

## ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕАЛИЗОВАННОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ НА ОСНОВЕ ИНФОРМАЦИИ, ИЗВЛЕКАЕМОЙ ИЗ ОПЦИОНОВ

Патласов Д. А.<sup>1</sup>

(Пермский государственный национальный  
исследовательский университет, Пермь)

*Рассматривается подход к прогнозированию реализованной волатильности индекса S&P 500 с помощью данных, извлекаемых из опционов благодаря теореме восстановления Росса. Цель настоящего исследования заключается в исследовании возможности использовать показатели, получаемые после применения теоремы восстановления Росса, в качестве экзогенных факторов в модели прогнозирования реализованной волатильности финансовых инструментов. Применяемая для достижения цели исследования методика исключает необходимость использования исторических котировок финансовых активов, фокусируясь исключительно на опционах. В работе проведено сравнение точности прогнозирования реализованной волатильности между предлагаемыми моделями и базовым подходом HAR-RV. Эмпирические результаты показали, что предлагаемый подход обеспечивает более высокую точность предсказаний. Используемый подход в теореме восстановления Росса на основе аппроксимации функции плотности распределения базового актива опциона позволяет более точно учитывать ожидания участников рынка и их предпочтения к риску, что может стать статистически значимыми факторами в моделях прогнозирования различных финансовых индикаторов. Результаты исследования могут быть использованы для оценки систематического риска, прогнозирования вероятности коррекций и кризисов на финансовых рынках.*

Ключевые слова: волатильность, распределение доходности финансовых активов, теорема восстановления, вероятностные характеристики, прогнозирование.

### 1. Введение

Современная цифровизация и рост вычислительных мощностей способствуют развитию математического моделирования, включая финансы. Биржевые агенты агрегируют значительные объемы публичной финансовой информации, используя её для разработки торговых стратегий и управления рисками. Согласно

---

<sup>1</sup> Дмитрий Александрович Патласов, ассистент кафедры Информационных систем и математических методов (dmitriypatlasov@gmail.com).

гипотезе эффективности рынков [18], цены активов уже отражают всю доступную информацию, и предсказание будущих цен на её основе не приносит систематической сверхприбыли. Это предполагает, что модели, основанные на исторических данных, не могут обеспечить устойчивую доходность. В таких условиях в финансовой эконометрике возникает потребность в использовании дополнительной информации, способной повысить объясняющую способность моделей при сохранении соответствия гипотезе эффективности.

В данном исследовании предлагается использовать показатели, извлекаемые из теоремы восстановления Росса, для прогнозирования реализованной волатильности индекса S&P 500. Этот подход не опирается на исторические котировки, а использует данные по опционам для аппроксимации истинного распределения вероятностей, учитывающего рыночные ожидания и неприятие риска [10, 15]. Для подхода Росса можно использовать опционы на индексы, акции, облигации и другие активы при достаточной ликвидности [28].

Также отметим, что в работах [7, 22] указывается, что рыночные ожидания, выраженные через подразумеваемую волатильность опционов, могут не всегда точно отражать будущую волатильность, особенно на неэффективных рынках. Использование теоремы восстановления Росса как инструмента для исправления ограничений имплицитированной волатильности позволяет учитывать премию за риск и предпочтения участников рынка, что более точно соответствует реальной динамике финансовых активов.

## **2. Методы**

### **2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ**

В финансовой теории широко используется концепция риск-нейтрального ценообразования, лежащая в основе моделирования цен опционов и других производных инструментов. На развивающихся и развитых рынках цены опционов определяются приведенной стоимостью ожидаемых выплат, дисконтируемых на основе стохастического дисконтирующего фактора (SDF), который учитывает риск-нейтральные вероятности и изменения

в предпочтениях инвесторов [4, 8]. Модели стохастической волатильности и прыжков более точно учитывают экзогенные шоки и нестабильность рынка, улучшая прогнозы и оценку стоимости опционов [16, 17].

Современная интерпретация теоремы восстановления Росса предполагает разложение риск-нейтральных и истинных вероятностей, выделяя компоненты премии за риск. Теорема основывается на двух дополнительных предположениях: 1) нейтральный к риску процесс является однородной по времени цепью Маркова; 2) ядро ценообразования не зависит от траектории. Ядро ценообразования отражает предпочтения инвесторов и определяет дисконтирование будущих денежных потоков [15].

Описанные выше положения позволили доказать теорему о восстановлении истинного распределения вероятностей для базовых активов производных финансовых инструментов [30]. Рассмотрим однородный по времени процесс  $X_t$ , определенный на конечном множестве состояний с индексами от 1 до  $n$ . Обозначим через  $p_{ij}$  элементы матрицы переходных вероятностей  $P = \{p_{ij}\}$  размерности  $n \times n$ , соответствующей цепи Маркова, где  $i$  и  $j$  принимают значения от 1 до  $n$ . Эта матрица соответствует одному шагу вперед в нейтральных к риску вероятностях состояний, отображая вероятность перехода из состояния  $i$  в момент времени  $t$  в состояние  $j$  в момент времени  $t + 1$  без учета календарного времени:

$$(1) \quad p_{ij} = P(X_{t+1} = j | X_t = i), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

В настоящем исследовании риск-нейтральное распределение вероятностей определяется как матрица переходных вероятностей ( $P$ ), а истинное распределение вероятностей – как матрица ( $F$ ), полученная после применения теоремы восстановления [30] к матрице переходных вероятностей. Вычисление матрицы истинного распределения вероятностей является аппроксимацией, поэтому термины «истинное» и «аппроксимирующее» распределение вероятностей будут использоваться как синонимы.

Представленные в (1) элементы матрицы  $P$  соответствуют однопериодным вероятностям состояний и индексируются по начальным и конечным состояниям. Матрица перехода  $P$  состоит

из неотрицательных элементов. Также предполагается, что матрица  $P$  неразложима и является цепью Маркова. Под неразложимостью в данном контексте следует понимать, что для любых двух состояний  $i$  и  $j$  существует такое число  $t$ , что вероятность перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$  за  $t$  шагов (обозначается как  $p_{ij}^{(t)}$ ) больше нуля. Другими словами, из любого состояния цепи Маркова можно достичь любого другого состояния за конечное количество шагов с положительной вероятностью. Согласно теореме Перрона – Фробениуса для неперiodической цепи Маркова с неразложимой матрицей переходных вероятностей  $P$  существует ее единственное положительное собственное значение  $\lambda$ , которое по модулю больше всех остальных собственных значений, при этом соответствующий собственный вектор имеет только положительные компоненты [26]:

$$(2) \quad Pv = \lambda v,$$

где  $v$  – собственный вектор, соответствующий собственному значению  $\lambda$  матрицы  $P$  (используется для описания долгосрочного распределения или состояния равновесия модели).

Собственный вектор  $v$  является вектором-столбцом, т.е.  $v \in \mathbb{R}^n$ , где  $\mathbb{R}^n$  обозначает пространство размерности  $n$  с компонентами из множества действительных чисел  $\mathbb{R}$ . Вектор  $v$  соответствует долгосрочному распределению цепи Маркова (с точностью до масштаба). Теоретические основы подобных операций с матрицами, а также с теорией вероятности подробно описаны в работах российских академиков [1, 2, 3].

Если сумма элементов в каждой строке матрицы  $P$  равна единице, то  $P$  является стохастической матрицей:

$$(3) \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Матрица переходных вероятностей может быть разложена следующим образом:

$$(4) \quad P = \delta MF,$$

где  $\delta$  – средняя рыночная ставка дисконтирования;  $M = \{m_{ij}\}$  – ядро ценообразования (стохастический дисконтирующий фактор (SDF)) с размерностью  $n \times n$ ;  $F = \{f_{ij}\}$  – матрица истинных вероятностей перехода (искомая матрица) с размерностью  $n \times n$ .

Обратим внимание на то, что знание  $P$  недостаточно для однозначного определения сомножителей в правой части, так как ядро ценообразования является неизвестной случайной величиной.

Согласно [14] ядро ценообразования  $M$  является агентской предельной нормой замещения как функция от агрегированного потребления. Определение вектора предельных полезностей  $d = (d_1, \dots, d_n)'$ , где  $(\cdot)'$  – символ транспонирования, позволяет записать формулу (4) в виде

$$(5) \quad p_{ij} = \delta \left( \frac{d_j}{d_i} \right) f_{ij}.$$

Определение матрицы  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  позволяет представить  $F$  следующим образом:

$$(6) \quad P = \delta D^{-1} F D.$$

Или, что эквивалентно,

$$(7) \quad F = \delta^{-1} D P D^{-1}.$$

Используя дискретные пространства для цен состояний, необходимо убедиться, что отсутствуют арбитражные возможности. В модели с экзогенным потреблением отсутствие арбитража является простым условием существования равновесия с положительными ценами состояний. Отсутствие арбитража допустимо проверять по спредам опционов: вертикальный спред, спред «бабочка» и календарный спред [11].

Поскольку  $F$  является стохастической матрицей, то  $F e = e$ , где  $e$  – вектор из единиц. В сочетании с ур. (7) получаем

$$(8) \quad P D^{-1} e = \delta D^{-1} e.$$

Тогда  $v = D^{-1} e$ , что определяет собственный вектор матрицы  $P$  ( $v$  – определяется единственным образом при двух допущениях:  $P$  однородна по времени и неразложима);  $\lambda = \delta$ , что определяет собственное значение матрицы  $P$ . Было доказано, что если определить вектор  $v$ , содержащий обратные диагональные элементы  $D$ , будет получено единственное решение из (2), где  $\lambda$  соответствует  $\delta$ . Коротко говоря, в предположении временной однородности и неразложимости проблема собственных значений имеет только одно положительное решение. Теорема восста-

новления [30] была доказана, поскольку  $v$  соответствует обратному ядру ценообразования, которое, в соответствии с отсутствием арбитража, должно быть строго положительным.

## 2.2. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПОДРАЗУМЕВАЕМОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ

На первом этапе расчетов проводится интерполяция поверхности подразумеваемой волатильности опционов в матрице сроков до погашения, страйков и подразумеваемой волатильности (implied volatility [29]). Отметим, что сроки до погашения опционов  $T$  приведены к годовому формату, а под страйком  $K$  следует понимать цену исполнения опциона, указанную в контракте.

Интерполированная матрица задается дискретно 12 сроками до погашения с долями, равными количеству месяцев в году:  $T = \frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \dots, 1$ . Страйки в интерполированной матрице задаются от исходной цены базового актива в день наблюдения от -30% до +30% с шагом 5 п.п. Тогда интерполированная матрица будет иметь размерность 13 на 12. Интерполяция реализуется из наблюдаемой рыночной поверхности подразумеваемой волатильности опционов на индекс S&P 500. Инструментом интерполяции выступает кубический сплайн, как в [6, 24].

После того как были подготовлены рыночные данные: значения страйков  $K$ , значения сроков до погашения  $T$  и соответствующие им значения подразумеваемой волатильности, реализуется интерполяция с использованием кубического сплайна:

$$(9) \quad S(K, T) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} B_i(K) D_j(T),$$

где  $K$  – массив страйков;  $T$  – массив сроков до погашения;  $\alpha_{ij}$  – коэффициенты, определяемые в ходе интерполяции;  $B_i(\cdot), D_j(\cdot)$  – кубические базисные функции.

В представленном кубическом сплайне используются базисные функции (кубические полиномы) вида

$$(10) \quad B_i(K) = a_i + b_i(K - k_i) + l_i(K - k_i)^2 + m_i(K - k_i)^3,$$

$$(11) \quad D_j(T) = a_j + b_j(T - t_j) + l_j(T - t_j)^2 + m_j(T - t_j)^3,$$

где  $a_i, b_i, l_i, m_i, a_j, b_j, l_j, m_j$  – коэффициенты, определяемые условиями интерполяции;  $K$  и  $T$  – независимые переменные, значения которых интерполируются;  $k_i, t_j$  – координаты точек на осях  $k$

и  $t$ , относящихся к  $i$ -му значению страйка и  $j$ -му значению сроков до погашения соответственно.

Представленные базисные функции обладают свойствами, которые позволяют сплайну гладко проходить через точки данных и обеспечивать интерполяцию поверхности подразумеваемой волатильности [25].

Обозначим через  $IV$  интерполированную матрицу

$$(12) IV = \begin{bmatrix} iv_{1,1} & iv_{1,2} & \cdots & iv_{1,12} \\ iv_{2,1} & iv_{2,2} & \cdots & iv_{2,12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ iv_{11,1} & iv_{11,2} & \cdots & iv_{11,12} \end{bmatrix},$$

где  $iv_{ij}$  – интерполированная подразумеваемая волатильность для страйка  $i$  и срока до погашения  $j$  соответственно.

Рассмотрим целесообразность использования механизма интерполяции для подразумеваемой волатильности опционов вместо более классических подходов для моделирования подразумеваемой волатильности колл- и пут-опционов, например, с помощью модели Хестона в форме системы стохастических дифференциальных уравнений (СДУ).

Модель Хестона описывает динамику базового актива и его волатильности с помощью следующей системы СДУ:

$$(13) dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^1,$$

$$(14) dv_t = k(\theta - v_t)dt + \sigma \sqrt{v_t} S_t dW_t^2,$$

где  $S_t$  – цена базового актива;  $v_t$  – моментальная волатильность;  $k$  – скорость реверсии;  $\theta$  – долгосрочное среднее;  $\sigma$  – волатильность волатильности;  $W_t^1, W_t^2$  – стандартные броуновские процессы с корреляцией  $\rho$ .

Подразумеваемая волатильность оценивается на основе предположений о параметрах модели, однако эмпирические исследования показывают, что она не всегда способна точно предсказать будущие изменения реализованной волатильности. Одной из причин этого является то, что параметрические модели, например модель Хестона, предполагают фиксированные значения параметров  $(k, \theta, \sigma)$ , что не всегда соответствует реальным рыночным условиям. Исследования, например [31], показывают, что наличие временной изменчивости параметров существенно

влияет на точность прогнозов, что делает *IV* менее надежным предиктором.

### 2.3. РАСЧЕТ ЦЕН КОЛЛ-ОПЦИОНОВ И ПРОВЕРКА НА ОТСУТСТВИЕ АРБИТРАЖА

На следующем этапе имея матрицу интерполированной поверхности подразумеваемой волатильности рассчитываются цены колл-опционов по формуле Блэка – Шоулза [9]:

$$(15) c(K, T) = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2),$$

где  $c$  – цена колл-опциона;  $S$  – цена базового актива;  $N(\cdot)$  – функция стандартного нормального распределения;  $K$  – страйк из интерполированной поверхности подразумеваемой волатильности;  $r$  – безрисковая процентная ставка в день наблюдения;  $T$  – срок до погашения из интерполированной поверхности подразумеваемой волатильности;  $d_1$  и  $d_2$  определяются следующим образом:

$$(16) d_1 = \frac{\left(\ln\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$(17) d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

где  $\sigma$  – значение волатильности из интерполированной поверхности волатильности.

Рассчитанные цены колл-опционов для каждого страйка  $i$  и срока до погашения  $j$  являются элементами матрицы  $C = \{c_{ij}\}$ :

$$(18) C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} \end{bmatrix},$$

где  $c_{ij}$  – цены колл-опционов, рассчитанные по формуле Блэка – Шоулза, соответствующие  $i$ -му страйку и  $j$ -му сроку до погашения.

Полученная матрица цен колл-опционов  $C$  проверяется на отсутствие арбитражных возможностей по трем видами спредов: вертикальный, «бабочка» (баттерфляй) и календарный. Следует отметить, что отсутствие арбитража лежит в основе современной теории ценообразования активов.

Пусть имеется цена колл-опциона  $c_{ij}$  со страйком  $K_i$ ,  $i = 1, \dots, 13$  и сроки до погашения  $T_j$ ,  $j = 1, \dots, 12$ .

Тогда проверка матрицы цен опционов по вертикальному спреду заключается в удовлетворении следующему условию:

$$(19) 0 \leq \frac{c_{i-1,j} - c_{i,j}}{K_i - K_{i-1}} \leq 1.$$

Вертикальный спред по определению является длинной позицией по  $\frac{1}{K_i - K_{i-1}}$  колл-опционам на страйке  $K_{i-1}$  и короткой позицией по  $\frac{1}{K_i - K_{i-1}}$  колл-опционам на страйке  $K_i$ . Отсюда следует, что выплаты по таким позиция ограничены сверху единицей, а снизу – нулем. Удовлетворение условию нахождения каждого элемента матрицы  $C$  в пределах от 0 до 1 является проверкой на безарбитражность по вертикальному спреду.

Проверка на отсутствие арбитражных возможностей по спреду баттерфляй реализуется в предположении об открытии трех позиций: длинная позиция по колл-опциону со страйком  $K_{i-1}$ , короткая позиция по  $\frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{K_{i+1} - K_i}$  двум колл-опционам со страйком  $K_i$ , длинной позицией по  $\frac{K_i - K_{i-1}}{K_{i+1} - K_i}$  колл-опционам со страйком  $K_{i+1}$ . Тогда проверка на безарбитражность по спреду баттерфляй заключается в удовлетворении условию, что стоимость спреда больше нуля:

$$(20) 0 \leq c_{i-1,j} - 2 \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{K_{i+1} - K_i} c_{i,j} + \frac{K_i - K_{i-1}}{K_{i+1} - K_i} c_{i+1,j}.$$

Третий тест на отсутствие арбитражных возможностей проводится по календарному спреду. Для любого дискретного страйка и для любого дискретного срока до погашения необходимо выполнение следующего условия:

$$(21) 0 \leq c_{i,j+1} - c_{i,j}.$$

Разница цен колл-опционов с ближайшими сроками до погашения и одним страйком представляет собой календарный спред, это утверждение аналогично открытию длинной позиции по колл-опциону со сроком до погашения  $T_{j+1}$  и короткой позиции со сроком до погашения  $T_j$  при одинаковых страйках  $K_i$ . Отсутствие отрицательной стоимости такой позиции позволяет делать вывод об отсутствии арбитражных возможностей в матрице цен колл-опционов  $C$  [22].

#### 2.4. РАСЧЕТ МАТРИЦ ЦЕН СОСТОЯНИЙ И ПЕРЕХОДНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ $P$

Далее следует этап вычисления матрицы состояний (state prices): по формуле [12] определяют функцию цен состояний  $\pi(k, t)$  как вторую частную производную по страйку из формулы Блэка – Шоулза:

$$(22) \pi(K, T) = e^{rT} \frac{\partial^2 c(K, T)}{\partial K^2},$$

где  $\pi(K, T)$  – функция цен состояний;  $K$  – страйк колл-опциона;  $T$  – срок до погашения;  $c(K, T)$  – функция цены колл-опциона из формулы Блэка – Шоулза.

При использовании разностной аппроксимации 2-го порядка функция  $\pi(k, t)$  принимает вид

$$(23) \pi(K, T) \approx e^{rT} \frac{c(K+\Delta_K, T) - 2c(K, T) + c(K-\Delta_K, T)}{(\Delta_K)^2}.$$

Тогда матрица  $(\pi) = \{\pi_{ij}\}$  будет иметь размерность 11 на 12.

После получения матрицы состояний предстоит этап оценки матрицы переходных вероятностей. Для нахождения матрицы переходных вероятностей предстоит решить оптимизационную задачу. Отличительной особенностью элементов матрицы переходных вероятностей является то, что они описывают риск-нейтральные переходные вероятности из любого состояния рынка в любое другое возможное состояние [19]. Таким образом, матрица переходных вероятностей – это цепь Маркова, где отражены вероятности изменения рыночной доходности базового актива опциона [26].

Пусть  $P$  – это матрица вероятностей перехода рынка из одного состояния в другое, где  $p_{ij}$  обозначает вероятность перехода из состояния  $i$  в состояние  $j$ .

Поскольку оцененная ранее матрица  $(\pi)$  имела размерность 11 на 12, где 11 — это количество страйков, то матрица  $P$  будет иметь размерность 11 на 11. Каждый элемент матрицы  $P$  интерпретируется как вероятность перехода базового актива опциона, например, индекса S&P 500 из одного значения в другое. Для удобства в матрице  $P$  переведем страйки в доходности от  $-25\%$  до  $+25\%$  с шагом 5 п.п. от спот-цены финансового актива в день наблюдения. Тогда можно говорить, что элементы центральной

строки матрицы  $P$  отражают вероятности перехода рынка из текущего состояния (0%) в другие возможные дискретно заданные состояния [21].

Для решения задачи вводятся достаточные условия оптимальности:

1. Поскольку искомая матрица  $P$  – это матрица вероятностей, то все элементы должны быть ограничены снизу 0, а сверху 1.

2. Искомая матрица  $P$  имеет вид цепи Маркова, следовательно, сумма элементов каждой строки этой матрицы должна быть равна 1.

3. Еще одно вводимое ограничение связано с унимодальностью. Для каждой строки  $i$  матрицы  $P$  вероятности перехода должны возрастать до диагонального элемента и убывать после, тогда по диагонали данной матрицы откладываются максимальные значения каждой строки.

4. Для матрицы переходных вероятностей  $P$  и матрицы  $(\pi)$  установим ограничение на равенство центральной строки матрицы  $P$  первому столбцу матрицы  $(\pi)$ . Четвертое ограничение заранее задает центральную строку матрицы  $P$ , тогда с помощью оптимизации необходимо найти элементы строки матрицы  $P$  с первой по пятую и с 7-й по 11-ю.

Таким образом, минимизации целевой функции сводится к решению задачи оптимизации следующего вида:

$$(24) \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=2}^{11} (\pi_{i,j-1} * p_{ij} - \pi_{ij})^2 \rightarrow \min_{p_{ij}}$$

с ограничениями

$$(25) 0 \leq p_{ij} \leq 1,$$

$$(26) \sum_{i=1}^{10} p_{ij} = 1,$$

$$(27) p_{i1} \leq p_{i2} \leq \dots \leq p_{ii} \geq p_{i(i+1)} \geq \dots \geq p_{i11},$$

$$(28) p_{\frac{n+1}{2},j} = (\pi)_{1,j} \quad \forall j = 1, 2, \dots, 11.$$

Поиск минимума в рамках поставленной задачи реализуется с помощью алгоритма SLSQP (последовательное квадратичное программирование методом наименьших квадратов) в Python, модуль `scipy`.

### *2.5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ И ПОЛУЧЕНИЕ ИСТИННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИНДЕКСА S&P 500*

После проведения оптимизации получаем значения искомой матрицы переходных вероятностей  $P$ . Пример матрицы  $P$  представим в результатах исследования. Применяя к матрице  $P$  теорему восстановления, вычисляем матрицу истинных переходных вероятностей (матрица  $F$ ).

Матрица  $F$  также имеет размерность 11 на 11, где каждая ось матрицы является рыночным сценарием ожидаемой доходности от  $-25\%$  до  $+25\%$  с шагом 5 п.п. Наибольший интерес здесь представляет центральная строка матрицы  $F$ , так как она показывает вероятности перехода рынка в различные состояния из нулевой точки ( $0\%$ ). Тогда центральная строка матрицы  $F$  – это аппроксимация по теореме восстановления плотности вероятности достижения рынком дискретно заданных состояний доходности через месяц из момента времени  $t$ . Имея функцию плотности распределения, представляется возможным оценка вероятностных характеристик (моментов) распределения [5]. Моменты распределения (математическое ожидание:  $\mu$ , стандартное отклонение:  $\sigma$ , асимметрия:  $\gamma$ , эксцесс:  $\xi$ ) вычисляются по известным формулам. Следует также отметить, что моменты риск-нейтрального распределения вероятностей рассчитаны аналогичным образом, где за исходные данные взята матрица  $P$ .

### *2.6. ОЦЕНКА ПРЕДИКТИВНОЙ СИЛЫ ИСТИННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ИНДЕКСА S&P 500 В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕАЛИЗОВАННОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ*

В контексте поставленной цели повышения уровня надежности оценки ожидаемой волатильности интерес представляет аппроксимация значения истинного стандартного отклонения. На заключительном этапе исследования производится оценка влияния стандартного отклонения в момент времени  $t$  на значение реализованной волатильности в момент времени  $t + 1$ , как в [20].

Формула для расчета реализованной волатильности:

$$(29) RV_t = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n \left( \ln \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \right)^2},$$

где  $RV_t$  – реализованная волатильность в момент времени  $t$ ;  $n$  – количество наблюдений;  $S_t$  – значение индекса S&P 500 (пункты) в момент времени  $t$ .

Оцениваемые модели представим в таблице 1.

Таблица 1. Определение переменных используемых в прогностических моделях

Используемые переменные	
Зависимая переменная:	
– Реализованная волатильность S&P 500	$RV_{t+1}$ – реализованная волатильность, оцененная на данных индекса S&P 500, частота данных – 1 месяц
Регрессоры:	
– Восстановленная волатильность (recovered volatility)	$REV_t$ – аппроксимация стандартного отклонения из истинного распределения вероятностей (матрица $F$ )
– Риск-нейтральная волатильность (risk-neutral volatility)	$RNV_t$ – аппроксимация стандартного отклонения из риск-нейтрального распределения вероятностей (матрица $P$ )
– Показатель предпочтения внутристранового риска	$REV_t - RNV_t$
Оцениваемые модели	
Модели регрессии	Методы оценки
1: $RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 REV_t + \varepsilon_t$	Оценка МНК с применением коррекции Ньюи – Уэста (1) и Elastic Net-регрессия (2)
2: $RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 RNV_t + \varepsilon_t$	
3: $RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 (REV_t - RNV_t) + \varepsilon_t$	
4: $RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 REV_t + \beta_2 (REV_t - RNV_t) + \varepsilon_t$	
5: $RV_{t+1} = \beta_0 + \beta_1 RNV_t + \beta_2 (REV_t - RNV_t) + \varepsilon_t$	

Следует отметить, что выбор регрессионных моделей неслучаен. Коррекция стандартных ошибок Ньюи – Веста является методом улучшения оценок стандартных ошибок в случае наличия автокорреляции в остатках регрессионной модели [27].

Elastic Net-регрессия в рамках процедуры оценки дополнительно использует инструменты  $L1$ - и  $L2$ -регуляризации, что способствует снижению вероятности переобучения модели. В рамках настоящего исследования соотношение использования  $L1$ - и  $L2$ -методов регуляризации определяется равными весами.

Для оценки и сравнения качества представленных в таблице 1 моделей в настоящем исследовании используются метрики  $R^2$ , скорректированный  $R^2$ , AIC и BIC.

Качество оцениваемых моделей будем сравнивать с базовой бенчмарк-моделью для прогнозирования реализованной волатильности HAR-RV (гетерогенная авторегрессионная модель реализованной волатильности):

$$(30) RV_{t+1} = \alpha + \beta^d RV_t^d + \beta^w RV_t^w + \beta^m RV_t^m + \varepsilon_t,$$

где  $RV_t^d$  – реализованная волатильность в день  $t$ ;  $RV_t^w$  – средняя реализованная волатильность за неделю;  $RV_t^m$  – средняя реализованная волатильность за месяц.

### 3. Данные

Для расчетов используются данные о подразумеваемой волатильности колл-опционов, страйках и сроках до погашения на индекс S&P 500, полученные из цепочек опционов (SPX Option Chains). Эти данные представляют собой трехмерную функцию, позволяющую оценивать уровень подразумеваемой волатильности для любой пары страйка и срока до погашения, формируя поверхность подразумеваемой волатильности. Источник данных: optionsDX. Расчеты проводятся на последний торговый день каждого месяца с 01.01.2010 по 01.10.2023, что составляет 163 торговых дня. Выбор данных по опционам на индекс S&P 500 обусловлен его высокой ликвидностью и наилучшей аппроксимацией динамики финансового рынка США.

Также в исследовании используется значение безрисковой ставки. В качестве безрисковой ставки рынка США используется

доходность по 10-летним казначейским облигациям США. Тикер инструмента: «^TNX», поставщик информации: Yahoo Finance.

Для расчета реализованной волатильности применяются исторические котировки индекса S&P 500.

#### 4. Результаты и обсуждение

В этом разделе представлены результаты вычислений. На первом этапе были подготовлены данные по опционам на индекс S&P 500 и сформирована матрица поверхности подразумеваемой волатильности, где каждый элемент — это колл-опцион с определённым страйком и сроком до погашения, при среднем количестве 515 опционов на вычисление. Эффективность применения кубического сплайна в задаче интерполяции следующая:

Доля успешных проверок по вертикальному спреду: 98,18%.

Доля успешных проверок по спреду баттерфляй: 90,30%.

Доля успешных проверок по календарному спреду: 98,18%.

Как видно по результатам, эффективность кубического сплайна довольно высока по всем спредам. Рассчитанные цены колл-опционов на индекс S&P 500 по трем выбранным видам спредов более чем в 90% циклов вычислений удовлетворяют условиям безарбитражности.

На 31.12.2019 интерполированная поверхность подразумеваемой волатильности на индекс S&P 500 выглядит следующим образом (рис. 1).

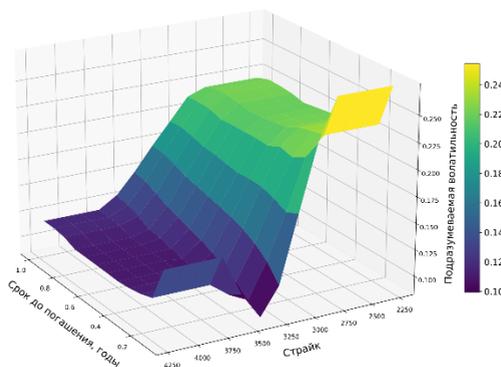


Рис. 1. Интерполированная поверхность подразумеваемой волатильности (дата: 31.12.2019)

Как видно на рис. 1, значение подразумеваемой волатильности имеет свойство увеличиваться по мере уменьшения значения страйка.

После расчета матрицы цен колл-опционов на индекс S&P 500 предстоит этап вычисления матрицы цен состояний и матрицы переходных вероятностей. Интерпретацию значений в матрице переходных вероятностей поясним примером: значение в  $i$ -й строке  $k$ -го столбца матрицы переходных вероятностей указывает на вероятность перехода доходности базового актива опциона (в данном случае американского фондового индекса S&P 500) из одного состояния в другое через 1 месяц.

Представим вычисленные функции плотности вероятности (рис. 2) и функцию распределения (рис. 3) для центральных строк матриц истинных и риск-нейтральных вероятностей перехода для динамики индекса S&P 500 на 31.12.2019.

Эти распределения позволяют аппроксимировать моменты распределения: математическое ожидание, стандартное отклонение, асимметрию и эксцесс. Далее представим оцененные вероятностные характеристики, начиная с математического ожидания (рис. 4).

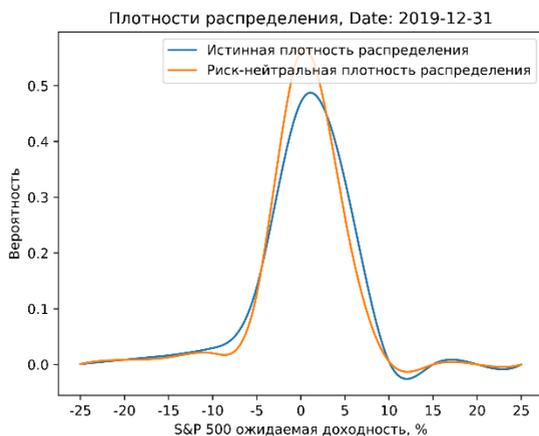


Рис. 2. Аппроксимация восстановленной и риск-нейтральной плотности вероятности (дата: 31.12.2019)



Рис. 3. Аппроксимация восстановленной и риск-нейтральной функции распределения вероятностей (дата: 31.12.2019)

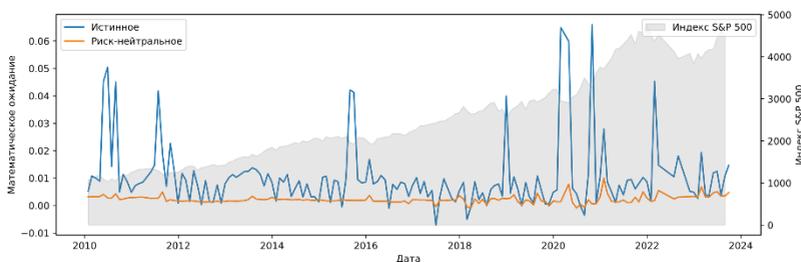


Рис. 4. Аппроксимация восстановленного и риск-нейтрального математического ожидания

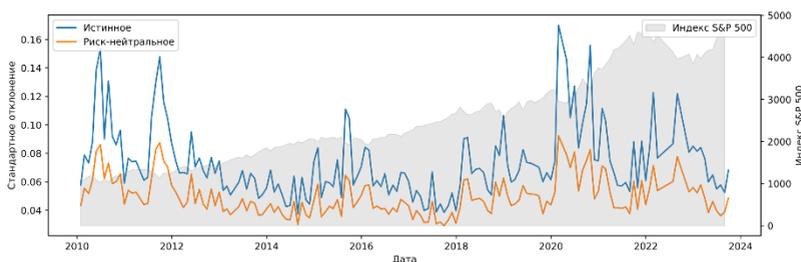
По данным рис. 4 наблюдается, что восстановленное математическое ожидание доходности индекса S&P 500 имеет куда более нестабильную динамику, чем риск-нейтральное. Сильный разброс в динамике среднего значения доходности S&P 500 в случае сравнения истинной и риск-нейтральной меры связан с фактором премии за риск. В определенные периоды времени риск аппетит инвесторов повышается, что способствует увеличению ма-

тематического ожидания, полученного по теореме восстановления, чем в случае риск-нейтрального распределения вероятностей.

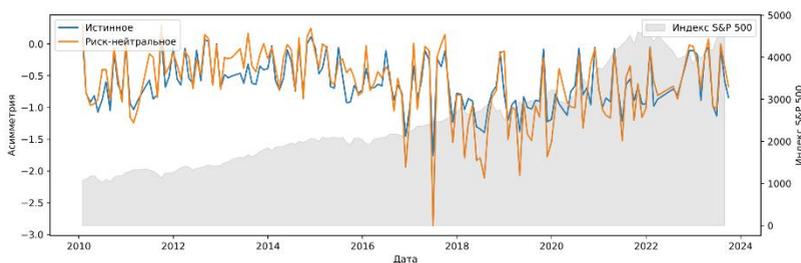
На следующем рисунке представим динамику стандартного отклонения (рис. 5).

Стандартное отклонение доходности представляет собой меру волатильности. Из рис. 5 видно, что на всем рассматриваемом временном диапазоне волатильность, полученная после применения теоремы восстановления выше, чем риск-нейтральная волатильность. Подобное расхождение в значениях волатильности является примером того, как предпочтения к риску влияют на нестабильность динамики финансовых активов.

Далее отобразим динамику показателей асимметрии и эксцесса (рис. 6–7).



*Рис. 5. Аппроксимация восстановленного и риск-нейтрального стандартного отклонения*



*Рис. 6. Аппроксимация восстановленной и риск-нейтральной асимметрии*

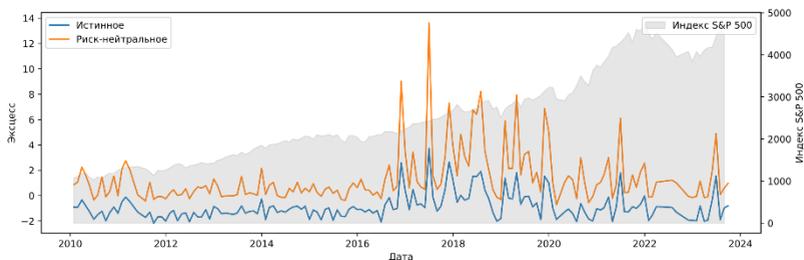


Рис. 7. Аппроксимация восстановленного и риск-нейтрального эксцесса

Следует отметить, что асимметрия имеет тенденцию к нахождению значений в отрицательной зоне, как для риск-нейтрального, так и для истинного распределения вероятностей. В таком случае можно говорить, что хвосты распределения скошены влево относительно пика.

Значения эксцесса в определенные временные периоды имеют тенденцию к возрастанию в область положительных значений, что свидетельствует о более острых пиках и толстых хвостах распределения. Более толстые хвосты указывают на наличие ожиданий об экстремальных значениях доходности в определенное время.

Далее перейдем к рассмотрению результатов построения предиктивных моделей. Как было описано в методологии настоящего исследования, будет производиться моделирование влияния восстановленной и риск-нейтральной волатильности на значение реализованной волатильности будущего месяца. Оценка производится при сравнении двух моделей: оценка МНК с применением коррекции Ньюи – Уэста и Elastic Net-регрессия (таблица 2).

Анализ регрессионных моделей продемонстрировал, что как восстановленная волатильность  $REV_t$ , так и риск-нейтральная волатильность  $RNV_t$  оказывают статистически значимое влияние на реализованную волатильность в следующем периоде. Оценки коэффициентов для  $REV_t$  и  $RNV_t$  остаются значимыми на уровне 1% во всех моделях, что подтверждает их положительную связь с будущей реализованной волатильностью.

Сравнительный анализ предложенных моделей показал их превосходство над базовой моделью прогнозирования реализованной волатильности HAR-RV по точности. В частности, модели, включающие  $REV_t$  и  $RNV_t$ , обеспечивают более высокие значения скорректированного коэффициента детерминации, что свидетельствует о большей предсказательной способности данных факторов. HAR-RV демонстрирует скорректированный  $R^2$  на уровне 21,1%–22,4%, тогда как лучшие модели с  $REV_t$  и  $RNV_t$  достигают значений 38,2%.

Научно обоснованной среди предложенных моделей является модель 1, поскольку она демонстрирует наивысшее значение скорректированного  $R^2$ , равное 38,2%, что существенно превышает результаты аналогичных исследований. Например, в работе [20] максимальный скорректированный  $R^2$  достигал лишь 22,3% при прогнозировании реализованной волатильности индекса S&P 500 с использованием фактора  $REV_t$  и оценкой модели обычным МНК.

Следует отметить, что относительно невысокие значения  $R^2$  объясняются длительным горизонтом прогнозирования. В данном исследовании осуществляется прогноз на месяц вперед, что является максимально возможным периодом предсказания для реализованной волатильности. Если бы прогнозирование осуществлялось на более короткие временные интервалы, значения  $R^2$  были бы выше, что соответствует закономерностям, наблюдаемым в литературе по прогнозированию волатильности.

Сравнение методов оценки параметров регрессионных моделей указывает на превосходство Elastic Net-регрессии перед МНК с коррекцией Ньюи – Уэста. Данный метод позволяет учитывать возможную мультиколлинеарность факторов и предотвращает переобучение модели, что подтверждается более низкими значениями информационных критериев AIC и BIC по сравнению с МНК. В частности, AIC для Elastic Net составляет -1766 против -1322 у МНК, а BIC — -1763 против -1316 соответственно. Таким образом, Elastic Net-регрессия представляет собой более эффективный инструмент для прогнозирования реализованной волатильности, обеспечивая баланс между точностью предсказания и стабильностью оценок параметров модели.

Таблица 2. Результаты оценки регрессионных моделей

Параметр	Оценка МНК с применением коррекции Ньюи – Уэста					Elastic Net-регрессия						
	1	2	3	4	5	HAR- RV	1	2	3	4	5	HAR- RV
Константа	0,001 (0,001)	-0,002 (0,001)	0,004*** (0,001)	0,000 (0,001)	0,000 (0,001)	0,006*** (0,001)	0,009*** (0,000)	0,009*** (0,000)	0,009*** (0,000)	0,009*** (0,001)	0,009*** (0,001)	0,007*** (0,001)
$REV_t$	0,109*** (0,014)			0,151*** (0,053)			0,003*** (0,000)			0,003*** (0,001)		
$RNV_t$		0,208*** (0,025)			0,152*** (0,053)		0,003*** (0,000)				0,002*** (0,001)	
$REV_t - RNV_t$			0,208*** (0,031)	-0,089 (0,115)	0,063 (0,065)		0,003*** (0,000)		0,003*** (0,000)	0,000 (0,001)	0,001 (0,001)	
$RV_{t-1}$						0,110*** (0,010)						0,113*** (0,009)
$RV_{t-5}$						0,117*** (0,024)						0,125*** (0,021)
$RV_{t-21}$						0,007** (0,029)						0,009** (0,035)
$R^2$	0,386	0,383	0,355	0,389	0,389	0,217	0,386	0,383	0,355	0,386	0,389	0,235
Скоп. $R^2$	0,382°	0,379	0,351	0,381	0,381	0,211	0,382°	0,379	0,350	0,378	0,381	0,224
AIC	-1322	-1321	-1314	-1320	-1320	-1256	-1766	-1765	-1758	-1764	-1765	-1594
BIC	-1316	-1315	-1308	-1311	-1311	-1252	-1763	-1762	-1756	-1758	-1759	-1589

Примечание:

\* соответствует значению  $p$ -value < 0,10

\*\* соответствует значению  $p$ -value < 0,05

\*\*\* соответствует значению  $p$ -value < 0,01

° соответствует модели с наивысшим значением скорр.  $R^2$

## 5. Заключение

В результате исследования подчеркивается важность теоремы восстановления, предложенной Россом в 2015 году, для анализа рыночной волатильности. Эмпирические данные показывают, что волатильность, аппроксимированная с использованием теоремы восстановления в сочетании с риск-нейтральной волатильностью, эффективно объясняет будущую реализованную волатильность индекса S&P 500 на горизонте 1 месяц.

1. Результаты подтверждают значимость теоремы восстановления и демонстрируют, что методология точно аппроксимирует истинные ожидания рынка и предпочтения риска.

2. Исследование открывает новые возможности для изучения истинного и риск-нейтрального распределений вероятностей для финансовых активов, включая анализ более высоких моментов. Прогностическая способность переменных, полученных с использованием теоремы, имеет практическое значение для стратегий портфельного управления и анализа рисков.

## Литература

1. БРОНЕВИЧ А.Г., ЛЕПСКИЙ А.Е. *Обзор прикладной и промышленной математики*. – М.: Изд-во ТВП, 2000. – Т. 7, №2. – С. 322–323.
2. ПРОХОРОВ Ю.В. *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения*. – 1956. – Т. 1, №2. – С. 177–238.
3. ПРОХОРОВ Ю.В., КОЛНОГОРОВ А.В., ХОХЛОВ В.И. *Четырнадцатый всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике (осенняя сессия) 29 сентября-5 октября 2013 г. Великий Новгород Научные доклады // Обзор прикладной и промышленной математики*. – 2013. – Т. 20, №4. – С. 525–574.
4. AMIR A. et al. *Can we recover the cover? // Algorithmica*. – 2019. – Vol. 81, No. 7. – P. 2857–2875.

5. ANAMIZU K. *Ross Recovery under the Tree Model and Its Application to Risk Management* : Dis. – Tokyo Metropolitan University, 2018.
6. AUDRINO F., HUITEMA R., LUDWIG M. *An empirical implementation of the Ross recovery theory as a prediction device* // Journal of Financial Econometrics. – 2021. – Vol. 19, No. 2. – P. 291–312.
7. BAKER N.L., HAUGEN R.A. *Low risk stocks outperform within all observable markets of the world* // Available at SSRN 2055431. – 2012.
8. BAKSHI G., CHABI-YO F., GAO X. *A recovery that we can trust? Deducing and testing the restrictions of the recovery theory* // The Review of Financial Studies. – 2018. – Vol. 31, No. 2. – P. 532–555.
9. BLACK F., SCHOLES M. *The pricing of options and corporate liabilities* // Journal of Political Economy. – 1973. – Vol. 81, No. 3. – P. 637–654.
10. BLISS R.R., PANIGIRTZOGLU N. *Option-implied risk aversion estimates* // The Journal of Finance. – 2004. – Vol. 59, No. 1. – P. 407–446.
11. BOROVIČKA J., HANSEN L.P., SCHEINKMAN J.A. *Mispecified recovery* // The Journal of Finance. – 2016. – Vol. 71, No. 6. – P. 2493–2544.
12. BREEDEN D.T., LITZENBERGER R.H. *Prices of state-contingent claims implicit in option prices* // Journal of business. – 1978. – P. 621–651.
13. CARR P., YU J. *Risk, return, and Ross recovery* // The Journal of Derivatives. – 2012. – Vol. 20, No. 1. – P. 38–59.
14. CHEN A., DYBVIK P.H. *Optimal casualty insurance and repair in the presence of a securities market* // Available at SSRN 1344239. – 2013.
15. COX J.C., ROSS S.A. *The valuation of options for alternative stochastic processes* // Journal of Financial Economics. – 1976. – Vol. 3, No. 1–2. – P. 145–166.
16. DUFFIE D. *Dark markets: Asset pricing and information transmission in over-the-counter markets* // Princeton University Press, 2012. – Vol. 6.

17. DUFFIE D. *Stochastic Equilibria: Existence, Spanning Number, and the No Expected Financial Gain from Trade Hypothesis* // *Econometrica: Journal of the Econometric Society*. – 1986. – P. 1161–1183.
18. FAMA E.F. *Random walks in stock market prices* // *Financial Analysts Journal*. – 1995. – Vol. 51, No. 1. – P. 75–80.
19. FIGLEWSKI S. *Risk-neutral densities: A review* // *Annual Review of Financial Economics*. – 2018. – Vol. 10. – P. 329–359.
20. GAGNON M.H., POWER G.J., TOUPIN D. *Forecasting market index volatility using Ross-recovered distributions* // *Quantitative Finance*. – 2022. – Vol. 22, No. 2. – P. 255–271.
21. HÄRDLE W., HLÁVKA Z. *Dynamics of state price densities* // *Journal of Econometrics*. – 2009. – Vol. 150, No. 1. – P. 1–15.
22. HAUGEN R.A., BAKER N.L. *Commonality in the determinants of expected stock returns* // *Journal of financial economics*. – 1996. – Vol. 41, No. 3. – P. 401–439.
23. JACKWERTH J.C., MENNER M. *Does the Ross recovery theory work empirically?* // *Journal of Financial Economics*. – 2020. – Vol. 137, No. 3. – P. 723–739.
24. KOSTAKIS A., PANIGIRTZOGLU N., SKIADOPOULOS G. *Market timing with option-implied distributions: A forward-looking approach* // *Management Science*. – 2011. – Vol. 57, No. 7. – P. 1231–1249.
25. LO A.W. *Financial econometrics* // *International Library of Financial Econometrics*, Forthcoming. – 2007.
26. MEYER C.D. *Matrix analysis and applied linear algebra* // *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2023.
27. NEWEY W.K., WEST K.D. *A simple, positive semi-definite, heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix* // *Applied econometrics*. – 2014. – Vol. 33, No.1. – P. 125–132.
28. QIN L., LINETSKY V., NIE Y. *Long forward probabilities, recovery, and the term structure of bond risk premiums* // *The Review of Financial Studies*. – 2018. – Vol. 31, No. 12. – P. 4863–4883.
29. ROSS S.A. *Options and efficiency* // *The Quarterly Journal of Economics*. – 1976. – Vol. 90, No. 1. – P. 75–89.
30. ROSS S. *The recovery theory* // *The Journal of Finance*. – 2015. – Vol. 70, No. 2. – P. 615–648.

31. SØRENSEN H. *Simulated likelihood approximations for stochastic volatility models* // Scandinavian Journal of Statistics. – 2003. – Vol. 30, No. 2. – P. 257–276.

## **FORECASTING THE REALIZED VOLATILITY BASED ON INFORMATION EXTRACTED FROM THE ROSS RECOVERY THEOREM**

**Dmitry Patlasov**, Perm State University, Perm, assistant  
(dmitriypatlasov@gmail.com)

*Abstract. This article discusses an approach to predicting the realized volatility of the S&P 500 index using data extracted from options due to the Ross recovery theorem. The purpose of this study is to investigate the possibility of using the indicators obtained after applying the Ross recovery theorem as exogenous factors in the forecasting model of realized volatility of financial instruments. The methodology used to achieve the research objective eliminates the need to use historical quotations of financial assets, focusing solely on options. The paper compares the accuracy of forecasting realized volatility between the proposed models and the basic HAR-RV approach. Empirical results have shown that the proposed approach provides a higher accuracy of predictions. The approach used in the Ross recovery theorem based on the approximation of the distribution density function of the underlying option asset allows for more accurate consideration of market participants' expectations and their risk preferences, which can become statistically significant factors in forecasting models of various financial indicators. The results of the study can be used to assess systematic risk, predict the likelihood of corrections and crises in financial markets.*

**Keywords:** volatility, distribution of profitability of financial assets, recovery theorem, probabilistic characteristics, forecasting.

УДК: 004.942

ББК: 30в6

*Статья представлена к публикации  
членом редакционной коллегии М.И. Гераськиным.*

*Поступила в редакцию 11.11.2024.*

*Опубликована 31.03.2025.*