

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КВАДРАТИЧНЫХ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОКРЕСТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ НА КЛАСТЕРИЗОВАННЫХ ДАННЫХ И БЕЗ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

Седых И. А.¹, Макаров К. Н.²

(ФГБОУ ВО Липецкий государственный технический университет, Липецк)

*Окрестностные модели и их модификации применяются для моделирования различных распределенных систем и процессов. В исследовании рассмотрена квадратичная комплекснозначная динамическая окрестностная модель, в которой параметры, входы и состояния являются комплексными числами, и дано ее определение. Модель функционирует в дискретном времени. Показан пример состоящей из трех узлов комплекснозначной динамической окрестностной модели, для которой приведены граф структуры и функции пересчета состояний в общем виде. Рассмотрен также частный случай функций пересчета для квадратичной модели. Приведён алгоритм идентификации комплекснозначной динамической окрестностной модели, параметры которой находятся методом наименьших квадратов. Показан общий вид матриц системы линейных уравнений для нахождения параметров квадратичной модели. Приведены матрицы и выполнена идентификация для рассмотренного примера окрестностной модели. Найдены среднеквадратическая и средняя приведенная ошибки идентификации. В работе рассмотрена также идентификация комплекснозначной динамической окрестностной модели на кластеризованных данных. Кластеризация выполнена с использованием комплексных наборов данных методом *k*-средних. Предложенные алгоритмы идентификации реализованы в виде программы в пакете *Mathcad*, с помощью которой проведено сравнение результатов идентификации квадратичной комплекснозначной динамической окрестностной модели на кластеризованных данных и без кластеризации.*

Ключевые слова: динамическая окрестностная модель, квадратичная модель, комплексные числа, идентификация, кластеризация, метод *k*-средних.

¹ Ирина Александровна Седых, д.т.н., профессор (sedykh-irina@yandex.ru).

² Кирилл Николаевич Макаров, студент (kirik0-1@yandex.ru).

1. Введение

Окрестностный подход, появившийся в 90-е годы XX века, является развитием теории математического моделирования дискретных распределенных систем [7]. Окрестностные модели отличаются гибким заданием связей между элементами с помощью окрестностей и обладают наглядностью представления структуры в виде графа с несколькими видами дуг [6]. Ранее были введены и исследованы статические и динамические, линейные, билинейные и полилинейные, одноуровневые и иерархические окрестностные модели с постоянными и переменными окрестностями [10]. Разработаны методы их параметрической идентификации и смешанного управления. При этом входы, состояния и выходы, а также параметры моделей являлись действительными числами.

В различных сферах деятельности, например, в металлургии, робототехнике, космонавтике, при анализе данных, в искусственном интеллекте, в квантовых вычислениях актуальным является изучение, моделирование, анализ и прогнозирование поведения сложных систем, а также работа с большим объемом данных.

В некоторых случаях данные, поступающие на вход системы, и ее состояния являются комплексными числами, например, в электротехнике [21]. Комплексные данные расширяют область применения, возможности моделирования и анализа систем. Ранее разработаны методы кластеризации данных и идентификации окрестностных моделей для вещественных наборов данных [4]. В работе рассматриваются модификации данных методов для комплекснозначных наборов данных.

В статье рассмотрена квадратичная комплекснозначная динамическая окрестностная модель, для которой разработаны и реализованы алгоритмы идентификации на некластеризованных и кластеризованных комплекснозначных данных. Все расчеты проводились с помощью пакета Mathcad.

2. Комплекснозначная динамическая окрестностная модель

Окрестностные модели обобщают многие дискретные модели, отличаются гибкостью описания структуры связей между узлами системы, что позволяет улучшить управление объектом. Их применяют для моделирования сложных пространственно-распределенных систем. Простейшим классом окрестностных являются линейные модели. Также разработан класс билинейных окрестностных моделей, обобщающий линейные окрестностные и традиционные билинейные дискретные модели. Далее были введены четкие и нечеткие недетерминированные динамические окрестностные модели, которые позволяют моделировать параллельные стохастические процессы.

На примере рассмотрим комплекснозначную динамическую окрестностную модель (КДОМ), состоящую из трех узлов a_1, a_2, a_3 (см. рис. 1), которую можно описать как $CNS = (N, X, V, G, X[0])$, где $N = (A, O)$ – это структура окрестностной модели, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ – множество узлов, O – множество окрестностных связей; $X = X[t], V = V[t] \in \mathbb{C}^n$ – векторы состояний и входов КДОМ в текущий момент времени t ; G – функция пересчета состояний модели; $X[0] \in \mathbb{C}^n$ – вектор состояний в начальный момент времени $t = 0$ [7].

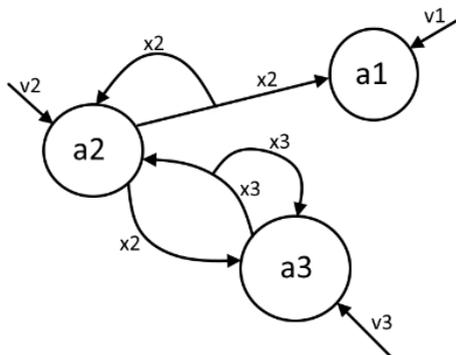


Рис. 1. Граф структуры окрестностной модели, состоящей из трех узлов a_1, a_2, a_3

Структуру КДОМ можно представить как ориентированный граф с двумя видами дуг. Состояние каждого узла зависит от данных, которые поступают от узлов, входящих в его окрестность.

Общий вид функции g_i для узла a_i комплекснозначной динамической окрестностной модели описывается формулой [7]

$$(1) \quad x_i[t] = g_i(V_i[t], X_i[t]),$$

где $x_i[t] \in C$ – состояние модели в узле a_i в момент времени $t + 1$,

$X_i[t] = (x_{i_1}[t] \dots x_{i_{r_i}}[t])^T \in C^{r_i}, V_i[t] = (v_{i_1}[t] \dots v_{i_{p_i}}[t])^T \in C^{p_i}$,
 где r_i – количество окрестностных связей по состояниям; p_i – количество окрестностных связей по входам для узла a_i .

Общий вид системы (1) для рассматриваемого примера представлен формулой

$$(2) \quad \begin{cases} x_1[t + 1] = g_1(v_1[t], x_2[t]), \\ x_2[t + 1] = g_2(v_2[t], x_2[t], x_3[t]), \\ x_3[t + 1] = g_3(v_3[t], x_2[t], x_3[t]), \end{cases}$$

где $v_i[t]$ – вход узла a_i в момент времени t ; $x_i[t]$ – состояние в узле a_i в момент времени t .

В квадратичном случае система (2) представляется формулой

$$(3) \quad \begin{cases} x_1[t + 1] = a_1 + b_{11}v_1[t] + c_{12}x_2[t] + e_{111}v_1^2[t] + \\ + q_{122}x_2^2[t] + d_{112}v_1[t]x_2[t], \\ x_2[t + 1] = a_2 + b_{22}v_2[t] + c_{22}x_2[t] + c_{23}x_3[t] + \\ + e_{222}v_2^2[t] + q_{222}x_2^2[t] + q_{233}x_3^2[t] + d_{222}v_2[t]x_2[t] + \\ + d_{223}v_2[t]x_3[t] + q_{223}x_2[t]x_3[t], \\ x_3[t + 1] = a_3 + b_{33}v_3[t] + c_{32}x_2[t] + c_{33}x_3[t] + \\ + e_{333}v_3^2[t] + q_{322}x_2^2[t] + q_{333}x_3^2[t] + d_{332}v_3[t]x_2[t] + \\ + d_{333}v_3[t]x_3[t] + q_{323}x_2[t]x_3[t]; \end{cases}$$

где $a_i, b_{ij}, c_{ij}, d_{ijk}, e_{ijk}, q_{ijk} \in C$ – параметры модели, $i, j, k = 1, 2, 3$.

3. Идентификация

Идентификация объектов – это построение оптимальных математических моделей по реализациям их входных и выходных

данных [21]. Идентификация динамических объектов состоит в определении их структуры и параметров по наблюдаемым данным – входному воздействию и выходной величине [8]. Идентификация осуществляется с помощью настраиваемой модели той или иной структуры, параметры которой могут изменяться [17].

3.1. АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ КВАДРАТИЧНОЙ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОКРЕСТНОСТНОЙ МОДЕЛИ

Пусть задана квадратичная комплекснозначная динамическая окрестностная модель со структурой, приведенной на рис. 1, и функциями пересчета состояний (3). Для ее идентификации необходимо для каждого узла a_i найти решение переопределенной системы линейных уравнений

$$(4) L_i A_i = F_i,$$

где $A_i \in C^{(1+p_i+r_i) \times 1}$,

$$L_i^T = \begin{bmatrix} 1+i & \dots & 1+i \\ v_i^1 & \dots & v_i^M \\ x_i^1 & \dots & x_i^M \\ v_i^1 \otimes v_i^1 & \dots & v_i^M \otimes v_i^M \\ x_i^1 \otimes x_i^1 & \dots & x_i^M \otimes x_i^M \\ v_i^1 \otimes x_i^1 & \dots & v_i^M \otimes x_i^M \end{bmatrix} \in C^{(1+p_i+r_i) \times M};$$

$$v_i^k = \begin{bmatrix} v_{i_1}^k \\ \vdots \\ v_{i_{p_i}}^k \end{bmatrix}, x_i^k = \begin{bmatrix} x_{i_1}^k \\ \vdots \\ x_{i_{r_i}}^k \end{bmatrix}; F_i = \begin{bmatrix} x_i^1[t+1] \\ \vdots \\ x_i^M[t+1] \end{bmatrix} \in C^{M \times 1}; i = 1, \dots, n;$$

$$k = 1, \dots, M,$$

где A_i – матрица параметров; L_i – матрица исходных данных (общий вид), в которой $v_{i_{p_i}}$ – вектор входных данных i -го узла модели для p_i -й строчки в текущий момент времени t ; $x_{i_{r_i}}$ – состояния i -го узла модели для r_i -й строчки в текущий момент времени t ; F_i – матрица состояний i -го узла модели в $(t+1)$ -й момент времени; M – объем выборки; « \otimes » – произведение Кронекера.

Матрицы A_i и L_i из системы (4) для каждого узла примера окрестностной модели (3) будут иметь вид

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_{11} \\ c_{12} \\ e_{111} \\ q_{122} \\ d_{112} \end{bmatrix}; L_1^T = \begin{bmatrix} 1+i & \dots & 1+i \\ v_1^1 & \dots & v_1^M \\ x_2^1 & \dots & x_2^M \\ (v_1^1)^2 & \dots & (v_1^M)^2 \\ (x_2^1)^2 & \dots & (x_2^M)^2 \\ v_1^1 \cdot x_2^1 & \dots & v_1^M \cdot x_2^M \end{bmatrix}.$$

A_2, A_3, L_2^T, L_3^T задаются аналогично.

Решение системы (4) находится методом наименьших квадратов. Пусть известны исходные данные входов и состояний в текущий момент времени, состояний в следующий момент времени ($V[t], X[t], X[t+1]$) рассматриваемой динамической модели. Для нахождения параметров для каждого узла a_i необходимо задать матрицы L_i, F_i [19]. Далее находится псевдообратная матрица по формуле

$$(5) \quad L_i^+ = \left(\overline{L_i}^T \cdot L_i \right)^{-1} \cdot \overline{L_i}^T.$$

Параметры A_i вычисляются по формуле (6):

$$(6) \quad A_i = L_i^+ \cdot F_i.$$

Для поиска ошибки идентификации необходимо получить модельные значения функции пересчета состояния F'_i по формуле (7) для найденных параметров A_i и сравнить с исходными данными F_i [18]. Для нахождения среднеквадратической ошибки используется формула (8), средней приведенной – формула (9):

$$(7) \quad F'_i = L_i \cdot A_i;$$

$$(8) \quad E_i = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |F_{ij} - F'_{ij}|^2;$$

$$(9) \quad \delta_i = \frac{1}{M} \frac{\sum_{j=1}^M |F_{ij} - F'_{ij}|}{\max_j |F_{ij}|} \cdot 100\%.$$

Рассмотренный алгоритм идентификации реализован в пакете Mathcad.

3.2. ПРИМЕР ИДЕНТИФИКАЦИИ

Рассмотрим пример идентификации квадратичной комплекснозначной динамической окрестностной модели (3) для первого узла.

Исходные данные для рассматриваемого примера сгенерированы по закону равномерного распределения. Действительные и мнимые части комплексных чисел генерировались отдельно.

Далее по формулам (4)–(9) проводим идентификацию квадратичной комплекснозначной динамической окрестностной модели.

Сравним F_i с F'_i для квадратичной модели (см. рис. 2–4).

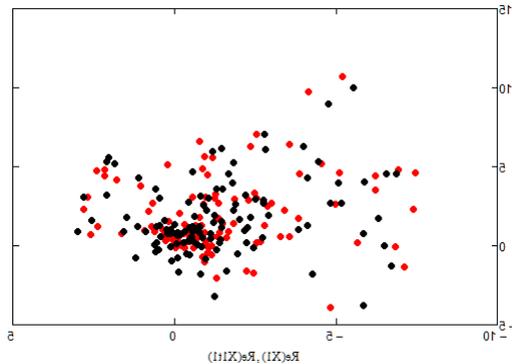


Рис. 2. График сравнения F_1 с F'_1 квадратичной модели

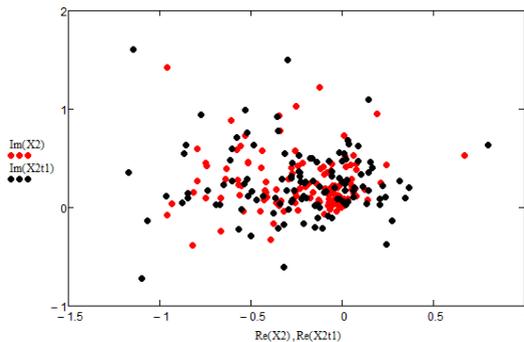


Рис. 3. График сравнения F_2 с F'_2 квадратичной модели

Ошибки идентификации полученной квадратичной модели приведены в таблице 1.

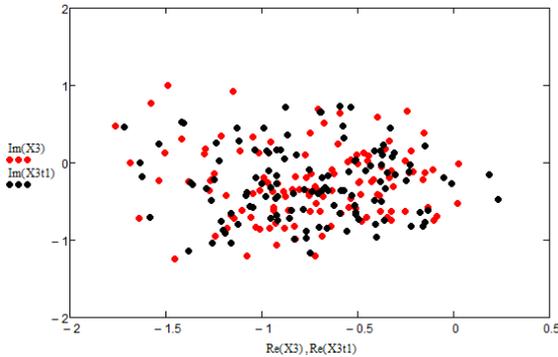
Рис. 4. График сравнения F_3 с F'_3 квадратичной модели

Таблица 1. Ошибки идентификации

Квадратичная ошибка	Приведенная ошибка
$E(X_1) = 0,583$	$\delta_{\text{пр}}(X_1) = 1,589\%$
$E(X_2) = 0,046$	$\delta_{\text{пр}}(X_2) = 3,205\%$
$E(X_3) = 0,047$	$\delta_{\text{пр}}(X_3) = 1,659\%$
$E_{\text{ср}} = 0,225$	$\delta_{\text{пр,ср}} = 2,151\%$

4. Идентификация комплекснозначной динамической окрестностной модели на кластеризованных данных

Рассмотрим идентификацию комплекснозначной динамической окрестностной модели на кластеризованных данных с помощью разработанной программы. При этом кластеризация выполняется с использованием метода k -средних.

Данный метод был модифицирован для кластеризации комплекснозначных наборов данных и использовался в работе в качестве иллюстрации применения кластеризации к комплекснозначным данным, так как он является простым в реализации и позволяет достичь заданной точности без больших вычислительных затрат.

4.1. КЛАСТЕРИЗАЦИЯ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ДАННЫХ МЕТОДОМ k -СРЕДНИХ

Кластерный анализ, или кластеризация, – это задача группировки набора объектов таким образом, чтобы объекты в одной группе, называемой кластером, были более похожи по различным признакам друг на друга, чем на объекты в других группах (кластерах) [1, 8, 13, 14, 16, 20].

Существуют различные группы методов кластеризации: эвристические, оптимизационные и иерархические. После проведения ряда вычислительных экспериментов в работе был выбран метод кластеризации k -средних.

Метод k -средних – это метод кластерного анализа, целью которого является разделение m наблюдений на k кластеров, при этом каждое наблюдение относится к тому кластеру, к центру (центроиду) которого оно ближе всего [2, 4, 5, 6, 11, 15]. В качестве меры близости используется евклидово расстояние [3, 9, 10, 12].

Ниже приведена схема кластеризации методом k -средних для комплекснозначных данных, см. рис. 5.

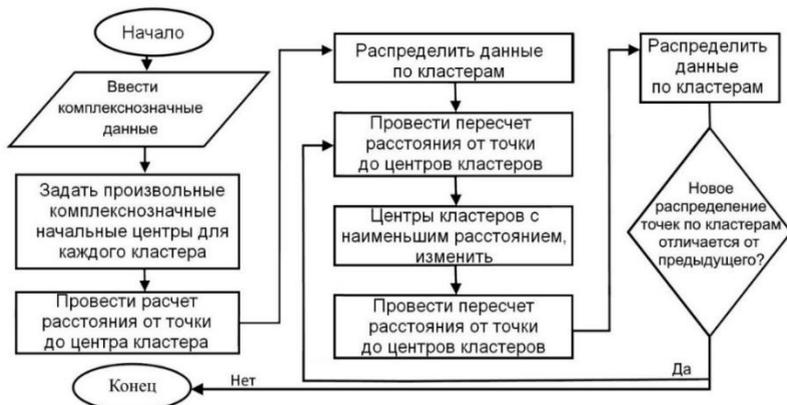


Рис. 5. Схема метода k -средних

4.2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НА КЛАСТЕРИЗОВАННЫХ ДАННЫХ

Рассмотрим идентификацию комплекснозначной динамической окрестностной модели на кластеризованных данных.

Сначала выполним разбиение исходных данных на три кластера и найдем псевдообратные матрицы (5) и параметры (6) для каждого узла и каждого кластера по формулам (4)–(9).

Далее находим модельные значения F'_i после кластеризации для каждого кластера по формуле (7). На рис. 6–8 приведены графики сравнения F_i с F'_i после кластеризации для квадратичной модели.

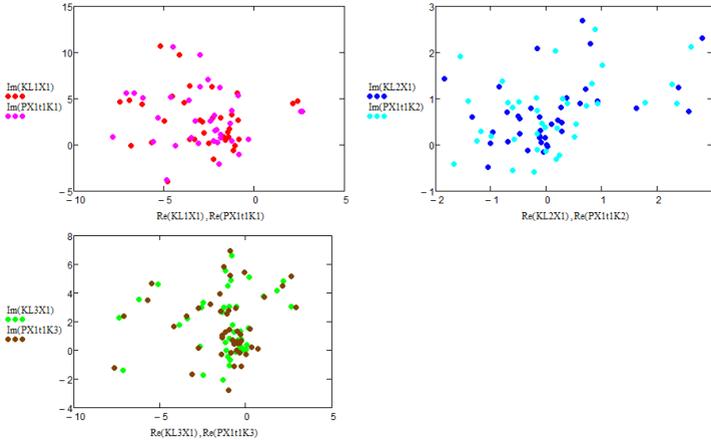


Рис. 6. Графики сравнения F_1 с F'_1 после кластеризации для квадратичной модели

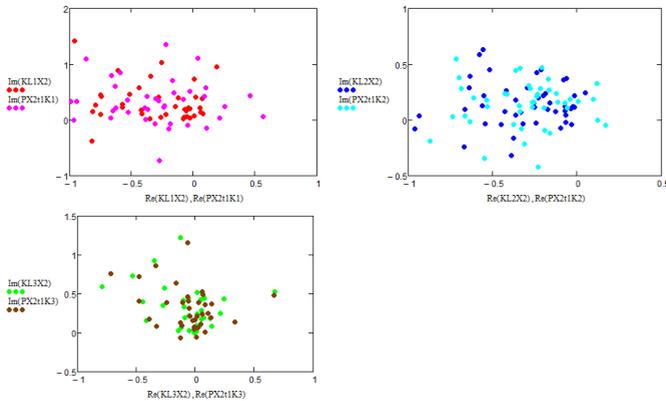


Рис. 7. Графики сравнения F_2 с F'_2 после кластеризации для квадратичной модели

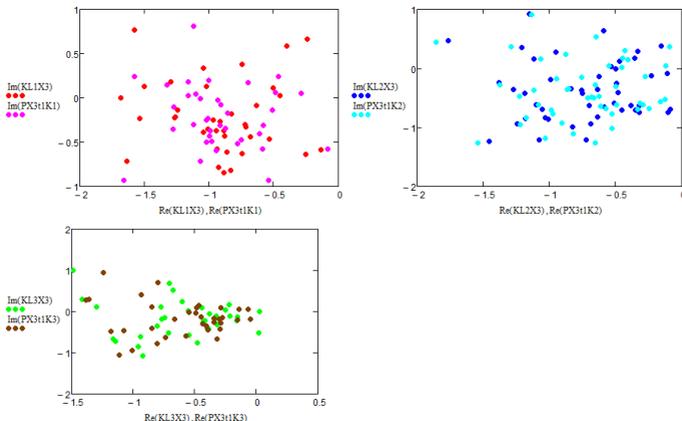


Рис. 8. Графики сравнения F_3 с F'_3 после кластеризации для квадратичной модели

Результаты ошибок идентификации комплекснозначной динамической окрестностной модели на кластеризованных данных приведены в таблице 2.

Таблица 2. Ошибки идентификации после кластеризации

Квадратичная ошибка	Приведенная ошибка
$E(X_1) = 0,251$	$\delta_{\text{пр}}(X_1) = 0,995\%$
$E(X_2) = 0,048$	$\delta_{\text{пр}}(X_2) = 2,954\%$
$E(X_3) = 0,04$	$\delta_{\text{пр}}(X_3) = 1,468\%$
$E_{\text{ср}} = 0,113$	$\delta_{\text{пр.ср}} = 1,806\%$

В результате исследования видно, что в данном примере в среднем после кластеризации ошибки идентификации комплекснозначной динамической окрестностной модели уменьшаются.

Следует отметить, что идентификация КДОМ с использованием метода кластеризации k -средних для комплекснозначных данных не всегда давала лучший результат по сравнению с идентификацией некластеризованных данных. На некоторых сгенери-

рованных выборках точки располагались примерно на многомерной плоскости. В этих случаях улучшения при кластеризации не происходило.

5. Заключение

В работе рассмотрены динамические окрестностные модели, идентификация квадратичной комплекснозначной моделей, метод кластеризации. В ходе работы была подробно исследована комплекснозначная динамическая окрестностная модель. На примере показана ее идентификация. Приведен алгоритм кластеризации комплекснозначных данных методом k -средних. Представлены результаты идентификации квадратичной комплекснозначной динамической окрестностной модели до и после кластеризации на сгенерированных данных. В дальнейшем планируется применение разработанных методов на прикладном примере и исследование идентификации КДОМ с применением других методов кластеризации.

Литература

1. БАЮК Д.А., БАЮК О.А., БЕРЗИН Д.В. и др. *Практическое применение методов кластеризации, классификации и аппроксимации на основе нейронных сетей*. – М.: Прометей, 2020. – 448 с.
2. БЕССМЕРТНЫЙ И.А., НУГУМАНОВА А.Б., ПЛАТОНОВ А.В. *Интеллектуальные системы. Учебник и практикум для вузов*. М.: Изд-во Юрайт, 2023. – 243 с. // Образовательная платформа Юрайт. – URL: <https://urait.ru/bcode/511999> (дата обращения: 24.05.2023).
3. ВОРОНОВ М.В., ПИМЕНОВ В.И., НЕБАЕВ И.А. *Системы искусственного интеллекта. Учебник и практикум для вузов*. – М.: Изд-во Юрайт, 2023. – 256 с. // Образовательная платформа Юрайт. – URL: <https://urait.ru/bcode/519916> (дата обращения: 24.05.2023).
4. КРАСНОПЕРОВ К.Ю., СЕМЕНОВ В.А. *Анализ применения теории комплексных чисел в обработке и хранении данных // Современные научные исследования и инновации*. – 2023. –

- № 9. – URL: <https://web.snauka.ru/issues/2023/09/100742> (дата обращения: 03.02.2024).
5. НАЗАРОВ Д.М., КОНЫШЕВА Л.К. *Интеллектуальные системы: основы теории нечетких множеств. Учебник и практикум для вузов.* – М.: Изд-во Юрайт, 2023. – 186 с. // Образовательная платформа Юрайт. – URL: <https://urait.ru/bcode/514414> (дата обращения: 24.05.2023).
 6. ПЛАТОНОВ А.В. *Машинное обучение. Учебное пособие для вузов.* – М.: Изд-во Юрайт, 2023. – 85 с. // Образовательная платформа Юрайт. – URL: <https://urait.ru/bcode/520544> (дата обращения: 24.05.2023).
 7. СЕДЫХ И.А. *Линейные и квадратичные нечеткие иерархические окрестностные модели производства холоднокатаной стали // Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии.* – 2019. – №1. – С. 67–73.
 8. СЕДЫХ И.А., МАКАРОВ К.Н. *Нечеткая кластеризация комплекснозначных данных // Вести учебных заведений Черногоземья.* – 2023. – Т. 19, №2(72). – С. 46–57
 9. СКОРУБСКИЙ В.И., ПОЛЯКОВ В.И., ЗЫКОВ А.Г. *Математическая логика. Учебник и практикум для вузов.* – М.: Изд-во Юрайт, 2023. – 211 с. // Образовательная платформа Юрайт. – URL: <https://urait.ru/bcode/511996> (дата обращения: 24.05.2023).
 10. СТАНКЕВИЧ Л.А. *Интеллектуальные системы и технологии. Учебник и практикум для вузов.* – Саратов: Саратовский государственный технический университет имени Ю.А. Гагарина, ЭБС АСВ, 2019. — 160 с. // IPR SMART: – URL: <https://www.iprbookshop.ru/118365.html> (дата обращения: 24.05.2023).
 11. ТРЕГУБОВ В.Н., КАТКОВА М.А. *Информационное пространство логистического кластера: теория и методология формирования на основе облачных технологий.* – М.: Изд-во Юрайт, 2023. – 495 с. // Образовательная платформа Юрайт. – URL: <https://urait.ru/bcode/530657> (дата обращения: 24.05.2023).
 12. ХАЛИН В.Г. и др. *Системы поддержки принятия решений. Учебник и практикум для вузов / Под редакцией В.Г. Халина,*

- Г.В. Черновой. – М.: Изд-во Юрайт, 2023. – 494 с. // Образовательная платформа Юрайт. – URL: <https://urait.ru/bcode/511245> (дата обращения: 24.05.2023).
13. ARTHUR D., VASSILIVITSKII S. *k-means++: the advantages of careful seedings* // Proc. of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 2007. – 1027–1035 p.
 14. BLEI D.M., NG A.Y. JORDAN M.I. *Latent Dirichlet allocation* // Journal of Machine Learning Research, 2003. – P. 993–1022.
 15. BRADLEY P.S., FAYYAD U.M. *Refining initial points for k-means clustering* // Proc. of the 15th Int. Conf. of Machine Learning, San Francisco, 1998. – 99 p.
 16. CALINSKI T., HARABASZ J. *A dendrite method for cluster analysis* // Taylor & Francis Online. – 1974. – Vol. 3, Iss. 1. – P. 1–27.
 17. CHARU C.A., CHANDAN K.R. *Data Clustering: algorithms and applications*. – Chapman and Hall / CRC, 2013. – 652 p.
 18. DANGETI P. *Unsupervised feature selection. Computational Methods of Feature Selection*. – Packt Publishing, 2017. – 442 p.
 19. Dy J.G. *Statistics for Machine Learning*. – New York: Chapman and Hall / CRC, 2007. – 440 p.
 20. EDWIN M.K., RAYMOND T.Ng. *Algorithms for Mining Distance-Based Outliers in Large Datasets*. – Vancouver: VLDB, 1998. – P. 392–403.
 21. KASSAMBRA A. *Practical guide to cluster analysis in r*. – STHDA, 2017. – 187 p.

IDENTIFICATION OF QUADRATIC COMPLEX-VALUED DYNAMIC NEIGHBORHOOD MODELS ON CLUSTERED DATA AND WITH OUTCLUSTERING

Irina Sedykh, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Doctor of Technical Sciences, professor (sedykh-irina@yandex.ru).

Kirill Makarov, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, student (kirik0-1@yandex.ru)

Abstract: Neighborhood models and their modifications used to model various distributed systems and processes. The study considers a quadratic complex-valued dynamic neighborhood model in which the parameters, inputs and states are complex

numbers, and its definition is given. The model functions in discrete time. An example of a complex-valued dynamic neighborhood model consisting of three nodes shown, for which the graph of the structure and the functions of the intersection of states given in general form. A special case of recalculation functions for a quadratic model is also considered. An algorithm for identifying a complex-valued dynamic neighborhood model whose parameters are determined by the least squares method given. A general view of the matrices of a system of linear equations for finding the parameters of a quadratic model shown. Matrices are given and identification performed for the considered example of a neighborhood model. The root-mean-square and average reduced identification errors are found. The paper also considers the identification of a complex-valued dynamic neighborhood model on clustered data. Clustering performed using complex data sets by the k-means method. The proposed identification algorithms implemented in the form of a program in the Mathcad package, with the help of which the results of identification of a quadratic complex-valued dynamic neighborhood model on clustered data and without clustering are compared.

Keywords: dynamic neighborhood model, quadratic model, complex numbers, identification, clustering, k-means method.

УДК 519.6

ББК 22.19

DOI: 10.25728/ubs.2024.111.2

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.К. Погодаевым.*

Поступила в редакцию 29.08.2023.

Опубликована 30.09.2024.