

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ СГЛАЖЕННОЙ ТРАЕКТОРИИ ПРИ НАЛИЧИИ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ТОЧЕК ТРАЕКТОРИИ

Макаров М. И.¹, Морозов Ю. В.²
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Представлен метод сглаживания траектории, полученной с использованием высокочастотных данных о движении мототехники по пересечённой местности, с целью повысить точность и плавность траекторий в условиях присутствия шума. Основное внимание уделено особенностям применению квинтических В-сплайнов, которые обеспечивают высокую степень гладкости при описании траектории и предварительной фильтрации данных. В статье последовательно описаны технические и математические сложности, возникающие при реализации алгоритма на реальных данных, а также предложены методы их преодоления. Один из таких методов — фильтрация выбросов для устранения резких отклонений исходной траектории с использованием цифрового фильтра Баттерворта. Рассмотрены и протестированы различные подходы для работы с большим количеством точек траектории, включая разбиение данных на отдельные перекрывающиеся окна с их последовательной сшивкой, что значительно улучшает производительность алгоритма. Для оптимизации вычислений также предложено использовать разреженные матрицы, эффективно работающие с большим объемом данных и занимающих существенно меньший объем памяти компьютера по сравнению с традиционными. Эффективность предложенного подхода подтверждена на примерах, где визуализированы сглаженные траектории, полученные из зашумленных данных.

Ключевые слова: В-сплайн, GNSS-приемник, кривизна, оптимизация, сглаживание траекторий.

1. Введение

В современном мире алгоритмы следования по маршруту играют важную роль в различных областях, начиная от навигации беспилотных транспортных средств и заканчивая робототехникой [11]. Одним из ключевых требований для успешного применения таких алгоритмов является наличие гладкой траектории,

¹ Максим Игоревич Макаров, аспирант, м.н.с. (maxim.i.makarov@gmail.com).

² Юрий Викторович Морозов, к.ф.-м.н., с.н.с. (tot1983@ipu.ru).

которая строится на основе записанных ранее координат. Гладкость траектории обеспечивает плавное и предсказуемое движение, что особенно важно для обеспечения безопасности и эффективности управления.

С развитием технологий и увеличением точности измерительных приборов появилась возможность получать высокочастотные данные о местоположении объекта с высокой точностью (до нескольких сантиметров при использовании технологии RTK¹ [8]). Данные, снятые при движении на мототехнике или снегоциклах [4] по пересечённой местности, предоставляют уникальную возможность для построения точных и детализированных траекторий, однако высокая частота записи и, как результат, объем данных предъявляют дополнительные требования к алгоритмам сглаживания и обработки траекторий.

В [10–17] рассматривается построение трёхмерного покрытия выделенной области с помощью начального пути, пересекающего поле. Такая постановка задачи о планировании пути наиболее популярна. В рамках неё предполагается, что как минимум один реальный проезд уже был. В [14] идёт совершенствование данного подхода на случай наличия препятствий на поле, в том числе новых. Данная работа рассматривает задачу «как построить этот начальный путь, чтобы он был эталонным для дальнейшего использования». Рассматриваются методы и подходы к сглаживанию траекторий, полученных с помощью высокочастотных данных. Особое внимание уделяется алгоритмам, способным эффективно обрабатывать данные, записанные в условиях пересечённой местности, что актуально для применения в мототехни-

¹ Англ. *Real Time Kinematics* – режим позиционирования по измерениям ГНСС, включающим фазовые измерения. Если удалось получить оценки вторых разностей фазовых неоднозначностей в виде целых чисел, то позиция называется фиксированной (*fixed*). Если позиция определяется с использованием вещественных оценок фазовых неоднозначностей, то она называется плавающей (*float*). Если оценки фазовых неоднозначностей не получены, то для позиционирования используются только кодовые измерения. Если для кодовых измерений не вычисляются первые и вторые разности, то позиция называется автономной (*standalone*).

ке. Рассматриваются также примеры практического применения этих методов и анализ их эффективности на реальных данных.

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая задача. Имеется набор контрольных точек $r_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, \dots, n$, по которым нужно построить В-сплайновую аппроксимацию траектории. При этом известна ошибка измерения координат, равная δ . Помимо исходного набора точек также рассматриваются все возможные наборы, которые удовлетворяют условию

$$|\tilde{r}_i - r_i| \leq \delta.$$

Среди всех возможных наборов необходимо найти такой, чтобы форма В-сплайновой кривой была оптимальной в соответствии с определённым критерием, который будет детализован далее. Кроме того, предполагается, что аппроксимируемая кривая, будучи траекторией реального колёсного транспортного средства, удовлетворяет необходимым требованиям гладкости и ограничениям на кривизну.

3. Аппроксимация сплайном

Пространственная траектория, заданная n контрольными точками, в данной работе аппроксимируется квинтической¹ В-сплайновой кривой, состоящей из элементарных В-сплайнов пятого порядка (квинтических В-сплайнов) [6, 19]. Каждый элементарный квинтический В-сплайн строится по шести точкам следующим образом:

$$r_i(t) = R_i \text{MT}(t), R_i = r_{i-1}, r_i, r_{i+1}, r_{i+2}, r_{i+3}, r_{i+4}, \\ T(t) = [1, t, t^2, t^3, t^4, t^5]^T, t \in [0, 1],$$

¹ *Лат. quintus (пятый) – пятого порядка*

$$M = \frac{1}{120} \begin{pmatrix} -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \\ 5 & -20 & 30 & -20 & 5 & 0 \\ -10 & 30 & -30 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По сравнению с кубическим сплайном использование сплайна пятого порядка позволяет учитывать и сглаживать изменение угла наклона транспортного средства (ТС)[10].

4. Сглаживание кривизны

В данной работе предлагается усовершенствование метода, предложенного в работе [1] путём введения В-сплайна пятого порядка, который позволяет учитывать не только кривизну кривой, но и ускорение, рывок и изменение рывка, что важно для создания управляемых и устойчивых траекторий. Скачок пятой производной сплайна в i -й точке записывается как

$$\Delta r_i^{(5)} \equiv r_i^{(5)} - r_{i-1}^{(5)} = r_{i-2} - 6r_{i-1} + 15r_i - 20r_{i+1} + 15r_{i+2} - 6r_{i+3} + r_{i+4}.$$

Таким образом, для сглаживания траектории необходимо минимизировать нормы этих векторов всего сплайна. Для вариаций всей траектории в матричном виде:

$$(1) \quad S(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3) = \sum_{j=1}^3 (\vec{r}_j + \vec{\epsilon}_j)^T H (\vec{r}_j + \vec{\epsilon}_j), H = CC^T,$$

$$(2) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -6 & 15 & -20 & 15 & -6 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $C \in R^{(n-6) \times n}$.

5. Ограничения на вариацию точек

При построении гладкой траектории по данным, снятым с ГНСС-приемника геодезического класса точности, важное зна-

чение имеет точность отдельных точек, полученных с применением RTK. Различия в точности между Fixed, Float и Standalone существенно влияют на необходимость варьирования точек при сглаживании траектории.

Точки со значением Fixed обеспечивает исключительную точность координат, обычно на уровне сантиметров. Эта высокая точность достигается благодаря использованию поправок, передаваемых в реальном времени, что минимизирует ошибки, вызванные атмосферными явлениями, многолучевостью сигнала и другими факторами. Такие точки уже обладают минимальными погрешностями и высокой степенью надежности. Следовательно, варьирование таких точек при построении траектории требует минимальных изменений. Избыточное варьирование может даже ухудшить качество аппроксимации, внося дополнительные искажения в уже точные данные. С другой стороны, данные с точностью Float и Standalone характеризуются значительно большей погрешностью. Float имеет точность на уровне дециметров, а Standalone – на уровне метров. Эти методы не обеспечивают такой высокой устойчивости и точности координат, как RTK Fixed, поэтому они могут быть подвержены значительному варьированию для сглаживания траектории. Для ограничения вариации точек введем функционал штрафа на вариацию точек:

$$(3) \quad P(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3) = \sum_{j=1}^3 \gamma \vec{\epsilon}_j^T D_j \vec{\epsilon}_j,$$

где γ – положительный параметр; $D_j \in R^{n \times n}$ – диагональная матрица с весами, пропорциональными точности (если Fixed – вес большой, Float и Standalone – маленький).

6. Целевой функционал

Учитывая (1) и (3), итоговый функционал для формирования гладкой кривой принимает вид:

$$\Phi(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3) = \frac{1}{2} S(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3) + \frac{1}{2} P(\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3).$$

Задача поиска гладкой кривой в итоге сходится к задаче оптимизации:

$$(\vec{\epsilon}_1^*, \vec{\epsilon}_2^*, \vec{\epsilon}_3^*) = \operatorname{argmin}_{\vec{\epsilon}_1^*, \vec{\epsilon}_2^*, \vec{\epsilon}_3^*} \Phi(\vec{\epsilon}_1^*, \vec{\epsilon}_2^*, \vec{\epsilon}_3^*).$$

7. Обработка реальных данных

7.1. Запись данных

Для записи данных использовалась колёсно-гусеничная платформа, приведённая на рис. 1. Движение платформы производилось на специальном бездорожном полигоне с наличием больших и резких перепадов по высоте. В качестве записывающего устройства использовался ГНСС-приёмник геодезического класса точности фирмы Javad с использованием в качестве базовой станции аналогичного приёмника, расположенного в окрестности 350 метров от испытательной площадки. Полигон располагается на месте бывшего карьера, таким образом, приёмник, установленный на движущейся платформе, находился ниже уровня базовой станции, однако разность высот в процессе эксперимента не превышала 40 метров. На таком расстоянии и такой разности высот можно пренебречь как ионосферными [12], так и тропосферными эффектами, искажающими спутниковые данные, а RTK можно использовать с настройками, близкими к режиму, в котором вычисляется ориентация твёрдого тела [13].



Рис. 1. Колесно-гусеничная платформа для сбора данных

7.2. Первичная обработка и анализ

Набор сырых данных, полученных с приёмника, отражён зелёным и красным цветами на рис. 2. Если запустить предложенный выше алгоритм без предварительной фильтрации на данном наборе данных, то из-за того, что точки с точностью Float содержат ложные позиции, итоговая траектория получается сильно искажена, что отображено на рис. 3, 4.

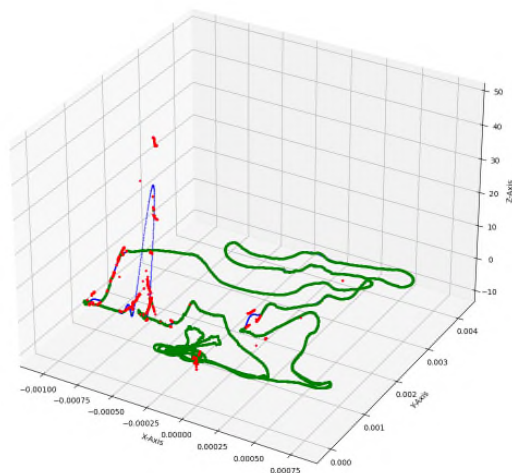


Рис. 2. Сырой набор данных, где красным цветом обозначены выбросы, зелёным цветом – точки без выбросов, синим – набор точек, полученных после применения фильтра Баттерворта

Отдельно необходимо заметить, что для хранения матриц C и D из формул (2), (3) в явном виде может потребоваться довольно большой объем оперативной памяти. Так, при длительности проезда в 12 минут и частотой записи в 100 Гц матрица 2 имеет размер 71 994 на 72 000 с типом данных double и требует для языка Python > 35 Gb оперативной памяти. Данное ограничение можно обойти несколькими способами.

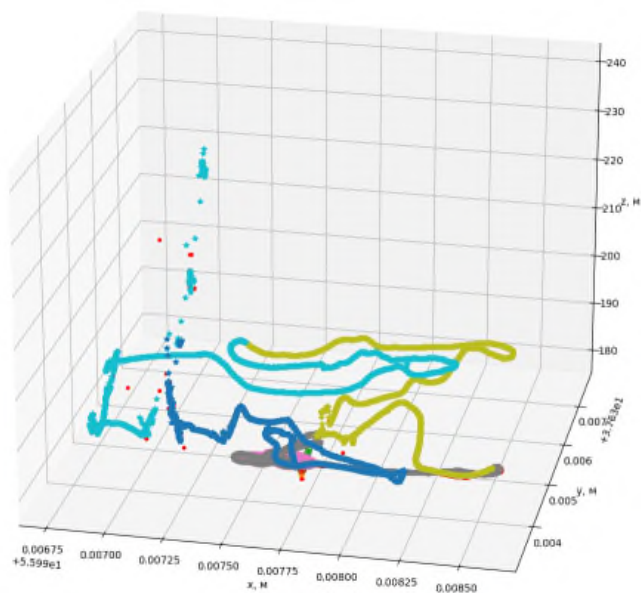


Рис. 3. Результат обработки алгоритма путём разбиения на окна длиной в 7000 точек в 3D

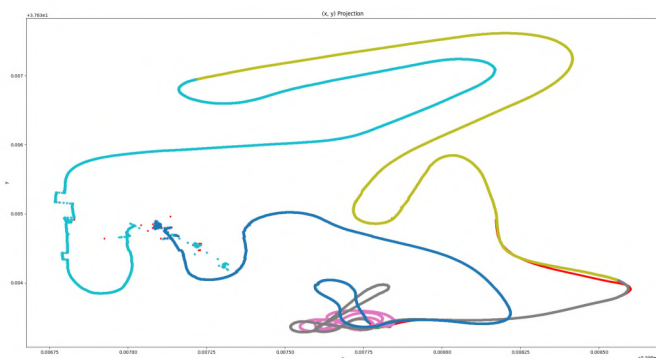


Рис. 4. Результат обработки алгоритма путём разбиения на окна длиной в 7000 точек, спроецированный на плоскость XY

– Первый из них – это разбиение исходной траектории на окна допустимого размера с большим перекрытием. Тогда сглаживание запускается для каждого выделенного окна, после чего производится сшивка с усреднением значений на перекрытиях. Применение данного подхода отображено на рис. 3, 4, где каждый цвет обозначает отдельное окно.

– Второй предполагает использование специальных разреженных матриц, предоставляемых библиотекой Python `scipy.sparse`. Эти матрицы не хранят большое количество бессмысленных нулей, что существенно оптимизирует использование оперативной памяти. На том же самом наборе данных программой использовалось менее 3 Гб оперативной памяти.

7.3. Предварительная фильтрация

Проведём предварительное сглаживание траектории с использованием цифрового фильтра Баттерворта пятого порядка с частотой среза 0,01. Это очень низкочастотный фильтр: он пропускает только очень низкие частоты, эффективно устраняя быстрые колебания и шумы в данных[5]. Применяемый фильтр выполняет двунаправленную фильтрацию, что позволяет избежать фазовых искажений, характерных для односторонней фильтрации. В итоге получается сильно сглаженная траектория $q_i = LP(r_i), i = 1, \dots, n - 2$.

Продифференцируем ее один раз, чтобы иметь скорость движения:

$$w_i = dLP(r_i), i = 1, \dots, n - 3 = I^{(n-3)}.$$

Так как используемый ГНСС позволяет записывать также и скорость, поставим в соответствие множеству координат $r_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n$, множество векторов скорости $v_i \in \mathbb{R}^3, i = 1, \dots, n$, с которой происходило движение в данной координате. Требуется исключить все точки сглаженной траектории q_i , скорость которых превышает измеренную. Для этого находится множество точек $J = \{i \in I^{(n-3)}, |w_i|_2 < |v_i|_2\}$. Затем новый набор точек будет состоять из всех точек исходного за вычетом тех, у которых скорость полученная дифференцированием координаты выше реальной $r_i \in \mathbb{R}^3, i \in J$.

Также основываясь на рис. 2, большая ошибка содержится в определении вертикального положения. Для фильтрации данных выбросов предлагается выбросить координаты, высота которых превышает 0,9-квантиль, рассчитанный по всем встречающимся в датасете высотам.

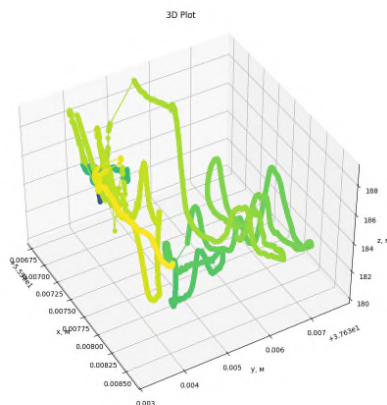


Рис. 5. Исходный набор точек после предварительной фильтрации с градиентным изменением цвета от начала траектории к концу

После данной предварительной фильтрации данных новый набор координат содержит существенно меньшее количество ложных точек, что видно на рис. 5.

Применим алгоритм сглаживания к новому отфильтрованному набору данных. На рис. 6 и 7 показаны результаты. Как видно из графиков, ложные значения с большой амплитудой исчезли. С другой стороны, на траектории все равно присутствуют разрывы, связанные с продолжительной ложной фиксацией ГНСС-приёмника, поэтому чтобы получить более адекватную траекторию, необходимо использовать, например, расширенный фильтр Калмана с дополнительными данными (акселерометры и гироскопы), а также кинематической моделью ТС.

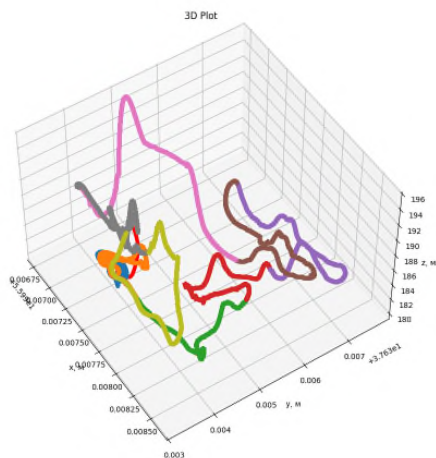


Рис. 6. Сглаженная алгоритмом предварительно отфильтрованная траектория с размером окна в 7000 точек. Каждый цвет соответствует отдельному окну

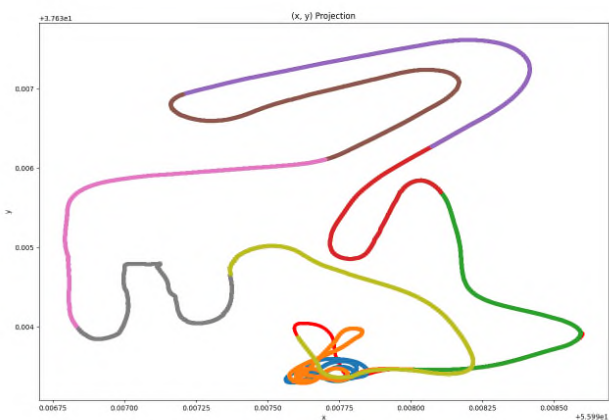


Рис. 7. Проекция сглаженной алгоритмом предварительно отфильтрованной траектории на ось XY с размером окна в 7000 точек. Каждый цвет соответствует отдельному окну

Предварительный анализ данных с IMU¹ на рис. 8 показывает наличие сильной вибрации на данном транспортном средстве при езде не по мягкому грунту, что осложняет восстановление точной ориентации данного ТС, а вместе с ней и инициализацию трёхмерной кинематической модели данного ТС. Таким образом, дальнейшие исследования будут связаны с построением простейшей плоской моделью данного ТС, позволяющей построить устойчивую модель расширенного фильтр Калмана для движения по произвольной поверхности, использующей весь доступный набор синхронизированных данных.

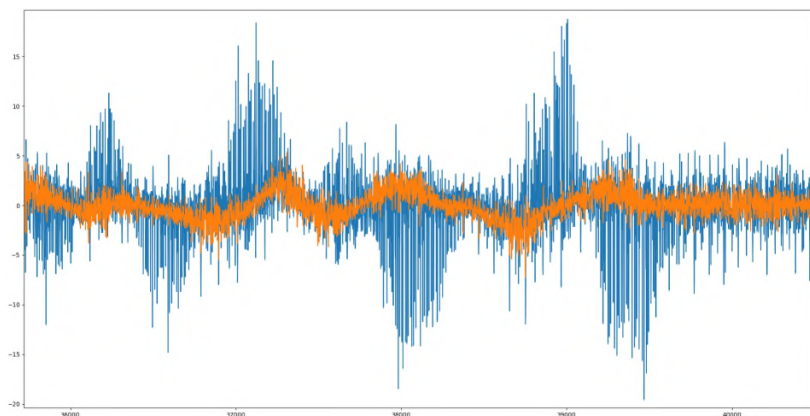


Рис. 8. Данные об ускорении во времени, полученные с IMU. Синим отображены сырые данные, оранжевым цветом данные, полученные с использованием фильтра Калмана

8. Заключение

В статье предложен метод сглаживания траектории, построенной по высокочастотным данным, полученным при движении на мототехнике по пересечённой местности. Особое внимание уделено достижению гладкости траектории с использовани-

¹ Англ. *Inertial Measurement Unit* – устройство для определения угловых отклонений и ускорений

ем квинтических В-сплайнов, которые позволяют минимизировать резкие колебания и обеспечить высокую точность при моделировании реального пути. Для достижения лучшего результата предложен способ фильтрации выбросов в исходном наборе данных на основе цифрового фильтра и скоростей движения. Для подтверждения работоспособности метода был проведён эксперимент с использованием реальных данных большого объёма, где метод последовательно применялся к заданной траектории. Выделение активного набора данных или применение разреженных матриц позволило сэкономить вычислительные ресурсы и выполнить расчёт на персональном компьютере. Результирующая сглаженная траектория, представленная в виде набора окон, наглядно демонстрирует успех предложенного подхода на рис. 6 и 7.

Литература

1. ГИЛИМЬЯНОВ Р.Ф., ПЕСТЕРЕВ А.В., РАПОПОРТ Л.Б. *Сглаживание кривизны траекторий, построенных по зашумленным измерениям в задачах планирования пути для колесных роботов* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2008. – №5. – С. 148–156.
2. ГИЛИМЬЯНОВ Р.Ф., РАПОПОРТ Л.Б. *Метод деформации пути в задачах планирования движения роботов при наличии препятствий* // Проблемы управления. – 2012. – №1. – С. 70–76.
3. МАКАРОВ М.И. *Алгоритм локального планирования пути для объезда препятствий в путевых координатах* // Проблемы управления. – 2024. – №3. – С. 66–72.
4. МОРОЗОВ Ю.В., КОРГИН Н.А. *Особенности использования ГНСС rtk и imi на электрическом снегоходе однокорпусной компоновки при движении по не жесткой поверхности* // Сборник материалов XVIII Всероссийской научно-практической конференции «Перспективные системы и задачи управления». – Таганрог: 2023. – С. 112–118.
5. РОМАНЮК Ю.А. *Основы цифровой обработки сигналов. Учебное пособие. Часть 1.* – М., 2007г.

6. FU-CHUNG W., SCHOFIELD S., WRIGHT P. *A Real Time Quintic Spline Interpolator for an Open Architecture Machine Tool* // ASME Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition. – 1996. – P. 291–298.
7. GILIMYANOV R.F., RAPOPORT L.B. *Path Deformation Method for Robot Motion Planning Problems in the Presence of Obstacles* // Autom. Remote Control. – 2013. – Vol. 74, No. 12. – P. 70–76.
8. LEICK A., RAPOPORT L., TATARNIKOV D. *GPS Satellite Surveying*. – New York: John Wiley & Sons, 2015.
9. JIN J., TANG L. *Coverage path planning on three-dimensional terrain for arable farming* // J. F. Robot. – 2011. – Vol. 28, No. 3. – P. 424–440.
10. MOROZOV Y. *B-splines Trajectory Planning for Quadrotor Flight* // V Int. Conf. on Optimization Methods and Applications OPTIMIZATION AND APPLICATIONS (OPTIMA-2014), Petrova, Montenegro, 2014. – P. 138–139.
11. MOHAMED R., AHMED O., AMIRA Y.H. et al. *Path planning algorithms in the autonomous driving system: A comprehensive review* // Robotics and Autonomous Systems. – 2024. – Vol. 174. – P. 104630.
12. PADOKHIN A.M., MYLNIKOVA A.A., YASYUKEVICH YU.V. et al. *Galileo E5 AltBOC Signals: Application for Single-Frequency Total Electron Content Estimations* // Remote Sensing. – 2021. – Vol. 13, Iss. 19. – P. 3973 (1–14).
13. RAPOPORT L., MOGILNITSKY V., ASHJAEI J. *Octopus: Four-antennae RTK System and New Attitude Determination Technique* // Proc. 14th Int. Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 2001), Salt Lake City, UT, September 2001. – P. 2972–2979.
14. TORMAGOV T.A. *Path Deformation Method with Constraints on Normal Curvature for Wheeled Robots in Precision Agriculture Based on Second-Order Cone Programming* // Autom. Remote Control. – 2024. – Vol. 85. – P. 123–131.

15. TORMAGOV T., RAPOPORT L. *Coverage Path Planning for 3D Terrain with Constraints on Trajectory Curvature Based on Second-Order Cone Programming* // In: *Advances in Optimization and Applications* / Eds.: N.N. Olenev et al. – Cham: Springer International Publishing, 2021. – P. 258–272.
16. TORMAGOV T.A., GENERALOV A.A., SHAVIN M.Y. et al. *Motion Control of Autonomous Wheeled Robots in Precision Agriculture* // *Gyroscopy Navig.* – 2022. – Vol. 13, No. 1. – P. 23–35.
17. TORMAGOV T., RAPOPORT L. *Coverage Path Planning for 3D Terrain with Constraints on Trajectory Curvature Based on Second-Order Cone Programming* // In: *Advances in Optimization and Applications* / Eds.: N.N. Olenev et al. – Cham: Springer International Publishing, 2021. – P. 258–272.
18. HAMEED I.A., LA COUR-HARBO A., OSEN O.L. *Side-to-side 3D coverage path planning approach for agricultural robots to minimize skip/overlap areas between swaths* // *Rob. Auton. Syst.* Elsevier. – 2016. – Vol. 76. – P. 36–45.
19. XIWEN G., ZHOU F., QUNJING W. et al. *Smooth Planning for Manipulator with Multi-dimensional Actuator based on Quintic B-spline* // *Electrotehnica, Electronica, Automatica.* – 2022. – Vol. 70. – P. 20–29.
20. YAN D., WU T., LIU Y. et al. *An efficient sparse-dense matrix multiplication on a multicore system* // *IEEE 17th Int. Conf. on Communication Technology (ICCT)*, Chengdu, China, 2017. – P. 1880–1883.

FEATURES OF CONSTRUCTING A SMOOTHED TRAJECTORY IN THE PRESENCE OF A LARGE NUMBER OF TRAJECTORY POINTS

Maxim Makarov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Graduate Student, Junior Research Fellow (maxim.i.makarov@gmail.com).

Yuriy Morozov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences

of RAS, Moscow, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Research Fellow (tot1983@ipu.ru).

Abstract: The article presents a method for smoothing the trajectory obtained using high-frequency data on the movement of motor vehicles over rough terrain in order to improve the accuracy and smoothness of trajectories in the presence of noise. The main attention is paid to the features of the application of quintic B-splines, which provide a high degree of smoothness in describing the trajectory and preliminary data filtering. The article consistently describes the technical and mathematical difficulties that arise when implementing the algorithm on real data, and suggests methods for overcoming them. One of such methods is filtering outliers to eliminate sharp deviations from the original trajectory using a digital Butterworth filter. Various approaches for working with a large number of trajectory points are considered and tested, including splitting the data into separate overlapping windows with their sequential stitching, which significantly improves the performance of the algorithm. To optimize the calculations, it is also proposed to use sparse matrices that effectively work with large amounts of data and occupy significantly less computer memory compared to traditional ones. The effectiveness of the proposed approach is confirmed by examples where smoothed trajectories obtained from noisy data are visualized.

Keywords: B-spline, GNSS receiver, curvature, optimization, trajectory smoothing.

УДК 007.52

ББК 32.816

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Л.Б. Рапопортом.*

Поступила в редакцию 31.10.2024.

Дата опубликования 31.03.2025.