

РАДИОФИЗИКА, ЭЛЕКТРОНИКА, АКУСТИКА

Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 429–441
Izvestiya of Saratov University. Physics, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 429–441
<https://fizika.sgu.ru> <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-4-429-441>, EDN: NKTOCD

Научная статья
УДК 537.86

Коллективная динамика ансамблей радиотехнических моделей осцилляторов ФитцХью–Нагумо, связанных через хаб

Д. М. Ежов¹, В. И. Пономаренко^{1,2}, М. Д. Прохоров^{1,2}✉

¹Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

²Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН, Россия, 410019, г. Саратов, ул. Зеленая, д. 38

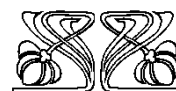
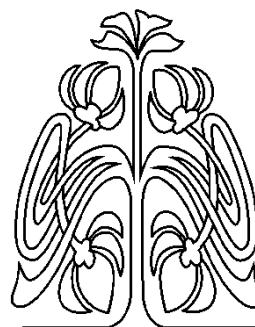
Ежов Дмитрий Максимович, ассистент кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии, ezhovdmitryi@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4994-6959>, AuthorID: 1252910

Пonomаренко Владимир Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, ¹профессор кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии; ²ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования в нелинейной динамике; ponomarenkovi@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1579-6465>, AuthorID: 39986

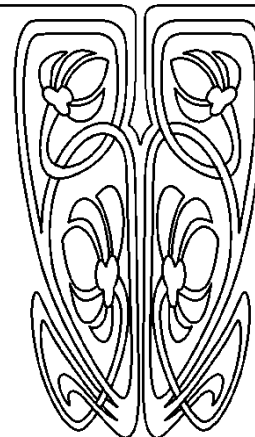
Прохоров Михаил Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор РАН, ¹ведущий научный сотрудник кафедры динамического моделирования и биомедицинской инженерии; ²заведующий лабораторией моделирования в нелинейной динамике, mdprokhorov@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4069-9410>, AuthorID: 39985

Аннотация. Исследование нелинейной динамики и коллективного поведения элементов в сетях связанных осцилляторов является актуальной задачей для многих научных дисциплин. Объектом исследования в работе являются сети, состоящие из радиотехнических моделей идентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо. Экспериментально исследовалась спайковая активность сети, состоящей из связанных между собой возбудимых аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо. Коллективное поведение элементов рассмотрено сначала в кольце генераторов ФитцХью–Нагумо, связанных отталкивающими диффузионными связями, а затем в трехслойной сети, состоящей из двух таких колец, связанных через общий хаб, тоже представляющий собой генератор ФитцХью–Нагумо. Поскольку в радиофизическом эксперименте невозможно добиться полной идентичности аналоговых генераторов, мы численно исследовали влияние слабой неидентичности осцилляторов ФитцХью–Нагумо на их коллективную динамику и сравнили полученные результаты с экспериментальными. Исследована синхронизация аналоговых генераторов в трехслойной сети при изменении коэффициента связи между генераторами одного из колец и коэффициента связи между хабом и генераторами в обоих кольцах. Показано, что в кольце генераторов ФитцХью–Нагумо в радиофизическом эксперименте наблюдаются различные колебательные режимы при фиксированных значениях параметров возбудимых генераторов. Эти режимы отличаются частотой следования спайков и сдвигом фаз между колебаниями различных генераторов в кольце. Обнаружено существование переключений между этими колебательными режимами. Показано, что при отталкивающих связях генераторов ФитцХью–Нагумо внутри колец и отталкивающих межслойных связях (связях с хабом) возникает частотная синхронизация колебаний всех генераторов сети. Полученные результаты могут быть востребованы при решении задач управления синхронизацией в спайковых нейронных сетях.

Ключевые слова: осциллятор ФитцХью–Нагумо, спайковая нейронная сеть, хаб, радиофизический эксперимент



**НАУЧНЫЙ
ОТДЕЛ**



Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-12-00103, <https://rscf.ru/project/23-12-00103/>).

Для цитирования: Ежов Д. М., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Коллективная динамика ансамблей радиотехнических моделей осцилляторов ФитцХью–Нагумо, связанных через хаб // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика. 2024. Т. 24, вып. 4. С. 429–441. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-4-429-441>, EDN: NKTOCD

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0)

Article

Collective dynamics of ensembles of radio engineering models of FitzHugh–Nagumo oscillators coupled via a hub

D. M. Ezhov¹, V. I. Ponomarenko^{1,2}, M. D. Prokhorov^{1,2}✉

¹Saratov State University, 83 Astrakhanskaya St., Saratov 410012, Russia

²Saratov Branch of the Institute of RadioEngineering and Electronics of Russian Academy of Sciences, 38 Zelyonaya St., Saratov 410019, Russia

Dmitry M. Ezhov, ezhovdmitryi@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4994-6959>, AuthorID: 1252910

Vladimir I. Ponomarenko, ponomarenkovi@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0002-1579-6465>, AuthorID: 39986

Mikhail D. Prokhorov, mdprokhorov@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0003-4069-9410>, AuthorID: 39985

Abstract. Background and Objectives: Since the neural networks of the brain have a multilayer structure, multilayer networks of interconnected model neurons are used to simulate and study their complex dynamics. A central role in establishing and maintaining effective communication between brain regions is played by so-called hubs, which are network nodes connected to many other network nodes. The object of study in this work is a network of model neurons coupled via a hub. We used FitzHugh–Nagumo neurooscillators as node elements of the network.

Materials and Methods: The spiking activity of a network consisting of interconnected excitable FitzHugh–Nagumo analog generators was experimentally studied. The collective behavior of elements is considered first in a ring of FitzHugh–Nagumo generators connected by repulsive diffusive couplings, and then in a three-layer network consisting of two such rings connected via a common hub, which is also a FitzHugh–Nagumo generator. Since in a real experimental setup it is impossible to achieve complete identity of analog electronic generators, we numerically studied the effect of weak non-identity of FitzHugh–Nagumo oscillators on their collective dynamics and compared the results obtained with experimental ones. The synchronization of analog generators in a three-layer network was studied when the coupling coefficient between the generators of one of the rings and the coupling coefficient between the hub and generators in both rings were varied. **Results:** Diagrams of the average frequency of spiking activity of generators in each layer of the network have been constructed when the coupling coefficients between the generators of the second ring and between the hub and generators in both rings are varied. It has been shown that in a ring of FitzHugh–Nagumo generators in a radio physical experiment, various oscillatory regimes are observed at fixed values of the parameters of the excitable generators. These regimes differ in the frequency of spikes and the phase shift between the oscillations of various generators in the ring. The existence of switchings between these oscillatory regimes has been revealed. It has been shown that with repulsive couplings of FitzHugh–Nagumo generators inside the rings and repulsive interlayer couplings (connections with the hub), frequency synchronization of all network generators occurs. **Conclusion:** The obtained results can be used when solving problems of synchronization control in spiking neural networks.

Keywords: FitzHugh–Nagumo oscillator, spiking neural network, hub, radio physical experiment

Acknowledgements: This study was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-12-00103, <https://rscf.ru/en/project/23-12-00103/>).

For citation: Ezhov D. M., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Collective dynamics of ensembles of radio engineering models of FitzHugh–Nagumo oscillators coupled via a hub. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2024, vol. 24, iss. 4, pp. 429–441 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2024-24-4-429-441>, EDN: NKTOCD

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0)

Введение

Исследование нелинейной динамики и коллективного поведения элементов в сетях связанных осцилляторов представляет большой интерес для многих научных дисциплин [1–3]. Особенности динамики сетей определяются не только свойствами узловых элементов сети, но и архитектурой и типом связей между узлами. Для многих реальных сетей характерна масштабная инвариантность, при которой большинство узлов связано с малым числом других элементов сети, а сравнительно малое число узлов, называемых хабами, связано со многими другими узлами [4]. К таким безмасштабным сетям, имею-

щим хабы, относятся, например, нейронные сети головного мозга [5]. Хабы играют центральную роль в установлении и поддержании эффективной коммуникации между областями мозга, что критически важно для его здорового функционирования [6, 7].

Поскольку нейронные сети головного мозга имеют многослойную структуру [8], для моделирования и изучения их сложной динамики используют многослойные сети связанных осцилляторов [9–11]. Важным вопросом при этом является выбор способа связи между узлами, принадлежащими разным слоям сети. Один из наиболее простых способов межслойной связи использу-

ется в мультиплексной сети, в которой все слои многослойной сети имеют один и тот же набор узлов, а связь между слоями организована таким образом, что i -й узел j -го слоя связан лишь с соседним i -м узлом $(j-1)$ -го и $(j+1)$ -го слоя. Показано, что в таких мультиплексных сетях может наблюдаться синхронизация колебательных режимов [12–14]. Исследование многослойных сетей, связанных через хаб, является пока малоизученной задачей [15]. Вместе с тем изучение таких сетей представляет интерес, так как их архитектура учитывает одновременно и многослойность реальных сетей головного мозга, и наличие в них хабов.

При моделировании нейронных сетей мозга в качестве узловых элементов сети используют биологически реалистичные модели нейронов в виде нелинейных динамических систем [16, 17]. Такие модельные нейроны могут демонстрировать присущую реальным нейронам сложную динамику, в том числе генерировать спайки (импульсы), а построенные из них сети, называемые спайковыми нейронными сетями, позволяют эффективно моделировать процессы обработки информации головным мозгом [18–20]. В данной работе мы использовали нейроосцилляторы ФитцХью–Нагумо [21] в качестве узлов сети. Сети, состоящие из осцилляторов ФитцХью–Нагумо, были достаточно подробно исследованы численно при различном типе связи осцилляторов [22–27].

Задача экспериментального исследования сетей связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо является менее изученной, а связанные через хаб ансамбли осцилляторов ФитцХью–Нагумо ранее не исследовались экспериментально. В данной работе коллективная динамика аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо впервые рассмотрена нами в радиофизическом эксперименте на примере трехслойной сети, внешние слои которой представляют собой кольца диффузионно связанных генераторов, а внутренний слой представляет собой хаб, осуществляющий связь между кольцами.

1. Одиночный ансамбль локально связанных генераторов ФитцХью–Нагумо

В качестве узлового элемента многослойной спайковой нейронной сети возьмем осциллятор ФитцХью–Нагумо, который является эталонной моделью возбудимой динамики нейронов и описывается следующими модельными дифференци-

альными уравнениями [21]:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u}(t) &= u(t) - \frac{u^3(t)}{3} - v(t), \\ \dot{v}(t) &= u(t) + a,\end{aligned}\quad (1)$$

где $u(t)$ описывает динамику активатора (быстрой переменной), $v(t)$ описывает динамику ингибитора (медленной переменной), малый параметр ε отвечает за разделение временных масштабов быстрой и медленной переменных, a – пороговый параметр. При $a < 1$ осциллятор (1) демонстрирует периодические автоколебания, а при $a > 1$ находится в возбужденном состоянии, при котором генерация спайков отсутствует.

Осциллятор ФитцХью–Нагумо может быть достаточно просто реализован в радиофизическом эксперименте при использовании идеологии аналогового моделирования. Принципиальная схема радиотехнической модели осциллятора ФитцХью–Нагумо на аналоговых умножителях и операционных усилителях была предложена и подробно описана нами в работе [24]. Здесь мы использовали ту же схему, которая позволяет получить колебания генератора, подобные колебаниям модельного осциллятора (1).

Рассмотрим ансамбль, состоящий из связанных в кольцо двунаправленной диффузионной связью осцилляторов ФитцХью–Нагумо, описываемых модельными уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{u}_i(t) &= u_i(t) - \frac{u_i^3(t)}{3} - v_i(t) + \\ &+ k[(u_{i-1}(t) - u_i(t)) + (u_{i+1}(t) - u_i(t))], \\ \dot{v}_i(t) &= u_i(t) + a,\end{aligned}\quad (2)$$

где $i = 1, \dots, N$ – номер осциллятора, N – количество осцилляторов в ансамбле, граничные условия $u_{N+1}(t) = u_1(t)$, k – коэффициент связи.

Для экспериментального исследования коллективной динамики осцилляторов в ансамбле (2) была построена радиотехническая установка, состоящая из аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо, блок-схема которой представлена на рис. 1. На этом рисунке показаны только первый и N -й генераторы ФитцХью–Нагумо. Для реализации связей между генераторами ансамбля был использован подход, основанный на программном способе формирования сигналов, отвечающих за связь аналоговых генераторов [28].

При таком подходе сигналы напряжения с выхода каждого генератора подаются

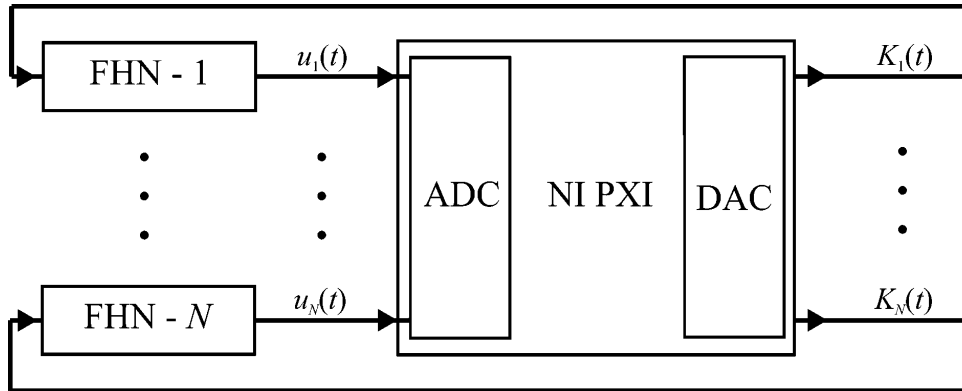


Рис. 1. Блок-схема экспериментальной установки: FHN-1 и FHN-N – первый и N -й генераторы ФитцХью–Нагумо, NI PXI – система ввода-вывода многоканальных данных, ADC – аналого-цифровой преобразователь, DAC – цифро-аналоговый преобразователь

Fig. 1. Block diagram of the experimental setup: FHN-1 and FHN-N are the first and N th FitzHugh–Nagumo generators, NI PXI is a multichannel data input/output system, ADC is the analog-to-digital converter, and DAC is the digital-to-analog converter

на многоканальный аналого-цифровой преобразователь системы ввода-вывода данных National Instruments и оцифровываются. Затем с помощью программы на LabView проводится преобразование этих сигналов и формируются отвечающие за связь сигналы

$$K_i(t) = \sum_{j=1}^N k_{i,j} (u_j(t) - u_i(t)),$$

где $k_{i,j}$ – коэффициент связи, действующей со стороны j -го генератора на i -й. В случае модельных уравнений (2) $k_{i,j} = 0$, если генераторы не связаны между собой, и $k_{i,j} = k$, если j -й генератор действует на i -й. Сигналы $K_i(t)$ преобразуются в аналоговый вид с помощью многоканального цифро-аналогового преобразователя и подаются на вход каждого генератора. Построенная экспериментальная установка позволяет задать произвольную архитектуру связей между генераторами.

Мы экспериментально исследовали ансамбль (2), состоящий из 5 аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо, находящихся в возбужденном состоянии при следующих значениях параметров: $a = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$. В отсутствие связей ($k = 0$) генераторы находятся в устойчивом состоянии равновесия. При включении отталкивающих связей ($k < 0$) генераторы начинают демонстрировать колебания, имеющие вид спайков, если величина связи (по модулю) выше пороговой. При выбранных значениях параметров a и ε пороговое значение коэффициента связи $k_p = -0.037$. Экспериментальные временные реализации колебаний переменной $u_i(t)$ в каждом

из 5 генераторов, записанные с частотой дискретизации 50 кГц, приведены на рис. 2, а и рис. 2, б при $k = -0.05$.

Временные реализации на рис. 2, а и рис. 2, б соответствуют двум различным колебательным режимам, наблюдаемым при различных запусках экспериментальной установки. На рис. 2, а частота следования спайков $f_1 = 158$ Гц примерно в полтора раза больше, чем частота следования спайков $f_2 = 110$ Гц на рис. 2, б. Кроме того, колебания всех пяти генераторов на рис. 2, а сдвинуты по фазе относительно друг друга, а на рис. 2, б две пары генераторов демонстрируют синфазные спайки, и их временные реализации почти совпадают. Для сравнения на рис. 2, в приведены временные реализации колебаний переменной $u_i(t)$, полученные при численном моделировании ансамбля осцилляторов ФитцХью–Нагумо (2) при тех же значениях параметров, что в радиофизическом эксперименте. Колебательный режим на рис. 2, в больше похож на режим, приведенный на рис. 2, б, хотя отличается от него большей частотой следования спайков и наличием двух, а не трех кластеров осцилляторов. В численном эксперименте при фиксированных значениях параметров и расстройке начальных условий осцилляторов система (2) демонстрирует лишь один режим колебаний.

С увеличением (по модулю) силы отталкивающей связи средняя частота спайков растет, что согласуется с результатами численных исследований модельных уравнений (2), приведенными в работе [15]. При увеличении параметра a увеличивается по модулю пороговое значение

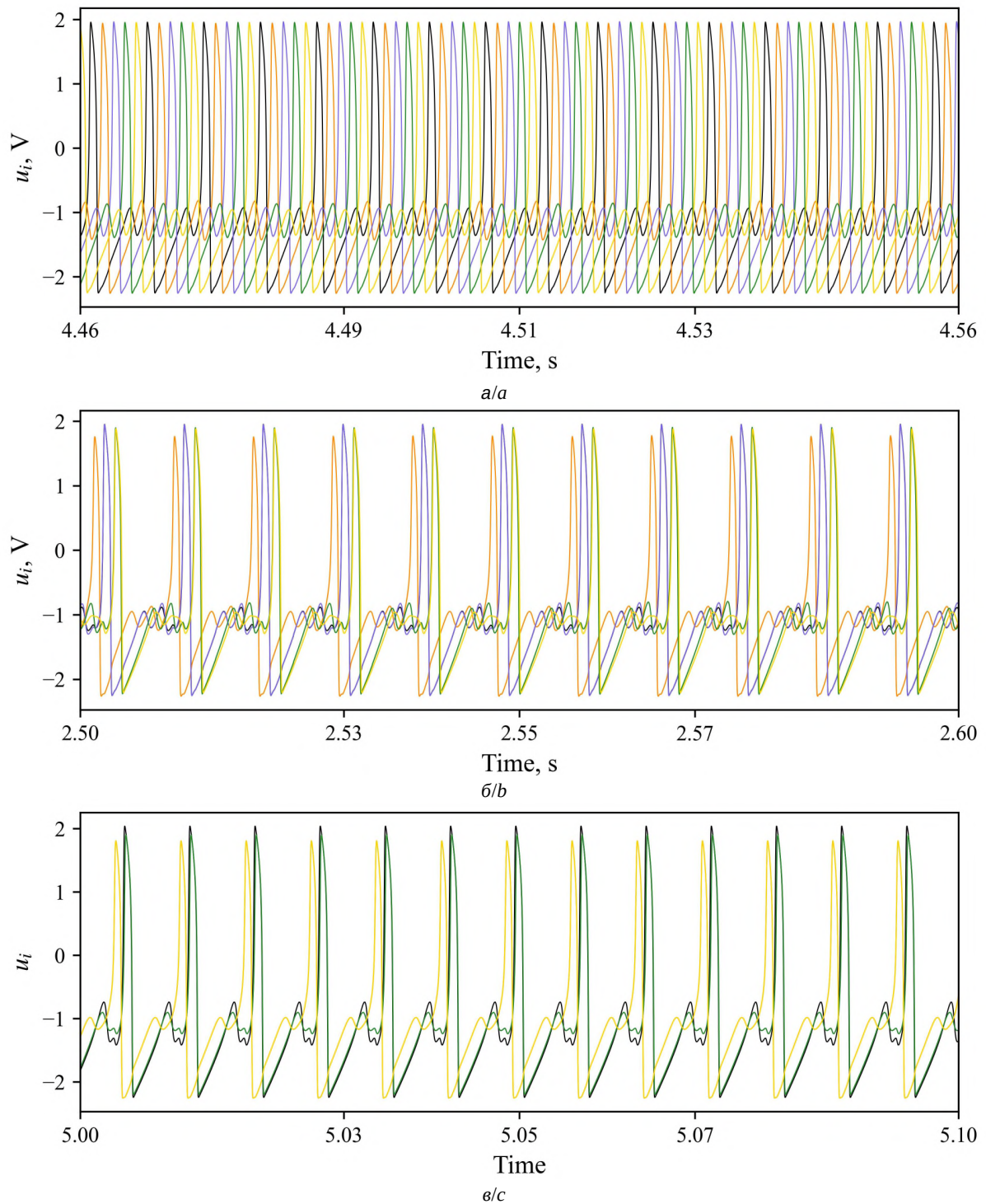


Рис. 2. Временные реализации $u_i(t)$ аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо (а, б) и модельных осцилляторов ФитцХью–Нагумо (в) при $a = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$, $k = -0.05$ (цвет онлайн)

Fig. 2. Time series $u_i(t)$ of analog FitzHugh–Nagumo generators (a, b) and model FitzHugh–Nagumo oscillators (c) at $a = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$, and $k = -0.05$ (color online)

коэффициента отталкивающей связи, при котором возбудимые генераторы демонстрируют спайковую активность. Как было отмечено выше, параметр ε в генераторах ФитцХью–Нагумо

является малым. При его увеличении частота спайков уменьшается [29], а сами спайки становятся менее выраженными (переменные $u_i(t)$ и $v_i(t)$ меняются более плавно).

В ходе радиофизического эксперимента иногда наблюдались переключения между колебательными режимами, представленными на рис. 2, а и рис. 2, б. Переключение из режима с более высокой частотой спайковой активности в режим с меньшей частотой спайковой активности показано на рис. 3, а, а обратное переключение показано на рис. 3, б.

Все генераторы имеют одинаковую среднюю частоту следования спайков. На рис. 4 приведена временная динамика усредненной по двадцати спайкам частоты f_s спайковой активности для одного из генераторов, которую мы рассчитывали следующим образом: $f_s = 20 \left/ \sum_{n=1}^{20} (t_{n+1} - t_n) \right.$, где t_{n+1} и t_n – моменты времени появления двух последовательных спайков. В моменты времени

$t_1 = 2.43$ с и $t_2 = 4.15$ с произошли переключения между колебательными режимами с различной средней частотой следования спайков.

При численном исследовании системы (2) переключений колебательных режимов не наблюдается даже при задании разных начальных условий у осцилляторов. Возможно, отличие результатов численного и радиофизического экспериментов объясняется тем, что в реальной экспериментальной установке невозможно добиться полной идентичности аналоговых генераторов. Схемы этих генераторов содержат резисторы и конденсаторы, значения параметров которых имеют некоторый разброс и могут отличаться от номинальных, а кроме того могут изменяться при работе установки.

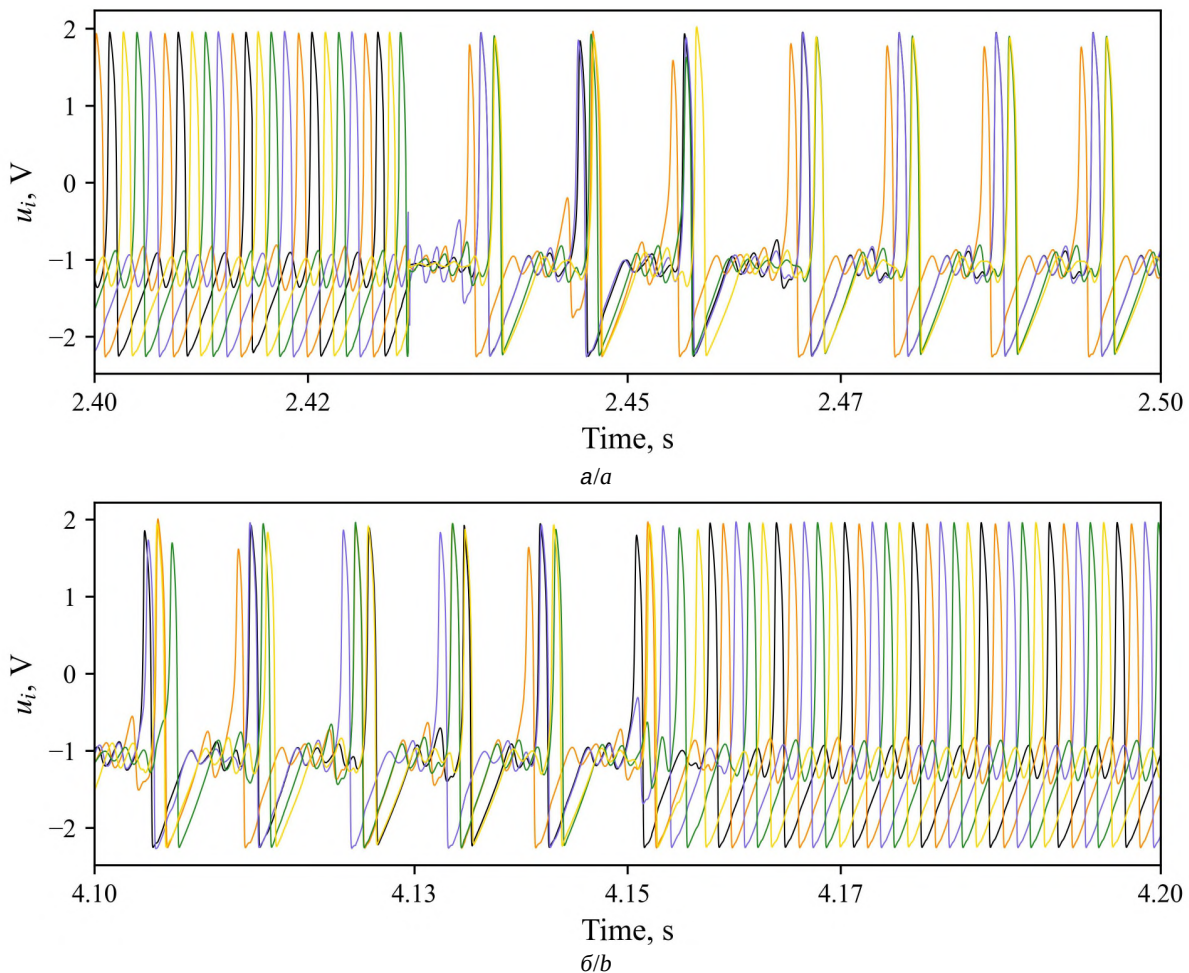


Рис. 3. Временные реализации $u_i(t)$ аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо при $a = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$, $k = -0.05$, демонстрирующие переключение из высокочастотного колебательного режима в низкочастотный (а) и переключение из низкочастотного колебательного режима в высокочастотный (б) (цвет онлайн)

Fig. 3. Time series $u_i(t)$ of analog FitzHugh–Nagumo generators at $a = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$, and $k = -0.05$, which show switching from a high-frequency oscillatory regime to a low-frequency one (a) and switching from a low-frequency oscillatory regime to a high-frequency one (b) (color online)

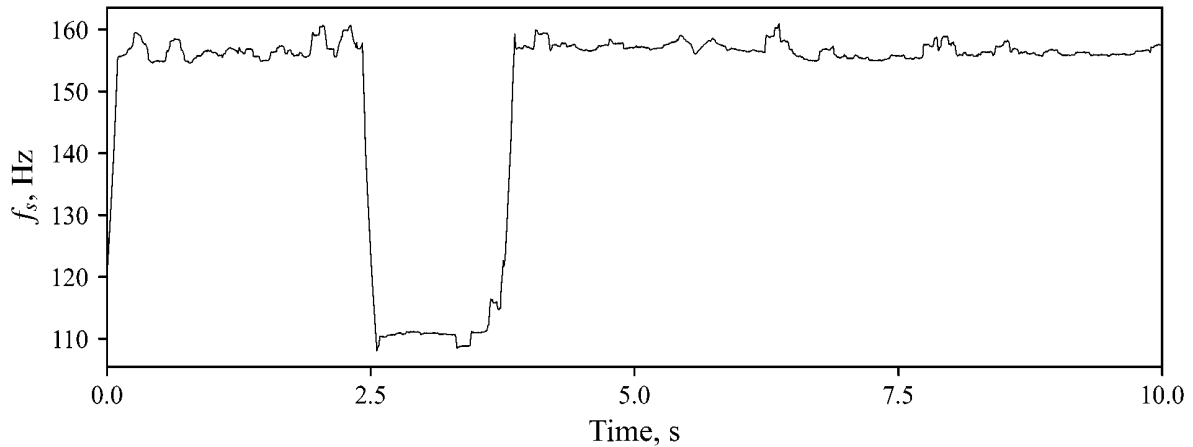


Рис. 4. Частота следования спайков у одного из аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо при $a = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$, $k = -0.05$
 Fig. 4. The frequency of spikes for one of the FitzHugh–Nagumo analog generators at $a = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$, and $k = -0.05$

Для исследования влияния неидентичности осцилляторов ФитцХью–Нагумо (2) на их коллективную динамику мы ввели расстройку осцилляторов по параметрам a и ε при численном моделировании. Величины параметров a и ε для осцилляторов ансамбля задавались случайным образом с гауссовской функцией распределения и принимали значения 1.05 ± 0.00115 (среднее значение $\pm$ стандартное отклонение) и 0.1 ± 0.00115 соответственно, где средние значения параметров соответствовали их экспериментальным значениям. Начальные условия для переменных $u_i(t)$ и $v_i(t)$ тоже задавались случайным образом с гауссовской функцией распределения и принимали значения -1.05 ± 0.001 и -0.62 ± 0.001 соответственно. Коэффициент связи $k = -0.05$ был таким же, как в экспериментальной установке.

Такая неидентичность осцилляторов позволила получить в численном эксперименте такие же колебательные режимы, как режимы, показанные на рис. 2, а и рис. 2, б, наблюдавшиеся в радиофизическом эксперименте. Кроме того, при расстройке параметров осцилляторов в численном эксперименте наблюдались переключения между колебательными режимами, аналогичные изображенным на рис. 3. Таким образом, результаты численного и реального экспериментов хорошо согласуются между собой и объясняются слабой неидентичностью элементов ансамбля.

2. Трехслойная сеть генераторов ФитцХью–Нагумо

Рассмотрим трехслойную сеть, два внешних слоя которой представляют собой кольца двусторонне диффузионно связанных генераторов ФитцХью–Нагумо (2), а один внутренний

слой представляет собой хаб в виде генератора ФитцХью–Нагумо, осуществляющий двустороннюю диффузионную связь между двумя кольцами. Структура исследуемой сети схематически изображена на рис. 5. Таким образом, сеть представляет собой содержащие по пять генераторов два кольца, связанных через один хаб.

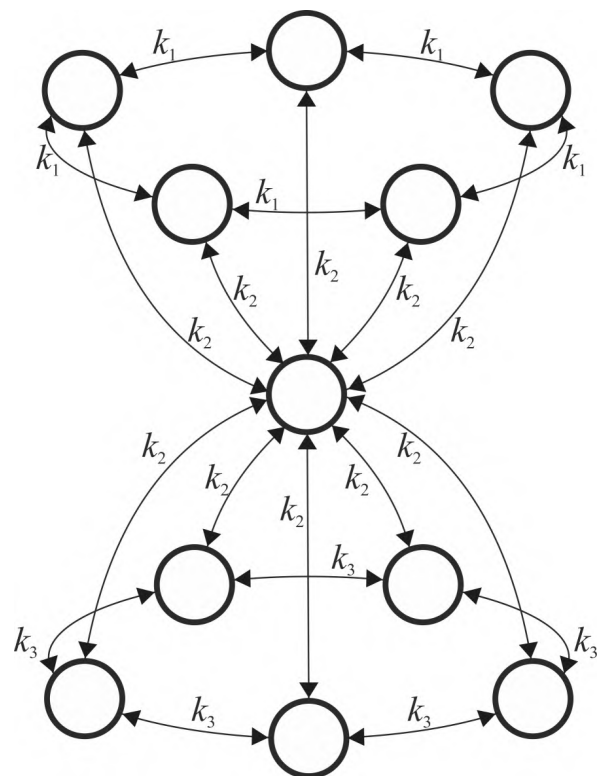


Рис. 5. Архитектура трехслойной сети связанных через хаб генераторов

Fig. 5. Architecture of a three-layer network of generators coupled via a hub

Динамика генераторов сети описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \epsilon \dot{u}_{i,1}(t) &= u_{i,1}(t) - \frac{u_{i,1}^3(t)}{3} - v_{i,1}(t) + \\ &+ k_1[(u_{i-1,1}(t) - u_{i,1}(t)) + (u_{i+1,1}(t) - u_{i,1}(t))] + \\ &+ k_2(u_{\text{hub},2}(t) - u_{i,1}(t)), \\ \dot{v}_{i,1}(t) &= u_{i,1}(t) + a, \\ \epsilon \dot{u}_{\text{hub},2}(t) &= u_{\text{hub},2}(t) - \frac{u_{\text{hub},2}^3(t)}{3} - v_{\text{hub},2}(t) + \\ &+ k_2 \sum_{i=1}^5 (u_{i,1}(t) - 2u_{\text{hub},2}(t) + u_{i,3}(t)), \\ \dot{v}_{\text{hub},2}(t) &= u_{\text{hub},2}(t) + a, \\ \epsilon \dot{u}_{i,3}(t) &= u_{i,3}(t) - \frac{u_{i,3}^3(t)}{3} - v_{i,3}(t) + \\ &+ k_3[(u_{i-1,3}(t) - u_{i,3}(t)) + (u_{i+1,3}(t) - u_{i,3}(t))] + \\ &+ k_2(u_{\text{hub},2}(t) - u_{i,3}(t)), \\ \dot{v}_{i,3}(t) &= u_{i,3}(t) + a, \end{aligned} \quad (3)$$

где переменные $u_{i,1}(t)$, $v_{i,1}(t)$ и $u_{i,3}(t)$, $v_{i,3}(t)$ описывают состояние i -го генератора первого и третьего слоя соответственно, $i = 1, \dots, 5$, граничные условия $u_{6,1}(t) = u_{1,1}(t)$ и $u_{6,3}(t) = u_{1,3}(t)$, переменные $u_{\text{hub},2}(t)$, $v_{\text{hub},2}(t)$ описывают состояние генератора-хаба во втором слое, k_1 и k_3 – коэффициенты связи между генераторами внутри первого и внутри третьего слоя соответственно, k_2 – коэффициент связи между хабом и генераторами в первом и третьем слоях сети. Система (3) исследовалась численно в работе [15]. Мы впервые провели экспериментальное исследование ансамблей радиотехнических моделей осцилляторов ФитцХью–Нагумо, связанных через хаб.

Параметры всех одиннадцати генераторов сети выбраны одинаковыми, такими же, как в предыдущем разделе: $a = 1.05$, $\epsilon = 0.1$. При этом в отсутствие связей в сети генерация спайков не наблюдается. Зафиксируем величину коэффициента связи между генераторами внутри первого слоя: $k_1 = -0.15$. При такой отталкивающей связи генераторы первого слоя демонстрируют спайковую активность. Величину коэффициента связи k_3 между генераторами внутри третьего слоя будем менять от -0.05 до -0.25 с шагом 0.05 . При таких значениях k_3 генераторы третьего слоя тоже демонстрируют спайковую активность в результате отталкивающего внутрислойного взаимодействия. Величину коэффициента связи k_2 между генератором-хабом и генераторами первого и третьего слоя будем менять от -0.05 до 0.05 с шагом 0.025 .

На рис. 6, а внутри каждой клетки на плоскости (k_3, k_2) приведены средние значения частоты f_1 следования спайков в генераторах

ФитцХью–Нагумо первого слоя (первого кольца). Цвет клетки на плоскости (k_3, k_2) задан в соответствии со шкалой значений f_1 , показанной справа от рисунка. Средняя частота f_2 спайковой активности второго слоя (хаба) показана на рис. 6, б. На рис. 6, в приведены средние значения частоты f_3 следования спайков в генераторах ФитцХью–Нагумо третьего слоя (второго кольца). На рис. 6, г приведены значения модуля разности средних частот спайковой активности генераторов первого кольца и генераторов второго кольца.

Как видно из рис. 6, а, при положительных значениях межслойной связи k_2 средняя частота спайковой активности генераторов первого кольца практически не зависит от величины внутрислойной связи k_3 между генераторами второго кольца и остается почти такой же, как в случае отсутствия связи с хабом ($k_2 = 0$). При отрицательных значениях межслойной связи изменение силы внутрислойной связи между генераторами второго кольца приводит к изменению частоты следования спайков в генераторах первого кольца, причем максимум частоты спайковой активности наблюдается при $k_3 = k_1 = -0.15$.

При $k_2 \geq 0$ хаб не демонстрирует колебаний при выбранном значении параметра a (см. рис. 6, б). При $k_2 < 0$ хаб демонстрирует спайки, средняя частота следования которых практически совпадает (кроме одной клетки $(-0.25; -0.025)$ на плоскости (k_3, k_2)) со средними частотами спайковой активности в генераторах первого и второго кольца, т. е. наблюдается частотная синхронизация колебаний генераторов трехслойной сети.

При $k_2 \geq 0$ генераторы второго кольца демонстрируют увеличение средней частоты спайков с увеличением (по модулю) силы отталкивающей связи k_3 (см. рис. 6, в) так же, как и в рассмотренном выше случае однослойной сети. Однако при $k_2 < 0$ такая монотонная зависимость f_3 от k_3 нарушается. В результате взаимодействия генераторов трех слоев сети их средние частоты синхронизируются, кроме одной клетки $(-0.25; -0.025)$ на плоскости (k_3, k_2) . То есть происходит удаленная синхронизация частот генерации спайков в двух кольцах, связанных между собой не напрямую, а через общий хаб. При $k_2 = -0.05$ максимум частоты спайковой активности генераторов второго кольца наблюдается при $k_3 = k_1 = -0.15$, так же, как и у генераторов первого кольца.

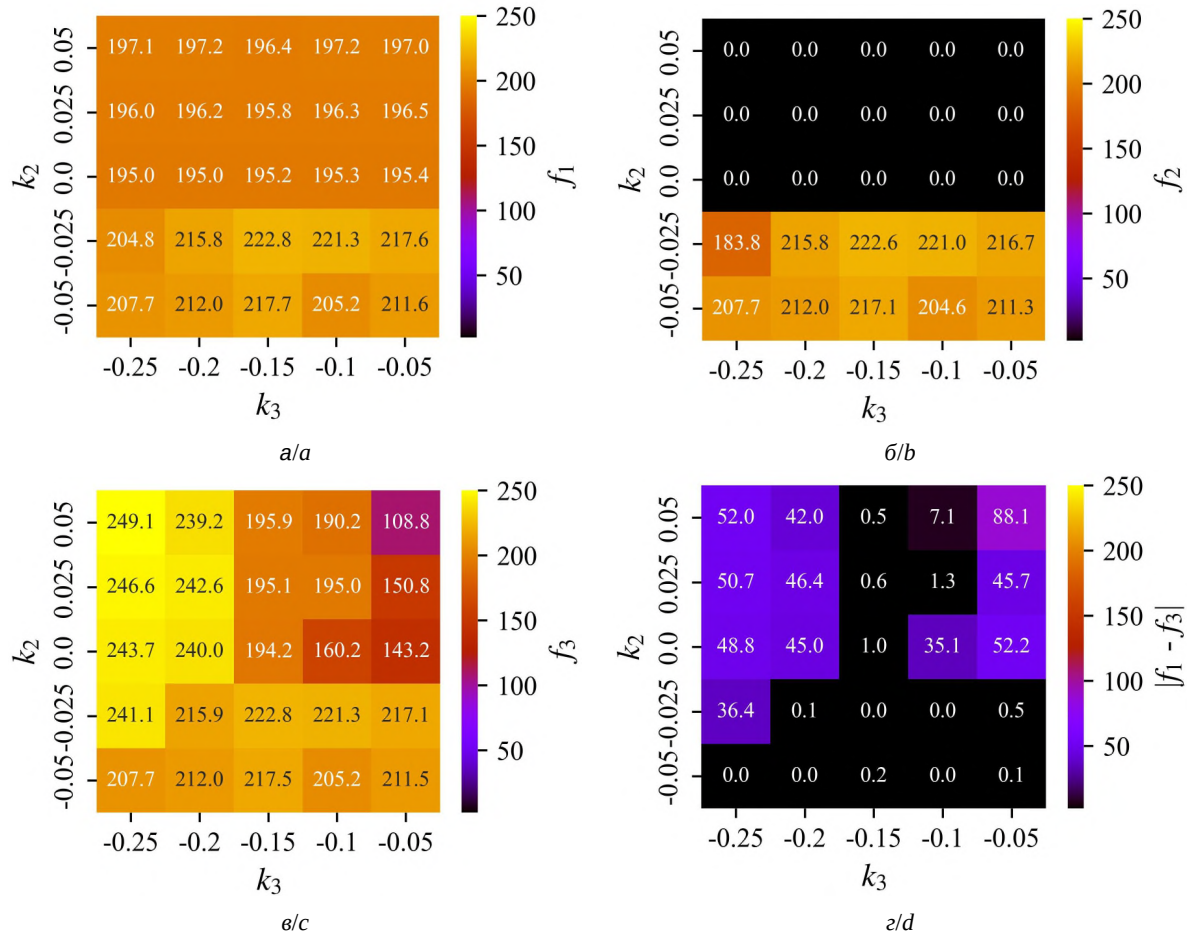


Рис. 6. Диаграммы средней частоты спайковой активности аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо первого кольца (а), хаба (б), второго кольца (в) и модуля разности средних частот следования спайков в генераторах первого и второго кольца (г) при $a = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$, $k_1 = -0.15$ (цвет онлайн)

Fig. 6. Diagrams of the average frequency of spiking activity of FitzHugh–Nagumo analog generators of the first ring (a), hub (b), second ring (c) and the absolute value of the difference of the average frequencies of spikes in the generators of the first and second ring (d) at $a = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$, and $k_1 = -0.15$ (color online)

Области частотной синхронизации генераторов первого и второго кольца на плоскости (k_3 , k_2) наглядно иллюстрирует рис. 6, г. Такая синхронизация частот имеет место при $k_2 = -0.05$ независимо от величины k_3 . В отсутствие межслойной связи ($k_2 = 0$), а также при ее положительных значениях генераторы первого и второго кольца имеют близкие средние частоты спайков при $k_3 = k_1 = -0.15$ (см. рис. 6, а). Полученные результаты находятся в хорошем качественном соответствии с результатами численных исследований, проведенных в работе [15] при других значениях управляющих параметров системы (3).

Частотную синхронизацию генераторов во всех трех слоях сети наглядно иллюстрирует рис. 7, на котором приведены экспериментальные временные реализации $u_i(t)$ всех

одиннадцати аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо трехслойной сети для случая $k_1 = -0.15$, $k_2 = -0.05$, $k_3 = -0.15$.

Коллективная динамика генераторов в первом кольце (рис. 7, а) и генераторов во втором кольце (рис. 7, в) практически одинакова, при этом колебательные режимы в обоих кольцах похожи на колебательные режимы, показанные на рис. 2, б для однослойной сети. Так же, как и на рис. 2, б, две пары генераторов демонстрируют синфазные спайки, и их временные реализации почти совпадают, но частота следования спайков на рис. 7 выше из-за более высоких по модулю значения отталкивающих связей.

Заключение

Проведено экспериментальное исследование коллективной динамики в ансамблях радио-

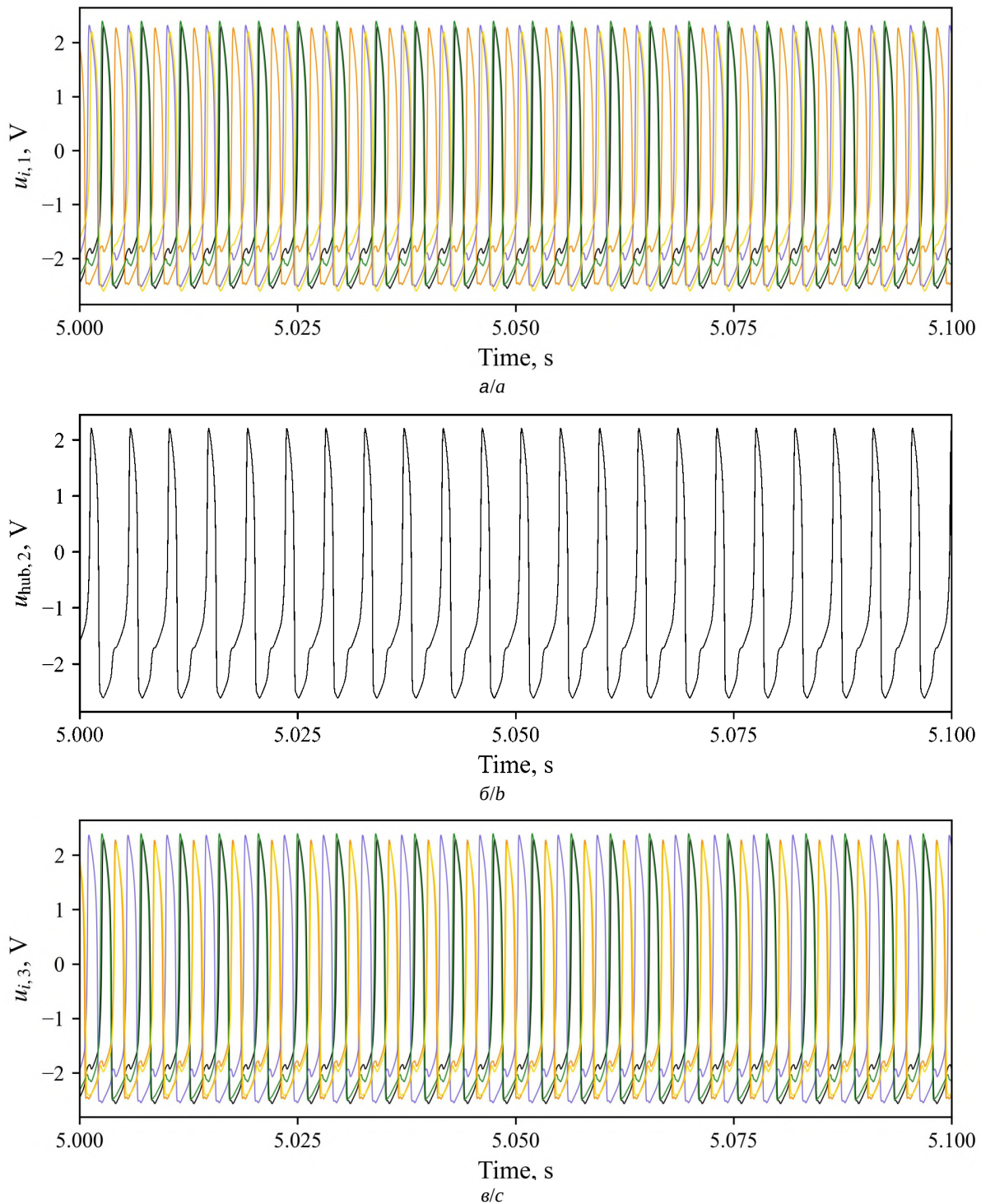


Рис. 7. Временные реализации $u_i(t)$ аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо первого кольца (а), хаба (б) и второго кольца (в) при $a = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$, $k_1 = -0.15$, $k_2 = -0.05$, $k_3 = -0.15$ (цвет онлайн)

Fig. 7. Time series $u_i(t)$ of analog FitzHugh–Nagumo generators in the first ring (a), hub (b), and second ring (c) at $a = 1.05$, $\varepsilon = 0.1$, $k_1 = -0.15$, $k_2 = -0.05$, and $k_3 = -0.15$ (color online)

технических моделей осцилляторов ФитцХью–Нагумо. Показано, что в кольце находящихся в состоянии покоя возбудимых генераторов ФитцХью–Нагумо введение отталкивающих

диффузионных связей между генераторами приводит к возникновению спайковой активности.

Обнаружено, что в отличие от численного моделирования динамики в кольце идентичных

осцилляторов ФитцХью–Нагумо в радиофизическом эксперименте можно наблюдать два разных колебательных режима при фиксированных значениях параметров возбудимых генераторов. Эти режимы отличаются частотой следования спайков и сдвигом фаз между колебаниями различных генераторов в кольце. Такие особенности коллективной динамики генераторов объясняются, по-видимому, тем, что аналоговые генераторы не являются абсолютно идентичными. Проведенные нами численные исследования связанных в кольцо слабо неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо показали хорошее соответствие полученных результатов с результатами натурного эксперимента. Было проведено большое количество запусков экспериментальной установки, а при численном моделировании анализировались 10000 ансамблей осцилляторов со случайной расстройкой по параметрам и начальным условиям. Отсутствие других видов колебательных режимов в ансамбле позволяет говорить об общности полученных результатов. Впервые показано существование переключений между колебательными режимами в исследуемой системе.

Коллективная динамика аналоговых генераторов ФитцХью–Нагумо впервые экспериментально исследована в трехслойной сети, состоящей из двух колец, связанных через общий хаб. Построены диаграммы средней частоты спайковой активности генераторов в каждом слое сети при изменении коэффициентов связи между генераторами второго кольца и между хабом и генераторами в обоих кольцах. Показано, что при отталкивающих связях генераторов внутри колец и отталкивающих межслойных связях (связях с хабом) возникает частотная синхронизация колебаний всех генераторов сети. При этом максимум частоты спайковой активности генераторов наблюдается в случаях, когда значения внутрислойной связи в первом и втором кольцах одинаковы.

Список литературы

1. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D. Complex networks: Structure and dynamics // *Phys. Rep.* 2006. Vol. 424. P. 175–308. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009>
2. Osipov G. V., Kurths J., Zhou C. Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin : Springer, 2007. 370 p.
3. Масленников О. В., Некоркин В. И. Адаптивные динамические сети // *УФН.* 2017. Т. 187. С. 745–756. <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.10.037902>
4. Albert R., Barabási A.-L. Statistical mechanics of complex networks // *Rev. Mod. Phys.* 2002. Vol. 74. Article number. 47. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.47>
5. van den Heuvel M. P., Sporns O. Network hubs in the human brain // *Trends in Cognitive Sciences.* 2013. Vol. 17. P. 683–696. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2013.09.012>
6. Mears D., Pollard H. B. Network science and the human brain: Using graph theory to understand the brain and one of its hubs, the amygdala, in health and disease // *J. Neurosci. Res.* 2016. Vol. 94. P. 590–605. <https://doi.org/10.1002/jnr.23705>
7. Храмов А. Е., Фролов Н. С., Максименко В. А., Куркин С. А., Казанцев В. Б., Писарчук А. Н. Функциональные сети головного мозга: от восстановления связей до динамической интеграции // *УФН.* 2021. Т. 191. С. 614–650. <https://doi.org/10.3367/UFNr.2020.06.038807>
8. Shepherd G. M. The Synaptic Organization of the Brain. Oxford : Oxford University Press, 2004. 719 p.
9. Muldoon S. F., Bassett D. S. Network and multilayer network approaches to understanding human brain dynamics // *Philosophy of Science.* 2016. Vol. 83. P. 710–720. <https://doi.org/10.1086/687857>
10. De Domenico M. Multilayer modeling and analysis of human brain networks // *Giga Science.* 2017. Vol. 6, iss. 5. Article number gix004. <https://doi.org/10.1093/gigascience/gix004>
11. Vaiana M., Muldoon S. F. Multilayer brain networks // *J. Nonlinear Sci.* 2020. Vol. 30. P. 2147–2169. <https://doi.org/10.1007/s00332-017-9436-8>
12. Majhi S., Perc M., Ghosh D. Chimera states in a multilayer network of coupled and uncoupled neurons // *Chaos.* 2017. Vol. 27, iss. 7. Article number 073109. <https://doi.org/10.1063/1.4993836>
13. Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Synchronization of chimera states in coupled networks of nonlinear chaotic oscillators // *Russ. J. Nonlinear Dyn.* 2018. Vol. 14, № 4. P. 419–433. <https://doi.org/10.20537/nd180401>
14. Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Synchronization scenarios of chimeras in multiplex networks // *Eur. Phys. J. Spec. Top.* 2018. Vol. 227. P. 1161–1171. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2018-800039-y>
15. Рыбалова Е. В., Богатенко Т. Р., Бух А. В., Вадивасова Т. Е. Роль связей, шумового и гармонического воздействий в колебательной активности сетей возбудимых осцилляторов ФитцХью–Нагумо // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Физика.* 2023. Т. 23, вып. 4. С. 294–306. <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-4-294-306>
16. Rabinovich M. I., Varona P., Selverston A. I., Abarbanel H. D. I. Dynamical principles in neuroscience // *Rev. Mod. Phys.* 2006. Vol. 78. Article number 1213. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.1213>
17. Дмитричев А. С., Касаткин Д. В., Клиньшов В. В., Кириллов С. Ю., Масленников О. В., Щапин Д. С.,

- Некоркин В. И. Нелинейные динамические модели нейронов : обзор // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2018. Т. 26, № 4. С. 5–58. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58>
18. Quiroga R. Q., Panzeri S. Principles of Neural Coding. Boca Raton : CRC Press, 2013. 664 p.
19. Lobov S. A., Chernyshov A. V., Krilova N. P., Shamshin M. O., Kazantsev V. B. Competitive learning in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier // Sensors. 2020. Vol. 20, iss. 2. Article number 500. <https://doi.org/10.3390/s20020500>
20. Yamazaki K., Vo-Ho V.-K., Bulsara D., Le N. Spiking neural networks and their applications: A review // Brain Sciences. 2022. Vol. 12, iss. 7. Article number 863. <https://doi.org/10.3390/brainsci12070863>
21. Dahlem M. A., Hiller G., Panchuk A., Schöll E. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems // Int. J. Bifurcat. Chaos. 2009. Vol. 19. P. 745–753. <https://doi.org/10.1142/S0218127409023111>
22. Shepelev I. A., Vadivasova T. E., Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction // Phys. Lett. A. 2017. Vol. 381. P. 1398–1404. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.02.034>
23. Shepelev I. A., Shamshin D. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E. Bifurcations of spatiotemporal structures in a medium of FitzHugh–Nagumo neurons with diffusive coupling // Chaos, Solitons and Fractals. 2017. Vol. 104. P. 153–160. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.08.009>
24. Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Hramov A. E. Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators // Nonlinear Dyn. 2019. Vol. 98. P. 735–748. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05224-x>
25. Plotnikov S. A., Fradkov A. L. On synchronization in heterogeneous FitzHugh–Nagumo networks // Chaos, Solitons and Fractals. 2019. Vol. 121. P. 85–91. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.02.006>
26. Korneev I. A., Semenov V. V., Slepnev A. V., Vadivasova T. E. The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh–Nagumo oscillators // Chaos, Solitons and Fractals. 2021. Vol. 147. Article number 110923. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110923>
27. Навроцкая Е. В., Курбако А. В., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Синхронизация ансамбля мемристивно связанных неидентичных осцилляторов ФитцХью–Нагумо // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2024. Т. 32, № 1. С. 96–110. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003085>
28. Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Сысоев И. В., Прохоров М. Д. Новый подход к экспериментальному исследованию больших ансамблей радиотехнических генераторов со сложными связями // Письма в ЖТФ. 2020. Т. 46, вып. 4. С. 26–29. <https://doi.org/10.21883/PJTf.2020.04.49046.18018>
29. Навроцкая Е. В., Кульминский Д. Д., Пономаренко В. И., Прохоров М. Д. Оценка параметров импульсного воздействия с помощью сети нейроподобных осцилляторов // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2022. Т. 30, № 4. С. 495–512. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512>

References

1. Boccaletti S., Latora V., Moreno Y., Chavez M., Hwang D. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys. Rep.*, 2006, vol. 424, pp. 175–308. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.10.009>
2. Osipov G. V., Kurths J., Zhou C. *Synchronization in Oscillatory Networks*. Berlin, Springer, 2007. 370 p.
3. Maslennikov O. V., Nekorkin V. I. Adaptive dynamical networks. *Phys.-Usp.*, 2017, vol. 60, pp. 694–704. <https://doi.org/10.3367/UFNe.2016.10.037902>
4. Albert R., Barabási A.-L. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 2002, vol. 74, article no. 47. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.74.47>
5. van den Heuvel M. P., Sporns O. Network hubs in the human brain. *Trends in Cognitive Sciences*, 2013, vol. 17, pp. 683–696. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2013.09.012>
6. Mears D., Pollard H. B. Network science and the human brain: Using graph theory to understand the brain and one of its hubs, the amygdala, in health and disease. *J. Neurosci. Res.*, 2016, vol. 94, pp. 590–605. <https://doi.org/10.1002/jnr.23705>
7. Hramov A. E., Frolov N. S., Maksimenko V. A., Kurkin S. A., Kazantsev V. B., Pisarchik A. N. Functional networks of the brain: From connectivity restoration to dynamic integration. *Phys.-Usp.*, 2021, vol. 64, pp. 584–616. <https://doi.org/10.3367/UFNe.2020.06.038807>
8. Shepherd G. M. *The Synaptic Organization of the Brain*. Oxford, Oxford University Press, 2004. 719 p.
9. Muldoon S. F., Bassett D. S. Network and multilayer network approaches to understanding human brain dynamics. *Philosophy of Science*, 2016, vol. 83, pp. 710–720. <https://doi.org/10.1086/687857>
10. De Domenico M. Multilayer modeling and analysis of human brain networks. *Giga Science*, 2017, vol. 6, iss. 5, article no. gix004. <https://doi.org/10.1093/gigascience/gix004>
11. Vaiana M., Muldoon S. F. Multilayer brain networks. *J. Nonlinear Sci.*, 2020, vol. 30, pp. 2147–2169. <https://doi.org/10.1007/s00332-017-9436-8>
12. Majhi S., Perc M., Ghosh D. Chimera states in a multilayer network of coupled and uncoupled neurons. *Chaos*, 2017, vol. 27, article no. 073109. <https://doi.org/10.1063/1.4993836>
13. Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. Synchronization of chimera states in coupled networks of nonlinear chaotic oscillators. *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, 2018, vol. 14, no. 4, pp. 419–433. <https://doi.org/10.20537/nd180401>
14. Sawicki J., Omelchenko I., Zakharova A., Schöll E. Synchronization scenarios of chimeras in multiplex

- networks. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, 2018, vol. 227, pp. 1161–1171. <https://doi.org/10.1140/epjst/e2018-800039-y>
15. Rybalova E. V., Bogatenko T. R., Bukh A. V., Vadivasova T. E. The role of coupling, noise and harmonic impact in oscillatory activity of an excitable FitzHugh–Nagumo oscillator network. *Izvestiya of Saratov University. Physics*, 2023, vol. 23, iss. 4, pp. 294–306 (in Russian). <https://doi.org/10.18500/1817-3020-2023-23-4-294-306>
16. Rabinovich M. I., Varona P., Selverston A. I., Abarbanel H. D. I. Dynamical principles in neuroscience. *Rev. Mod. Phys.*, 2006, vol. 78, article no. 1213. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.1213>
17. Dmitrichev A. S., Kasatkin D. V., Klinshov V. V., Kirillov S. Yu., Maslennikov O. V., Shchapin D. S., Nekorkin V. I. Nonlinear dynamical models of neurons : A review. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2018, vol. 26, no. 4, pp. 5–58. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2018-26-4-5-58>
18. Quiroga R. Q., Panzeri S. *Principles of Neural Coding*. Boca Raton, CRC Press, 2013. 664 p.
19. Lobov S. A., Chernyshov A. V., Krilova N. P., Shamshin M. O., Kazantsev V. B. Competitive learning in a spiking neural network: Towards an intelligent pattern classifier. *Sensors*, 2020, vol. 20, iss. 2, article no. 500. <https://doi.org/10.3390/s20020500>
20. Yamazaki K., Vo-Ho V.-K., Bulsara D., Le N. Spiking neural networks and their applications: A review. *Brain Sciences*, 2022, vol. 12, iss. 7, article no. 863. <https://doi.org/10.3390/brainsci12070863>
21. Dahlem M. A., Hiller G., Panchuk A., Schöll E. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 2009, vol. 19, pp. 745–753. <https://doi.org/10.1142/S0218127409023111>
22. Shepelev I. A., Vadivasova T. E., Bukh A. V., Strelkova G. I., Anishchenko V. S. New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction. *Phys. Lett. A*, 2017, vol. 381, pp. 1398–1404. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.02.034>
23. Shepelev I. A., Shamshin D. V., Strelkova G. I., Vadivasova T. E. Bifurcations of spatiotemporal structures in a medium of FitzHugh–Nagumo neurons with diffusive coupling. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2017, vol. 104, pp. 153–160. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.08.009>
24. Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D., Hramov A. E. Synchronization in ensembles of delay-coupled nonidentical neuronlike oscillators. *Nonlinear Dyn.*, 2019, vol. 98, pp. 735–748. <https://doi.org/10.1007/s11071-019-05224-x>
25. Plotnikov S. A., Fradkov A. L. On synchronization in heterogeneous FitzHugh–Nagumo networks. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2019, vol. 121, pp. 85–91. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2019.02.006>
26. Korneev I. A., Semenov V. V., Slepnev A. V., Vadivasova T. E. The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh–Nagumo oscillators. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2021, vol. 147, article no. 110923. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.110923>
27. Navrotskaya E. V., Kurbako A. V., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Synchronization of the ensemble of nonidentical FitzHugh–Nagumo oscillators with memristive couplings. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2024, vol. 32, no. 1, pp. 96–110. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-003085>
28. Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Sysoev I. V., Prokhorov M. D. New approach to the experimental study of large ensembles of radioengineering oscillators with complex couplings. *Tech. Phys. Lett.*, 2020, vol. 46, no. 2, pp. 175–178. <https://doi.org/10.1134/S1063785020020236>
29. Navrotskaya E. V., Kulminskiy D. D., Ponomarenko V. I., Prokhorov M. D. Estimation of impulse action parameters using a network of neuronlike oscillators. *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, 2022, vol. 30, no. 4, pp. 495–512. <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2022-30-4-495-512>

Поступила в редакцию 25.06.2024; одобрена после рецензирования 19.08.2024; принята к публикации 20.09.2024

The article was submitted 25.06.2024; approved after reviewing 19.08.2024; accepted for publication 20.09.2024