АСИМПТОТИКА МОМЕНТОВ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ ИЗБЫТОЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Острер Л. А.[1], Русев В. Н.[2], Скориков А. В.[3]
(*РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина, Москва*)

Функционирование современных сложных систем характеризуется различными видами рисков. Анализ данных таких систем показывает, что обычно наборы данных обладают характерным свойством: поведением распределения при больших значений аргумента, которое называется тяжелым хвостом Рассматриваются классы распределений с тяжелыми хвостами, которые имеют важные приложения в теории страховых случаев и теории надежности: распределения Гнеденко – Вейбулла; Бенктандера I, II; Бурра XII. .Асимптотика момента для функции превышения среднего значения и функции превышения дисперсии были получены специально для рассматриваемых распределений с тяжелыми хвостами и могут быть использованы для получения аппроксимации при больших значениях временной переменной. В работе подробно изучается оценка погрешности для асимптотического разложения функции среднего избытка распределения Гнеденко – Вейбулла при любых значениях параметра формы. Отмечено существенное различие в поведении оценок погрешности при значениях параметра формы меньших единицы, соответствующих тяжелому хвосту распределения Гнеденко – Вейбулла. В частности, найдены значения параметра формы, при которых разложения точны, т.е. имеют конечное число слагаемых. Для распределений Гнеденко – Вейбулла; Бенктандера I, II; Бурра XII доказаны асимптотические разложения производных остаточных моментов. Рассмотрено также описание поведения системы как области притяжения предельного экстремального состояния. Результаты статьи служат инструментом для приложений к теории риска, надежности и экстремальным событиям.

Ключевые слова: асимптотические разложения, средние избыточные функции, избыточная дисперсия, распределения с тяжелыми хвостами.

1. Введение

Существование рисков для жизни, собственности, окружающей среды характерно для функционирования современных больших систем. В работе Микош [16] отмечено, что данные о страховании от пожаров в Дании и данные о промышленных

[1] *Леонид Александрович Острер, ст. преподаватель* (*leonidostrer@gmail.com*).
[2] *Владимир Николаевич Русев, к.т.н., доцент* (*rusev.v@gubkin.ru*).
[3] *Александр Васильевич Скориков, к.ф.-м.н, доцент* (*skorikov.a@gubkin.ru*).

пожарах в США могут быть смоделированы с помощью распределений с тяжелыми хвостами, которые характеризуются более медленным убыванием при больших значениях аргумента, чем хвосты любого экспоненциального распределения. Другой характеристикой распределения с тяжелым хвостом является отсутствие конечного экспоненциального момента любого порядка. Для моделей распределений с тяжелыми хвостами характерен принцип единого большого скачка, который лежит в основе вероятностного поведения сумм независимых случайных величин: вероятность того, что сумма случайных величин может превышать некоторое большое значение x, совпадает с вероятностью того, что максимум одной из этих отдельных случайных величин также превышает x. Систематическое изложение теории распределений с тяжелыми хвостами дано в работах Румянцева, Морозова [3] и Фосс [10]. Избыточные распределения и избыточные моменты, введенные Эмбрехтс и др. [9], являются известным инструментом, используемым для характеристики пиков, превышающих пороговое значение. Пусть X – неотрицательная случайная величина с функцией распределения F с неограниченным носителем, т.е. $F(x) < 1$ для всех x. Рассмотрим случайную величину $X_t = (X - t \mid X > t)$ с функцией распределения F_t, которая называется функцией распределения превышения порогового значения t. Функция распределения F_t в теории надежности известна как функция распределения избыточного срока службы или остаточного ресурса. Функция $\overline{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ есть распределение хвоста. Математическое ожидание случайной величины X_t называется функцией среднего избытка (ME – mean excess function) X, т.е. является средней ожидаемой продолжительностью жизни в зависимости от возраста t или средним остаточным сроком службы (MRL – mean residual life) в теории надежности. Функция среднего избытка (ME) определяется формулой

(1) $$\mu(t) = E(X - t | X > t) = \int_t^{\infty} \overline{F}(x)dx / \overline{F}(t).$$

Заметим, что для распределений с тяжелыми хвостами обычно функции $\mu(t)$ стремятся к бесконечности при $t \to \infty$.

Важное значение при моделировании играет дисперсия. В работе Калашникова, Константинидиса [2] отмечено, что если дисперсия размеров выплат мала, то даже при наличии тяжелого хвоста функция риска будет как у распределений с конечными экспоненциальными моментами. Функция избыточной дисперсии (функция остаточной дисперсии) определяется по формуле

$$(2) \quad \sigma^2(t) = E(X_t^2) - \mu^2(t) = \frac{2}{\bar{F}(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) \cdot \mu(x)\, dx - \mu^2(t).$$

Функции превышения пороговых значений, функции среднего превышения играют фундаментальную роль в управлении рисками, актуарной науке, проблемах экстремальных значений, анализе надежности. Подробное обсуждение функции превышения среднего значения в работах Гош и Резник [12] и обзор MRL см. в статье Банджевич [7]. В статье Русева, Скорикова [4] найдены асимптотики функции риска в случае выплат для известных стандартных распределений с тяжелыми хвостами. Приложение MRL к надежности системы «скважина – насос» дано в статье авторов [1]. Главные члены асимптотического разложения функций среднего избытка для основных стандартных распределений актуарной теории можно увидеть в книге Эмбрехтс и др. [9].

Целью настоящего исследования является уточнение асимптотических разложений функций среднего избытка и избыточной дисперсии для некоторых известных распределений. Также исследуются скорости увеличения или уменьшения средних избыточных функций и избыточных дисперсий этих распределений при увеличении порогового значения t, а также их выпуклость или вогнутость.

2. Распределение Гнеденко – Вейбулла

2.1. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МОМЕНТОВ

Двухпараметрическое распределение Гнеденко – Вейбулла с хвостом

$$(3) \quad \bar{F}(t) = e^{-(\alpha t)^\beta}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0,$$

является одним из наиболее широко применяемых распределений для анализа времени до отказа оборудования в теории надежности. Наиболее полной книгой по распределению Гнеденко – Вейбулла является справочник Ринне [18], в котором дано описание истории развития распределения в статистической теории и прикладной статистике. Распределение Гнеденко – Вейбулла является распределением с тяжелым хвостом при значениях параметра формы в интервале ($0 < \beta < 1$). Асимптотические разложения моментов, данные авторами ранее [20], имеют вид

$$(4)\quad \mu(t) = \frac{t}{\beta(\alpha t)^{\beta}} \times \left(1 + \frac{1-\beta}{\beta(\alpha t)^{\beta}} + \frac{(1-\beta)(1-2\beta)}{\beta^2(\alpha t)^{2\beta}} + o\left(\frac{1}{t^{2\beta}}\right)\right),$$

$t \to \infty$;

$$(5)\quad \sigma^2(t) = \frac{1}{(\beta\alpha^{\beta}t^{(\beta-1)})^2} \times \left(1 + \frac{4(1-\beta)}{\beta(\alpha t)^{\beta}} + \frac{(1-\beta)(11-17\beta)}{\beta^2(\alpha t)^{2\beta}} + o\left(\frac{1}{t^{2\beta}}\right)\right),$$

$t \to \infty$.

Получим асимптотическое разложение производных. Заметим, что асимптотическое разложение производных проясняет зависимость остаточных моментов от параметров распределения. В частности, из доказанной ниже формулы (8) следует, что значение параметра, равное 0,5, является критическим для скорости изменения распределения с тяжелым хвостом. Отметим, что избыточные функции распределений выражаются обычно через специальные функции. Для изучения таких функций используются асимптотические разложения. Возникает проблема дифференцирования асимптотического разложения поскольку условия дифференцирования асимптотического разложения не всегда выполняются (например, см. Эрдейи [5]). Результат Гупта [14] позволяет обойти эту трудность и заменить операцию дифференцирования асимптотики моментов алгебраическими операциями для обширного класса распределений:

$$(6)\quad \frac{d\mu(t)}{dt} = -\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)} \cdot \mu(t) - 1;$$

$$(7)\quad \frac{d\sigma^2(t)}{dt} = -\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)}\left[\sigma^2(t) - \mu^2(t)\right].$$

Теорема 1. Пусть X – случайная величина, которая имеет распределение Гнеденко – Вейбулла, тогда

(8) $$\frac{d\mu}{dt}=\frac{(1-\beta)}{\beta(\alpha t)^{\beta}}\left[1+\frac{(1-2\beta)}{\beta(\alpha t)^{\beta}}+o\left(\frac{1}{t^{\beta}}\right)\right],\ t\to\infty;$$

(9) $$\frac{d\sigma^2(t)}{dt}=\frac{2(1-\beta)}{\beta^2}\cdot\frac{t^{1-2\beta}}{\alpha^{2\beta}}\cdot\left[1+\frac{2(2-3\beta)}{\beta(\alpha t)^{\beta}}+o\left(\frac{1}{t^{\beta}}\right)\right],\ t\to\infty.$$

Доказательство. Подставив функции из (3), (4) в (6), получим

$$\frac{d\mu(t)}{dt}=\alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1}\cdot\frac{1}{\alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1}}\left[1+\frac{(1-\beta)}{\beta(\alpha t)^{\beta}}+\frac{(1-\beta)(1-2\beta)}{\beta^2(\alpha t)^{2\beta}}+o\left(\frac{1}{t^{2\beta}}\right)\right]-1,$$

что дает асимптотическое разложение (8). Производную дисперсии можно вычислить по формуле

$$\frac{d\sigma^2(t)}{dt}=(\alpha\beta)(\alpha t)^{\beta-1}\left[\sigma^2(t)-\mu^2(t)\right],$$

где

$$\mu^2(t)=\frac{t^2}{\beta^2(\alpha t)^{2\beta}}\left[1+\frac{2(1-\beta)}{\beta(\alpha t)^{\beta}}+\frac{(1-\beta)(3-5\beta)}{\beta^2(\alpha t)^{2\beta}}+o\left(\frac{1}{t^{2\beta}}\right)\right],t\to\infty.$$

После некоторых преобразований получаем:

$$\sigma^2-\mu^2=\frac{2(1-\beta)\cdot t^2}{\beta^3(\alpha t)^{3\beta}}\cdot\left[1+\frac{2(2-3\beta)}{\beta(\alpha t)^{\beta}}+o\left(\frac{1}{t^{\beta}}\right)\right],t\to\infty.$$

Из формулы (7) и функции распределения (3) имеем

$$\frac{d\sigma^2(t)}{dt}=(\alpha\beta)\cdot(\alpha t)^{\beta-1}\cdot\frac{2(1-\beta)\cdot t^2}{\beta^3(\alpha t)^{3\beta}}\cdot\left[1+\frac{2(2-3\beta)}{\beta(\alpha t)^{\beta}}+o\left(\frac{1}{t^{\beta}}\right)\right],t\to\infty;$$

$$\frac{d\sigma^2(t)}{dt}=\frac{2(1-\beta)}{\beta^2}\cdot\frac{t^{1-2\beta}}{\alpha^{2\beta}}\cdot\left[1+\frac{2(2-3\beta)}{\beta(\alpha t)^{\beta}}+o\left(\frac{1}{t^{\beta}}\right)\right],t\to\infty.$$

Следствие. Таким образом, при больших значениях t имеем для тяжелых хвостов:

(10) $$\frac{d\mu(t)}{dt}>0\Rightarrow\mu(t)\uparrow;\ \frac{d\mu(t)}{dt}\downarrow 0,\ 0<\beta<1;$$

(11) $$\frac{d\sigma^2(t)}{dt}>0\Rightarrow\sigma^2(t)\uparrow,\ 0<\beta<1.$$

Однако поведение производной существенно зависит от порогового значения параметра формы: β = 1/2:

(12) $\dfrac{d\sigma^2(t)}{dt} \sim c^2 t^{\varepsilon},\ \varepsilon > 0,\quad \dfrac{d\sigma^2(t)}{dt}\uparrow,\ 0 < \beta < \dfrac{1}{2};$

(13) $\dfrac{d\sigma^2(t)}{dt} \sim c^2 t^{-\varepsilon},\ \varepsilon > 0,\ \dfrac{d\sigma^2(t)}{dt}\downarrow,\ \dfrac{1}{2} < \beta < 1;$

(14) $\dfrac{d\sigma^2(t)}{dt} = \dfrac{4}{\alpha}\left[1 + \dfrac{1{\cdot}2}{\sqrt{(\alpha t)}} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\right],\ \beta = \dfrac{1}{2}.$

2.2. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Получим оценку погрешности асимптотического разложения функции среднего избытка распределения Гнеденко – Вейбулла для любого n. Представим хвост распределения в виде

(15) $\bar{F}(x) = -\dfrac{x^{1-\beta}}{\alpha^{\beta}\cdot\beta}\cdot\dfrac{d\bar{F}(x)}{dx}.$

Преобразуем интеграл $\mu(t)$ по частям:

$$\mu(t) = \frac{1}{\bar{F}(t)}\int_t^{+\infty}\bar{F}(x)dx = \frac{1}{\bar{F}(t)}\int_t^{+\infty}\left[-\frac{x^{1-\beta}}{\alpha^{\beta}\cdot\beta}\right]d\bar{F}(x) =$$

$$= \frac{1}{\bar{F}(t)}\left\{\frac{t^{1-\beta}\bar{F}(t)}{\alpha^{\beta}\cdot\beta} + \int_t^{+\infty}\frac{(1-\beta)x^{-\beta}}{\alpha^{\beta}\cdot\beta}\bar{F}(x)dx\right\}.$$

Учитывая (15), имеем

(16) $\mu(t) = \dfrac{t^{1-\beta}}{(\alpha^{\beta}\cdot\beta)} - \dfrac{1}{\bar{F}(t)}\cdot\dfrac{(1-\beta)}{(\alpha^{\beta}\cdot\beta)^2}\displaystyle\int_t^{+\infty}x^{1-2\beta}d\bar{F}(x).$

Обозначим

(17) $I_k(t) = \dfrac{1}{\bar{F}(t)}\displaystyle\int_t^{+\infty}\left[-\dfrac{x^{1-k\beta}}{(\alpha^{\beta}\cdot\beta)^k}\right]d\bar{F}(x).$

Формула (16) принимает вид

(18) $\mu(t) = I_1(t) = \dfrac{t^{1-\beta}}{(\alpha^{\beta}\cdot\beta)} + (1-\beta)I_2(t).$

Аналогичным образом получим из (17) рекуррентную формулу

(19) $$I_k(t)=\frac{t^{1-k\beta}}{(\alpha^\beta\cdot\beta)^k}+(1-k\beta)I_{k+1}(t)\,.$$

Подстановка в (18) даёт

(20) $$\mu(t)=\frac{t^{1-\beta}}{(\alpha^\beta\cdot\beta)}+(1-\beta)\left[\frac{t^{1-2\beta}}{(\alpha^\beta\cdot\beta)^2}+(1-2\beta)I_3(t)\right].$$

Дальнейшие итерации $I_k(t)$ дают точное разложение $\mu(t)$ по степенным функциям для любых t:

(21) $$\begin{gathered}\mu(t)=\frac{t^{1-\beta}}{(\alpha^\beta\cdot\beta)}+(1-\beta)\frac{t^{1-2\beta}}{(\alpha^\beta\cdot\beta)^2}+(1-\beta)(1-2\beta)\frac{t^{1-3\beta}}{(\alpha^\beta\cdot\beta)^3}+\ldots\\+(1-\beta)(1-2\beta)(1-3\beta)\ldots(1-n\beta)\times\\\times\left[\frac{t^{1-(n+1)\beta}}{(\alpha^\beta\cdot\beta)^{n+1}}+\left(1-(n+1)\beta\right)I_{n+2}(t)\right].\end{gathered}$$

Или, обозначив степенную функцию через

$$z(t)=t^{-\beta}\,/\,(\alpha^\beta\cdot\beta),$$

равенство (21) перепишем в виде

(22) $$\begin{gathered}\mu(t)=t\cdot z(t)\cdot\Big[1+(1-\beta)z+1-\beta(1-2\beta)z^2+\\+1-\beta(1-2\beta)(1-3\beta)z^3+\ldots\\+1-\beta(1-2\beta)\ldots(1-n\beta)z^n\Big]+R_n(t).\end{gathered}$$

Остаточный член:

$$R_n(t)=\prod_{k=1}^{n+1}(1-k\beta)\cdot I_{n+2}(t).$$

Подставим выражение $I_{n+2}(t)$ в форме интеграла (17):

(23) $$R_n(t)=\prod_{k=1}^{n+1}\left(1-k\beta\right)\cdot\frac{1}{\overline{F}(t)}\int_t^{+\infty}\left[-\frac{x^{1-(n+2)\beta}}{\left(\alpha^\beta\cdot\beta\right)^{n+2}}\right]d\overline{F}\left(x\right).$$

Если отбросить остаточный член в формуле (22), то получим приближённое представление $\mu(t)$:

(24) $$\begin{gathered}\mu(t)\approx t\cdot z(t)\cdot\Big[1+(1-\beta)z+(1-\beta)(1-2\beta)z^2+\\+(1-\beta)(1-2\beta)(1-2\beta)z^3+\ldots+(1-\beta)(1-2\beta)\ldots(1-n\beta)z^n\Big]\end{gathered}$$

с погрешностью

$$\Delta_n = \left|R_n\left(t\right)\right|.$$

При значениях параметра формы $\beta > 1$ модуль подынтегральной степенной функции убывает, и оценка остаточного члена принимает простой вид:

$$(25)\quad \left|R_n(t)\right| \le \prod_{k=1}^{n+1}(k\beta - 1)\cdot \frac{t^{1-(n+2)\beta}}{(\alpha^{\beta}\cdot\beta)^{n+2}}.$$

Число членов в формуле (24) (при любом значении β) надо выбирать так, чтобы последующее слагаемое по модулю было меньше предыдущего. В частности,

$$\delta_n(t) = \left|\frac{R_n(t)}{u_n(t)}\right| \le \frac{\left|1-(n+1)\beta\right|}{\beta}(\alpha t)^{-\beta} = \left(n+1-\frac{1}{\beta}\right)(\alpha t)^{-\beta} < 1$$

при достаточно больших допустимых αt, т.е. погрешность приближения должна быть меньше последнего учтённого слагаемого.

Более сложным является случай $0 < \beta < 1$. Отметим, что в формуле (22) остаточный член исчезает при

$$(26)\quad \beta = \frac{1}{n+1},\ n = 1, 2, \ldots$$

При таких β формула (22) даёт представление $\mu(t)$ в виде конечной суммы степенных функций.

Проиллюстрируем алгоритм оценки погрешности на примере $1/2 < \beta < 1$. Положим в формулах (21), (23) $\beta = ½ + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1/2$. Получим, ограничившись для определённости тремя явно выписанными членами,

$$(27)\quad \mu(t) = \frac{t^{1/2-\varepsilon}}{(\alpha^{\beta}\cdot\beta)} + \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\frac{t^{-2\varepsilon}}{(\alpha^{\beta}\cdot\beta)^2} + \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\left(-2\varepsilon\right)\frac{t^{-\frac{1}{2}-3\varepsilon}}{(\alpha^{\beta}\cdot\beta)^3} + R_3(t).$$

Из монотонного убывания подынтегральной функции в оценке R_3 вытекает оценка погрешности:

$$|R_3(t)| \le \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)(2\varepsilon)\left(\frac{1}{2}+3\varepsilon\right)\frac{1}{\overline{F}(t)}\int_t^\infty \frac{x^{1-4\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}}{(\alpha^\beta\cdot\beta)}d\overline{F}(x) \le \tag{28}$$

$$\le \left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)(2\varepsilon)\left(\frac{1}{2}+3\varepsilon\right)\frac{t^{-1-4\varepsilon}}{\alpha^\beta\cdot\beta^4}.$$

При достаточно больших (αt) отношение

$$\delta_3 = \left|\frac{R_3(t)}{u_3(t)}\right| \le \frac{\frac{1}{2}+3\varepsilon}{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\alpha t)^{-\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)}$$ меньше 1.

2.3. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ В МОДЕЛИ ГНЕДЕНКО − ВЕЙБУЛЛА, ПОСТРОЕННОЙ ПО ДАННЫМ ОТКАЗОВ ПОГРУЖНОГО ОБОРУДОВАНИЯ

По данным отказов погружного оборудования в работе [1] было получено, что время работы до отказа системы «скважина − насос» имеет распределение Гнеденко − Вейбулла с параметрами $\alpha = 0{,}014$; $\beta = 1{,}49$. Для выбора необходимого числа членов асимптотического разложения остаточного времени жизни $\mu(t)$ воспользуемся условием

$$\delta_n(t) = \left|\frac{R_n(t)}{u_n(t)}\right| < 1$$

и построим графики отношений $\delta_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ (рис. 1).

Вероятность безотказной работы системы «скважина − насос» в течение времени более чем 200 суток при полученных значениях параметров распределения меньше 1%. Поэтому выбор числа слагаемых в асимптотическом разложении и соответствующего номера n остаточного члена R_n(t) зависит от выбора допустимого времени t эксплуатации установки. Оценки погрешностей при трех и четырех слагаемых в разложении можно не рассматривать, так как условия $\delta_2(t) < 1$, $\delta_3(t) < 1$, которые соответствуют трем и четырем слагаемым, выполняются при $t > 125$ и $t > 160$ соответственно. Вероятности безотказной работы равны $P(125) = 0{,}009$ и $P(160) = 0{,}03$, т.е. число проработавших установок в первом случае не превосходит 9%, во втором – 3%. Рассмотрим оценки погрешности при выборе одного или двух слагаемых в асимптотическом разложении $\mu(t)$.

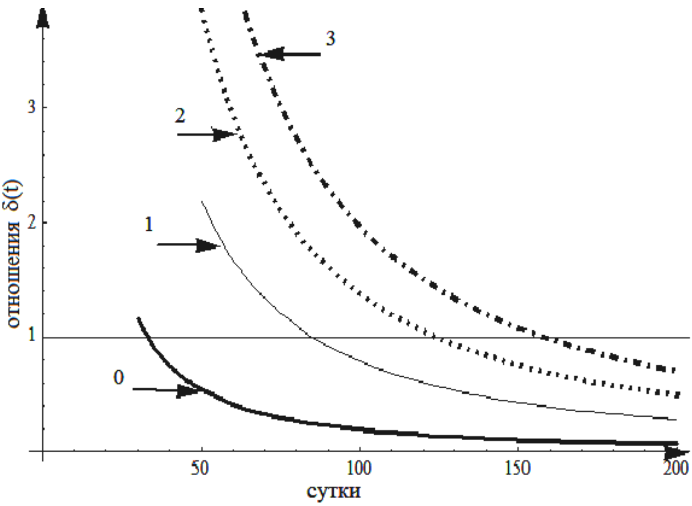

Рис. 1. Графики отношений $\delta_0(t)$, $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$, $\delta_3(t)$ (*обозначены через 0,1,2,3 соответственно*)

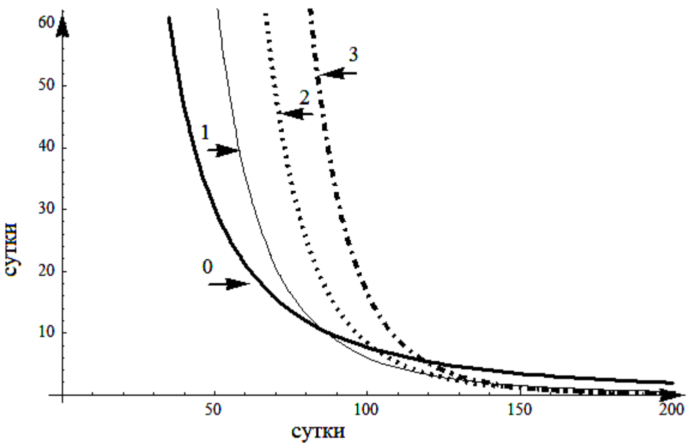

Рис. 2. Графики погрешностей для остаточных членов $R_0(t)$, $R_1(t)$, $R_2(t)$, $R_3(t)$ (*обозначены через 0, 1, 2, 3 соответственно*)

Минимальное допустимое время при выборе одного слагаемого в формуле (24) асимптотического разложения с остаточным членом $R_0(t)$, согласно графику на рис. 1, можно взять 34 суток. Этому времени соответствует погрешность 64 суток. При выборе двух слагаемых с остаточным членом $R_0(t)$, при минимальном допустимом времени 85 суток получаем погрешность в 10 суток. Отметим, что нулевой член разложения t дает такую же погрешность, так как графики пересекаются в этой точке. Однако при $t > 85$ разложение с двумя слагаемыми дает меньшую погрешность. Таким образом, асимптотическое разложение с двумя слагаемыми – рекомендуемый выбор в формуле (24) для модели Гнеденко – Вейбулла времени работы системы «скважина – насос».

3. Распределение Бенктандера типа I

Помимо распределения Гнеденко – Вейбулла, для моделирования в страховании используются важные распределения, такие как распределения Бенктандера I и II. Бенктандер определил эти распределения для моделирования крупных убытков в актуарной науке. Теоретически предсказанные размеры требований с помощью распределений Бенктандера I и II типов согласуются со статистическими данными о размере требований в области актуарных наук.

Хвост распределения Бенктандера типа I имеет вид

$$(29)\quad 1 - F(x) = \left(1 + 2\frac{\beta}{\alpha}\ln x\right) e^{-\beta(\ln x)^2 - (\alpha+1)\ln x},\ \alpha > 0,\ \beta > 0,\ x > 1.$$

Распределение Бенктандера типа I аналогично логнормальному распределению, и известна функция среднего избытка (см. таблицу 3.4.7 в книге [9]):

$$(30)\quad \mu(t) = \frac{t}{2\beta \ln t + \alpha}.$$

Получим асимптотическое разложение дисперсии.

Теорема 2. Для распределения Бенктандера типа I справедливы следующие асимптотические разложения дисперсии и её производной:

(31)
$$\sigma^2(e) = \frac{t^2}{(2\beta\ln t+\alpha)(2\beta\ln t+\alpha-1)}\times$$
$$\times\left[1+\frac{1}{2\beta\ln t+\alpha}+o\left(\frac{1}{\ln t}\right)\right], t\to\infty;$$

(32) $$\frac{d\sigma^2(e)}{dt} = \frac{2t}{(2\beta\ln t+\alpha)^2}\left[1+o(1)\right]; \quad t\to\infty.$$

Доказательство. Подставим в интеграл формулы (2) функцию среднего избытка (30) и хвост распределения (29):

$$I = \int_t^{+\infty}\bar{F}(x)\mu(x)dx = \frac{1}{\alpha}\int_t^{+\infty} e^{-\alpha\left[\frac{\beta}{\alpha}\ln^2 x+\ln x\right]}dx.$$

После замены

$$\xi(t) = \sqrt{\beta}\left(\ln t+\frac{(\alpha-1)}{2\beta}\right)$$

получаем представление в виде интеграла Лапласа:

$$I = \frac{e^{\frac{(\alpha-1)^2}{4\beta}}}{\alpha\sqrt{\beta}}\int_{\xi(t)}^{+\infty} e^{-\xi^2}d\xi.$$

Далее используем асимптотическое разложение этого интеграла

$$I(t) = \frac{e^{(\alpha-1)^2/4\beta}}{\alpha\sqrt{\beta}}e^{-\xi^2(t)}\cdot\frac{1}{2\xi(t)}\left[1-\frac{1}{(2\xi^2)}+\frac{1\cdot3}{(2\xi^2)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2\xi^2)^3}+\cdots\right], \xi\to\infty.$$

Таким образом,

(33) $$\sigma^2(t) = Z(t)\left[1-\frac{1}{(2\xi^2)}+\frac{1\cdot3}{(2\xi^2)^2}-\frac{1\cdot3\cdot5}{(2\xi^2)^3}+\cdots\right]-\frac{t^2}{(2\beta\ln t+\alpha)^2},$$

где

$$Z(t) = \frac{2t^2}{(2\beta\ln t+\alpha)(2\beta\ln t+\alpha-1)}, \quad \xi^2(t) = \frac{1}{4\beta}(2\beta\ln t+(\alpha-1))^2.$$

Главный член асимптотического разложения (33) имеет вид

$$U(t) = Z(t)-\frac{t^2}{(2\beta\ln t+\alpha)^2} =$$

$$(34)\quad = \frac{t^2}{(2\beta\ln t+\alpha)}\left[\frac{2}{(2\beta\ln t+(\alpha-1))} - \frac{1}{(2\beta\ln t+\alpha)}\right] =$$

$$= \frac{t^2}{(2\beta\ln t+\alpha)(2\beta\ln t+\alpha-1)}\left[1+\frac{1}{2\beta\ln t+\alpha}\right].$$

Отсюда следует (31).

Для вывода асимптотического разложения (32) используется представление

$$(35)\quad \frac{d\sigma^2(t)}{dt} = -\frac{d\ln\bar{F}(t)}{dt}\left[\sigma^2(t)-\mu^2(t)\right].$$

Имеем для хвоста распределения Бенктандера типа I и производной

$$\ln\bar{F}(t) = \ln\left(1+2\frac{\beta}{\alpha}\ln t\right) - \left[\beta\ln^2 t+(\alpha+1)\ln t\right];$$

$$\frac{d\ln\bar{F}(t)}{dt} = \left\{\frac{2\frac{\beta}{\alpha}}{1+2\frac{\beta}{\alpha}\ln t} - \left[2\beta\ln t+(\alpha+1)\right]\right\}\cdot\frac{1}{t};$$

$$\frac{d\ln\bar{F}(t)}{dt} = -\frac{1}{t}\left\{2\beta\ln t+(\alpha-1)+2-\frac{1}{\ln t}+o\left(\frac{1}{\ln t}\right)\right\}, \quad t\to\infty.$$

Асимптотическое разложение второго множителя (35) можно получить, используя (33). Отсюда главный член асимптотического разложения (35) имеет вид

$$A(t) = Z(t) - 2\mu^2(t) = \frac{2t^2}{(2\beta\ln t+\alpha)^2(2\beta\ln t+\alpha-1)}.$$

Тогда (32) следует из (35) путем замены множителей асимптотическими разложениями, приведенными выше.

Следствие. Для распределения Бенктандера типа I ($0 < \alpha$; $0 < \beta$) с тяжелым хвостом при $t \to \infty$ избыточная дисперсия увеличивается и скорость роста увеличивается.

4. Распределение Бенктандера типа II

Рассмотрим распределение Бенктандера типа II с хвостом распределения

(36) $\bar{F}(t) = e^{\frac{\alpha}{\beta}} t^{\beta-1} \cdot e^{-\frac{\alpha}{\beta}t^{\beta}} \quad \alpha > 0, 0 < \beta < 1, t > 1.$

Это распределение близко к распределению Гнеденко –Вейбулла. Функция среднего избытка Бенктандера типа II имеет вид

(37) $\mu(t) = \dfrac{1}{\alpha} t^{1-\beta},$

с точностью до множителя $\dfrac{1}{\beta\alpha^{\beta-1}}$, совпадающий с главным членом разложения $\mu(t)$ распределения Гнеденко – Вейбулла. Асимптотическое разложение избыточной дисперсии для Бенктандера типа II

(38) $\sigma^2(t) = \dfrac{t^{2-2\beta}}{\alpha^2} \times \left(1 - 2\dfrac{(\beta-1)}{\alpha} t^{-\beta} + 2\dfrac{(\beta-1)(2\beta-1)}{\alpha^2} t^{-2\beta} + o(t^{-2\beta})\right)$

найдено авторами ранее и опубликовано в материалах конференции [21].

Получим асимптотическое разложение производной избыточной дисперсии.

Теорема 3. Имеет место следующее асимптотическое разложение производной избыточной дисперсии для распределения Бенктандера типа II:

(39) $\dfrac{d\sigma^2(t)}{dt} = \dfrac{2(1-\beta)}{\alpha^2} \cdot t^{1-2\beta} \left[1 + \dfrac{(2-3\beta)}{\alpha} \cdot \dfrac{1}{t^{\beta}} + o\left(\dfrac{1}{t^{\beta}}\right)\right], \quad t \to \infty,$

$\alpha > 0, 0 < \beta < 1, t > 1$.

Доказательство. Для доказательства (39) используем представление (35) производной дисперсии. Имеем

$$\frac{\bar{F}'(t)}{\bar{F}(t)} = -\alpha t^{\beta-1} \left[1 + \frac{(1-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{1}{t^{\beta}}\right];$$

$$\sigma^2(t) - \mu^2(t) = \frac{2(1-\beta)}{\alpha^3} \cdot t^{2-3\beta} \left[1 + \frac{(1-2\beta)}{\alpha} \cdot \frac{1}{t^{\beta}} + o\left(\frac{1}{t^{\beta}}\right)\right], \quad t \to \infty.$$

Подставив в (35), получаем

$$\frac{d\sigma^2(t)}{dt} = \frac{2(1-\beta)}{\alpha^2} \cdot t^{1-2\beta} \left[1 + \frac{(1-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{1}{t^\beta}\right] \cdot \left[1 + \frac{(1-2\beta)}{\alpha} \cdot \frac{1}{t^\beta} + o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)\right], t \to \infty;$$

$$\frac{d\sigma^2(t)}{dt} = \frac{2(1-\beta)}{\alpha^2} \cdot t^{1-2\beta} \left[1 + \frac{(2-3\beta)}{\alpha} \cdot \frac{1}{t^\beta} + o\left(\frac{1}{t^\beta}\right)\right], \ t \to \infty.$$

Следствие. Для распределения Бенктандера II типа асимптотическое поведение избыточной дисперсии аналогично поведению избыточной дисперсии распределения Гнеденко – Вейбулла.

5. Распределение Бурра типа XII

Хвост распределения Бурра типа XII задается формулой

(40) $\bar{F}(t) = \dfrac{1}{(1+t^c)^k}, t \ge 0, c > 0, k > 0.$

Бурр ввёл двенадцать различных видов распределений, см. [19]. В настоящей статье рассматривается одно из этих распределений, которое называется «Бурра типа XII». Многие авторы рассматривали расширение распределения Бурра XII, например Олападе [17], Гад и др. [11]. Распределение Бурра XII используется во многих приложениях, таких как страхование и финансовая экономика, анализ выживаемости (см., например, Бурнецки и др. [8], Махмуд и др. [15]). Асимптотические разложения средней избыточной функции и избыточной дисперсии для распределения Бурра типа XII были получены авторами ранее и имеют вид

(41) $\mu(t) = \dfrac{t}{(kc-1)}\left[1 + \dfrac{kc}{((k+1)c-1)} \cdot \dfrac{1}{t^c} + o\left(\dfrac{1}{t^c}\right)\right], \quad t \to \infty;$

(42)
$$\sigma^2(t) = \frac{t^2}{(kc-1)^2} \times$$
$$\times \left[1 + \frac{2}{kc-2} + \frac{2c^2k(k+1)}{((k+1)c-1)((k+1)c-2)} \cdot \frac{1}{t^c} + o\left(\frac{1}{t^c}\right)\right], \ t \to \infty.$$

Докажем теорему об асимптотическом разложении производных моментов распределения Бурра типа XII.

Теорема 4.

(43) $$\frac{d\mu(t)}{dt}=\frac{1}{(kc-1)}\left[1+\frac{kc(1-c)}{(kc-1+c)}\cdot\frac{1}{t^c}+o\left(\frac{1}{t^c}\right)\right],\quad t\to\infty;$$

(44) $$\frac{d\sigma^2(t)}{dt}=t\cdot\frac{2kc}{(kc-1)^2(kc-2)}\left[1+o(1)\right],\quad t\to\infty.$$

Доказательство. На первом шаге доказательства вычислим логарифмическую производную функции распределения:

$$\left[\ln\bar F(t)\right]'=\frac{-kct^{c-1}}{1+t^c}=-\frac{kc}{t}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{t^c}}=-\frac{kc}{t}\left[1-\frac{1}{t^c}+\frac{1}{t^{2c}}+o\left(\frac{1}{t^{2c}}\right)\right].$$

Отсюда

(45) $$\left[\ln\bar F(t)\right]'=-\frac{kc}{t}\left[1-\frac{1}{t^c}+o\left(\frac{1}{t^c}\right)\right],\quad t\to\infty.$$

Используя (41) и (45), получаем разложения

$$\left[\ln\bar F(t)\right]'\cdot\mu(t)=-\frac{kc}{kc-1}\left[1+\frac{1}{t^c}\left(\frac{kc}{(k+1)c-1}-1\right)+o\left(\frac{1}{t^c}\right)\right];$$

$$\left[\ln\bar F(t)\right]'\cdot\mu(t)+1=\left(-\frac{1}{kc-1}\right)-\frac{kc(1-c)}{(kc-1)(kc-1+c)}\cdot\frac{1}{t^c}+o\left(\frac{1}{t^c}\right),\ t\to\infty.$$

Отсюда по формуле (6) получаем асимптотическое разложение (43). Докажем (44), используя представление (7). Имеем

$$\sigma^2(t)-\mu^2(t)=\frac{2t^2}{(kc-1)^2(kc-2)}\left[1+\frac{kc\cdot 2(kc-2)}{((k+1)c-1)\cdot((k+1)c-2)}\frac{1}{t^c}+o\left(\frac{1}{t^c}\right)\right].$$

$$\frac{d\sigma^2(t)}{dt}=-\frac{d\ln\bar F(t)}{dt}\left(\sigma^2(t)-\mu^2(t)\right)=$$

$$=\frac{2tkc}{(kc-1)^2(kc-2)}\left[1+\frac{1}{t^c}\left[\frac{2kc(kc-2)}{((k+1)c-1)\cdot((k+1)c-2)}-1\right]+o\left(\frac{1}{t^c}\right)\right]=$$

$$=t\cdot\frac{2kc}{(kc-1)^2(kc-2)}\left[1+o(1)\right],\quad t\to\infty.$$

6. Предельные распределения

Рассмотрим асимптотическое поведение рассмотренных функций распределения превышения порогового значения при $t \to \infty$.

В теории экстремальных значений широко используется понятие области притяжения предельных распределений, введенное Гнеденко [13]. Для каждого предельного распределения G область притяжения остаточного времени жизни состоит из всех функций распределения F, для которых существуют такие нормализующие функции $a(t)$, $b(t)$, что выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty} F_t(b(t) + xa(t)) = G(x).$$

Критерий области притяжения для предельного экспоненциального распределения был доказан Балкема, Де Хаан [6] в виде

$$c_v(t) = \frac{\sigma(t)}{\mu(t)} \to 1, \quad t \to \infty. \tag{46}$$

Используя теоремы 2,3,4, можно легко проверить, что условие (46) выполняется для распределений Гнеденко – Вейбулла, Бенктандера I, II. В силу разложений (41), (42) и критерия (46) область притяжения экспоненциального распределения не включает распределение Бурра XII.

Литература

1. ДЕНЬГАЕВ А.В., РУСЕВ В.Н., СКОРИКОВ А.В. *Исследование средней остаточной наработки в модели Гнеденко – Вейбулла распределения отказов. Оценки остаточного времени ресурса погружного насосного оборудования* // Сборник «Труды Российского государственного университета нефти и газа имени И.М. Губкина (НИУ)» – 2020. – №1(298). – С. 61–73.
2. КАЛАШНИКОВ В.В., КОНСТАНТИНИДИС Д.Г. *Вероятность разорения* // Фундаментальная и прикладная математика – 1996. – Т. 2, вып. 4. – С. 1055–1100.
3. РУМЯНЦЕВ А.С., МОРОЗОВ Е.В. *Распределения с тяжелыми хвостами и их приложения*. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2013. – 67 с.

4. РУСЕВ В.Н., СКОРИКОВ А.В. *Асимптотика риска страхования для требований, имеющих тяжелые хвосты* // Автоматизация и информатизация. ТЭК. – 2023. – № 11(604). – С. 35-40.
5. ЭРДЕЙИ А. *Асимптотические разложения*. – М.: Физматгиз, 1962. – 127 с.
6. BALKEMA A.A., DE HAAN L. *Residual life time at great age* // The Annals of probability. – 1974. – Vol.2, No. 5. – P. 792–804.
7. BANJEVIC D. *Remaining useful life in theory and practice*. – 2009. – P. 337–349. – DOI: https://doi.org/10.1007/s00184-008-0220-5.
8. BURNECKI K., HÄRDLE W., WERON R. *An introduction to simulation of risk processes*. *Encyclopedia of Actuarial Science*. – Chichester: Wiley, 2004. – P. 1–7.
9. EMBRECHTS P., KLÜPPELBERG C., MIKOSCH T. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. – Berlin: Springer-Verlag, 1997.
10. FOSS S., KORSHUNOV D., ZACHARY S. *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions*. – New York: Springer, 2011. – 123 p.
11. GAD A.M., HAMEDANI G.G., SALEHABADI S.M. et al. *The Burr XII-Burr XII Distribution: Mathematical Properties and Characterizations* // Pak. J. Statist. – 2019. – Vol. 35(3). – P. 229–248.
12. GHOSH S., RESNICK S. *Discussion on mean excess plots* // Stochastic Processes and their Applications. – 2010. – Vol. 120, Iss. 8. – P. 1492–1517.
13. GNEDENKO B. *On the limiting distribution of the maximum term in a random series* // In: S.J. Kotz, Breakthroughs in Statistics. Volume 1. Foundations and Basic Theory. – New York, NY, USA: Springer Science + Business Media, 1993. – P. 185–225.
14. GUPTA R.C. *On the monotonic properties of residual variance and their applications in reliabilit* // Journal of Statistical Planning and Inference. – 1987. – Vol. 16. – P. 329–335.
15. MAHMOUD K. OKASHA M., MATTER Y. *On the three-parameter Burr type XII distribution and its application to heavy tailed lifetime data* // Journal of advances in mathematics. – 2015. – Vol. 10, No.4. – P. 3429–3442.
16. MIKOSH T. *Non-Life insurances mathematics. An introduction with stochastic processes*. – Berlin: Springer, 2004. – 235 p.

17. OLAPADE A. *On a six-parameter generalized Burr XII distribution* // arXiv:0806.1579v1 [math.ST]. – 2008. – DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.0806.1579.
18. RINNE H. *The Weibull Distribution: A handbook*. − London, New York: Chapman and Hall/CRC Press, 2009. – 784 p.
19. RODRIGES R.A. *Guide to the Burr type XII distributions* // Biometrika. – 1977. – Vol. 64. – P. 129–134.
20. RUSEV V., SKORIKOV A. *Residual Life Time of the Gnedenko Extreme – Value Distributions. Asymptotic Behavior and Applications* // In: Recent Developments in Stochastic Methods and Applications / Eds.: Shiryaev A.N., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. – Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – 2021. – Vol. 371. – P. 292–305.
21. RUSEV V., SKORIKOV A. *Asymptotics of Moments for the Remaining Time of Heavy-Tail Distributions* // Comput. Sci. Math. Forum. – 2023. – Vol.7(1), No. 52. – DOI: https://doi.org/10.3390/IOCMA2023-14435.

THE ASYMPTOTICS OF MOMENTS AND MOMENT'S DERIVATIVES FOR EXCESS DISTRIBUTION

Leonid Ostrer, National University of Oil and Gas «Gubkin University», Moscow, Senior Lecturer (leonidostrer@gmail.com).
Vladimir Rusev, National University of Oil and Gas «Gubkin University», Moscow, Cand. Sc., Associate Professor (rusev.v@gubkin.ru).
Alexander Skorikov, National University of Oil and Gas «Gubkin University», Moscow, Cand. Sc., Associate Professor (skorikov.a@gubkin.ru).

Abstract: The functioning of modern complex systems is characterized by various types of risks. Data analysis of such systems shows that data sets have characteristic properties: heavy distribution tails. An important issue is the impact of individual extreme events on the global behavior of the entire system too. The proposed article discusses classes of distributions with heavy tails, which are important in the theory of insurance claims and reliability theory: Gnedenko-Weibull distribution; Benktander I, II; Burr XII. The moment`s asymptotics have been derived for mean excess function and excess variance function especially for the heavy-tailed distributians. The paper studies in detail the error estimate for the asymptotic expansion of the mean excess function of the Gnedenko–Weibull distribution for any values of *the shape parameter. There is a significant difference in the behavior of error estimates for values of the shape parameter less than one corresponding to the heavy tail of the Gnedenko –Weibull distribution. The values of the shape parameter are found for which the decompositions are accurate in particular. That is, the expansion has finite quantity members. Asymptotic expansions of derivatives of residual moments are proved for Gnedenko-Weibull; Benktander I, II; Burr XII distributions. The description of the behavior of the system as a region of attraction of the ultimate extreme state is also considered. These results serve as a tool for the applications to risk theory, reliability and extremal event.*

Keywords: distribution tail, asymptotic expansion, mean excess functions, excess variance, heavy-tail distributions.

УДК 519.218.4 + 517.956.8 + 517.968.22
ББК 22.161.6 + 30.14

Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.И. Орловым.

Поступила в редакцию 04.08.2024.
Опубликована 30.11.2024.