ЗАДАЧА ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ КВОТ НА ОБУЧЕНИЕ МЕЖДУ СТРУКТУРНЫМИ ПОДРАЗДЕЛЕНИЯМИ ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ[1]

Калачев В. Ю.[2], Угольницкий Г. А.[3] Усов А. Б.[4]
(*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону*)

Рассмотрена задача перераспределения квот на обучение среди структурных подразделений ВУЗа. Задача перераспределения квот имеет широкую область приложений, в частности при предотвращении загрязнения окружающей среды. В статье предполагается, что в ВУЗе имеется несколько структурных подразделений. Руководство ВУЗа выделяет структурным подразделениям (СП) некоторые квоты на обучение. Руководитель каждого СП может отдавать часть квоты своего СП другому подразделению, получая взамен некоторую компенсацию. При этом если квота не отдана, то она должна быть полностью использована в том СП, которому была выделена. Руководитель каждого СП стремится к максимизации своего выигрыша, выражаемого его целевой функцией. Для простоты можно считать, что цель руководителя каждого СП состоит в максимизации количества средств, аккумулируемых в централизованном фонде данного СП. При этом руководитель СП может управлять долей выделенной ему квоты, которую он хочет отдать или получить от другого СП. Показано, в каких случаях всем структурным подразделениям в результате перераспределения удаётся получить оптимальные для них квоты. Рассмотрено три случая: когда суммарная величина квоты, которую хотят отдать подразделения, больше, меньше или равна суммарной величине квоты, которую хотят приобрести другие структурные подразделения. Предложены алгоритмы перераспределения квот в каждом из этих случаев. Исследование проводится аналитически для частного вида входных функций, в качестве которых берутся степенные функции. Приведены числовые примеры и дан анализ полученных результатов. Сделан ряд содержательных выводов.

Ключевые слова: перераспределение квот, оптимальная квота, структурное подразделение, управление высшими учебными заведениями, целевая функция.

---

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект №25-11-00094.*

[2] *Василий Юрьевич Калачев, к.э.н., доцент* (vkalachev@sfedu.ru).
[3] *Геннадий Анатольевич Угольницкий, д.ф.-м.н., профессор* (gaugolnickiy@sfedu.ru).
[4] *Анатолий Борисович Усов, д.т.н., доцент* (abusov@sfedu.ru).

1. Введение

Задача распределения и перераспределения квот на некоторый ресурс весьма актуальна и возникает в проблемах охраны окружающей среды от загрязнения, рыбном хозяйстве, электроэнергетике, политике, управлении учебным процессом в ВУЗах и многих других областях. Её смысл состоит в оптимальном распределении ограниченных ресурсов между агентами при компромиссном учёте их интересов.

С другой стороны, вопросам оптимального распределения квот с использованием инструментов математического моделирования посвящено не так много работ. В [3, 5] в математической постановке исследована задача распределения квот выбросов вредных веществ между их источниками с целью минимизации вредного воздействия на атмосферу. Приводится алгоритм оптимального распределения квот, основанный на пропорциональности внутри однородной группы источников и минимизации квадратичного функционала. В [9, 11] рассмотрена задача распределения абитуриентов по ВУЗам. В [11] при этом применяются коалиционные игровые модели, а в [9] доказано, что при определённых условиях равновесное распределение абитуриентов по ВУЗам единственно. Особое значение задача распределения и перераспределения квот имеет для рыбного хозяйства. В [2] изучена задача распределения квот вылова чёрного палтуса. Исследование основано на теории биматричных и кооперативных игр.

В настоящей статье рассмотрена задача перераспределения квот внутри некоторого ВУЗа между его структурными подразделениями. Некоторые предварительные результаты в этой области получены в работе [4].

Задача рассмотрена в бескоалиционном случае с учетом иерархической структуры современных систем управления. Определены субъекты управления в задаче, выписаны их целевые функции, рассмотрены разные варианты соотношения входных параметров модели, характеризующих спрос на квоты и их предложение. В результате задача перераспределения квот между структурными подразделениями одного ВУЗа рассматривается в трёх вариантах. В первом суммарный размер квоты, который хотят отдать структурные подразделения ВУЗа, больше суммарного размера квоты, который хотят приобрести другие подразделения этого ВУЗа (предложение больше спроса), во втором случае – наоборот, предложение меньше спроса, а в третьем случае спрос равен предложению. Задача перераспределения поставлена как иерархическая игра при нескольких ведущих и ведомых. Предложены алгоритмы решения задачи во всех случаях, приведены числовые примеры для квадратичной аппроксимации целевой функции.

2. Постановка задачи

В ВУЗе имеется несколько структурных подразделений. Руководство ВУЗа выделяет структурным подразделениям (СП) некоторые квоты на обучение, например, количество бюджетных мест в бакалавриат или магистратуру. Руководитель каждого СП может отдавать часть квоты своего СП другому подразделению, получая взамен некоторую компенсацию. При этом если квота не отдана, то она должна быть полностью использована в том СП, которому была выделена. Руководитель каждого СП стремится к максимизации своего выигрыша, выражаемого его целевой функцией. Для простоты можно считать, что цель руководителя каждого СП состоит в максимизации количества средств, аккумулируемых в централизованном фонде данного СП. При этом управлять руководитель СП может долей выделенной ему квоты, которую он хочет отдать или получить от другого СП.

Для определения величины квоты, которую выгодно отдать или получить, сначала необходимо определить оптимальную квоту для каждого СП. Для решения этой задачи формально модель можно записать в следующем виде:

– целевая функция i-го СП

(1) $J_i = F_i(T_{ii}) \to \max;\ i = 1,2,\ldots,n;$

– имеющиеся ограничения на управления i-го СП

(2) $0 \le T_{ii} \le Q_i.$

Здесь $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множество всех СП; Q_i – исходная квота i-го СП; T_{ii} – управление руководителя СП (величина имеющегося в его распоряжении ресурса); $F_i(T_{ii})$ – выигрыш СП при наличии ресурса в размере T_{ii}; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Первоначально решается n задач безусловной оптимизации (1). Найденные оптимальные квоты СП обозначим через T^*_{ii}; $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если $T^*_{ii} > Q_i$, то i-е СП заинтересовано приобрести дополнительно часть квоты у другого СП, а именно величину квоты $T^*_{ii} - Q_i$. Обозначим множество таких СП через N^-.

Если $T^*_{ii} < Q_i$, то i-е СП заинтересовано отдать часть предложенной ему квоты другому СП, а именно величину квоты $Q_i - T^*_{ii}$. Обозначим множество таких СП через N^+.

Если $T^*_{ii} = Q_i$, то i-е СП уже имеет оптимальную квоту и в дальнейшем перераспределении квот не участвует. Обозначим множество таких СП через N^0. Очевидно, что

$$N^+ \cup N^- \cup N^0 = N; N^+ \cap N^- = \varnothing$$

Возможны три случая.

$$(3)\quad \sum_{i \in N^-} (T^*_{ii} - Q_i) = \sum_{i \in N^+} (Q_i - T^*_{ii}),$$

$$(4)\quad \sum_{i \in N^-} (T^*_{ii} - Q_i) > \sum_{i \in N^+} (Q_i - T^*_{ii}),$$

$$(5)\quad \sum_{i \in N^-} (T^*_{ii} - Q_i) < \sum_{i \in N^+} (Q_i - T^*_{ii}).$$

В случае (3) путём перераспределения квот все СП получат оптимальную квоту. В случае (4) предложение превышает спрос. Часть квоты, которую СП хотят передать другим СП, превышает ту часть квоты, которую СП хотят получить от других СП. В случае (5), наоборот, спрос на квоту превышает предложение.

СП, входящие в N^0, имеют оптимальную квоту и в перераспределении квот не участвуют. Остальные СП во всех трёх случаях стремятся к максимизации своих целевых функций в результате перераспределения квот. Их целевые функции принимают следующий вид:

– для СП, которые хотят приобрести дополнительную квоту

(6) $J_i = F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p(\Delta T_{ii})^{\alpha} \to \max; \quad i \in N^-;$

с ограничениями на управления

(7) $0 \le \Delta T_{ii} \le T_{ii}^* - Q_i;$

– для СП, которые хотят отдать лишние квоты

(8) $J_i = F_i(Q_i - \Delta T_{ii}) + \beta\, p(\Delta T_{ii})^{\alpha} \to \max; \quad i \in N^+;$

с ограничениями на управления

(9) $0 \le p \le p_{max}$.

Здесь p – величина платы за единицу отдаваемой квоты; p_{max} – максимальная величина платы за единицу отдаваемой квоты; ΔT_{ii} – величина квоты, которую дополнительно хочет приобрести или отдать i-е СП; $\alpha = \text{const}$ – параметр, характеризующий стоимость одной единицы квоты; $\beta = \text{const}$ – параметр, обеспечивающий совпадение размерностей в (8).

Отметим, что параметры указанного типа широко используются в математическом моделировании. Например, распространена гравитационная модель $I = kN_1N_2/R^{\alpha}$, где I – количественная мера взаимодействия; N_1, N_2 – численности населения взаимодействующих экономических субъектов; R – расстояние между ними; k, α – «подгоночные» эмпирические параметры [6].

3. Метод решения

СП, которые хотят приобрести часть квоты $i \in N^-$, максимизируют свой выигрыш, управляя величиной квоты, которую они хотят приобрести. СП, которые хотят отдать часть квоты $i \in N^+$), управляют платой за единицу отдаваемой ими квоты.

Далее рассмотрим отдельно все три возможных случая.

В случае (3) возможно такое перераспределение квот, при котором каждое СП получит оптимальную для него квоту, равную T_{ii}. Для i-го СП, которое хочет передать часть своей квоты j-му СП ($i \in N^-$; $i \in N^+$), необходимо определить оптимальную величину платы за передачу единицы квоты (p^*) – решение оптимизационной задачи (8), (9). При этом величина p^*, с одной стороны, должна быть максимальной, а с другой – всем СП из N^{-}, которые хотят приобрести дополнительную квоту, должно быть выгодно это сделать. Поэтому в случае (3), когда спрос на дополнительную часть квоты равен предложению частей квоты, и в случае (4), когда предложение превышает спрос, получаем

$$(10)\quad p^{*}=\min_{i\in N^{-}}\max_{0\le p\le p_{max}}\left[T_{ii}^{*}-Q_{i}=\arg\max_{0\le\Delta T_{ii}\le T_{ii}^{*}-Q_{i}}\left(F_{i}(Q_{i}-\Delta T_{ii})+\beta p(\Delta T_{ii})^{\alpha}\right)\right].$$

Определённая по формуле (10) величина платы за передачу единицы квоты делает для всех СП из N^{-} выгодным приобретение дополнительной части квоты до оптимальной величины.

Тогда в случае (3) в результате перераспределения квот получим

$$J_{i}=F_{i}(T_{ii}^{*})-\beta\,p^{*}(Q_{i}-T_{ii}^{*})^{\alpha};\ i\in N^{-};$$

$$J_{i}=F_{i}(T_{ii}^{*})+\beta\,p^{*}(T_{ii}^{*}-Q_{i})^{\alpha};\ i\in N^{+};$$

$$J_{i}=F_{i}(T_{ii}^{*});\ i\in N^{0}.$$

В случае (4) СП из N^{+} смогут отдать только часть «лишней» квоты, так как суммарное количество «лишней» квоты превышает суммарное количество квоты, которое необходимо для СП из N^{-}. Все СП из N^{-} получают дополнительные квоты до оптимальных. А СП из N^{+} отдают только часть своей «лишней» квоты, пропорциональную «лишней» квоте, которая у них есть. В результате в случае (4) выигрыши СП имеют вид

$$J_{i}=F_{i}(T_{ii}^{*})-\beta\,p^{*}(Q_{i}-T_{ii}^{*})^{\alpha};\ i\in N^{-};$$

$$J_{i}=F_{i}\left(T_{ii}^{*}-\frac{R^{-}}{R^{+}}(T_{ii}^{*}-Q_{i})\right)+\beta p^{*}\left(\frac{R^{-}}{R^{+}}(T_{ii}^{*}-Q_{i})\right)^{\alpha};\ i\in N^{+};$$

$$J_{i}=F_{i}(T_{ii}^{*});\ i\in N^{0}.$$

Здесь $R^{+}=\sum_{i\in N^{-}}(Q_{i}-T_{ii}^{*});\quad R^{-}=\sum_{i\in N^{-}}(T_{ii}^{*}-Q_{i}).$

В случае (5) спрос на дополнительные квоты больше их предложения. В этом случае дополнительную квоту получат только те СП, которые готовы за неё заплатить большую цену.

Возникает иерархическая игра при наличии ведущих и ведомых. При этом ведущие (СП из N^{+}) делают свой ход первыми. Они назначают стоимость единицы имеющейся у них 18 «лишней» квоты и делают выгодным для ведомых (СП из N^+) покупку всей имеющейся у них квоты. Предполагается, что ведущие образуют коалицию между собой и ведомые также вступают в свою коалицию. В результате возникает игра между одним обобщённым ведущим и одним обобщённым ведомым, которая ведётся в соответствии с информационным регламентом игры Гермейера Γ_1 [7, 8, 10].

Вначале для каждого СП из N^{-} определяется оптимальное для него количество приобретаемой квоты путём решения задач (6), (7) ($i \in N^-$), т.е. величины $\Delta T^*_{ii} - \Delta T^*_{ii}(p)$, $i \in N^-$.

Решается задача определения максимальной стоимости единицы квоты

(11) $p \to \max$

при условии, что вся имеющаяся у СП из N^+ «лишняя» квота будет продана:

(12) $\sum\limits_{i \in N^-} \Delta T^*_{ii}(p) = \sum\limits_{i \in N^+} (Q_i - T^*_{ii}).$

При этом должны выполняться неравенства

(13) $\Delta T^*_{ii}(p) \geq 0; \quad i \in N^-.$

Из решения задачи (11)–(13) определяется оптимальная цена единицы квоты – величина p^*. При этом в правой части равенства (12) участвуют только те СП из N^-, для которых выполнено условие (13) при $p = p^*$. Тем СП из N^-, для которых это условие не выполнено, будет невыгодно платить цену p^* за единицу квоты, которую назначат Ведущие (СП из N^+) и в перераспределении квот они далее не участвуют. Для таких СП из N^- считаем, что $\Delta T^*_{ii}(p) = 0$.

В результате будет определена максимальная цена за единицу квоты, при которой вся имеющаяся у СП из N^+ «лишняя» квота будет продана. Приобрести её смогут только СП из множества N^-, которые готовы заплатить за нее цену p^*. В случае (5) выигрыш СП определяется формулами

$$J_i = F_i(T^*_{ii} + \Delta T^*_{ii}(p^*)) - \beta\, p^*(\Delta T^*_{ii}(p^*))^{\alpha};\ i \in N^-;$$

$$J_i = F_i(T^*_{ii}) + \beta\, p^*(Q_i - \Delta T^*_{ii}(p^*))^{\alpha};\ i \in N^+;$$

$$J_i = F_i(T^*_{ii});\ i \in N^0.$$

В качестве функции выигрыша СП возьмём квадратичную функцию, потому что она отвечает свойствам реальных систем управления и допускает аналитическое исследование модели. Действительно, учитывая свойства реальных систем управления необходимо, чтобы целевые функции СП были возрастающими выпуклыми вниз функциями, которые достигают максимума при некотором промежуточном значении. Если выделенная квота мала – плохо, если чересчур велика и всю её надо использовать – тоже плохо. Максимум квадратичной функции (параболы, ветви которой направлены вниз), достигается в её вершине, т.е. при некотором промежуточном значении. Поэтому функции выигрыша СП взяты в виде

$$F_i(T_{ii}) = a_i T_{ii} - \frac{b_i}{2} T_{ii}^2; \quad i \in N; \quad a_i, b_i = const.$$

Тогда, решив задачу безусловной оптимизации (1), получим

$$T_{ii}^* = \frac{a_i}{b_i}; \quad i \in N .$$

Напомним, что если $T^*_{ii} > Q_i$, то игрок i должен покупать квоты ($i \in N^-$), а если $T^*_{ii} < Q_i$, то отдавать ($i \in N^+$).

4. Примеры

Для простоты приводимых ниже выкладок в примерах предполагается, что квота является непрерывной величиной и целевые функции СП могут быть продифференцированы.

Пример 1. Предложение равно спросу на квоты, т.е. выполняется условие (3).

Пусть входные данные модели
$N = 5$; $\alpha = \beta = 1$; $Q_1 = 10$; $Q_2 = 20$; $Q_3 = Q_4 = 30$; $Q_5 = 15$;
$a_1 = 10$; $a_2 = 20$; $a_3 = 200$; $a_4 = 100$; $a_5 = 66$; $b_1 = 1$; $b_2 = 10$;
$b_3 = b_4 = 5$; $b_5 = 2$.

Тогда $T^*_{11} = 10$; $T^*_{22} = 2$; $T^*_{33} = 40$; $T^*_{44} = 20$; $T^*_{55} = 33$.

Значения глобальных максимумов целевых функций СП имеют вид

(14) $$J_1^* = F_1(T_{11}^*) = 50; \quad J_2^* = F_2(T_{22}^*) = 20; \quad J_3^* = F_3(T_{33}^*) = 4000;$$
$$J_4^* = F_4(T_{44}^*) = 1000; \quad J_5^* = F_5(T_{55}^*) = 1089.$$

Для их достижения второе СП должно отдать 18 единиц квоты, четвёртое – 10 единиц. Первое СП уже имеет оптимальную квоту и в перераспределении квот не участвует. Третье СП должно приобрести 10 единиц квоты, а пятое СП – 18 единиц.

В результате выполняется условие (3) и в ходе перераспределения квот все СП могут получить оптимальные квоты. Определим оптимальную цену единицы квоты для СП, которые отдают часть своей квоты – величину p^*. Для этого используем формулу (10) и решим задачу оптимизации:

$$p^* = \min_{i \in N^-} \max_{0 \le p \le p_{max}} \left(T_{ii}^* - Q_i = \arg \max_{0 \le \Delta T_{ii} \le T_{ii}^* - Q_i} \left(F_i(Q_i - \Delta T_{ii}) + p \Delta T_{ii} \right) \right).$$

Вначале для каждого СП из N^- определим величины

$$p_i^* = \max_{0 \le p \le p_{max}} \left(T_{ii}^* - Q_i = \arg \max_{0 \le \Delta T_{ii} \le T_{ii}^* - Q_i} \left(F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p \Delta T_{ii} \right) \right).$$

Для этого найдём

$$\max_{0 \le \Delta T_{ii} \le T_{ii}^* - Q_i} \left(F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p \Delta T_{ii} \right).$$

Вычислим первую производную и приравняем её к нулю. Получим, что

$$a_i - b_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p = 0 .$$

Вторая производная отрицательна, следовательно, формула $(\Delta T_{ii})^* = \dfrac{a_i - p}{b_i} - Q_i$ определяет точку максимума.

СП из N^+ необходимо отдать всю «лишнюю» квоту, поэтому потребуем, чтобы максимум достигался при $\Delta T_{ii} = T^*_{ii} - Q_i$. Отсюда $p^*_i = a_i - b_i t^*_{ii}$. Следовательно, величина $p^* = \min\limits_{i \in N^+} p_i^* = 0$ и квоты перераспределяются между СП бесплатно.

До перераспределения квот выигрыши СП выражались формулами

$J_1 = 50$; $J_2 = –1600$; $J_3 = 3750$; $J_4 = 750$; $J_S = 765$.

В результате перераспределения все СП будут иметь оптимальную для них квоту и их выигрыши задаются формулами (14).

Таким образом, имеем «идеальное» решение (равновесие в доминантных стратегиях). Выигрыши СП в результате перераспределения квот значительно выросли.

Пример 2. Предложение больше спроса.

В случае входных данных примера 1 и $b_4 = 10$ получим, что $T^*_{11} = 10$; $T^*_{22} = 2$; $T^*_{33} = 40$; $T^*_{44} = 10$; $T^*_{55} = 33$.

Второе СП опять хочет отдать 18 единиц квоты, четвёртое – 20 единиц. Первое СП имеет оптимальную квоту, третье готово приобрести 10 единиц, а пятое – 18 единиц. В результате выполняется условие (4), предложение квоты превышает спрос на неё.

Определение оптимальной цены единицы квоты проводится так же, как и в случае (3). Получим, что $p^*_i = 0$. Квоты и в этом случае перераспределяются между СП бесплатно.

В результате перераспределения квот все СП из N^- получают дополнительные квоты до оптимальных. А СП из N^+ отдают только часть своей «лишней» квоты, ей пропорциональную. До перераспределения квот имеем

$J_1 = 50$; $J_2 = –1600$; $J_3 = 3750$; $J_4 = –1500$; $J_5 = 765$.

В результате перераспределения второе СП отдаёт 13,26 единиц квоты (хотело отдать 18 единиц), четвёртое – 14,74 (хотело отдать 20 единиц).

Выигрыши СП значительно меняются и принимают вид

$J_1 = 50$; $J_2 = 101$; $J_3 = 4000$; $J_4 = 361$; $J_5 = 1089$.

Пример 3. Предложение меньше спроса.

В случае входных данных примера 1 и $b_4 = 1$ получим, что

$T^*_{11} = 10$; $T^*_{22} = 2$; $T^*_{33} = 40$; $T^*_{44} = 100$; $T^*_{55} = 33$.

При наличии оптимальной квоты выигрыши СП имеют вид (14).

Для достижения оптимальной квоты второе СП опять хочет отдать 18 единиц квоты. Первое СП имеет оптимальную квоту, третье СП хотело бы приобрести 10 единиц квоты, четвёртое – 70 единиц, пятое – 18 единиц. В результате выполняется условие (5), предложение квоты меньше, чем спрос на нее.

Для третьего, четвёртого и пятого СП определим, при какой максимально высокой цене за единицу квоты эти СП будут её покупать. Для этого решаются задачи (6), (7) ($i \in N^-$). Определяются величины

$$\Delta T_{ii}^* = \Delta T_{ii}^*(p^*) = \frac{a_i - p}{b_i} - Q_i; \quad i \in N^-.$$

Для определения максимальной стоимости единицы квоты решается задача (11)–(13). Условия (12), (13) принимают вид

$$\sum_{i \in N^-} \left(\frac{a_i - p}{b_i} - Q_i \right) = \sum_{i \in N^+} \left(Q_i - \frac{a_i}{b_i} \right)$$

и

(15) $\Delta T_{ii}^*(p^*) = \dfrac{a_i - p}{b_i} - Q_i \ge 0; \quad i \in N^-$.

Тогда получим, что оптимальная цена единицы квоты имеет вид

$$p^* = \left(\sum_{i \in N^-} \left(\frac{a_i}{b_i} - Q_i \right) - \sum_{i \in N^+} \left(Q_i - \frac{a_i}{b_i} \right) \right) / \sum_{i \in N^-} \left(-\frac{1}{b_i} \right).$$

При этом для всех входящих в (15) СП из N^- должно выполняться условие (15). Распишем условие (15) для каждого СП из N^-:

– для третьего СП получим

$\Delta T_{33}^*(p^*) \ge 0 \to p^* \le 50$;

– для четвёртого СП

$\Delta T_{44}^*(p^*) \ge 0 \to p^* \le 70$;

– для пятого СП

$\Delta T_{55}^*(p^*) \ge 0 \to p^* \le 36$.

Следовательно, вся «лишняя» для СП из N^+ квота будет отдана четвёртому СП по максимально возможной цене, которая определяется как решение уравнения

$\Delta T^*_{44}(p^*) = 18 = 100 - p^* - 30$, т.е. $p^* = 52$.

В результате получим, что

$\Delta T^*_{33}(52) = 0$; $\Delta T^*_{44}(52) = 18$; $\Delta T^*_{55}(52) = 0$.

Таким образом, второе СП назначит максимально возможную цену за единицу квоты в размере 52 условных единиц и отдаст всю свою «лишнюю» квоту (18 единиц) четвёртому СП.

До перераспределения квот выигрыши СП определяются формулами

(16) $J_1 = 50$; $J_2 = –1600$; $J_3 = 3750$; $J_4 = 2550$; $J_S = 765$.

После перераспределения квот выигрыши изменятся и примут вид $J_1 = 50$; $J_2 = 956{,}5$; $J_3 = 3750$; $J_4 = 2712$; $J_5 = 765$.

Пример 4. Для входных данных примера 1 и $\alpha = 2$ предложение опять равно спросу на квоты и выполняется условие (3). Справедливы формулы (14). Вновь для их достижения второе СП должно отдать 18 единиц квоты, четвёртое – 10 единиц. Первое СП уже имеет оптимальную квоту и в перераспределении квот не участвует. Третье СП должно приобрести 10 единиц квоты, а пятое СП – 18 единиц. Для определения оптимальной цены за единицу квоты (p^*) необходимо решить задачу оптимизации:

$$p^* = \min_{i\in N^-} \max_{0\le p\le p_{max}} \left(T_{ii}^* - Q_i = \arg \max_{0\le \Delta T_{ii} \le T_{ii}^* - Q_i} \left(F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p(\Delta T_{ii})^2 \right) \right).$$

Вначале, как и в примере 1, для каждого СП из N^- определим величины

$$p_i^* = \max_{0\le p\le p_{max}} \left(T_{ii}^* - Q_i = \arg \max_{0\le \Delta T_{ii} \le T_{ii}^* - Q_i} \left(F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p(\Delta T_{ii})^2 \right) \right).$$

Для этого найдём

$$\max_{0\le \Delta T_{ii} \le T_{ii}^* - Q_i} \left(F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p(\Delta T_{ii})^2 \right).$$

Вычислим первую производную и приравняем её к нулю. Получим, что

$$a_i - b_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - 2p\Delta T_{ii} = 0\,.$$

Вторая производная отрицательна, следовательно, найдена точка максимума

$$(\Delta T_{ii}(p))^* = \frac{a_i - b_i Q_i}{2p + b_i}\,.$$

СП из N^+, как и в примере 1, необходимо отдать всю «лишнюю» квоту, поэтому потребуем, чтобы максимум достигался при $\Delta T_{ii} = T^*_{ii} - Q_i$.

Получим уравнение

$$\frac{a_i}{b_i} - Q_i = \frac{a_i - b_i Q_i}{2p + b_i}\,.$$

Решая его, получим $p^* = 0$. Квоты в случае $\alpha = 2$, когда спрос равен предложению, перераспределяются между СП бесплатно. В результате перераспределения все СП будут и в этом случае иметь оптимальную квоту.

При $\alpha = 2$ для входных данных примера 2 предложение больше спроса. Тогда, как и в примере 1, оптимальная цена за единицу квоты равна нулю и сохраняются все приведённые в примере 2 результаты.

В случае входных данных примера 3 и $\alpha = 2$ предложение меньше спроса. Поступим аналогично примеру 3. Для третьего, четвёртого и пятого СП определим, при какой максимальной цене за единицу квоты они будут ее покупать. Определяются величины

$$(\Delta T_{ii}(p))^* = \frac{a_i - b_i Q_i}{2p + b_i};\ i \in N^-.$$

Для определения максимальной стоимости единицы квоты решается задача (11) с условием

$$(17)\quad \sum_{i \in N^-} \frac{a_i - b_i Q_i}{2p + b_i} = \sum_{i \in N^+} \left(Q_i - \frac{a_i}{b_i} \right).$$

Тогда оптимальная стоимость единицы квоты определяется как решение уравнения (17), которое принимает вид

$$(18)\quad \frac{50}{2p+5} + \frac{70}{2p+1} + \frac{36}{2p+2} = 18.$$

Уравнение (18) решается численно методом Ньютона [1]. В результате решения было найдено значение $p^* = 3{,}23$. Тогда

– для третьего СП: $\Delta T^*_{33}(3{,}23) = 4{,}36$;
– для четвёртого СП: $\Delta T^*_{44}(3{,}23) = 9{,}38$;
– для пятого СП: $\Delta T^*_{55}(3{,}23) = 4{,}26$.

Таким образом, «лишняя» квота будет отдана вторым СП по цене $p^* = 3{,}23$ за единицу всем трем СП (третьему, четвёртому и пятому).

До перераспределения квот выигрыши СП задаются формулами (16), после перераспределения видим, что выигрыши разных СП выросли и равны

$J_1 = 50$; $J_2 = 1066{,}5$; $J_3 = 3858$; $J_4 = 2878$; $J_5 = 1212$.

5. Заключение

Разработаны алгоритмы перераспределения квот, выделяемых СП некоторого ВУЗа в случае, когда суммарное количество квоты, которую хотели бы отдать одни СП, совпадает (больше или меньше) с суммарным количеством квот, которое хотят прибрести другие СП. Показано, что в случае, если суммарное количество квоты, которую хотели бы отдать одни СП, совпадает или больше суммарного количества квот, которое хотят прибрести другие СП, квоты между СП перераспределяются бесплатно. Если суммарное количество квоты, которую хотели бы отдать одни СП, меньше суммарного количества квот, которое хотят прибрести другие СП, то возможна продажа «лишней» квоты. Приведён алгоритм определения оптимальной цены за единицу квоты в этом случае. Во всех случаях в результате перераспределения квот выигрыши СП ожидаемо возрастают.

В дальнейшем планируется провести исследование входных функций другого вида и рассмотреть задачу в динамической постановке.

Литература

1. БАХВАЛОВ Н.С., ЖИДКОВ Н.П., КОБЕЛЬКОВ Г.М. *Численные методы*. – М.: Наука, 1975. – 632 с.
2. БОГАТОВ Е.М., БОГАТОВА Н.Е. *Исследование задачи о справедливом распределении квот на вылов рыбы методами теории игр* // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2023. – Т. 69, №2. – С. 224–236.
3. ГАЛЬКОВА Е.А., МАЕРГОЙЗ Л.С. *Оптимизационная математическая модель двухуровневого распределения ограниченного ресурса между группами людей* // Экономика и математические методы. – 2015. – Т. 51, №3. – С. 109–116.
4. КАЛАЧЁВ В.Ю., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., ХАРИТОНОВ И.А. *Применение теории расписаний для решения задачи обучения персонала* // Инженерный вестник Дона. – 2022. – №3. – С. 33–55.

5. МАЕРГОЙЗ Л. С. *Математический способ распределения квот вредных выбросов между их источниками в мегаполисе* // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2021. – Т. 24, №2. – С. 109–115.
6. СЛОВОХОТОВ Ю.Л. *Физика общества. Применение физических моделей в описании общественных явлений*. – М.: ЛЕНАНД, 2024. – 880 с.
7. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учетом экологических условий* // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №2. – С. 150–162.
8. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учетом требований устойчивого развития* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №6. – С. 86–102.
9. BALINSKI M., SÖNMEZ T. *A tale of two mechanisms: student placement* // J. of Economic Theory. – 1999. – Vol. 84. – P. 73–94.
10. BASAR T., OLSDER G.J. *Dynamic Non-Cooperative Game Theory*. SIAM, 1999. – 519p.
11. GALE G., SHAPLEY L.S. *College admissions and the stability of marriage* // American Mathematical Monthly. – 1962. – Vol. 69. – P. 9–15.

THE PROBLEM OF REDISTRIBUTING QUOTAS FOR TRAINING BETWEEN STRUCTURAL DIVISIONS OF A HIGHER EDUCATIONAL INSTITUTION

Vasiliy Kalachev, Southern Federal University, Rostov-on-Don, candidate of Sc., Associate Professor (vkalachev@sfedu.ru).
Guennady Ougolnitsky, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Sc., Professor (gaugolnickiy@sfedu.ru).
Anatoly Usov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Sc., Professor (abusov@sfedu.ru).

Abstract: The problem of redistributing quotas for training among structural divisions of a higher education institution is considered. The problem of redistributing quotas has a wide range of applications, in particular, in preventing environmental *pollution. The article assumes that a higher education institution has several structural divisions. The management of the higher education institution allocates some quotas for training to structural divisions (SD). The head of each SD can give part of the quota of his SD to another division, receiving some compensation in return. In this case, if the quota is not given, it must be fully used in the joint venture to which it was allocated. The head of each joint venture strives to maximize his gain, expressed by his objective function. For simplicity, it can be considered that the goal of the head of each joint venture is to maximize the amount of funds accumulated in the centralized fund of this joint venture. In this case, the head of the joint venture can manage the share of the quota allocated to him, which he wants to give or receive from another joint venture. It is shown in which cases all structural divisions manage to receive optimal quotas for them as a result of redistribution. Three cases are considered: when the total value of the quota that the divisions want to give is greater than, less than or equal to the total value of the quota that other structural divisions want to acquire. Algorithms for redistributing quotas in each of these cases are proposed. The study is conducted analytically for a particular type of input functions, which are taken as power functions. Numerical examples are given and an analysis of the results obtained is given. A number of meaningful conclusions are made.*

Keywords: redistribution of quotas, optimal quota, structural division, management of higher education institutions, target function.

УДК 519.83
ББК 22.18

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.

Поступила в редакцию 20.05.2025.
Опубликована 31.07.2025.