние распределенной системы. Следует дополнительно отметить, что разностная схема аппроксимации непрерывной реакционно-супердиффузионной задачи в общем случае имеет следующие верхние пределы суммирования: $l_+(i) = i + 1$ и $l_-(i) = X_{\max} - i + 1$ [42]. Основной задачей обсуждаемых исследований является изучение именно дискретной системы, организованной на основе взаимодействия супердиффузионного типа. Ввиду сравнительной малости весовых коэффициентов, ответственных за дальнодействие $g^{(j)}$, а также для организации периодических граничных условий в контексте излагаемых исследований, параметры, связанные с радиусом взаимодействия по выделенным направлениям, являются ограниченными и имеют следующие значения: $l_+(i) = l_-(i) = 10$. Коэффициенты D_u и D_v являются постоянными множителями, влияющими на силу взаимодействия. Значения параметров, определяющих нелинейную часть: $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$, $s = 4$, $u_0 = -1.6$. Значения параметров, связанных с кинетической частью: $D_u = 10^{-4}$, $D_v = 10^{-6}$. В рамках одномерной задачи вычисления выполнялись при следующих параметрах дискретизации: $dt = 0.01$ и $dx = 0.005$, а также $dx = 0.005$ и $T_{\max} = 2 \cdot 10^4$. Для двухмерной задачи были использованы следующие значения: $dt = 0.005$, $dx = dy = 0.005$ при $dx = 0.005$, $X_{\max} = 100$ и $T_{\max} = 3 \cdot 10^4$.

Моделирование данной системы осуществлялось с использованием разделения по физическим процессам. Кинетическая часть рассчитывалась по явной разностной схеме, определенной в (3) и (4) для одномерного и двухмерного случаев соответственно. Отметим, что, несмотря на форму записи, которая соответствует методу Эйлера, для формирования более точного вклада реакционной части нелинейная составляющая рассчитывалась с помощью алгоритма Рунге–Кутты 4-го порядка. Для лаконичности дальнейшего изложения будем обозначать одномерную трехкомпонентную систему как **(1D UVM)**, а двухмерную трехкомпонентную систему как **(2D UVM)**.

1.2. Методы анализа химерных структур

Для анализа степени развития фазовой синхронизации реализованных структур, мы воспользуемся несколькими независимыми индикаторами. С целью сохранения лаконичности и общности дальнейшего изложения определения приведем для двухмерного случая. Выражения, определяющие указанные метрики для

одномерного случая, можно воспроизвести соответствующей редукцией, либо обратившись к представленным источникам.

Первым индикатором, отражающим уровень развития некогерентности, является *параметр локального порядка*. Для сохранения общности вычисление данного индикатора мы основываем на классическом реакционно-диффузионном подходе, описанном в [44]:

$$L^k_{i,n} = \left| \frac{1}{2d+1} \sum_{i',n' \in \Omega} \exp\left(\sqrt{-1}\phi^k_{i',n'}\right) \right|, \qquad (7)$$

с соответствующей фазой, зависящей от состояния первой и второй компоненты рассматриваемой системы при условии медленной эволюции третей компоненты ($r \ll 1$ в (2)):

$$\phi^k_{i,n} = \arctan\left(\frac{v^k_{i,n}}{u^k_{i,n}}\right). \qquad (8)$$

В выражении (7) параметр $d = 2$ характеризует пространственную размерность реакционно-диффузионной системы. Область Ω включает 4 элемента, расположенных вокруг центрального, а также сам центральный элемент с пространственными индексами i и n. Значение $L^k_{i,n} \to 1$ соответствует режиму принадлежности нейрона с пространственными индексами i и n в k-й временной такт к когерентной группе, в то время как $L^k_{i,n} \to 0$ характеризует полностью асинхронный режим для выделенного элемента.

Вторым параметром является *фактор синхронизации*, задающийся соотношением [45, 46]:

$$R = \frac{\left\langle [F^k]^2 \right\rangle_t - \left\langle F^k \right\rangle^2_t}{1/N^2 \sum_{i,n} \left(\left\langle [u^k_{i,n}]^2 \right\rangle_t - \left\langle u^k_{i,n} \right\rangle^2_t \right)}, \qquad (9)$$

в котором

$$F^k = \frac{1}{N^2} \sum_{i,n} u^k_{i,n}. \qquad (10)$$

Операция $\langle \cdot \rangle_t$ означает усреднение по временной выборке. Значение фактора синхронизации $R \to 1$ соответствует синхронному режиму. Аналогично, значение $R \to 0$ характеризует некогерентный режим.

Последним параметром является *сила некогерентности* [47, 48]:

$$SI = 1 - \frac{1}{M^2} \sum_{p,q=1}^{M} s(p,q), \qquad (11)$$

для которой определены следующие функции:

$$s(p,q) = H(\delta - \sigma(p,q)), \qquad (12)$$

$$\sigma(p,q) = \left\langle \sqrt{1/m^2 \sum_{i=\Omega(m,p)}^{pm} \sum_{n=\Omega(m,q)}^{qm} [W^k_{i,n} - \langle W \rangle^k_r]^2} \right\rangle_t, \qquad (13)$$

и

$$W^k_{i,n} = \sqrt{(u^k_{i,n} - u^k_{i+1,n})^2 + (u^k_{i,n} - u^k_{i,n+1})^2}. \qquad (14)$$

В выражении (12) $H(x)$ – функция Хевисайда, δ – заранее определенное пороговое значение для стандартного отклонения $\sigma(p,q)$ в (13), которое определяется на основе результирующих состояний системы. Операция $\langle W \rangle^k_r$ в (13) означает усреднение по пространственной выборке величины $W^k_{i,n}$ для k-го временного такта. Аргументы $p,q = 1, 2,\ldots, M$ связаны с разбиением исходной системы на соответствующие подсистемы, для которых, в случае симметричного разбиения, справедливы выражения: $m = N/M$ и $N = X_{\max} = Y_{\max}$. Нижние пределы оператора суммирования определены как $\Omega(m,q) = m(q - -1) + 1$ и $\Omega(m,p) = m(p-1) + 1$.

Значение $SI \to 1$ свидетельствует о развитом некогерентном режиме, в то время как значение $SI \to 0$ справедливо для режима полной синхронизации.

2. Результаты

2.1. Случай двухкомпонентной системы

Прежде всего стоит проанализировать поведение двухкомпонентной системы для одномерного и двухмерного случаев:

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = -D_u(-\Delta)^{\alpha_u/2} u(x,t) + f_u(u,v), \\ \partial_t v(x,t) = -D_v(-\Delta)^{\alpha_v/2} v(x,t) + f_v(u,v), \end{cases} \qquad (15)$$

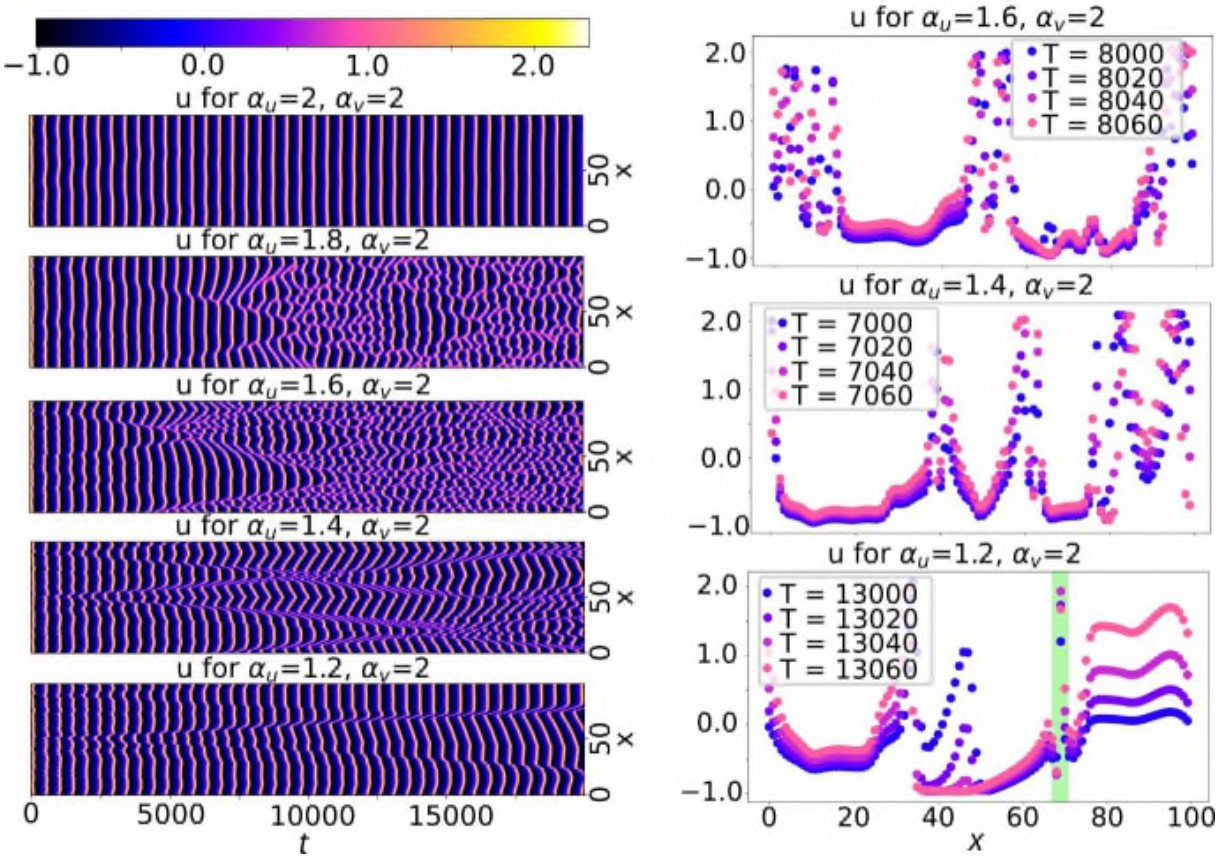
$$\begin{cases} f_u(u,v) = v - au^3 + bu^2 + I_{ext}, \\ f_v(u,v) = c - du^2 - v. \end{cases} \qquad (16)$$

По аналогии с ранее принятой нотацией обозначим одномерные и двухмерные двухкомпонентные системы как (**1D UV**) и (**2D UV**) соответственно.

Результаты, соответствующие двухкомпонентной одномерной цепочке взаимодействующих нейронов (**1D UV**), основанной на разностной схеме (3) для значения внешнего ионного тока $I_{ext} = 1.6$, восстановлены по данным работы [15] и представлены на рис. 1. Рис. 1, *а* демонстрирует динамику развития пространственно-временных режимов в данной системе относительно единственного сгенерированного

набора равномерно распределенных на участке $(-1,1)$ начальных условий. Показано, что для локального типа взаимодействия при ($\alpha_u = 2$, $\alpha_v = 2$) в системе возникает синхронизация. В данном месте (и далее в работе) под синхронизацией понимается развитие именно фазовой синхронизации в системе. Внедрение взаимодействия супердиффузионного типа приводит к уменьшению масштаба пространственных структур. Рис. 1, *б* демонстрирует, что для комбинаций параметров ($\alpha_u = 1.6$, $\alpha_v = 2$) и ($\alpha_u = 1.4$, $\alpha_v = 2$) в системе возникает химерное состояние, которое далее переходит в аналог уединенного состояния (*solitary state*) при ($\alpha_u = 1.2$, $\alpha_v = 2$), отмеченного зеленым прямоугольником.

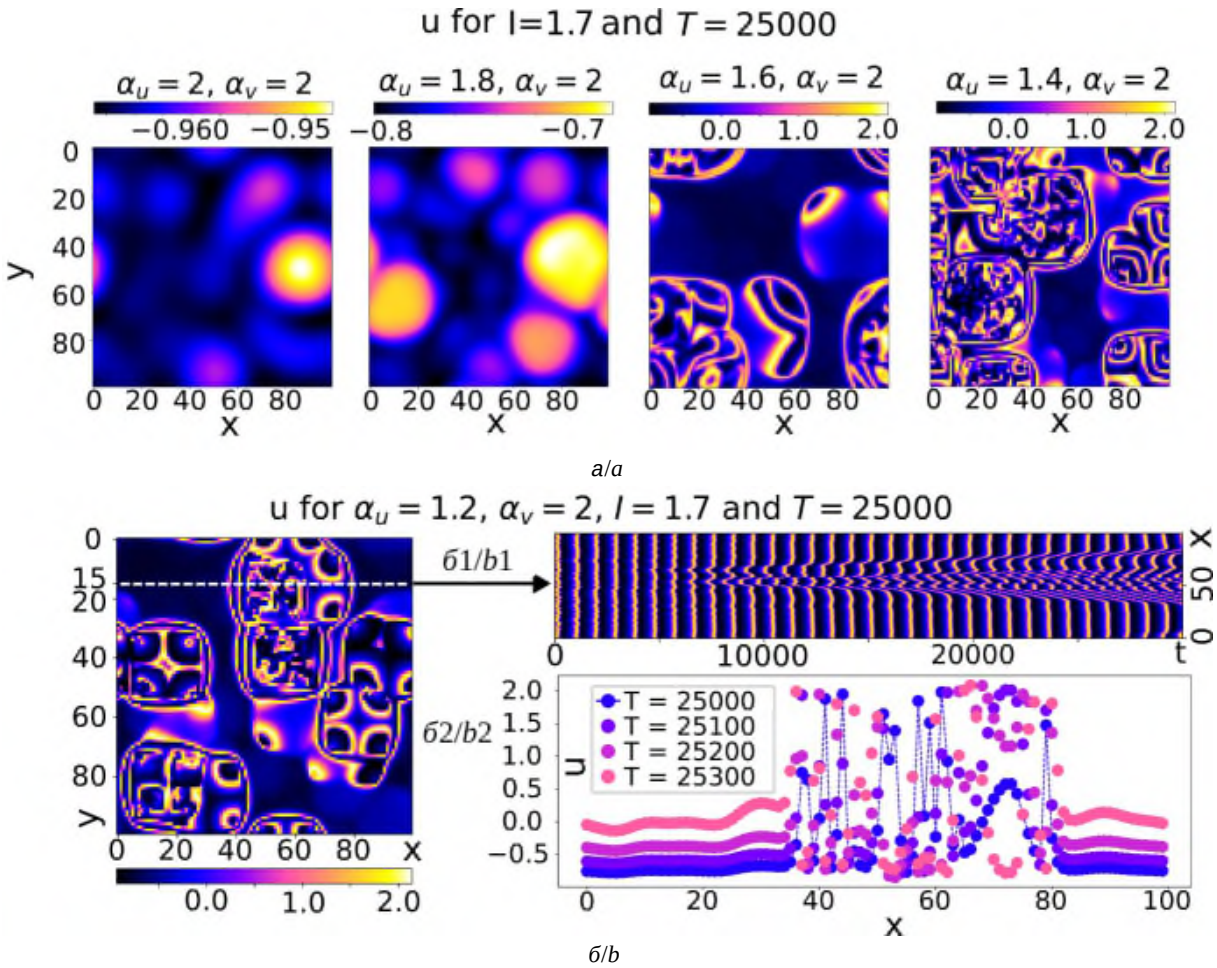
Рассмотрим случай двухмерной двухкомпонентной системы (**2D UV**) при $I_{ext} = 1.7$. Результаты восстановлены по данным работы [23] и продемонстрированы на рис. 2. Анализ, подобный предыдущему (см. рис. 2, *а*), показывает, что случаи ($\alpha_u = 2$, $\alpha_v = 2$) и ($\alpha_u = 1.8$, $\alpha_v = 2$) соответствуют режиму полной синхронизации. Пульсационный режим, приводящий к образованию волновых структур, реализуется в двухмерной системе при ($\alpha_u = 1.6$, $\alpha_v = 2$). При ($\alpha_u = 1.4$, $\alpha_v = 2$) возникают химерные со-



а/a *б/b*

Рис. 1. Развитие химерных состояний для одномерной двухкомпонентной системы (1D UV) в зависимости от значения показателя $\alpha_u \leqslant 2$ дробного оператора Лапласа первой компоненты при $I_{ext} = 1.6$: *а* – представлена пространственно-временная динамика системы для соответствующих показателей α_u по первой компоненте и классической диффузией по второй $\alpha_v = 2$; химеро-подобные структуры возникают для случаев $\alpha_u = 1.6$ и $\alpha_u = 1.4$; случай $\alpha_u = 1.2$ демонстрирует явную рассинхронизацию лишь для единственного нейрона; *б* – представлены состояния данных систем для указанных моментов времени с выделенными областями синхронизационной активности и областями некогерентного поведения. Материалы восстановлены по данным работы [15] (цвет онлайн)

Fig. 1. Development of chimera states for the one-dimensional two-component system (1D UV) depending on the value of the exponent $\alpha_u \leqslant 2$ of the fractional Laplace operator of the first component for $I_{ext} = 1.6$. Part (*a*) shows the spatiotemporal dynamics of the system for the corresponding exponents α_u for the first component and classical diffusion for the second. Chimera-like structures arise for the cases: $\alpha_u = 1.6$ and $\alpha_u = 1.4$. The case $\alpha_u = 1.2$ shows a clear desynchronization for only a single neuron. Part (*b*) presents the states of these systems for the indicated time moments, with highlighted regions of synchronization activity and regions of incoherent behavior. The materials were reconstructed from the data of Ref. [15] (color online)



а/*a*

б/*b*

Рис. 2. Динамика двухмерной двухкомпонентной системы (2D UV) при $I_{ext} = 1.7$ с дробным оператором Лапласа по первой компоненте $\alpha_u < 2$ и классической диффузией по второй ($\alpha_v = 2$): *а* и *б* – представлен переход от режима синхронизационной активности (при $\alpha_u = 2$ и $\alpha_u = 1.8$) к формированию химерных состояний (при $\alpha_u = 1.4$ и $\alpha_u = 1.2$) через промежуточный пульсационный режим для $\alpha_u = 1.6$. На фрагменте (*б*1) отображена динамика развития химерного состояния в одномерной подсистеме, приведенной на рис. *б*. На фрагменте (*б*2) представлено состояние данной одномерной подсистемы для соответствующих моментов времени. Материалы восстановлены по данным работы [23] (цвет онлайн)

Fig. 2. Dynamics of the two-dimensional two-component system (2D UV) with the fractional Laplace operator on the first component ($\alpha_u < 2$) and classical diffusion on the second component ($\alpha_v = 2$). Fragments (*a*) and (*b*) demonstrate the transition from the synchronization activity regime (at $\alpha_u = 2$ and $\alpha_u = 1.8$) to the formation of chimera states (at $\alpha_u = 1.4$ and $\alpha_u = 1.2$) through an intermediate pulsation regime for $\alpha_u = 1.6$. Fragment (*b*1) demonstrates the dynamics of chimera state development in the one-dimensional subsystem shown in fragment (*b*). Fragment (*b*2) shows the states of this one-dimensional subsystem for the corresponding time moments. The materials are reconstructed from the data of Ref. [23] (color online)

стояния. Подробный анализ динамики развития химерного состояния для случая ($\alpha_u = 1.2$, $\alpha_v = 2$) представлен на рис. 2, *б*.

2.2. Динамические режимы в пространстве показателей дробного оператора Лапласа

Для отображения общих особенностей поведения системы в работах [15, 23] были изучены продуцируемые ею динамические режимы в пространстве показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v). Особенность данных показателей как параметров в том, что они заключают в себе информацию как об асимптотике соединений между элементами, так и об удельных силах взаимного соединения между ними. В данной постановке единственный показатель дробного оператора Лапласа α_i, $i = \{u, v\}$, является комбинацией классических параметров, для которых исследуется большинство сетевых моделей: радиуса и силы взаимодействия между элементами. Можно утверждать, что параметрическое пространство (α_u, α_v) характеризует внутреннюю конфигурацию сетевой структуры для главной u и вспомогательной v компонент наряду с ко-

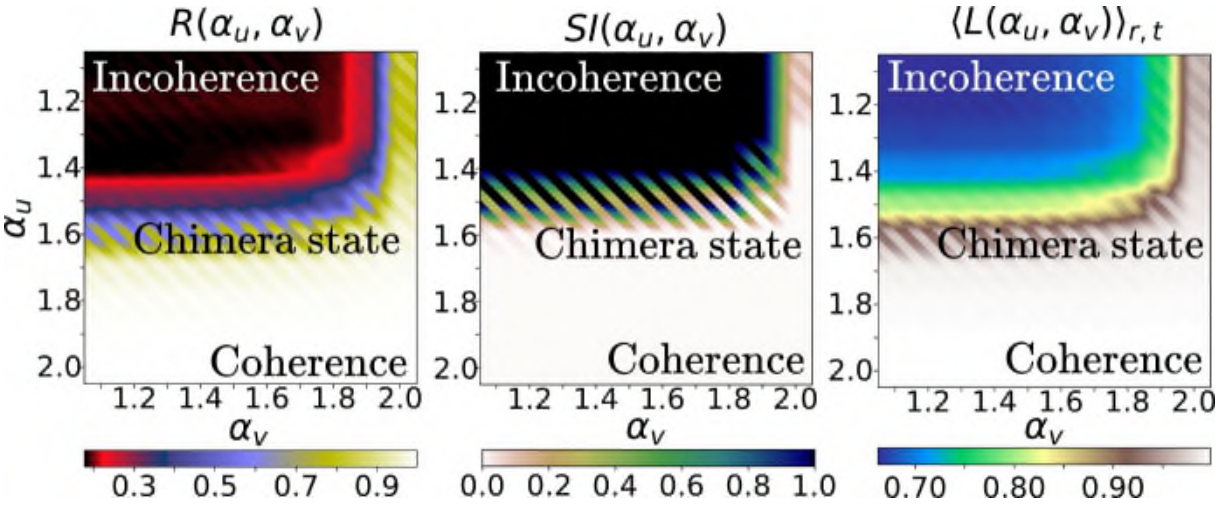


Рис. 3. Динамические режимы в пространстве показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) на примере двухмерной двухкомпонентной системы (2D UV) при $I_{ext} = 1.9$. В качестве основных метрик используются (слева направо): *фактор синхронизации* $R(\alpha_u, \alpha_v)$, *сила некогерентности* $SI(\alpha_u, \alpha_v)$, усредненный по пространственно-временной области *параметр локального порядка* $\langle L(\alpha_u, \alpha_v)\rangle_{r,t}$. Светлая область характеризует параметрическое пространство с развитой синхронизацией, темный участок – область с развитой рассинхронизацией, промежуточная область – зона химерного состояния. Сетчатая структура рисунка отражает изменение в динамике для двух различных выборок начальных условий. Материалы восстановлены по данным работы [23] (цвет онлайн)

Fig. 3. Dynamical modes in the parameter space of the fractional Laplace operator (α_u, α_v) of the two-dimensional two-component system (2D UV) for $I_{ext} = 1.9$. The following metrics are used (from left to right): *synchronization factor* $R(\alpha_u, \alpha_v)$, *strength of incoherence* $SI(\alpha_u, \alpha_v)$, and *local order parameter* $\langle L(\alpha_u, \alpha_v)\rangle_{r,t}$ averaged over the space-time domain. The light area characterizes the parameter space with developed synchronization, the dark area – the area with developed desynchronization, the intermediate area – the chimera state zone. The grid structure of the figure reflects the change in dynamics for two different sets of initial conditions. The materials are reconstructed from the data of Ref. [23] (color online)

эффициентами диффузии (D_u, D_v) и пределами оператора суммирования (l_+, l_-).

На рис. 3 представлены динамические режимы, возникающие в рамках двухмерной двухкомпонентной системы (**2D UV**) в пространстве показателей дробного оператора Лапласа (α_u, α_v) для трех различных метрик развития неоднородного состояния: *фактора синхронизации* $R(\alpha_u, \alpha_v)$, *силы некогерентности* $SI(\alpha_u, \alpha_v)$ и усредненного по пространственно-временной области *параметра локального порядка* $\langle L(\alpha_u, \alpha_v)\rangle_{r,t}$. Использовалось следующее значение параметра внешнего ионного тока: $I_{ext} = 1.9$. Результаты восстановлены по данным работы [23].

Данные демонстрируют общий для всех используемых метрик переход от полной синхронизации к развитой некогерентности (при увеличении влияния дальнодействия и уменьшения влияния локально-взаимодействующих элементов при $(\alpha_u \to 1.1,\ \alpha_v \to 1.1)$). При этом для части параметров наблюдается явная зависимость от выбранных начальных условий (сетчатая область рисунка), что характерно для химерных режимов.

2.3. Случай трехкомпонентной системы

Добавление третей, медленно эволюционирующей компоненты m способно существенным образом расширить возможность описания динамических режимов точечного нейрона. В связи с важностью данной задачи рассмотрим двухмерную (**2D UVM**) трехкомпонентную систему и ее одномерную подсистему **(1D UVM)** (см. уравнение (4)). Результаты численного моделирования восстановлены по данным работы [23] и представлены на рис. 4.

Ряд фрагментов (см. рис. 4, *a*) демонстрируют поведение системы перед переходом к полной синхронизации при $I_{ext} = 1.7$ и $r = 0.01$ с образованием химеро-подобных структур. Поведение локальной системы при заданном наборе параметров соответствует переходу к осцилляциям пониженной частоты. Глобальная синхронизация возникает именно за счет локальной динамики данного перехода. Эволюция выделенной одномерной подсистемы, проявляющая данный процесс перехода, представлена на рис. 4, фрагмент *a*1. Продемонстрировано, что часть элементов системы синхронизируются позже остальных и демонстрируют неоднородность.

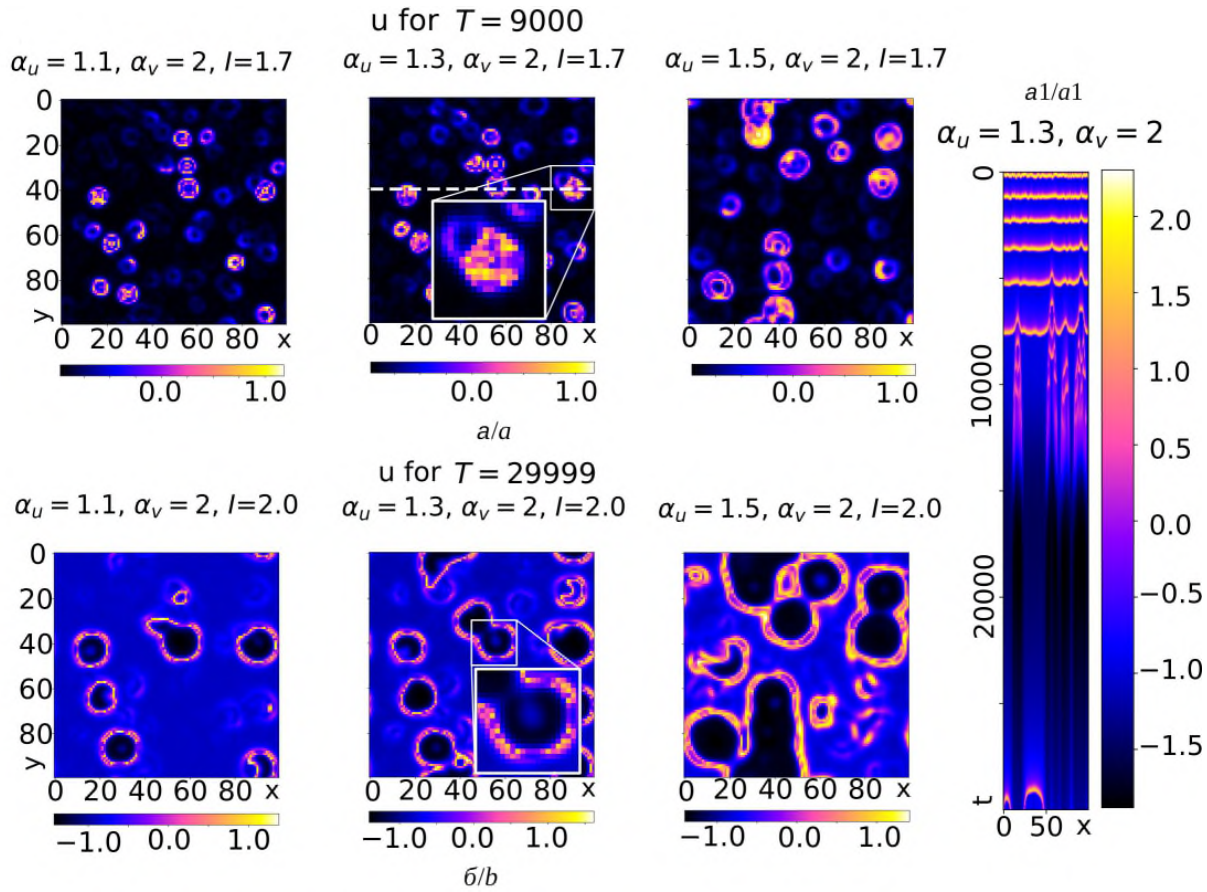


Рис. 4. Динамика трехкомпонентной двухмерной системы (2D UVM) для соответствующих показателей дробного оператора Лапласа: *а* – продемонстрировано развитие химерного состояния до перехода системы в режим общей синхронизации при параметре внешнего ионного тока $I_{ext} = 1.7$ и $r = 0.01$; динамика выделенной одномерной подсистемы для случая $\alpha_u = 1.3$ и $\alpha_v = 2.0$ представлена на фрагменте (*а*1); *б* – представлены кольцевые волновые химерные структуры, получающиеся после выхода системы из синхронизационного режима для соответствующего значения внешнего ионного тока $I_{ext} = 2.0$ и $r = 0.01$. Материалы восстановлены по данным работы [23] (цвет онлайн)

Fig. 4. Dynamics of the three-component two-dimensional system (2D UVM) for the corresponding parameters of the fractional Laplace operator. Fragments (a) demonstrate the development of the chimera state before the transition of the system to the general synchronization regime for the parameter of the external ionic current $I_{ext} = 1.7$ and $r = 0.01$. The dynamics of the separated one-dimensional subsystem for the case $\alpha_u = 1.3$ and $\alpha_v = 2.0$ is presented in fragment (a1). Fragments (*b*) show the target-wave chimera structures obtained after the system leaves the synchronization regime for the corresponding value of the external ion current $I_{ext} = 2.0$ and $r = 0.01$. The materials are reconstructed from the data of Ref. [23] (color online)

Фрагменты на рис. 4, *б* соответствуют точечной динамике с серией, состоящей из двух спайков после переходного процесса при $I_{ext} = 2.0$ и $r = 0.01$. Состояния системы после выхода из режима общей синхронизации демонстрируют образование кольцевых химер.

Заключение

В данной работе обсуждаются основные результаты исследований, посвященных возникновению химерных состояний в одномерных и двухмерных системах супердиффузионно связанных нейронов [15, 23]. Показано, что внедрение дробного оператора Лапласа приводит к формированию нелокального типа взаимодействия между элементами и существенно влияет на динамические особенности возникающих структур. В данной перспективе показатели дробного оператора Лапласа α_u и α_v являются универсальными параметрами, определяющими основные закономерности, по которым будет происходить передача взаимодействия между нейронами.

Для одномерных цепочек взаимодействующих нейронов продемонстрировано, что образование химерных структур связано с уменьшением показателя дробного оператора Лапласа по первой компоненте в присутствии классической диффузионной связи по второй компоненте. Аналогичное явление наблюдается и для двухмерной решетки супердиффузионно взаимодей-

ствующих нейронов, организованных на основе соединения анизотропного типа. Полученные результаты свидетельствуют, что для организации химерных состояний необходим баланс между влиянием ближайших и удаленных элементов. В рамках полученных реализаций предложенной системы удается однозначно сказать, что локальное взаимодействие (классического диффузионного типа) приводит к синхронизации системы, в то время как нелокальность является источником возмущения. Для супердиффузионного типа соединения имеется возможность эффективно комбинировать локальность и нелокальность, тем самым продуцируя в системе химеры.

Исследование динамических режимов в параметрическом пространстве показателей дробного оператора Лапласа, относящихся к заданным компонентам, несет дополнительную информацию о конфигурационных особенностях исследуемой сетевой структуры. Это возможно по причине того, что данный показатель определяет асимптотику соединений между элементами соответствующих ему компонент. В рамках описанных работ продемонстрирован переход от синхронизации к рассинхронизации в данном параметрическом пространстве. Указаны параметрические области, связанные с образованием химерных состояний.

Динамика трехкомпонентной системы также способна воспроизводить химерные состояния. В частности, развитие глобальной синхронизации, вызванное точечной динамикой одиночных нейронов, достигается в различные моменты времени для определенных кластеров распределенной одномерной подсистемы. Обнаружено, что до перехода к общей синхронизации в системе могут возникать химерные состояния, ограниченные по времени. Аналогично, после выхода из режима общей синхронизации в системе могут возникать временные кольцевые химеры.

Аппарат дробно-дифференциального исчисления является важным инструментом описания многочисленных явлений. В частности, результаты, представленные в соответствующих работах [15, 23], могут быть использованы для задач вычислительных нейронаук и других мультидисциплинарных областей в качестве альтернатив используемых сетевых моделей. Релевантность подхода, основанного на аппарате дробно-дифференциального исчисления, сопряжена с широким разнообразием аналитических методов анализа распределенных систем, с супердиффузионной кинетикой. Предложенные модели могут быть экстраполированы на случай аномальной диффузии с дробной временной производной, отражающей не только свойство нелокальности, но еще и зависимость динамической системы от собственной предыстории. Грамотное использование последнего свойства может иметь значение для описания адаптационных свойств сетей различной природы.

Список литературы / References

1. Kuramoto Y., Battogtokh D. *Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators*. arXiv preprint cond-mat/0210694, 2002. https://doi.org/10.48550/arXiv.cond-mat/0210694
2. Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators. *Physical Review Letters*, 2004, vol. 93, no. 17, pp. 174102. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.174102
3. Zakharova A. *Chimera patterns in networks*. Switzerland, Springer, 2020. 233 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21714-3
4. Maistrenko Y. L., Vasylenko A., Sudakov O., Levchenko R., Maistrenko V. L. Cascades of multiheaded chimera states for coupled phase oscillators. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014, vol. 24, no. 08, pp. 1440014. https://doi.org/10.1142/S0218127414400148
5. Martens E. A., Thutupalli S., Fourrière A., Hallatschek O. Chimera states in mechanical oscillator networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2013, vol. 110, no. 26, pp. 10563–10567. https://doi.org/10.1073/pnas.1302880110
6. Viktorov E. A., Habruseva T., Hegarty S. P., Huyet G., Kelleher B. Coherence and incoherence in an optical comb. *Physical Review Letters*, 2014, vol. 112, no. 22, pp. 224101. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.112.224101
7. Tinsley M. R., Nkomo S., Showalter K. Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators. *Nature Physics*, 2012, vol. 8, no. 9, pp. 662–665. https://doi.org/10.1038/nphys2371
8. Bera B. K., Ghosh D., Lakshmanan M. Chimera states in bursting neurons. *Physical Review E*, 2016, vol. 93, no. 1, pp. 012205. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.012205
9. Wang Z., Xu Y., Li Y., Kapitaniak T., Kurths J. Chimera states in coupled Hindmarsh–Rose neurons with α-stable noise. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2021, vol. 148, pp. 110976. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110976
10. Hizanidis J., Kanas V. G., Bezerianos A., Bountis T. Chimera states in networks of nonlocally coupled Hindmarsh–Rose neuron models. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2014, vol. 24, no. 03, pp. 1450030. https://doi.org/10.1142/S0218127414500308
11. Majhi S., Bera B. K., Ghosh D., Perc M. Chimera states in neuronal networks: A review. *Physics of Life Reviews*, 2019, vol. 28, pp. 100–121. https://doi.org/10.1016/j.plrev.2018.09.003

12. Parastesh F., Jafari S., Azarnoush H., Shahriari Z., Wang Z., Boccaletti S., Perc M. Chimeras. *Physics Reports*, 2021, vol. 898, pp. 1–114. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.10.003
13. Huo S., Tian C., Kang L., Liu Z. Chimera states of neuron networks with adaptive coupling. *Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 96, pp. 75–86. https://doi.org/10.1007/s11071-019-04774-4
14. Bera B. K., Ghosh D. Chimera states in purely local delay-coupled oscillators. *Physical Review E*, 2016, vol. 93, no. 5, pp. 052223. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.052223
15. Fateev I., Polezhaev A. Chimera states in a chain of superdiffusively coupled neurons. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2023, vol. 33, no. 10, pp. 103110. https://doi.org/10.1063/5.0168422
16. Kundu S., Ghosh D. Higher-order interactions promote chimera states. *Physical Review E*, 2022, vol. 105, no. 4, pp. L042202. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.105.L042202
17. Qin H., Ma J., Wang C., Chu R. Autapse-induced target wave, spiral wave in regular network of neurons. *Science China Physics, Mechanics & Astronomy*, 2014, vol. 57, pp. 1918–1926. https://doi.org/10.1007/s11433-014-5466-5
18. Jun M., He-Ping Y., Yong L., Shi-Rong L. Development and transition of spiral wave in the coupled Hindmarsh–Rose neurons in two-dimensional space. *Chinese Physics B*, 2009, vol. 18, no. 1, pp. 98–105. https://doi.org/10.1088/1674-1056/18/1/017
19. Huang X., Xu W., Liang J., Takagaki K., Gao X., Wu J. Y. Spiral wave dynamics in neocortex. *Neuron*, 2010, vol. 68, no. 5, pp. 978–990. https://doi.org/10.1016/j.neuron.2010.11.007
20. *Wu J. Y., Huang X., Zhang C.* Propagating waves of activity in the neocortex: What they are, what they do. *The Neuroscientist*, 2008, vol. 14, no. 5, pp. 487–502. https://doi.org/10.1177/1073858408317066
21. Shepelev I. A., Bukh A. V., Muni S. S., Anishchenko V. S. Role of solitary states in forming spatiotemporal patterns in a 2D lattice of van der Pol oscillators. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2020, vol. 135, pp. 109725. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109725
22. Rybalova E., Bukh A., Strelkova G., Anishchenko V. Spiral and target wave chimeras in a 2D lattice of map-based neuron models. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 2019, vol. 29, no. 10, pp. 101104. https://doi.org/10.1063/1.5126178
23. Fateev I., Polezhaev A. Chimera states in a lattice of superdiffusively coupled neurons. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2024, vol. 181, pp. 114722. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.114722
24. Kasimatis T., Hizanidis J., Provata A. Three-dimensional chimera patterns in networks of spiking neuron oscillators. *Physical Review E*, 2018, vol. 97, no. 5, pp. 052213. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.97.052213
25. Klages R., Radons G., Sokolov I. M. *Anomalous transport*. Weinheim, Wiley-VCH Verlag, 2008. 608 p. https://doi.org/10.1002/9783527622979
26. Ramakrishnan B., Parastesh F., Jafari S., Rajagopal K., Stamov G., Stamova I. Synchronization in a multiplex network of nonidentical fractional-order neurons. *Fractal and Fractional*, 2022, vol. 6, no. 3, pp. 169. https://doi.org/10.3390/fractalfract6030169
27. Yan B., Parastesh F., He S., Rajagopal K., Jafari S., Perc M. Interlayer and intralayer synchronization in multiplex fractional-order neuronal networks. *Fractals*, 2022, vol. 30, no. 10, pp. 22401946. https://doi.org/10.1142/S0218348X22401946
28. Giresse T. A., Crepin K. T., Martin T. Generalized synchronization of the extended Hindmarsh–Rose neuronal model with fractional order derivative. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2019, vol. 118, pp. 311–319. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.11.028
29. Buzsáki G., Mizuseki K. The log-dynamic brain: How skewed distributions affect network operations. *Nature Reviews Neuroscience*, 2014, vol. 15, no. 4, pp. 264–278. https://doi.org/10.1038/nrn3687
30. Cossell L., Iacaruso M. F., Muir D. R., Houlton R., Sader E. N., Ko H., Hofer S. B., Mrsic-Flogel T. D. Functional organization of excitatory synaptic strength in primary visual cortex. *Nature*, 2015, vol. 518, no. 7539, pp. 399–403. https://doi.org/10.1038/nature14182
31. Song S., Sjöström P. J., Reigl M., Nelson S., Chklovskii D. B. Highly nonrandom features of synaptic connectivity in local cortical circuits. *PLoS Biology*, 2005, vol. 3, no. 3, pp. e68. https://doi.org/10.1371/journal.pbio.0030068
32. Hilgetag C. C., Goulas A. Is the brain really a small-world network? *Brain Structure and Function*, 2016, vol. 221, pp. 2361–2366. https://doi.org/10.1007/s00429-015-1035-6
33. Beggs J. M., Plenz D. Neuronal avalanches in neocortical circuits. *Journal of Neuroscience*, 2003, vol. 23, no. 35, pp. 11167–11177. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.23-35-11167.2003
34. Barabási A. L., Albert R. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 1999, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512. https://doi.org/10.1126/science.286.5439.509
35. Baronchelli A., Radicchi F. Lévy flights in human behavior and cognition. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2013, vol. 56, pp. 101–105. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2013.07.013
36. Wardak A., Gong P. Fractional diffusion theory of balanced heterogeneous neural networks. *Physical Review Research*, 2021, vol. 3, no. 1, pp. 013083. https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.3.013083
37. Lee H. G. A second-order operator splitting Fourier spectral method for fractional-in-space reaction–diffusion equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 333, pp. 395–403. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.09.007
38. Liu F., Turner I., Anh V., Yang Q., Burrage K. A numerical method for the fractional Fitzhugh–Nagumo monodomain model. *Anziam Journal*, 2012, vol. 54, pp. C608–C629. https://doi.org/10.21914/anziamj.v54i0.6372
39. Chen G., Gong P. A spatiotemporal mechanism of visual attention: Superdiffusive motion and theta oscillations of

neural population activity patterns. *Science Advances*, 2022, vol. 8, no. 16, pp. Eabl4995. https://doi.org/10.1126/sciadv.abl4995

40. Qi Y., Gong P. Fractional neural sampling as a theory of spatiotemporal probabilistic computations in neural circuits. *Nature Communications*, 2022, vol. 13, no. 1, pp. 4572. https://doi.org/10.1038/s41467-022-32279-z
41. Samko S. G., Kilbas A. A, Marichev O. I. *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*. Switzerland, Gordon and Breach, 1993. 976 p.
42. Zhuang P., Liu F., Anh V., Turner I. Numerical methods for the variable-order fractional advection-diffusion equation with a nonlinear source term. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2009, vol. 47, no. 3, pp. 1760–1781. https://doi.org/10.1137/080730597
43. Liu F., Chen S., Turner I., Burrage K., Anh V. Numerical simulation for two-dimensional Riesz space fractional diffusion equations with a nonlinear reaction term. *Open Phys.*, 2013, vol. 11, no. 10, pp. 1221–1232. https://doi.org/10.2478/s11534-013-0296-z
44. Li B. W., Dierckx H. Spiral wave chimeras in locally coupled oscillator systems. *Physical Review E*, 2016, vol. 93, no. 2, pp. 020202. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.020202
45. Garcia-Ojalvo J., Elowitz M. B., Strogatz S. H. Modeling a synthetic multicellular clock: Repressilators coupled by quorum sensing. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2004, vol. 101, no. 30, pp. 10955–10960. https://doi.org/10.1073/pnas.0307095101
46. Gonze D., Bernard S., Waltermann C., Kramer A., Herzel H. Spontaneous synchronization of coupled circadian oscillators. *Biophysical Journal*, 2005, vol. 89, no. 1, pp. 120–129. https://doi.org/10.1529/biophysj.104.058388
47. Gopal R., Chandrasekar V. K., Venkatesan A., Lakshmanan M. Observation and characterization of chimera states in coupled dynamical systems with nonlocal coupling. *Physical Review E*, 2014, vol. 89, no. 5, pp. 052914. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.89.052914
48. Kundu S., Majhi S., Muruganandam P., Ghosh D. Diffusion induced spiral wave chimeras in ecological system. *The European Physical Journal Special Topics*, 2018, vol. 227, pp. 983–993. https://doi.org/10.1140/epjst/e2018-800011-1

Поступила в редакцию 09.04.2024; одобрена после рецензирования 25.06.2024; принята к публикации 30.07.2024
The article was submitted 09.04.2024; approved after reviewing 25.06.2024; accepted for publication 30.07.2024