ДЕКОМПОЗИЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ПО ЭЛЕМЕНТАМ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Кутяков Е. Ю. [1]

(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Разложение квадратичной функции Ляпунова по элементам спектра матрицы динамики уже известно. Основными его компонентами являются модальный вклад и модальное взаимодействие, которые образуют базу модального анализа по Ляпунову. В представленной работе изложены результаты дальнейшей декомпозиции этих спектральных разложений по отдельным переменным состояния и по их парным комбинациям. Полученный результат можно также рассматривать как разложение квадратичной функции Ляпунова не только по элементам спектра динамической системы (по модам), но и по элементам пространства состояний, в котором записана модель этой системы. На основе предложенного способа декомпозиции сформулированы новые показатели модального анализа по Ляпунову, которые позволяют оценивать вклад отдельных собственных значений или их парное взаимодействие, но в связи только с той частью внешнего возмущения, которая ассоциирована с конкретной переменной состояния или парой таких переменных. Это, в частности, даёт возможность комплексно оценить совместное влияние как моды, так и связанной с ней переменной состояния на энергию выходного сигнала системы. Предполагается, что основная область применения новых разложений будет связана с задачами уменьшения размерности моделей крупных динамических систем.

Ключевые слова: уравнение Ляпунова, квадратичная функция Ляпунова, грамиан, субграмиан, пространство состояний, модальный анализ.

1. Введение

Функции Ляпунова имеют крайне важное значение в системном анализе и теории автоматического управления. Несмотря на то, что эти функции были предложены в конце XIX века, сегодня они продолжают активно использоваться во многих сферах, в частности, при исследовании хаоса [24], сетевых систем [18], в биологии [5] эпидемиологии [8, 16, 23], экологии [7], а также

[1] *Евгений Юрьевич Кутяков, н.с.* (*evgeniykutyakov@gmail.com*).

в традиционной для них области системного анализа и управления [15, 17, 19, 21, 22].

В данной работе рассматривается квадратичная функция Ляпунова, которая, как известно, представляет собой квадратичную форму, матрица которой является решением алгебраического уравнения Ляпунова и называется грамианом.

В работах [1, 2] предложен способ декомпозиции конечных и бесконечных грамианов по собственным значениям матрицы динамики линейной непрерывной динамической системы в пространстве состояний. Отдельные компоненты этого разложения получили название субграмианов.

В работе [12] на основе субграмианов предложен новый спектральный метод – модальный анализ по Ляпунову, суть которого заключается в представлении значений квадратичной функции Ляпунова линейной непрерывной динамической системы в виде суммы, каждое слагаемое которой соответствует либо отдельному собственному значению матрицы динамики, либо их паре. В первом случае слагаемое называется модальным вкладом собственного значения (моды) в энергию выходного сигнала системы, а во втором случае – модальным взаимодействием двух собственных значений. Эти показатели эффективно применялись в задачах исследования структуры и положения межрайонных колебаний [10], селективного управления [11], а также для поиска источника вынужденных колебаний [9] в электроэнергетических системах.

В данной работе предлагается ряд модификаций модального вклада и модального взаимодействия с целью получения оценки вклада не только для мод, но и для состояний. Ожидается, что это позволит расширить область применения модального анализа по Ляпунову на задачу уменьшения размерности моделей динамических систем.

Дальнейшее изложение результатов работы организовано следующим образом: во втором разделе представлены краткие сведения об исследуемой модели, о спектральных разложениях грамианов и о модальном анализе по Ляпунову; третий раздел посвящён связи компонентов спектрального разложения грамианов с модальными компонентами невозмущённого решения динамической системы; в четвёртом разделе представлена декомпозиция спектральных разложений квадратичной функции Ляпунова по элементам пространства состояний, а также сформулированы определения для новых, модифицированных показателей модального анализа по Ляпунову; в пятом разделе обсуждаются возможные области использования предложенных модификаций; шестой раздел содержит основные выводы проведённого исследования.

2. Предварительные сведения

В этом разделе изложены общие сведения об исследуемой модели динамической системы, допускаемые предположения, а также краткий обзор основных, уже известных результатов, связанных со спектральными разложениями решений уравнений Ляпунова [3], а также с концепцией модального анализа по Ляпунову [12].

2.1. СВЕДЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ О МОДЕЛИ

В работе рассматривается линейная непрерывная стационарная устойчивая динамическая система в пространстве состояний:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – вектор переменных состояния; $A \in R^{n\times n}$ – матрица динамики; $B \in R^{n\times m}$ – матрица входов; $u \in R^m$ – вектор внешних возмущений. Предполагается, что все собственные значения λ_i матрицы динамики различны, при этом $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ для $\forall i \neq j \in \mathcal{Q} = \{1, 2, ..., n\}$, а сама система диагонализируема, то есть матрица A допускает представление

$$A = U\Lambda V^\top,$$

где U, V – квадратные матрицы, столбцы которых представляют собой соответственно правые и левые нормированные собственные векторы матрицы динамики; Λ – диагональная матрица собственных значений матрицы динамики.

В силу устойчивости системы (1), для неё существует функция Ляпунова, которую в силу линейности (1) можно выбрать в виде квадратичной формы:

$$W(x) = x^\top P x,$$

где $\{\cdot\}^\top$ обозначает транспонирование, а P – решение уравнения Ляпунова вида

(2) $$A^\top P + PA = -Q, \quad Q > 0.$$

2.2. СУБГРАМИАНЫ И МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПО ЛЯПУНОВУ

В соответствии с [3], матрицу P можно разложить по отдельным собственным значениям матрицы динамики:

(3) $$P = \sum_{i=1}^{n} P_i = -\sum_{i=1}^{n} R_i^* Q(\lambda_i^* I + A)^{-1},$$

или по паре собственных значений:

(4) $$P = \sum_{i,j=1}^{n} P_{ij} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{R_i^* Q R_j}{\lambda_i^* + \lambda_j},$$

где $\{\cdot\}^*$ – эрмитово сопряжение; R_i – вычет резольвенты матрицы A, взятый в её собственном значении λ_i, [12]:

(5) $$R_i = u_i v_i^\top.$$

<u>*Определение* 1.</u> *Действительная часть матрицы P_i в* (3) *называется субграмианом.*

<u>*Определение* 2.</u> *Действительная часть матрицы P_{ij} в* (4) *называется парным субграмианом.*

Пусть e_k – k-й столбец единичной матрицы размерностью n. Рассмотрим частный случай уравнения (2) при $Q = e_k e_k^\top$:

(6) $$A^\top P_{x_k} + P_{x_k} A = -e_k e_k^\top,$$

Его положительно определённое решение P_{x_k} называется грамианом наблюдаемости, спектральные разложения которого задаются выражениями (3)–(4) и с учётом (5) примут вид

$$P_{x_k} = \sum_{i=1}^{n} P_{x_k i} = -\sum_{i=1}^{n} (v_i^\top)^* (u_i^k)^* e_k^\top (\lambda^* I + A)^{-1},$$

$$P_{x_k} = \sum_{i,j=1}^{n} P_{x_k ij} = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{(v_i^\top)^* (u_i^k)^* u_j^k v_j^\top}{\lambda_i^* + \lambda_j}.$$

С использованием приведённых выше выражений можно определить следующие основные показатели модального анализа по Ляпунову [12].

Определение 3. *Энергией k-го состояния по Ляпунову называется величина вида*

$$E_{x_k} = W(x)|_{x=x_0} = x_0^\top P_{x_k} x_0. \tag{7}$$

Определение 4. *Модальным вкладом i-й моды в энергию Ляпунова k-го состояния называется величина, определяемая выражением*

$$E_{x_k i} = x_0^\top P_{x_k i} x_0, \tag{8}$$

$$P_{x_k i} = -Re\left\{(v_i^\top)^*(u_i^k)^* e_k^\top (\lambda_i^* I + A)^{-1}\right\}.$$

Определение 5. *Модальным взаимодействием пары мод i, j в энергии Ляпунова k-го состояния называется величина, определяемая выражением:*

$$E_{x_k ij} = x_0^\top P_{x_k ij} x_0, \tag{9}$$

$$P_{x_k ij} = -Re\left\{\frac{(v_i^\top)^*(u_i^k)^* u_j^k v_j^\top}{\lambda_i^* + \lambda_j}\right\}.$$

Таким образом, концепция модального анализа по Ляпунову заключается в рассмотрении квадратичных функций Ляпунова при специальном выборе правой части алгебраического уравнения Ляпунова, а также спектральных разложений этих функций и соотношений между ними.

3. Интерпретация спектральных разложений квадратичной функции Ляпунова для систем с простым спектром

Определение 6. *Функцию вида:*

$$M_i(k, t, x_0) = v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t}, \tag{10}$$

где $t \geqslant 0$ – непрерывное время, будем называть i-й модальной компонентой k-й переменной состояния невозмущённого решения системы (1) *при начальном условии x_0.*

Всюду далее вместо $M_i(k, t, x_0)$ для краткости будем использовать обозначение M_i, подразумевая, что модальная компонента зависит от номера состояния, времени и вектора начального условия.

Как известно, значение квадратичной функции Ляпунова в точке x_0 вида (7) является квадратом L_2-нормы сигнала переходного процесса k-й переменной состояния системы (1) при $x(0) = x_0 \neq 0$ и $u(t) \equiv 0$ (т.е. квадратом L_2-нормы невозмущённого решения k-й переменной состояния системы (1)):

$$E_{x_k} = \int_0^\infty x_k^2(t)dt. \tag{11}$$

Невозмущённое решение системы (1) для k-й переменной состояния в случае простого спектра матрицы A можно представить в виде суммы модальных компонент:

$$x_k(t) = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t}. \tag{12}$$

Тогда

$$E_{x_k} = \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^n \left(v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t} \right)^* \cdot \sum_{i=1}^n v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t} \right] dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[\sum_{i,j=1}^n \left(v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t} \right)^* \cdot v_j^\top x_0 u_j^k e^{\lambda_j t} \right] dt.$$

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 1. *Энергия k-го состояния по Ляпунову равна интегралу суммы из попарных произведений модальных компонент M_i^*, M_j невозмущённого решения k-й переменной состояния системы* (1) *при всевозможных комбинациях номеров $i, j \in \mathcal{Q} = \{1, 2, ..., n\}$.*

***Следствие* 1.** *Модальное взаимодействие пары мод i, j в энергии Ляпунова k-го состояния равно действительной части интеграла от произведения i-й и j-й модальных компонент невозмущённого решения k-й переменной состояния системы* (1)*, причём i-я компонента берётся комплексно-сопряжённой:*

$$E_{x_k ij} = Re \left(\int_0^\infty M_i^* M_j dt \right).$$

Доказательство.

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^\infty M_i^* M_j dt\right) = \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty \left[\left(v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t}\right)^* v_j^\top x_0 u_j^k e^{\lambda_j t}\right] dt\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(x_0^\top \left(v_i^\top\right)^* \left(u_i^k\right)^* u_j^k v_j^\top x_0 \int_0^\infty e^{\left(\lambda_i^*+\lambda_j\right)t} dt\right) =$$

$$= -x_0^\top \left(\mathrm{Re}\left\{\frac{\left(v_i^\top\right)^* \left(u_i^k\right)^* u_j^k v_j^\top}{\lambda_i^* + \lambda_j}\right\}\right) x_0 = E_{x_k ij}.$$

Следствие 2. *Модальный вклад i-й моды в энергию Ляпунова k-го состояния равен действительной части интеграла от произведения невозмущённого решения k-й переменной состояния системы* (1) *и его i-й модальной компоненты, причём последняя берётся комплексно-сопряжённой:*

$$E_{x_k i} = Re\left(\int_0^\infty M_i^* x_k(t) dt\right).$$

Доказательство. Вычет R_i можно определить как коэффициенты в разложении резольвенты матрицы A:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{R_1}{s-\lambda_1} + \frac{R_2}{s-\lambda_2} + \ldots + \frac{R_n}{s-\lambda_n}. \tag{13}$$

Далее, последовательно используя (10), (12), (5), (13) и (8), получим:

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^\infty M_i^* x_k(t) dt\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int_0^\infty \left[\left(v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t}\right)^* \cdot \sum_{j=1}^n v_j^\top x_0 u_j^k e^{\lambda_j t}\right] dt\right) =$$

$$= x_0^\top \left(\mathrm{Re}\left\{\left(v_i^\top u_i^k\right)^* \sum_{j=1}^n v_j^\top u_j^k \int_0^\infty e^{\left(\lambda_i^*+\lambda_j\right)t} dt\right\}\right) x_0 =$$

$$= -x_0^\top \left(\mathrm{Re}\left\{\left(v_i^\top u_i^k\right)^* \sum_{j=1}^n \frac{v_j^\top u_j^k}{\lambda_i^* + \lambda_j}\right\}\right) x_0 =$$

$$= -x_0^\top \left(\mathrm{Re}\left\{\left(v_i^\top u_i^k\right)^* e_k^\top \left(\lambda_i^* I + A\right)^{-1}\right\}\right) x_0 = E_{x_k i}.$$

***Замечание* 1.** Если рассматривать модальные компоненты как процессы, то величина

$$\int_0^\infty M_i^* M_j dt \tag{14}$$

является кросс-корреляцией модальных компонент M_i^*, M_j с нулевым запаздыванием. Тогда фактор участия i-й моды в k-м состоянии по Ляпунову [12]

$$\tilde{e}_{ki} = \frac{E_{x_k i}}{E_{x_k}} = \frac{x_0^\top P_{x_k i} x_0}{x_0^\top P_{x_k} x_0}$$

будет пропорционален кросс-корреляции модальной компоненты M_i^* и переходного процесса $x_k(t)$, а парный фактор участия мод i, j в k-м состоянии по Ляпунову [12]

$$\tilde{e}_{kij} = \frac{E_{x_k ij}}{E_{x_k}} = \frac{x_0^\top P_{x_k ij} x_0}{x_0^\top P_{x_k} x_0}$$

будет пропорционален кросс-корреляции модальных компонент M_i^* и M_j [12].

4. Декомпозиция спектральных разложений по элементам пространства состояний

4.1. ВЫВОД РАЗЛОЖЕНИЙ И НОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА ПО ЛЯПУНОВУ

Новая форма декомпозиции квадратичных функций Ляпунова основана на идее разложения модальной компоненты (10) по элементам скалярного произведения $v_i^\top x_0$. В этом случае невозмущённое решение k-й переменной состояния системы (1) можно записать в виде следующей двойной суммы:

$$x_k(t) = \sum_{i,p=1}^{n} M_i^p = \sum_{i,p=1}^{n} v_i^p x_0^p u_i^k e^{\lambda_i t}, \tag{15}$$

где M_i^p – i-я модальная компонента невозмущённого решения k-й переменной состояния системы (1), обусловленная возмущением p-го состояния; v_i^p – p-я компонента i-го нормированного левого собственного вектора матрицы динамики системы (1); x_0^p – p-я компонента вектора начальных условий.

Используя (15) в (11), получим:

$$E_{x_k} = \sum_{i,j,p,q=1}^{n} \int_0^{\infty} \left(M_i^p\right)^* M_j^q dt = = -\sum_{i,j,p,q=1}^{n} \frac{x_0^p \left(v_i^p u_i^k\right)^* u_j^k v_j^q x_0^q}{\lambda_i^* + \lambda_j}. \qquad (16)$$

Выражение (16) задаёт разложение энергии Ляпунова k-й переменной состояния по собственным значениям матрицы динамики и по элементам пространства состояний. Рассматривая его отдельные составляющие, можно ввести ряд новых показателей модального анализа по Ляпунову.

Определение 7. *Взаимодействием i-й моды и p-го состояния с j-й модой и q-м состоянием в энергии Ляпунова k-го состояния* (*межмодальное взаимодействие состояний*) *называется величина, определяемая выражением:*

$$E_{x_k ij|\{x_p,x_q\}} = Re\left(\int_0^{\infty} \left(M_i^p\right)^* M_j^q dt\right) = = -Re\left(\frac{x_0^p \left(v_i^p u_i^k\right)^* u_j^k v_j^q x_0^q}{\lambda_i^* + \lambda_j}\right). \qquad (17)$$

Определение 8. *Действием p-го состояния через пару мод i, j на энергию Ляпунова k-го состояния (межмодальное действие состояния) называется величина, определяемая выражением:*

$$E_{x_k ij|x_p} = Re\left(\int_0^{\infty} \left(M_i^p\right)^* M_j dt\right) = = -Re\left(\frac{x_0^p \left(v_i^p u_i^k\right)^* u_j^k v_j^{\top} x_0}{\lambda_i^* + \lambda_j}\right). \qquad (18)$$

Определение 9. *Взаимодействие пары состояний x_p, x_q в модальном вкладе i-й моды в энергию Ляпунова состояния x_k* (*модальное взаимодействие состояний*) *называется величина,* *определяемая выражением*

$$(19)\quad E_{x_k i|\{x_p,x_q\}} = Re\left(\int_0^\infty \left(M_i^p\right)^* \sum_{j=1}^{n} M_j^q dt\right) =$$
$$= -Re\left(x_0^p \left(v_i^p u_i^k\right)^* e_k^\top \left(\lambda_i^* I + A\right)^{-1} e_q x_0^q\right).$$

Определение 10. *Действием состояния x_p через моду i на энергию Ляпунова состояния x_k (модальное действие состояния) называется величина, определяемая выражением*

$$(20)\quad E_{x_k i|x_p} = Re\left(\int_0^\infty \left(M_i^p\right)^* x_k(t) dt\right) =$$
$$= -Re\left(x_0^p \left(v_i^p u_i^k\right)^* e_k^\top \left(\lambda_i^* I + A\right)^{-1} x_0\right).$$

Сформулированные выше величины представляют собой модифицированные версии модального взаимодействия и модального вклада, позволяющие проводить более глубокий анализ внутренней структуры и взаимосвязей различных элементов динамической системы. Новые показатели отличаются тем, что дают оценку вклада отдельной моды или пары мод в связи с возмущением конкретного состояния либо в связи с взаимным действием возмущений двух состояний. Показатели $E_{x_k i|x_p}$ и $E_{x_k ij|x_p}$ можно рассматривать как элементы разложения соответственно модального вклада и модального взаимодействия по отдельным переменным пространства состояний, а показатели $E_{x_k i|\{x_p,x_q\}}$ и $E_{x_k ij|\{x_p,x_q\}}$ – как элементы аналогичного разложения по паре переменных. При этом выполняются следующие соотношения:

$$E_{x_k i} = \sum_{p=1}^{n} E_{x_k i|x_p} = \sum_{p,q=1}^{n} E_{x_k i|\{x_p,x_q\}},$$

$$E_{x_k ij} = \sum_{p=1}^{n} E_{x_k ij|x_p} = \sum_{p,q=1}^{n} E_{x_k ij|\{x_p,x_q\}}.$$

В то же время на основании разложения вида (16) можно сформулировать ряд принципиально новых показателей, позволяющих оценивать вклад и взаимодействие не мод, а состояний в энергии возмущения наблюдаемого состояния. Приведём их определения.

Определение 11. *Вкладом p-го состояния в энергию Ляпунова k-го состояния называется величина, определяемая выражением*

$$E_{x_k|x_p} = \sum_{q,i,j=1}^{n} E_{x_k ij|\{x_p,x_q\}}. \tag{21}$$

Определение 12. *Взаимодействием пары состояний p и q в энергии Ляпунова k-го состояния называется величина, определяемая выражением*

$$E_{x_k|\{x_p,x_q\}} = \sum_{i,j=1}^{n} E_{x_k ij|\{x_p,x_q\}}. \tag{22}$$

Наконец, с использованием (8), (20) и (21) можно сформулировать показатели, оценивающие степень совместного участия моды и состояния в энергии возмущения.

Определение 13. *Вкладом m-й моды и s-го состояния в энергию Ляпунова k-го состояния называется величина, определяемая выражением*

$$E_{x_k\{m,x_s\}} = E_{x_k m} + E_{x_k|x_s} - E_{x_k m|x_s}. \tag{23}$$

Определение 14. *Фактором участия моды m и состояния s в энергии Ляпунова состояния k называется величина*

$$\tilde{e}_{k\{m,x_s\}} = \frac{E_{x_k\{m,x_s\}}}{E_{x_k}}. \tag{24}$$

4.2. ОБОБЩЕНИЕ НА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА И СУБГРАМИАНЫ

Можно заметить, что вычисление взаимодействия мод i, j в связи с состояниями p, q, определяемое выражением (17), эквивалентно «вырезанию» из парного субграмиана $P_{x_k ij}$ элемента, стоящего на пересечении p-й строки и q-го столбца с последующим его умножением на коэффициент $x_0^p x_0^q$. Следовательно, разложение парного субграмиана по элементам пространства состояний можно представить в виде

$$P_{x_k ij} = -\mathrm{Re}\left(\frac{\left(u_i^k\right)^* u_j^k}{\lambda_i^* + \lambda_j} \sum_{p,q=1}^{n} \left(v_i^\top\right)^* v_j^\top \odot \mathbf{1}_{pq}\right), \tag{25}$$

где $\odot$ – произведение Адамара; $\mathbf{1}_{pq}$ – матрица размером $n \times n$ из нулей с единицей на пересечении p-й строки и q-го столбца.

Пользуясь аналогичными соображениями при рассмотрении показателя (19), получим следующую форму разложения субграмиана $P_{x_k i}$ по элементам пространства состояний:

$$P_{x_k i} = -\mathrm{Re}\left((u_i^k)^* \sum_{p,q=1}^{n} \left(v_i^\top\right)^* e_k^\top (\lambda_i^* I + A)^{-1} \odot \mathbf{1}_{pq} \right).$$

Наконец, используя (25) и свойство $P_{x_k} = \sum_{ij} P_{x_k ij}$, можно формализовать разложение решения P_{x_k} уравнения Ляпунова (6) по спектру матрицы динамики и элементам пространства состояний:

$$P_{x_k} = -\sum_{i,j,p,q=1}^{n} \frac{\left(v_i^\top u_i^k\right)^* u_j^k v_j^\top}{\lambda_i^* + \lambda_j} \odot \mathbf{1}_{pq}.$$

Несмотря на некоторую тривиальность приведённых разложений, они позволяют прийти к следующему важному результату.

Теорема 2. *Элемент матрицы $P_{x_k ij}$ парного субграмиана, стоящий на пересечении p-й строки и q-го столбца, численно равен действительной части кросс-корреляции* (14) *для модальных компонент M_i^p, M_j^q невозмущённого решения k-й переменной состояния системы* (1) *при начальных условиях, определяемых векторами x_0 с элементами*

$$x_0^m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = q, \\ 0 & \text{при остальных } m \end{cases} \tag{26}$$

для модальной компоненты M_j^q, и с элементами

$$x_0^m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = p, \\ 0 & \text{при остальных } m \end{cases} \tag{27}$$

– для модальной компоненты M_i^p, причём последняя берётся комплексно-сопряжённой. Аналогичный элемент матрицы $P_{x_k i}$ субграмиана численно равен действительной части кросс-корреляции невозмущённого решения k-й переменной состояния системы (1) *при начальном условии* (26) *и его i-й модальной компоненты при начальном условии* (27)*, причём последняя берётся комплексно-сопряжённой.*

Изложенный результат можно рассматривать как следствие теоремы 1, а его доказательство аналогично доказательствам для следствий 1, 2.

Заметим, что теорему 2 можно обобщить и на элементы матрицы P_{x_k} грамиана. Так, можно утверждать, что $\{p, q\}$-й элемент матрицы P_{x_k} численно равен кросс-корреляции невозмущённого решения k-й переменной состояния системы (1) при начальном условии (27) и такого же решения при начальном условии (26), т.е.

$$P_{x_k}(p,q) = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} M_i^p(t) \sum_{j=1}^{n} M_j^q(t) dt.$$

Но, вероятно, этот результат известен, поскольку грамианы используются для исследования линейной зависимости двух функций [4, 6], что напрямую связано с определением интегралов, аналогичных (14).

5. Практическое значение предложенного способа декомпозиции и новых показателей

Введённые в предыдущем разделе новые показатели «действия» состояний можно рассматривать в двух равноценных аспектах. С одной стороны, эти показатели дают оценку степени влияния возмущения одной переменной состояния (или пары состояний) на энергию возмущения другой переменной состояния через конкретную моду или пару мод. С другой стороны, мы можем их воспринимать как оценку вклада конкретной моды или пары мод в энергию Ляпунова состояния (или в энергию выходного сигнала), но в связи только с той частью возмущения, которая ассоциирована с конкретной переменной состояния (или парой состояний).

В соответствии с этими двумя аспектами можно указать две наиболее вероятные области применения представленных в данной работе разложений. Первый аспект разложений определяет сферу их использования, связанную с задачами структурного анализа динамических систем. В частности, представляется перспективным использовать их для определения пути (через какие моды) и степени влияния «виртуальных» состояний на физические состояния нелинейных аппроксимаций динамических систем, построенных с помощью метода линеаризации Карлемана. Это может быть полезно для анализа природы и механизмов проявления нелинейных процессов в таких системах.

Второй аспект разложений связан с уточнением определения модального вклада за счёт учёта вклада состояния – см. показатель (23). Это может использоваться в задачах понижения размерности моделей крупных динамических систем, где оценка значимости состояний и связанных с ними мод является первоочередной проблемой.

Применение предложенных разложений в каждой из указанных областей требует отдельных исследований. В данной работе ограничимся лишь кратким примером, демонстрирующим одно из преимуществ предложенных показателей. В нём сравнивается модальный вклад (8) и новый показатель – вклад моды и состояния (23).

Пример 1. Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в пространстве состояний со скалярным выходом

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = cx \end{cases}, \quad x(0) = x_0 = \mathbf{1}, \tag{28}$$

с матрицей динамики (на основе [13, с. 789])

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}121 & -0{,}073 & -0{,}079 & -0{,}004 & -0{,}024 \\ 376{,}991 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}114 & -0{,}857 & 0{,}673 & 5\cdot10^{-5} & 3\cdot10^{-4} \\ 0 & -5{,}143 & 27{,}885 & -36{,}196 & 0{,}002 & 0{,}014 \\ 0 & -0{,}062 & -5\cdot10^{-4} & -5\cdot10^{-4} & -2{,}894 & 2{,}378 \\ 0 & -1{,}472 & -0{,}012 & -0{,}013 & 8{,}840 & -21{,}144 \end{bmatrix}$$

и вектором выхода

$$c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это модель простейшей электроэнергетической системы с одним синхронным генератором, работающим на шину бесконечной мощности. Модель генератора учитывает электромеханические уравнения движения ротора, а также действие автоматического регулятора напряжения и трёх демпферных обмоток. Динамика такой системы хорошо изучена (см., например, [13, с. 727–789]) и может быть описана следующим набором нелинейных дифференциальных уравнений [14]:

$$
\begin{cases}
\Delta\dot{\omega}_r = -\frac{K_D\cdot\Delta\omega_r}{2H} - \frac{\psi_{ad}\cdot i_q - \psi_{aq}\cdot i_d}{2H} + \frac{T_m}{2H},\\
\dot{\delta} = \omega_0 \cdot \Delta\omega_r,\\
\dot{\psi}_{fd} = -\frac{\omega_0\cdot R_{fd}}{L_{fd}}(\psi_{fd} - \psi_{ad}) + \frac{\omega_0\cdot R_{fd}}{L_{adu}}\cdot E_{fd},\\
\dot{\psi}_{1d} = -\frac{\omega_0\cdot R_{1d}}{L_{1d}}(\psi_{1d} - \psi_{ad}),\\
\dot{\psi}_{1q} = -\frac{\omega_0\cdot R_{1q}}{L_{1q}}(\psi_{1q} - \psi_{aq}),\\
\dot{\psi}_{2q} = -\frac{\omega_0\cdot R_{2q}}{L_{2q}}(\psi_{2q} - \psi_{aq});
\end{cases}
\tag{29}
$$

где $\Delta\omega_r$ – отклонение угловой скорости ротора; K_D – коэффициент демпфирования; H – момент инерции ротора; ψ_{ad}, ψ_{aq} – взаимные потокосцепления; i_d, i_q – токи статора; T_m – входной механический момент на роторе генератора; δ – угол поворота ротора; ω_0 – номинальная частота энергосети; ψ_{fd}, R_{fd}, L_{fd}, E_{fd} – соответственно потокосцепление, сопротивление, индуктивность и ЭДС обмотки возбуждения; L_{adu} – ненасыщенное значение взаимной индуктивности между обмоткой статора и обмоткой ротора на d-оси; ψ_{1d}, ψ_{1q}, ψ_{2q} – потокосцепления демпферных обмоток d- и q-оси ротора; R_{1d}, R_{1q}, R_{2q} – сопротивления демпферных обмоток; L_{1d}, L_{1q}, L_{2q} – индуктивности демпферных обмоток.

Линеаризация уравнений (29) с параметрами из таблицы 1 в равновесной рабочей точке $\Delta\omega_{r0} = 0$ о.е., $\delta_0 = 1{,}3811$ рад, $\psi_{fd0} = 1{,}0867$ о.е., $\psi_{1d0} = \psi_{ad0} = 0{,}8647$ о.е., $\psi_{1q0} = \psi_{2q0} = \psi_{aq0} = -0{,}6138$ о.е., $T_{m0} = 0{,}9027$ о.е., $E_{fd0} = 2{,}3947$ о.е. даёт векторно-матричное дифференциальное уравнение системы (28) с соответствующей матрицей A.

Собственные значения (моды) матрицы A представлены во второй колонке таблицы 2, а переменные состояния, с которыми связаны эти моды, указаны в третьей колонке.

Итак, рассматривается устойчивая динамическая система 6-го порядка, с четырьмя апериодическими модами и одной комплексно-сопряжённой парой. Скалярный выход системы представлен переменной состояния x_2.

Таблица 1. Параметры системы (в относительных единицах, если не указано иное)

Параметр	Значение	Параметр	Значение
H	3,5000	R_{1d}	0,0248
K_D	0	L_{1d}	0,1400
ω_0, рад/с	376,9911	R_{1q}	0,0061
R_{fd}	0,0006	L_{1q}	0,7063
L_{fd}	0,1530	R_{2q}	0,0227
L_{adu}	1,6500	L_{2q}	0,1103

Таблица 2. Собственные значения и их связь с состояниями

Мода	Значение	Состояние
m_1	$-36{,}6142$	x_4 (ψ_{1d})
m_2	$-22{,}2082$	x_6 (ψ_{2q})
m_3, m_4	$-0{,}2063 \pm 6{,}4186i$	x_1, x_2 $(\Delta\omega_r, \delta)$
m_5	$-0{,}0744$	x_3 (ψ_{fd})
m_6	$-1{,}7816$	x_5 (ψ_{1q})

Задача состоит в определении степени участия каждого состояния в L_2-норме выходного сигнала при единичном начальном условии (все элементы вектора x_0 равны единице). Для этого будем удалять из исходной системы по одному состоянию (и, соответственно, по одной моде) и вычислять изменение L_2-нормы выходного сигнала новой системы с пониженной на один порядок размерностью (обозначим это изменение через Δ). Заметим, что из перечня удаляемых переменных состояния исключается x_2, поскольку она является выходом системы, и x_1, поскольку она связана с той же комплексно-сопряжённой парой мод, что и x_2. Таким образом, удалению подлежат поочерёдно переменные состояния с 3-й по 6-ю; при этом вместе с переменной состояния удаляется и связанная с ней мода (согласно таблице 2).

Результаты проведённых вычислений, представленные на рис. 1а, показывают, что наиболее значимым, с точки зрения сохранения энергии выходного сигнала, является состояние x_4, поскольку при его удалении наблюдается наибольшее изменение L_2-нормы выхода (наибольшее значение Δ). Наименее значимым по тем же соображениям является состояние x_5.

Далее, по (8) вычислим модальный вклад мод m_1, m_2, m_5 и m_6, а по (23) определим вклад этих же мод и связанных с ними состояний. Результаты представлены на рис. 1бв.

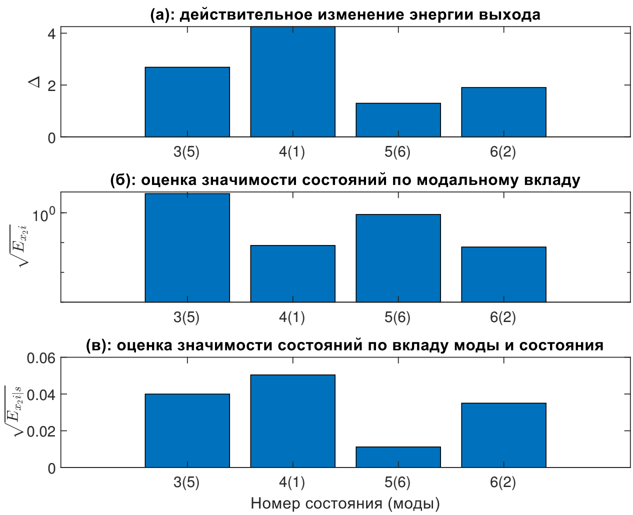

Рис. 1. Действительная значимость состояний (а), и их оценка на основе модального вклада (б) и вклада моды и состояния (в)

Как следует из рис. 1б, мода m_1 имеет наименьший модальный вклад в энергию Ляпунова выходного сигнала (состояния x_2), что указывает на малую значимость этой моды с точки зрения формирования энергии выхода. Но, как было указано выше и как видно из рис. 1а, при удалении из системы состояния x_4, связанного с модой m_1, наблюдается наибольшее изменение энергии выходного сигнала. Таким образом, модальный вклад (8) характеризует лишь участие моды в энергии наблюдаемого сигнала, но не может использоваться для оценки изменения этой энергии при удалении из системы соответствующей моды.

Вместе с тем, новый показатель (23) учитывает как модальный вклад, так и вклад состояния в энергию выхода и даёт приемлемую оценку степени значимости состояний. В частности, как следует из рис. 1в, состояние x_5 имеет наименьшую значимость, а состояния x_4 – наибольшую, что хорошо согласуется с действительным изменением энергии выхода, отображённым на рис. 1а.●

6. Заключение

В работе проведено исследование спектральных разложений квадратичной функции Ляпунова на предмет их дальнейшей декомпозиции по состояниям линейной динамической системы. Была показана связь спектральных разложений с модальными компонентами невозмущённого решения системы, после чего формализован предлагаемый метод декомпозиции и введены четыре модифицированных показателя модального анализа по Ляпунову, такие как межмодальное взаимодействие состояний, межмодальное действие состояний, а также их модальные аналоги. Кроме этого, на основании полученных разложений и модификаций определены принципиально новые показатели, оценивающие вклад состояний и вклад пары «мода – состояние» в энергию выходного сигнала системы. Хотя при предложенном способе декомпозиции теряется инвариантность относительно начальных условий, одновременно с этим возникает возможность более глубокого исследования внутренней структуры динамической системы и взаимосвязей между её элементами, в частности, за счёт комплексной оценки влияния на энергию выходного сигнала не только мод, но и переменных состояния. Некоторые из указанных преимуществ продемонстрированы на простом вычислительном примере. Более строгое обоснование этих преимуществ и детальная разработка методов применения предложенной модификации модального анализа по Ляпунову к задаче понижения размерности моделей динамических систем является предметом дальнейшей работы автора.

Литература

1. ЯДЫКИН И.Б. *О свойствах грамианов непрерывных систем управления* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №6. – С. 39–50.
2. ЯДЫКИН И.Б., ГАЛЯЕВ А.А. *О методах вычисления грамианов и их использовании в анализе линейных динамических систем* // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №2. – С. 53–74.
3. ЯДЫКИН И.Б., ИСКАКОВ А.Б. *Спектральные разложения для решений уравнений Сильвестра - Ляпунова - Крейна* // Доклады академии наук. – 2017. – Т. 472, №4. – С. 388–392.
4. AHMAD A.M., DE ABREU-GARCIA J.A. *Continuous time and discrete time Lyapunov equations: review and new directions* // Control and Dynamic Systems – 1996. – Vol. 74. – P. 253–307.
5. BOUKHOUIMA A., HATTAF K., LOTFI E.M. et al. *Lyapunov functions for fractional-order systems in biology: Methods and applications* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2020. – Vol. 140. – P. 110224.
6. BROCKETT R.W. *Finite Dimensional Linear Systems* – New York:Wiley, 1970. – 244 p.
7. CHEN C., WANG X.W., LIU Y.Y *Stability of ecological systems: A theoretical review* // Physics Reports. – 2024. – Vol. 1088. – P. 1–41.
8. TANECO-HERNANDEZ M.A., VARGAS-DE-LEON C. *Stability and Lyapunov functions for systems with Atangana–Baleanu Caputo derivative: An HIV/AIDS epidemic model* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2020. – Vol. 132. – P. 109586.
9. ISKAKOV A.B., KUTYAKOV E.Y., KATAEV D.E. *Locating the source of forced oscillations on the basis of Lyapunov modal analysis* // IFAC-PapersOnLine. – 2024. – Vol. 58, No. 13. – P. 685–690.

10. ISKAKOV A.B., KUTYAKOV E.Y., TOMIN N.V. et al. *Estimation of the location of inter-area oscillations and their interactions in electrical power systems using Lyapunov modal analysis* // Int. J. of Electrical Power & Energy Systems. – 2023. – Vol. 153. – P. 109374.
11. ISKAKOV A.B., TOMIN N.V., YADYKIN I.B. et al. *Selective LQ wide area damping of power networks based on the spectral decomposition of Gramians* // IFAC-PapersOnLine. – 2022. – Vol. 55, No. 9. – P. 152–157.
12. ISKAKOV A.B., YADYKIN I.B. *Lyapunov modal analysis and participation factors applied to small-signal stability of power systems* // Automatica. – 2021. – Vol. 132. – P. 109814.
13. KUNDUR P. *Power system stability and control* – New York: McGraw-Hill, 1994. – 1200 p.
14. KUTYAKOV E.Y., DUSHIN S.V., ABRAMENKOV A.N. et al. *Quadratic approximation of nonlinear models of the synchronous machine using the bilinear representation* // Proc. of the 13th Int. Conf. «Management of Large-Scale System Development» (MLSD). – 2020.
15. LI F., ZHENG W.X., XU S. et al. *A novel e-dependent Lyapunov function and its application to singularly perturbed systems* // Automatica. – 2021. – Vol. 133. – P. 109749.
16. LI J., CHEN Y., XI X. et al. *An analytical approach to applying the Lyapunov direct method to an epidemic model with age and stage structures* // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2025. – Vol. 84. – P. 104312.
17. LIU L., LIU Y.J., LI D. et al. *Barrier Lyapunov Function-Based Adaptive Fuzzy FTC for Switched Systems and Its Applications to Resistance–Inductance–Capacitance Circuit System* // IEEE Trans. on Cybernetics. – 2020. – Vol. 50, No. 8. – P. 3491–3502.
18. MAGHENEM M., POSTOYAN R., LORIA A. et al. *Lyapunov-based synchronization of networked systems: From continuous-time to hybrid dynamics* // Annual Reviews in Control. – 2020. – Vol. 50. – P. 335–342.

19. MASON P., CHITOUR Y., SIGALOTTI M. *On universal classes of Lyapunov functions for linear switched systems* // Automatica. – 2023. – Vol. 155. – P. 111155.
20. PEREZ-ARRIAGA I.J., VERGHESE G.C., SCHWEPPE F.C. *Selective modal analysis with applications to electric power systems, part I: heuristic introduction* // IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. – 1982. – Vol. PAS-101, No. 9. – P. 3117–3125.
21. RUEDA-ESCOBEDO J.G., MORENO J.A. *Strong Lyapunov functions for two classical problems in adaptive control* // Automatica. – 2021. – Vol. 124. – P. 109250.
22. SUN W., SU S.F., WU Y. et al. *Adaptive Fuzzy Control With High-Order Barrier Lyapunov Functions for High-Order Uncertain Nonlinear Systems With Full-State Constraints* // IEEE Trans. on Cybernetics. – 2020. – Vol. 50, No. 8. – P. 3424–3432.
23. ZHANG R., REN X. *Lyapunov functions for some epidemic model with high risk and vaccinated class* // Applied Mathematics Letters. – 2025. – Vol. 163. – P. 109437.
24. ZHOU P., HU X., ZHU Z. et al. *What is the most suitable Lyapunov function?* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2021. – Vol. 150. – P. 111154.

DECOMPOSITION OF SPECTRAL EXPANSIONS OF THE QUADRATIC LYAPUNOV FUNCTION ON STATE-SPACE VARIABLES

Evgeniy Kutyakov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Research Associate (evgeniykutyakov@gmail.com).

Abstract: Spectral decomposition of the quadratic Lyapunov function is already known. The modal contribution and modal interaction are the main components of this decomposition, which form the basis of Lyapunov modal analysis. This paper presents the results of a further expansion of these spectral components into individual state variables and into their pairwise combinations. The obtained result can also be considered as a decomposition of the quadratic Lyapunov function not only by elements of the spectrum of the dynamical system (by modes), but also by elements of the state space. On the basis of the proposed decomposition method, new Lyapunov modal analysis indices are formulated, which allow one to evaluate the contribution of individual eigenvalues or their pairwise interaction, but in connection only with the part of the external perturbation that is associated with a particular state variable or a pair of such variables. This, in particular, makes it possible to comprehensively evaluate the joint influence of both the mode and the associated state variable on the energy of the system output signal. It is assumed that the main area of application of the new decompositions will be related to the problems of the model order reduction of the large dynamical systems.

Keywords: Lyapunov equation, quadratic Lyapunov function, Gramian, sub-Gramian, state-space, modal analysis.

УДК 519.715
ББК 22.18

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.

Поступила в редакцию 10.02.2025.
Дата опубликования 31.07.2025.