АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ МНЕНИЯМИ В SCARDO-МОДЕЛИ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХЭЛЕМЕНТНОЙ АЗБУКИ МНЕНИЙ С ОДНИМ ТИПОМ НАТИВНЫХ АГЕНТОВ¹

Гежа В. Н.²

(Московский физико-технический институт, Москва)

Козицин И. В.³

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Московский
физико-технический институт, Москва)*

Рассматривается задача управления мнениями агентов, сформулированная в терминах приближения среднего поля для SCARDO-модели, построенного для случая социальной системы с модулярной сетевой структурой, гетерогенными уровнями активности агентов и персонализацией контента. В рамках модели управления специальная группа агентов, имитирующая ботов в реальных социальных медиа, воздействует на остальных агентов, с тем чтобы изменить их мнения в соответствии с интересами управляющего субъекта. Изучается наиболее простой для анализа случай двухэлементной азбуки мнений, в рамках которой существует только два возможных мнения (интерпретация – выборы в двухпартийной системе) и один тип агентов-неботов. Строится аналитическое решение задачи управления. Демонстрируется, что в зависимости от значений параметров модели может быть либо одна оптимальная стратегия управления, либо бесконечно много. При этом в случае, когда оптимальное управление единственно, оно должно быть устроено следующим образом: все социальные боты должны транслировать одно и то же мнение, а переключение распространяемого мнения может произойти не более одного раза лишь для некоторых конфигураций параметров. Полученные результаты сопровождаются примерами с реальными данными из онлайн платформы ВКонтакте.

Ключевые слова: модели формирования мнений, SCARDO-модель, приближение среднего поля, оптимальное управление, модулярные сети, алгоритмы персонализации.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, грант №24-71-00070.

² Владислав Николаевич Гежа, аспирант (gezha.vn@phystech.edu).

³ Иван Владимирович Козицин, к.ф.-м.н. (kozitsin.ivan@mail.ru).

1. Введение

Разработка эффективных стратегий управления активными сетевыми структурами является чрезвычайно актуальной задачей современной теории управления [1, 2, 7]. С их помощью можно будет противостоять распространению деструктивного контента в социальных медиа, продвигать научно-обоснованную повестку, а также способствовать снижению социальной напряженности в обществе [3, 4, 10]. При этом исследования в данной области затруднены тем, что ученые до сих пор не знают, как устроено социальное влияние и как меняются мнения людей при информационных взаимодействиях [12]. В частности, активные дебаты ведутся касательно существования диссимилиятивной компоненты социального влияния, которая заставляет мнения людей отдаляться друг от друга в результате общения [6]. Вместе с тем последние эмпирические исследования указывают на легитимность данного механизма влияния [11, 13]. В свою очередь в работе [18] была высказана мысль, что эффект социального влияния в процессах формирования мнений может существенно зависеть от эмпирического контекста и в разных условиях могут работать различные механизмы влияния, такие как ассимилятивное влияние, ограниченное доверие или диссимилиятивное влияние. В связи с этим модели формирования мнений и основанные на них модели управления должны быть достаточно адаптивны.

В данной работе будет рассмотрена модель формирования мнений, предложенная в работе [12] (далее – SCARDO-модель). Данная агентная модель описывает взаимодействия агентов как последовательные парные контакты со стохастическим протоколом изменения мнения. Данный протокол задается при помощи распределения, которое является функцией текущих мнений и, возможно, других параметров агентов. В итоге SCARDO-модель обладает высокой степенью гибкости и позволяет описывать основные механизмы социального влияния как качественно, так и количественно.

В работе [14] на основе приближения среднего поля для

SCARDO-модели была сформулирована задача управления мнениями агентов, найдены необходимые условия оптимальности и разработаны численные методы для ее решения. Целью настоящей работы является аналитическое решение данной задачи управления для наиболее простого случая, когда число возможных мнений в системе равно двум (интерпретация – политические выборы с участием двух кандидатов/партий), а число возможных типов агентов равно одному. Ранее в работе [9] было построено расширение SCARDO-модели, учитывающее гетерогенность активности агентов [16], модулярность структуры взаимодействий, проявляющуюся в неоднородности плотности социальной сети и наличии плотных кластеров-сообществ [21], а также работу алгоритмов персонализации, которые влияют на информационное окружение пользователей в реальных социальных медиа-платформах, фильтруя контент на основании интересов и действий пользователей [5]. В настоящей работе задача управления сначала будет решена для более простой постановки, рассматриваемой в работе [14]. После этого полученные результаты будут расширены на обобщенную SCARDO-модель [9].

Данная работа является существенно расширенной версией доклада, представленного на XX Всероссийской школе-конференции молодых ученых «Управление большими системами».

2. Описание модели

Рассматривается система из N агентов, соединенных графом $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, где $\mathcal{V} = \{1, \dots, V\}$ – множество агентов, а $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ – ребра между ними. Каждый агент описывается мнением, принимающим значения из множества $Z = \{Z_1, \dots, Z_m\}$, и типом, принимающим значения из множества $\Xi = \{\Xi_1, \dots, \Xi_M\}$. Предполагаем, что мнения агентов могут обновляться в результате взаимодействий, в то время как типы агентов неизменны.

В каждый такт t (считаем, что время дискретно) случайным образом на основании наперед заданного на множестве агентов распределения активностей $\{\pi_1, \dots, \pi_N\}$ выбираются агент

(пусть i) и один из его соседей по социальной сети (пусть j). Считаем, что $\pi_1, \dots, \pi_N > 0$ и вероятность выбора агента i есть $\pi_i / (\pi_1 + \dots + \pi_N)$. В свою очередь, вероятность выбора агента j описывается формулой $\pi_j / \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \pi_k$, где $\mathcal{V}_i \subseteq \mathcal{V}$ – множество друзей агента i ($j \in \mathcal{V}_i$).

После этого агент j влияет на агента i . Пусть мнения агентов i и j есть $x_i(t) = Z_s, x_j(t) = Z_l$, а типы равны $\xi_i = \Xi_f, \xi_j = \Xi_r$ соответственно. Мнение агента i трансформируется в соответствии с вероятностным распределением $\{p_{s,l,1}^{f,r}, \dots, p_{s,l,m}^{f,r}\}$, где $p_{s,l,k}^{f,r}$ – вероятность события, что мнение агента i примет значение Z_k . У данного параметра верхние индексы f и r отвечают за типы объекта влияния и субъекта влияния соответственно, а нижние индексы s и l согласованы с мнениями объекта влияния и субъекта влияния. Третий нижний индекс k соответствует мнению объекта влияния после взаимодействия. При такой системе обозначений неравенство $p_{s,l,s}^{f,r} > 0$ означает ненулевую вероятность того, что мнение останется неизменным. Выполнено условие нормировки:

$$p_{s,l,1}^{f,r} + \dots + p_{s,l,m}^{f,r} = 1.$$

Вероятности $p_{s,l,k}^{f,r}$ сгруппируем в последовательность $\{P^{f,r}\}_{f \in [M], r \in [M+1]}$, объекты $P^{f,r} = [p_{s,l,k}^{f,r}]_{s,l,k \in [m]}$ будем именовать таблицами переходов. Таблицы переходов удобно представлять как последовательности строчно-стохастических матриц размера $m \times m$: $P_1^{f,r}, \dots, P_m^{f,r}$, где матрица $P_s^{f,r} = [p_{s,l,k}^{f,r}]_{l,k \in [m]}$ определяет то, каким образом реагируют на влияние со стороны агентов с типом Ξ_r агенты с мнением Z_s и типом Ξ_f .

Далее будем предполагать, что параметры активности агентов $\pi_1, \dots, \pi_N$ однозначно определяются их типами.

Также будем считать, что социальная сеть определяется стохастичной блочной моделью [15]. В рамках данной модели вершины делятся на блоки и для каждой пары блоков задаются вероятности возникновения связи между вершинами из этих блоков. Аналогично задаются вероятности для внутривербных связей (для каждого из блоков отдельно). Для каждой пары вершин

связь образуется независимо. Мы будем считать, что блоки соответствуют типам агентов. Пусть $f \in [M]$ и $r \in [M]$ – индексы блоков. Тогда параметр $\rho_{f,r} \in [0, 1]$ задает вероятность формирования связи между двумя произвольными вершинами с типами Ξ_f и Ξ_r . Отметим, что при $f = r$ параметр $\rho_{f,f}$ описывает вероятность образования связи между вершинами одного типа (Ξ_f).

Дополнительно определим $(M + 1)$ -й тип агентов [14]. Будем считать, что агенты данного типа невосприимчивы к социальному влиянию и характеризуются параметром активности $\pi_{M+1} > 0$. Для таких агентов имеет место $p_{s,l,k}^{M+1,r} = 0$ при $s \neq k$. Содержательная интерпретация агентов с типом $M + 1$ – боты, аккаунты СМИ или рекламные сообщения в социальных медиа. Далее будем называть их агентами-ботами или просто ботами. Остальных агентов будем именовать нативными агентами. Агенты-боты разбиваются на группы (когорты), каждая когорта воздействует со своим типом нативных агентов и только с ними. Такая постановка позволяет учесть таргетированность реальных ботов или рекламных сообщений в социальных медиа. Для формализации такой структуры взаимодействий также будем использовать стохастичную блочную модель, в которой блоками выступают типы нативных агентов, а также «нацеленные» на них когорты ботов (которые будем индексировать сообразно типам нативных агентов). Более точно, вероятность формирования связи между нативным агентом с типом Ξ_r и ботом из соответствующей когорты будем описывать параметром $\rho^r \in [0, 1]$.

Будем предполагать, что связи между нативными агентами статичны, в то время как составы когорт могут меняться со временем, как и структура связей между ботами и нативными агентами (эта динамика операционализируется при помощи изменения величин ρ^r). Иными словами, предполагается, что боты адаптивны и могут менять тактику влияния в зависимости от текущей ситуации. Предполагаем, что мнения ботов, составы их когорт и структура связей с нативными агентами задаются экзогенно.

Также считаем, что коммуникации агентов модерируются алгоритмом персонализации Δ , который запрещает контакт между

двумя агентами i и j (пусть второй влияет на первого) с мнениями $x_i(t) = Z_s, x_j(t) = Z_l$ и типами $\xi_i = \Xi_f, \xi_j = \Xi_r$ с заданной вероятностью $\Delta_{s,l}^{f,r}$.

3. Приближение среднего поля

Для представленной выше модели в работе [9] было построено приближение среднего поля, описывающее динамику численностей сторонников различных мнений с учетом их типов в предположении, что число агентов в системе велико ($N \rightarrow \infty$). Пусть τ – масштабированное время, определяемое следующим образом: $\tau = t/N, \delta\tau = 1/N$. Пусть $y_{a,f}(\tau)$ – доля (относительно N) adeptов мнения Z_a с типом Ξ_f для $f \in [M]$ (где $[M]$ обозначает множество натуральных чисел от 1 до M) в момент времени τ . Пусть $u_l^f(\tau)$ – доля (относительно N) ботов из соответствующей когорты f с мнением Z_l в момент времени τ . Пусть

$$A = \sum_{f \in [M]} n_f \pi_f + u \pi_{M+1},$$

где n_f – доля нативных агентов с типом Ξ_f , а u – доля ботов. Пусть

$$B^f(\tau) = \sum_{r \in [M]} n_r \pi_r \rho_{f,r} + u^f(\tau) \pi_{M+1} \rho^f,$$

где $u^f(\tau) = u_1^f(\tau) + \dots + u_m^f(\tau)$ – доля когорты с индексом f .

Пусть

$$D_a^f(\tau) = \sum_{l \in [m]} \sum_{r \in [M]} y_{l,r}(\tau) \pi_r \rho_{f,r} \Delta_{a,l}^{f,r} + \sum_{l \in [m]} u_l^f(\tau) \pi_{M+1} \rho^f \Delta_{a,l}^{f,M+1}.$$

Пусть, кроме того,

$$C_{s,l,k}^f(\tau) = \sum_{r \in [M]} y_{l,r}(\tau) \pi_r \rho_{f,r} \Delta_{s,l}^{f,r} p_{s,l,k}^{f,r} + u_l^f(\tau) \pi_{M+1} \rho^f \Delta_{s,l}^{f,M+1} p_{s,l,k}^{f,M+1}.$$

Имеет место следующая система дифференциальных уравнений:

$$(1) \quad \frac{dy_{a,f}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{A \cdot B^f(\tau)} \left[\sum_{s \in [m]} \sum_{l \in [m]} y_{s,f}(\tau) \pi_f C_{s,l,a}^f(\tau) - y_{a,f}(\tau) \pi_f D_a^f(\tau) \right], \quad a \in [m], f \in [M].$$

Система (1) описывает динамику переменных $y_{a,f}(\tau)$ с учетом заданного начального условия

$$(2) \quad y_{a,f}(\tau_0) = q_{a,f}, \quad a \in [m], f \in [M].$$

Далее будем считать, что величины $q_{a,f}$ в (2) удовлетворяют

$$q_{a,f} \geq 0, \quad \sum_{a \in [m]} q_{a,f} = n_f.$$

Величины A и $B^f(\tau)$ играют нормировочную роль для распределений вероятностей, описывающих выбор объекта влияния и субъекта влияния соответственно. Для более глубокого понимания можно ознакомиться с выводом уравнения (1) в работе [9] (см. леммы 1 и 2). В свою очередь, величину $C_{s,l,k}^f(\tau)$ можно интерпретировать как агрегированную интенсивность принятия агентами с мнением Z_s и типом Ξ_f мнения Z_k в результате взаимодействия с мнением Z_l . При этом усреднение ведется по типу субъекта влияния: рассматриваются и нативные агенты (первое слагаемое в выражении для $C_{s,l,k}^f(\tau)$), и боты (второе слагаемое). Величина $D_a^f(\tau)$ трудно интерпретируема, ее появление обусловлено введенной гетерогенностью активности агентов и структуры сети.

4. Задача управления мнениями

Рассмотрим задачу управления мнениями, основанную на модели среднего поля (1). Будем считать, что управляющий субъект (далее – УС) определяет мнения ботов, а также составы когорт с тем, чтобы изменить распределение мнений в системе. При этом предполагаем, что УС никак не влияет на интенсивность контактов между ботами и нативными агентами – величины заданы ρ^f и постоянны во времени.

$$(3) \quad \underset{u(\cdot)}{\text{minimize}} \quad J(u(\cdot)),$$

$$\frac{dy_{a,f}(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{A \cdot B^f(\tau)} \left[\sum_{s \in [m]} \sum_{l \in [m]} y_{s,f}(\tau) \pi_f C_{s,l,a}^f(\tau) - y_{a,f}(\tau) - \pi_f D_a^f(\tau) \right],$$

$$y_{a,f}(\tau_0) = q_{a,f}, \quad a \in [m], f \in [M],$$

$$u_l^f(\tau) \geq 0, \quad l \in [m], f \in [M],$$

$$\sum_{l \in [m], f \in [M]} u_l^f(\tau) = u.$$

В задаче управления (3) функционал J предполагается линейным и определяется следующим образом:

$$(4) \quad J = K \int_{\tau_0}^{\tau_T} \sum_{\alpha \in [m]} v_\alpha y_\alpha(\tau) d\tau + \sum_{\alpha \in [m]} v_\alpha y_\alpha(\tau_1),$$

где τ_T определяет горизонт планирования, $y_\alpha(\tau) = \sum_{f \in [M]} y_{\alpha,f}(\tau)$ – доля нативных агентов, имеющих мнение Z_α в момент времени τ , а $v = (v_1, \dots, v_m)$ – заданный вектор весов оптимизации для конкретных мнений, отражающий интересы УС. Чем больше значение v_α , тем менее желательно представительство мнения Z_α . При этом в работе [14] было показано, что без ограничения общности задачи можно ограничиться неотрицательными векторами весов. В (4) параметр $K > 0$ отвечает за относительную важность интегрального слагаемого функционала.

5. Простейший случай: $m = 2, M = 1$, система гомогенна.

Далее будем рассматривать задачу (3) в предположении, что $m = 2$ (два возможных значения мнения) и $M = 1$ (один тип нативных агентов, а значит и всего одна когорта ботов). Без уменьшения общности, пусть $\tau_0 = 0$ и $\tau_1 = T$. Также будем считать, что все параметры стохастической блочной модели равны друг другу, как и параметры активности агентов. В результате они сокращаются в числителе и знаменателе (1). Также будем считать, что алгоритм персонализации «отключен»: все $\Delta_{s,l}^{f,r} = 1$

Запишем одно из уравнений системы (1) для описываемого случая (второе рассматривать не имеет смысла, так как оно элементарно первому в силу $y_{1,1} + y_{2,1} = 1 - u$). Для краткости опустим аргумент времени τ :

$$(5) \quad \frac{dy_{1,1}}{d\tau} = \sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 y_{s,1} \left[y_{l,1} p_{s,l,1}^{1,1} + u_l^1 p_{s,l,1}^{1,2} \right] - y_{1,1} =$$

$$= \sum_{s=1}^2 y_{s,1} \left[y_{1,1} p_{s,1,1}^{1,1} + u_1^1 p_{s,1,1}^{1,2} + y_{2,1} p_{s,2,1}^{1,1} + u_2^1 p_{s,2,1}^{1,2} \right] - y_{1,1} =$$

$$= y_{1,1} \left[y_{1,1} p_{1,1,1}^{1,1} + u_1^1 p_{1,1,1}^{1,2} + y_{2,1} p_{1,2,1}^{1,1} + u_2^1 p_{1,2,1}^{1,2} \right] + \\ + y_{2,1} \left[y_{1,1} p_{2,1,1}^{1,1} + u_1^1 p_{2,1,1}^{1,2} + y_{2,1} p_{2,2,1}^{1,1} + u_2^1 p_{2,2,1}^{1,2} \right] - y_{1,1}.$$

Также для краткости будем игнорировать индексы типов и когорт (так как всего один тип нативных агентов и одна когорта ботов), используя обозначения $y_1 = y_{1,1}$, $y_2 = y_{2,1}$, $u_1 = u_1^1$, $u_2 = u_2^1$:

$$\frac{dy_1}{d\tau} = y_1 \left[y_1 p_{1,1,1}^{1,1} + u_1 p_{1,1,1}^{1,2} + y_2 p_{1,2,1}^{1,1} + u_2 p_{1,2,1}^{1,2} \right] + \\ + y_2 \left[y_1 p_{2,1,1}^{1,1} + u_1 p_{2,1,1}^{1,2} + y_2 p_{2,2,1}^{1,1} + u_2 p_{2,2,1}^{1,2} \right] - y_1.$$

При сделанных предположениях целевой функционал (4) принимает вид

$$(6) \quad J = K \int_0^T (v_1 y_1(\tau) + v_1 y_2(\tau)) d\tau + v_1 y_{1,1}(T) + v_1 y_{2,1}(T).$$

При этом содержательно рассматривать только два вектора весов: $v = (0, 1)$ или $v = (1, 0)$. Действительно, пусть, без ограничения общности, $v_2 > v_1$. Тогда, представляя $v_2 = v_1 + v'$, где $v' > 0$, можно вынести v_1 из интегрального и терминального слагаемых (6), после чего воспользоваться тем, что $y_1 + y_2 = 1 - u$. Таким образом из функционала выносятся константа и остаётся

$$J_{new} = K \int_0^T v' \cdot y_2(\tau) d\tau + v' y_2(T).$$

Также не имеет смысла рассматривать ситуацию $v = (0, v')$ для $v' \neq 1$, так как данная константа входит в функционал мультипликативно.

Далее будем рассматривать случай, когда $v = (0, 1)$, т.е. УС стремится минимизировать распространенность мнения Z_2 в системе. В таком случае

$$J = K \int_0^T y_2(\tau) d\tau + y_2(T).$$

Распишем J как сумму интегралов с шагом $\varepsilon > 0$, стремящимся к нулю:

$$J = K \left(\sum_{i=0}^{\frac{T}{\varepsilon}-1} \int_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} y_2(\tau) d\tau \right) + y_2(T).$$

Далее приблизим каждый из этих интегралов суммой

$$\int_{i\varepsilon}^{(i+1)\varepsilon} y_2(\tau) d\tau = \frac{y_2(i\varepsilon) + y_2((i+1)\varepsilon)}{2}.$$

Получаем

$$J = \frac{K}{2} y_2(0) + K \sum_{i=1}^{\frac{T}{\varepsilon}-1} y_2(i\varepsilon) + \left(\frac{K}{2} + 1 \right) y_2(T).$$

С учётом $y_1 + y_2 = 1 - u$ минимизация J эквивалентна максимизации функционала

$$(7) \quad J^* = \frac{K}{2} y_1(0) + K \sum_{i=1}^{\frac{T}{\varepsilon}-1} y_1(i\varepsilon) + \left(\frac{K}{2} + 1 \right) y_1(T).$$

Для удобства параметризуем таблицы переходов (для рассматриваемого случая необходимо определить две таблицы переходов – внутренних взаимодействий (нативных) агентов $P^{1,1}$ и влияния ботов на нативных агентов $P^{1,2}$) следующим образом:

$$(8) \quad P_1^{1,i} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_{1,i} & \alpha_{1,i} \\ 1 - \beta_{1,i} & \beta_{1,i} \end{bmatrix}, P_2^{1,i} = \begin{bmatrix} \gamma_{1,i} & 1 - \gamma_{1,i} \\ \delta_{1,i} & 1 - \delta_{1,i} \end{bmatrix}.$$

Поскольку в рамках данной работы будет рассматриваться только случай $M = 1$, то в представлении (8) можно отказаться от фрагмента «1,» нижнего индекса у компонент таблиц переходов:

$$P_1^{1,i} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_i & \alpha_i \\ 1 - \beta_i & \beta_i \end{bmatrix}, P_2^{1,i} = \begin{bmatrix} \gamma_i & 1 - \gamma_i \\ \delta_i & 1 - \delta_i \end{bmatrix}.$$

Сформулируем основополагающий результат данной работы.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Пусть $\bar{\gamma}_2 = \delta_2$ и $\beta_2 = \alpha_2 > 0$. Тогда оптимальным будет любое допустимое управление.

2. Пусть $\bar{\gamma}_2 < \delta_2$ и $\beta_2 - \alpha_2 - \bar{\gamma}_2 + \delta_2 \leq 0$ или $\bar{\gamma}_2 = \delta_2$ и $\beta_2 - \alpha_2 < 0$. Тогда оптимальным будет управление $u_1(\tau) \equiv 0$.

3. Пусть $\gamma_2 > \delta_2$ и $\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2 + \delta_2 \geq 0$ или $\gamma_2 = \delta_2$ и $\beta_2 - \alpha_2 > 0$. Тогда оптимальным будет управление $u_1(\tau) \equiv u$.

Доказательство. Запишем дифференциальное уравнение (5) при помощи следующей разностной схемы:

$$\begin{aligned} \frac{y_1((i+1)\varepsilon) - y_1(i\varepsilon)}{\varepsilon} = & y_1(i\varepsilon) \left[y_1(i\varepsilon)(1 - \alpha_1) + u_1(i\varepsilon)(1 - \alpha_2) + \right. \\ & \left. + (1 - u - y_1(i\varepsilon))(1 - \beta_1) + (u - u_1(i\varepsilon))(1 - \beta_2) \right] + \\ & + (1 - u - y_1(i\varepsilon)) \left[y_1(i\varepsilon)\gamma_1 + u_1(i\varepsilon)\gamma_2 + (1 - u - y_1(i\varepsilon))\delta_1 + \right. \\ & \left. + (u - u_1(i\varepsilon))\delta_2 \right] - y_1(i\varepsilon), \quad i = 0, 1, \dots, \frac{T}{\varepsilon} - 1. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(9) \quad y_1((i+1)\varepsilon) = \varepsilon \left[\Phi(i\varepsilon) + u_1(i\varepsilon)\Psi(i\varepsilon) \right],$$

где

$$(10) \quad \begin{aligned} \Phi(i\varepsilon) = & y_1^2(i\varepsilon)(1 - \alpha_1) + y_1(i\varepsilon)(1 - u - y_1(i\varepsilon))(1 - \beta_1) + \\ & + u(1 - \beta_2)y_1(i\varepsilon) + (1 - u - y_1(i\varepsilon))y_1(i\varepsilon)\gamma_{1,1} + (1 - u - y_1(i\varepsilon)) \times \\ & \times (1 - u - y_1(i\varepsilon))\delta_1 + (1 - u - y_1(i\varepsilon))u\delta_2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)y_1(i\varepsilon) \end{aligned}$$

и

$$(11) \quad \Psi(i\varepsilon) = y_1(i\varepsilon) \left[\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2 + \delta_2 \right] + (1 - u)(\gamma_2 - \delta_2).$$

Заметим, что в силу фазовых ограничений все слагаемые (10) неотрицательны и поэтому имеет место $\Phi(i\varepsilon) \geq 0$. В этом случае максимизация $y_1((i+1)\varepsilon)$ при известном значении $y_1(i\varepsilon)$ относительно переменной управления $u_1(i\varepsilon)$, требуемая функционалом (7), обусловлена лишь выражением (11).

Пусть $i = \frac{T}{\varepsilon} - 1$ и значение $y_1(i\varepsilon)$ задано. Определим управление, оптимальное на промежутке $[T - \varepsilon, T]$. Для этого рассмотрим следующие альтернативы:

1. Пусть $\gamma_2 = \delta_2$. Рассмотрим два возможных случая:

а. Если $y_1(i\varepsilon) = 0$, то $u_1(i\varepsilon)$ – любое из множества допустимых управлений $[0, u]$.

б. Пусть $y_1(i\varepsilon) > 0$. Если $\beta_2 - \alpha_2 > 0$, то тогда $u_1(i\varepsilon)$ должен принимать максимальное значение из множества допустимых управлений, т.е. u . Если $\beta_2 - \alpha_2 < 0$, то $u_1(i\varepsilon)$ должен принимать минимальное значение из множества допустимых управлений, т.е. 0. Если $\beta_2 - \alpha_2 = 0$, то оптимальным будет любое управление.

2. Пусть $\gamma_2 < \delta_2$. Рассмотрим два возможных случая:

а. Если $\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2 + \delta_2 \leq 0$, то неравенство $\Psi(i\varepsilon) < 0$ будет выполнено для любого значения $y_1(i\varepsilon)$. Тогда оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = 0$.

б. Пусть $\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2 + \delta_2 > 0$. Неравенство $\Psi(i\varepsilon) > 0$ будет выполнено при

$$(12) \quad y_1(i\varepsilon) > \Theta,$$

где

$$(13) \quad \Theta = \frac{(1-u)(\delta_2 - \gamma_2)}{\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2 + \delta_2}.$$

В таком случае оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = u$. Если (12) не выполнено, то тогда оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = 0$.

3. Пусть $\gamma_2 > \delta_2$. Рассмотрим два возможных случая:

а. Если $\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2 + \delta_2 \geq 0$, то неравенство $\Psi(i\varepsilon) > 0$ выполнено для любого значения $y_1(i\varepsilon)$. В этом случае оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = u$.

б. Пусть $\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2 + \delta_2 < 0$. В таком случае неравенство $\Psi(i\varepsilon) > 0$ выполнено при условии

$$(14) \quad y(i\varepsilon) < \Theta.$$

Тогда оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = u$. Если (14) не выполнено, то тогда оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = 0$.

Используя данные наблюдения и принцип оптимальности Беллмана, строим оптимальное управление для всего промежутка $[0, T]$ и получаем утверждение теоремы. $\square$

Отметим, что теорема 1 не исчерпывает все возможные комбинации параметров модели: в ее доказательстве описаны случаи, которые не вошли в итоговую формулировку. Их мы рассмотрим отдельно. Начнем с ситуации, описанной в случае 1а. Тогда $y(T) = (1 - u)^2 \delta_1 + (1 - u)u \delta_2$ и имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $\gamma_2 = \delta_2$ и $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0$. Пусть для некоторого τ_1 имеет место $y_1(\tau_1) = 0$. Тогда для $\tau > \tau_1$ любое допустимое управление будет оптимальным.

Для случаев 2б и 3б оптимальная стратегия в каждый момент времени определена однозначно, но зависит от текущего состояния системы. Следующие две теоремы показывают, что для этих случаев число возможных переключений не превосходит одного.

Теорема 2. Пусть $\gamma_2 > \delta_2$ и $\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2 + \delta_2 < 0$. Тогда оптимальное управление в момент времени τ зависит от текущего состояния системы $y_1(\tau)$ и имеет следующую структуру:

$$(15) \quad u_1(\tau) = \begin{cases} u, & \text{если } y_1(\tau) < \Theta, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом если УС применяет управление (15), то число возможных переключений с $u_1(\tau) = 0$ на $u_1(\tau) = u$ не превосходит одного.

Доказательство. Из-за характера уравнения (5) при соблюдении оптимального управления после попадания системы в зону фазового пространства

$$y_1 < \Theta$$

при некотором τ система и далее будет оставаться в этой зоне. Действительно, в силу (9) при $\varepsilon \rightarrow 0, u_1(i\varepsilon) = u$ и $y_1(i\varepsilon) < \Theta$ будет выполнено $y_1((i+1)\varepsilon) \geq y_1(i\varepsilon)$. Это обусловлено последним слагаемым в (10), которое после умножения на ε и предельного перехода становится равным $y_1(i\varepsilon)$. В таком случае для достаточно малого ε будет иметь место $y_1((i+1)\varepsilon) = y_1(i\varepsilon) + \Omega$, где Ω – некоторая небольшая неотрицательная величина. Следовательно, момент переключения оптимального управления, если он будет, произойдет один раз. $\square$

Теорема 3. Пусть $\gamma_2 < \delta_2$ и $\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2 + \delta_2 > 0$. Тогда оптимальное управление в момент времени τ зависит от текущего состояния системы $y_1(\tau)$ и имеет следующую структуру:

$$(16) \quad u_1(\tau) = \begin{cases} u, & \text{если } y_1(\tau) > \Theta, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом если УС применяет управление (16), то число возможных переключений с $u_1(\tau) = u$ на $u_1(\tau) = 0$ не превосходит одного.

Доказательство. Доказывается аналогично теореме 2. $\square$

Возникает вопрос: может ли быть найдено время переключения управления (при условии, что оно принадлежит целевому отрезку $[0, T]$) для ситуаций, рассмотренных в теоремах 2 и 3. Для определенности предположим, что выполнено условие теоремы 2 и $y_1(0) < \Theta$. В таком случае необходимо решить уравнение (5) при $u_1(\tau) \equiv 0$ подобно тому, как это было сделано в работе [8], и после этого определить τ_0 , при котором $y_1(\tau_0) = \Theta$. Для нахождения оптимальной траектории уравнение (5) необходимо решить для нового начального условия $y_1(\tau_0) = \Theta$ при $u_1(\tau) \equiv u$. Может так случиться, что $\tau_0 > T$. В этом случае оптимальное на отрезке $[0, T]$ управление будет иметь вид $u_1(\tau) \equiv 0$.

В конце данного раздела отметим, что случай $v = (1, 0)$ разбирается аналогичным образом. Все результаты будут такими же с точностью до замены u_1 на u_2 и y_1 на y_2 .

6. Основной случай: $m = 2, M = 1$, гетерогенная система.

Теперь рассмотрим случай $m = 2, M = 1$ в рамках наиболее общей постановки: с гетерогенностью уровней активностей агентов, модулярностью структуры сети и алгоритмом персонализации. Так же, как и в предыдущем разделе, будем использовать обозначения $y_1 = y_{1,1}, y_2 = y_{2,1}, u_1 = u_1^1, u_2 = u_2^1$ и параметризацию таблицы переходов (8).

Для рассматриваемого случая в уравнении (1) возможны только две комбинации индексов типов: $(1, 1)$ и $(1, 2)$. Для удоб-

ства первую комбинацию будем заменять пустым верхним индексом, а вторую – индексом u . Аналогично нижним индексом u будем отмечать переменные активности и сетевой структуры, описывающие агентов управления:

$$\pi = \pi_1, \pi_u = \pi_2, \quad \rho = \rho_{1,1}, \rho^u = \rho_{1,2}$$

Кроме того, при $M = 1$ имеет место $u^1(\tau) = u$, поэтому для краткости будем писать $B = B^1(\tau)$ (напомним, что величина $B^f(\tau)$ была определена в начале раздела 3). Помимо этого введем следующие обозначения:

$$\Pi_{s,l} = \pi \rho \Delta_{s,l}, \quad \Pi_{s,l}^u = \pi_u \rho^u \Delta_{s,l}^u.$$

С учетом вышесказанного получим

$$(17) \quad \frac{dy_1}{d\tau} = \frac{\pi}{AB} \left[\sum_{s=1}^2 \sum_{l=1}^2 y_{s,1} C_{s,l,1} - y_1 D_1(\tau) \right] =$$

$$= \frac{\pi}{AB} \left[y_1 \left(y_1 \Pi_{1,1} p_{1,1,1} + u_1 \cdot \Pi_{1,1}^u p_{1,1,1}^u + y_2 \Pi_{1,2} p_{1,2,1} + u_2 \Pi_{1,2}^u p_{1,2,1}^u \right) + \right.$$

$$\left. + y_2 \left(y_1 \Pi_{2,1} p_{2,1,1} + u_1 \cdot \Pi_{2,1}^u p_{2,1,1}^u + y_2 \Pi_{2,2} p_{2,2,1} + u_2 \Pi_{2,2}^u p_{2,2,1}^u \right) - y_1 D_1(\tau) \right].$$

Теорема 1 из предыдущего раздела допускает естественное обобщение на рассматриваемый в данном разделе гетерогенный случай.

Теорема 4. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Пусть $\Delta_{2,1}^u \gamma_2 = \Delta_{2,2}^u \delta_2$ и $\Delta_{1,2}^u \beta_2 = \Delta_{1,1}^u \alpha_2 > 0$. Тогда оптимальным будет любое допустимое управление.

2. Пусть $\Delta_{2,1}^u \gamma_2 < \Delta_{2,2}^u \delta_2$ и $\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 - \Delta_{2,1}^u \gamma_2 + \Delta_{2,2}^u \delta_2 \leq 0$ или $\Delta_{2,1}^u \gamma_2 = \Delta_{2,2}^u \delta_2$ и $\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 < 0$. Тогда оптимальным будет управление $u_1(\tau) \equiv 0$.

3. Пусть $\Delta_{2,1}^u \gamma_2 > \Delta_{2,2}^u \delta_2$ и $\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 - \Delta_{2,1}^u \gamma_2 + \Delta_{2,2}^u \delta_2 \geq 0$ или $\Delta_{2,1}^u \gamma_2 = \Delta_{2,2}^u \delta_2$ и $\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 > 0$. Тогда оптимальным будет управление $u_1(\tau) \equiv u$.

Доказательство. Рассматривая разностную схему, аналогичную описанной в предыдущем разделе, применительно

к уравнению (17) получим

$$y_1((i+1)\varepsilon) = \frac{\pi\varepsilon}{AB} \left[\Phi(i\varepsilon) + u_1(i\varepsilon)\Psi(i\varepsilon) \right],$$

где

$$(18) \quad \begin{aligned} \Phi(i\varepsilon) = & y_1^2(i\varepsilon)\Pi_{1,1}(1-\alpha_1) + \\ & + y_1(i\varepsilon)(1-u-y_1(i\varepsilon))\Pi_{1,2}(1-\beta_1) + u(1-\beta_2)\Pi_{1,2}^u y_1(i\varepsilon) + \\ & + (1-u-y_1(i\varepsilon))y_1(i\varepsilon)\Pi_{2,1}p_{2,1,1}\gamma_1 + \\ & + (1-u-y_1(i\varepsilon))(1-u-y_1(i\varepsilon))\Pi_{2,2}\delta_1 + (1-u-y_1(i\varepsilon))u\Pi_{2,2}^u\delta_2 + \\ & + \left(\frac{1}{\pi\varepsilon/(AB)} - Q(i\varepsilon) \right) y_1(i\varepsilon) \end{aligned}$$

и

$$(19) \quad \begin{aligned} \Psi(i\varepsilon) = & \pi_u\rho_u \left[y_1(i\varepsilon) \left(\Delta_{1,2}^u\beta_2 - \Delta_{1,1}^u\alpha_2 - \Delta_{2,1}^u\gamma_2 + \Delta_{2,2}^u\delta_2 \right) + \right. \\ & \left. + (1-u)(\Delta_{2,1}^u\gamma_2 - \Delta_{2,2}^u\delta_2) \right]. \end{aligned}$$

В (18) в качестве Q взято

$$Q = -y_1\pi\rho\Delta_{1,1} - (1-u-y_1)\pi\rho\Delta_{1,2} - u\Pi_{1,2}^u.$$

Заметим, что в силу фазовых ограничений все слагаемые (18) неотрицательны и поэтому имеет место $\Phi(i\varepsilon) \geq 0$. Если для первых шести слагаемых это очевидно, то для последнего мы пользуемся тем, что Q ограничено сверху максимумом из $\pi\rho\Delta_{1,1}$, $\pi\rho\Delta_{1,2}$ и $\pi_u\rho_u\Delta_{1,2}^u$, каждое из которых является конечным числом. Таким образом, максимизация $y_1((i+1)\varepsilon)$ при известном значении $y_1(i\varepsilon)$ относительно переменной управления $u_1(i\varepsilon)$, требуемая функционалом (7), обусловлена лишь выражением (19).

Пусть $i = \frac{T}{\varepsilon} - 1$ и значение $y_1(i\varepsilon)$ задано. Определим управление, оптимальное на промежутке $[T-\varepsilon, T]$. Для этого рассмотрим следующие альтернативы:

1. Пусть $\Delta_{2,1}^u\gamma_2 = \Delta_{2,2}^u\delta_2$. Рассмотрим два возможных случая:

а. Если $y_1(i\varepsilon) = 0$, то $u_1(i\varepsilon)$ – любое из множества допустимых управлений $[0, u]$.

б. Пусть $y_1(i\varepsilon) > 0$. Если $\Delta_{1,2}^u\beta_2 - \Delta_{1,1}^u\alpha_2 > 0$, то $u_1(i\varepsilon)$ должен принимать максимальное значение из множества допустимых управлений, т.е. u . Если $\Delta_{1,2}^u\beta_2 - \Delta_{1,1}^u\alpha_2 < 0$, то $u_1(i\varepsilon)$

должен принимать минимальное значение из множества допустимых управлений, т.е. 0. Если $\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 = 0$, то оптимальным будет любое управление.

2. Пусть $\Delta_{2,1}^u \gamma_2 < \Delta_{2,2}^u \delta_2$. Рассмотрим два возможных случая:

а. Если $\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 - \Delta_{2,1}^u \gamma_2 + \Delta_{2,2}^u \delta_2 \leq 0$, то неравенство $\Psi(i\varepsilon) < 0$ будет выполнено для любого значения $y_1(i\varepsilon)$. Поэтому оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = 0$.

б. Пусть $\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 - \Delta_{2,1}^u \gamma_2 + \Delta_{2,2}^u \delta_2 > 0$. Неравенство $\Psi(i\varepsilon) > 0$ будет выполнено при $y_1(i\varepsilon) > \Upsilon$, где

$$\Upsilon = \frac{(1-u)(\Delta_{2,2}^u \delta_2 - \Delta_{2,1}^u \gamma_2)}{\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 - \Delta_{2,1}^u \gamma_2 + \Delta_{2,2}^u \delta_2}.$$

В таком случае оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = u$. Если $y_1(i\varepsilon) \leq \Upsilon$, то тогда оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = 0$.

3. Пусть $\Delta_{2,1}^u \gamma_2 > \Delta_{2,2}^u \delta_2$. Рассмотрим два возможных случая:

а. Если $\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 - \Delta_{2,1}^u \gamma_2 + \Delta_{2,2}^u \delta_2 \geq 0$, то неравенство $\Psi(i\varepsilon) > 0$ выполнено для любого значения $y_1(i\varepsilon)$. Поэтому оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = u$.

б. Пусть $\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 - \Delta_{2,1}^u \gamma_2 + \Delta_{2,2}^u \delta_2 < 0$. В таком случае неравенство $\Psi(i\varepsilon) > 0$ выполнено при $y(i\varepsilon) < \Upsilon$. Тогда оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = u$. Если $y(i\varepsilon) \geq \Upsilon$, то тогда оптимальным будет управление $u_1(i\varepsilon) = 0$.

Применение принципа оптимальности Беллмана заканчивает доказательство данной теоремы. $\square$

Теорема 4 не исчерпывает все возможные комбинации параметров модели: в ее доказательстве описаны случаи, которые не вошли в итоговую формулировку. Их мы рассмотрим отдельно. Начнем с ситуации, описанной в случае 1а. Тогда имеет место $y(T) = (1-u)^2 \delta_2 \delta_1 + (1-u)u_{2,2} \delta_2$ и справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть $\Delta_{2,1}^u \gamma_2 = \Delta_{2,2}^u \delta_2$ и $\delta_1 = 0, \delta_2 = 0$. Пусть для некоторого τ_1 имеет место $y_1(\tau_1) = 0$. Тогда для $\tau > \tau_1$ любое допустимое управление будет оптимальным.

Для случаев 2б и 3б оптимальная стратегия в каждый момент времени определена однозначно, но зависит от текущего состояния системы. Следующие две теоремы показывают, что для этих случаев число возможных переключений не превосходит одного.

Теорема 5. Пусть $\Delta_{2,1}^u \gamma_2 > \Delta_{2,2}^u \delta_2$ и $\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 - \Delta_{2,1}^u \gamma_2 + \Delta_{2,2}^u \delta_2 < 0$. Тогда оптимальное управление в момент времени τ зависит от текущего состояния системы $y_1(\tau)$ и устроено следующим образом:

$$(20) \quad u_1(\tau) = \begin{cases} u, & \text{если } y_1(\tau) < \Upsilon, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом если УС применяет управление (20), то число возможных переключений с $u_1(\tau) = 0$ на $u_1(\tau) = u$ не превосходит одного.

Доказательство. Из-за характера уравнения (5) при соблюдении оптимального управления после попадания системы в зону фазового пространства

$$y_1 < \Upsilon$$

при некотором τ система и далее будет оставаться в этой зоне. Действительно, в силу (9) при $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_1(i\varepsilon) = u$ и $y_1(i\varepsilon) < \Upsilon$ будет выполнено $y_1((i+1)\varepsilon) \geq y_1(i\varepsilon)$. Это обусловлено последним слагаемым в (18), которое после умножения на ε и предельного перехода становится равным $y_1(i\varepsilon)$. В таком случае для достаточно малого ε будет иметь место $y_1((i+1)\varepsilon) = y_1(i\varepsilon) + \hat{\Omega}$, где $\hat{\Omega}$ – некоторая небольшая неотрицательная величина. Следовательно, момент переключения оптимального управления, если он будет, произойдёт один раз. $\square$

Теорема 6. Пусть $\Delta_{2,1}^u \gamma_2 < \Delta_{2,2}^u \delta_2$ и $\Delta_{1,2}^u \beta_2 - \Delta_{1,1}^u \alpha_2 - \Delta_{2,1}^u \gamma_2 + \Delta_{2,2}^u \delta_2 > 0$. Тогда оптимальное управление в момент времени τ зависит от текущего состояния системы $y_1(\tau)$ и устроено следующим образом:

$$(21) \quad u_1(\tau) = \begin{cases} u, & \text{если } y_1(\tau) > \Upsilon, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

При этом если УС применяет управление (21), то тогда число возможных переключений с $u_1(\tau) = u$ на $u_1(\tau) = 0$ не превосходит одного.

Доказательство. Доказывается аналогично теореме 5. $\square$

При этом метод нахождения времени переключения управления в теоремах 5 и 6 аналогичен тому, который был описан в разделе 5.

В конце данного раздела отметим, что случай $v = (1, 0)$ разбирается аналогичным образом. Все результаты будут такими же с точностью до замены u_1 на u_2 и y_1 на y_2 .

7. Примеры

Проиллюстрируем полученные результаты на конкретных примерах. Из доказанного выше следует, что оптимальные стратегии управления определяются лишь тем, как нативные агенты воспринимают влияние ботов алгоритмом ранжирования, а точнее той его составляющей, которая отвечает за взаимодействие ботов с нативными агентами и, возможно, текущим состоянием фазовых переменных. Во всех трех нижеследующих примерах будем рассматривать матрицы $P_1^{1,2}$ и $P_2^{1,2}$, определенные следующим образом:

$$(22) \quad P_1^{1,i} = \begin{bmatrix} 0,975 & 0,025 \\ 0,952 & 0,048 \end{bmatrix}, P_2^{1,i} = \begin{bmatrix} 0,066 & 0,934 \\ 0,049 & 0,951 \end{bmatrix},$$

т.е.

$$\alpha_2 = 0,025, \beta_2 = 0,048, \gamma_2 = 0,066, \delta_2 = 0,049.$$

Эти параметры были взяты из таблицы переходов, откалиброванной на эмпирических данных из онлайн-социальной сети ВКонтакте (более подробно см. [12]).

Заметим, что для компонент (22) имеют место неравенства $\beta_2 > \alpha_2$ и $\gamma_2 > \delta_2$, означающие, что сила эффекта конформизма (изменение мнения на противоположное в результате влияния со стороны противоположного мнения – вероятности β_2 и γ_2) выше, чем сила эффекта антиконформизма (изменение мнения на противоположное в результате влияния со стороны когерентного мнения – вероятности α_2 и δ_2) для каждого из мнений Z_1 и Z_2 .

Отсюда можно предположить, что для вектора весов $v = (0, 1)$ (цель УС – максимизировать представленность мнения Z_1 в системе) оптимальной будет стратегия $u_1(\tau) \equiv u$ (т.е. боты должны транслировать мнение Z_1), а для вектора весов $v = (1, 0)$ – $u_1(\tau) \equiv 0$ (боты должны пропагандировать мнение Z_2), по крайней мере в случае, когда алгоритмы ранжирования отключены.

В целом отметим, что ситуация, когда для продвижения в обществе некоторой точки зрения (скажем, Z_1) необходимо распространять аргументы, ей противоречащие (боты должны транслировать мнение Z_2), кажется достаточно абсурдной. Безусловно, соответствующая искусственная настройка компонент таблицы переходов может привести к такому исходу (см. теорему 1, второй случай), однако эмпирические исследования показывают, что конформизм (ассимилятивное влияние) играет более важную роль в формировании мнений людей в социальных группах, чем антиконформизм/диссимилятивное влияние (см. [6, 19]). Отметим также, что подобного рода эффекты возможны, когда азбука мнений ординальна и состоит из нескольких элементов. В таком случае могут существовать более сложные траектории влияния, к примеру, в случае ограниченного доверия (см. [14]).

Теперь проанализируем стратегии управления, которые следуют из доказанных выше теорем. Сначала рассмотрим простейший случай, описанный в разделе 5, т.е. будем считать, что алгоритмы ранжирования отключены.

7.1. Пример 1

Пусть $v = (0, 1)$, т.е. цель УС – максимизировать представленность мнения Z_1 в системе. Для рассматриваемой социальной системы имеют место неравенства $\gamma_2 > \delta_2$ и $\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2 + \delta_2 \geq 0$. Это означает, что выполнены условия случая 3 теоремы 1. Следовательно, оптимальным будет управление $u_1(\tau) \equiv u$, т.е. все боты должны транслировать первое мнение.

7.2. Пример 2

Вместо того чтобы рассматривать противоположный случай $v = (1, 0)$, когда УС старается максимизировать число адептов

мнения Z_2 , инвертируем таблицу переходов (22):

$$P_1^{1,i} = \begin{bmatrix} 0,951 & 0,049 \\ 0,934 & 0,066 \end{bmatrix}, P_2^{1,i} = \begin{bmatrix} 0,048 & 0,952 \\ 0,025 & 0,975 \end{bmatrix}$$

и будем рассматривать вектор весов $v = (0, 1)$. Имеют место неравенства $\gamma_2 > \delta_2$ и $\beta_2 - \alpha_2 - \gamma_2 + \delta_2 < 0$. Это соответствует условиям, описанным в теореме 2. В таком случае оптимальное управление имеет вид

$$u_1(\tau) = \begin{cases} u, & \text{если } y_1(\tau) < \Theta, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для рассматриваемой социальной системы $\Theta = (1 - u)\frac{23}{6}$. Попытаемся понять, возможно ли выполнение неравенства $y_1 \geq \Theta$ в принципе. Пусть оно выполнено. Тогда

$$y_1 \geq (1 - u)\frac{23}{6} = n\frac{23}{6} \geq y_1\frac{23}{6},$$

что возможно, только если $y_1 = 0$ и $\Theta = 0$, откуда следует $u = 1$, что не имеет смысла.

Таким образом, оптимальным управлением будет $u_1(\tau) \equiv u$. Это означает, что для таблицы переходов (22) с вектором весов $v = (1, 0)$ оптимальным будет управление $u_2(\tau) \equiv u$ – для продвижения точки зрения Z_2 в обществе все социальные боты должны транслировать аргументы в ее поддержку.

7.3. Пример 3

Результаты предыдущих двух примеров подтвердили наши гипотезы. Теперь предположим, что алгоритм ранжирования активирован и вектор весов задан как $v = (0, 1)$. Рассмотрим следующий класс алгоритмов ранжирования, параметризуемый двумя коэффициентами:

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1}^u &= \Delta_{1,1}^u = x, \\ \Delta_{1,2}^u &= \Delta_{2,1}^u = y. \end{aligned}$$

При $x > y$ алгоритм ранжирования поощряет контакты между агентами с одинаковыми мнениями (в таких случаях говорят, что имеет место гомофилия¹), а при $x < y$ больший приоритет

¹ Считается, что алгоритмы ранжирования в социальных медиа платформах действуют именно таким образом [17].

отдается контактам между представителями разных фракций – имеет место гетерофилия. Рассмотрим два упрощенных случая.

1. Пусть $x \gg y$. Тогда выполнено условие теоремы 6. Следовательно, оптимальной является стратегия

$$u_1(\tau) = \begin{cases} u, & \text{если } y_1(\tau) > \Upsilon, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

при этом

$$\Upsilon = \frac{(1-u)(49x - 66y)}{24x - 18y} \approx (1-u)\frac{49}{24}.$$

Для $u = 0,5^1$ получаем $\Upsilon = 49/48$, что означает, что управление $u_1(\tau) \equiv 0$ всегда будет оптимальным. Для $u = 0,75$ имеем $\Upsilon \approx 0,51$, т.е. возможно переключение управления.

2. Пусть $x \ll y$. Тогда выполнено условие теоремы 5. Значит, оптимальной является стратегия

$$u_1(\tau) = \begin{cases} u, & \text{если } y_1(\tau) < \Upsilon, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

при этом

$$\Upsilon \approx (1-u)\frac{11}{3}.$$

Для $u = 0,5$ получаем $\Upsilon = 11/6$, что означает, что управление $u_1(\tau) \equiv u$ всегда будет оптимальным. Для $u = 0,75$ имеем $\Upsilon = 11/12 \approx 0,92$, т.е. возможно переключение управления.

Сравнивая два рассмотренных выше случая с примером 1, делаем вывод, что работа алгоритма ранжирования может существенно влиять на выбор оптимальной стратегии управления, особенно в условиях, когда ранжирование способствует гомофилии.

8. Заключение

В данной работе была рассмотрена задача управления мнениями агентов, сформулированная в терминах приближения среднего поля для SCARDO-модели, построенного для случая

¹ В работе [20] 2017 года была дана оценка 9%–15% для числа ботов. Более современные оценки из открытых источников составляют порядка 50%.

социальной системы с модулярной сетевой структурой, гетерогенными уровнями активности агентов и персонализацией контента. В рамках модели управления специальная группа агентов (интерпретация – боты в реальных социальных медиа) воздействует на обычных (нативных) агентов, с тем чтобы изменить их мнения в соответствии с интересами управляющего субъекта при конечном горизонте планирования.

Был изучен наиболее простой для анализа случай двухэлементной азбуки мнений, в рамках которой существует только два возможных мнения (интерпретация – выборы между двумя кандидатами/партиями) и одного типа нативных агентов. Для этого случая было построено аналитическое решение задачи управления. Оказалось, что в зависимости от значений параметров модели может быть либо одна оптимальная стратегия управления, либо бесконечно много. При этом в случае, когда оптимальное управление единственно, оно должно быть устроено следующим образом: все социальные боты должны транслировать одно и то же мнение, а переключение распространяемого мнения может произойти не более одного раза лишь для некоторых конфигураций параметров.

С содержательной точки зрения рассматриваемая в данной статье постановка малоперспективна, поскольку для таблиц переходов, полученных эмпирическим путем для двухэлементной азбуки мнений, в типичном случае все сводится к первым двум ситуациям теорем 1 или 4 [12]. Безусловно, учет активности агентов, модулярности сети и персонализации контента делает рассматриваемую постановку более содержательной, однако наиболее перспективным видится рассмотрение азбук мнений, содержащих как минимум три или более элементов. Это позволит формализовать механизмы социального влияния, такие как ограниченное доверие или диссимилиятивное влияние, которые наблюдаются в реальной социальной динамике [13] и получили широкое внимание в литературе [6]. В этом смысле решение задачи управления для двухэлементной азбуки мнений является промежуточным шагом перед изучением азбук мнений размерности $m > 2$.

Литература

1. ГУБАНОВ Д.А., НОВИКОВ Д.А., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г. *Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства* / Под. ред. чл.-корр. РАН Д.А. Новикова. – М.: Физматлит, 2010. – 228 с.
2. ГУБАНОВ Д.А. *Модели и методы информационного влияния и управления в активных сетевых структурах* : дис. ... докт. техн. наук. – М., 2021.
3. BALIETTI S. et al. *Reducing opinion polarization: Effects of exposure to similar people with differing political views* // Proc. of the National Academy of Sciences. – 2021. – Vol. 118, No. 52. – P. e2112552118. – DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.2112552118>.
4. BINI M. et al. *Graph structure-based heuristics for optimal targeting in social networks* // IEEE Trans. on Control of Network Systems. – 2022. – Vol. 9, No. 3. – P. 1189–1201. – DOI: <https://doi.org/10.1109/TCNS.2022.3163665>.
5. EPSTEIN R. et al. *The “opinion matching effect”(OME): A subtle but powerful new form of influence that is apparently being used on the internet* // PloS One. – 2024. – Vol. 19, No. 9. – P. e0309897. – DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0309897>.
6. FLACHE A. et al. *Models of social influence: Towards the next frontiers* // The Journal of Artificial Societies and Social Simulation. – 2017. – Vol. 20, No. 4. – P. 2. – DOI: <https://doi.org/10.18564/jasss.3521>.
7. FRIEDKIN N.E. *The problem of social control and coordination of complex systems in sociology: A look at the community cleavage problem* // IEEE Control Systems Magazine. – 2015. – Vol. 35, No. 3. – P. 40–51. – DOI: <https://doi.org/10.1109/MCS.2015.2406655>.
8. GEZHA V.N., KOZITSIN I.V. *Binary Opinion Space in the SCARDO Model: Precise Analytical Description* // Advances in Systems Science and Applications. – 2022. – Vol. 22,

- No. 4. – P. 103–115. – DOI: <https://doi.org/10.25728/assa.2022.22.4.1292>.
9. GEZHA V.N., KOZITSIN I.V. *Macroscopic Description of Structured Heterogeneous Online Social Systems with Dynamical Opinions* // 6th Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA–2024). – IEEE, 2024. – P. 133–138. – DOI: <https://doi.org/10.1109/SUMMA64428.2024.10803880>.
 10. HUNTER R.F. et al. *Social network interventions for health behaviours and outcomes: A systematic review and meta-analysis* // PLoS Medicine. – 2019. – Vol. 16, No. 9. – P. e1002890. – DOI: <https://doi.org/10.1371/journal.pmed.1002890>.
 11. KEIJZER M.A., MAS M., FLACHE A. *Polarization on social media: Micro-level evidence and macro-level implications* // JASSS. – 2024. – Vol. 27, No. 1. – P. 7. – DOI: <https://doi.org/10.18564/jasss.5298>.
 12. KOZITSIN I.V. *A general framework to link theory and empirics in opinion formation models* // Scientific Reports. – 2022. – Vol. 12, No. 1. – P. 5543. – DOI: <https://doi.org/10.1038/s41598-022-09468-3>.
 13. KOZITSIN I.V. *Opinion dynamics of online social network users: a micro-level analysis* // The Journal of Mathematical Sociology. – 2023. – Vol. 47, No. 1. – P. 1–41. – DOI: <https://doi.org/10.1080/0022250X.2021.1956917>.
 14. KOZITSIN I.V. *Optimal control in opinion dynamics models: diversity of influence mechanisms and complex influence hierarchies* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2024. – Vol. 181. – P. 114728. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.114728>.
 15. LEE C., WILKINSON D.J. *A review of stochastic block models and extensions for graph clustering* // Applied Network Science. – 2019. – Vol. 4, No. 1. – P. 1–50. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s41109-019-0232-2>.
 16. LI G.J., PORTER M.A. *Bounded-confidence model of opinion dynamics with heterogeneous node-activity levels* // Physical

- Review Research. – 2023. – Vol. 5, No. 2. – P. 023179. – DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.5.023179>.
17. PERALTA A.F., KERTESZ J., INIGUEZ G. *Opinion formation on social networks with algorithmic bias: dynamics and bias imbalance* // Journal of Physics: Complexity. – 2021. – Vol. 2, No. 4. – P. 045009. – DOI: <https://doi.org/10.1088/2632-072X/ac340f>.
 18. PROSKURNIKOV A.V., TEMPO R. *A tutorial on modeling and analysis of dynamic social networks. Part II* // Annual Reviews in Control. – 2018. – Vol. 45. – P. 166–190. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2018.03.005>.
 19. TANG T., SNIJDERS T., FLACHE A. *An Empirical and Simulation Investigation of Bounded Confidence and Negative Influence in Opinion Dynamics Using Stochastic Actor-Oriented Model* // Journal of Artificial Societies and Social Simulation. – 2025. – Vol. 28, No. 1. – P. 1–2. – DOI: <https://doi.org/10.18564/jasss.5566>.
 20. VAROL O. et al. *Online human-bot interactions: Detection, estimation, and characterization* // Proc. of the Int. AAAI Conf. on Web and Social Media. – 2017. – Vol. 11, No. 1. – P. 280–289. – DOI: <https://doi.org/10.1609/icwsm.v11i1.14871>.
 21. ZIMMARO F., CONTUCCI P., KERTESZ J. *Voter-like dynamics with conflicting preferences on modular networks* // Entropy. – 2023. – Vol. 25, No. 6. – P. 838. – DOI: <https://doi.org/10.3390/e25060838>.

CONTROLLING OPINIONS IN THE SCARDO-MODEL OF OPINION DYNAMICS WITH TWO-ELEMENT OPINION ALPHABET AND SINGLE TYPE OF NATIVE AGENTS: ANALYTICAL SOLUTION

Vladislav Gezha, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, PhD student, (gezha.vn@phystech.edu).

Ivan Kozitsin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, PhD in mathematics (kozitsin.ivan@mail.ru).

Abstract: This paper investigates a control problem whereby a concerned person attempts to change individuals' opinions by using a group of social bots – stubborn agents that can influence other, native, agents via direct conversations. The control problem is formulated in terms of the mean field approximation for the SCARDO-model, built for the case of a social system with a modular network structure, heterogeneous levels of agent activity and content personalization. We focus on, perhaps, the simplest case of the two-element opinion alphabet, in which there are only two possible opinions (interpretation – elections in a two-party system) and one type of non-bot agents. We derive a precise analytical solution to the control problem and demonstrate that depending on the model parameters, there can be either one optimal control strategy or infinitely many. At the same time, in the case when there is only one optimal control trajectory, it should be organized as follows: all social bots should broadcast the same opinion, and the switch to a different opinion can occur no more than once, only for some parameter configurations. The theoretical results obtained are complemented by insightful examples with data from the online network VKontakte.

Keywords: opinion dynamics models, SCARDO-model, mean-field approximation, optimal control, modular networks, ranking algorithms.

УДК 519.7

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.В. Мазаловым.*

Поступила в редакцию 11.11.2024.

Дата опубликования 31.05.2025.