ЭФФЕКТЫ НАУЧЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ОСИПОВА – ЛАНЧЕСТЕРА

Новиков Д. А.[1]
(*ФГБУН Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва*)

Традиционно в моделях Осипова – Ланчестера, описывающих динамику численности сражающихся сторон в терминах дифференциальных уравнений, боевая эффективность сторон считается постоянной во времени. В настоящей работе рассматривается роль научения – модификации линейных и квадратичных моделей Осипова – Ланчестера, учитывающие два эффекта: однократный ввод первоначально проигрывающей стороной подготовленного резерва и приобретение сторонами боевого опыта, влияющего на коэффициенты боевой эффективности. Решены задачи определения оптимального момента ввода такого резерва, чтобы его величина была минимальна, но обеспечивала «ничью»; поиска минимальной скорости научения первоначально проигрывающей стороны, также обеспечивающей «ничью»; и определения оптимальной продолжительности подготовки резерва до его ввода.

Ключевые слова: математическое моделирование, модели Осипова – Ланчестера, боевая эффективность, ввод резервов, научение.

1. Введение

Ключевыми вехами математического моделирования военных действий XX века являются модели М.П. Осипова и Ф. Ланчестера, затем - количественные (в основном вероятностные) методы оценки боевой эффективности различных видов вооружения (см. краткий обзор в [4]), получившие активное развитие начиная с 1939 г. (т.е. с начала Второй Мировой войны) и приведшие к формированию такого самостоятельного научного направления как *исследование операций* (см., например, классические учебники [3, 4, 13, 17] и современные учебники [31, 38]). Современное состояние приложений исследования операций к военному делу отражено в [12].

Настоящая работа рассматривает модификации линейных и квадратичных моделей Осипова – Ланчестера, учитывающие два эффекта: однократный ввод резерва первоначально проиг-

[1] *Дмитрий Александрович Новиков, академик РАН, директор* (novikov@ipu.ru).

рывающей стороной и приобретение опыта, влияющего на коэффициенты боевой эффективности сторон. Ищутся ответы на вопросы: в какой момент следует вводить резерв, чтобы величина этого резерва была минимальна, но обеспечивала «ничью», и какова должна быть минимальная скорость научения первоначально проигрывающей стороны, также обеспечивающая «ничью».

Структура изложения такова: во втором разделе приводится краткий обзор и классификация моделей Осипова – Ланчестера и их модификаций. Третий раздел посвящен описанию эффектов приобретения опыта, четвертый раздел – задаче об оптимальном моменте ввода резерва, в том числе подготовленного.

2. Модели Осипова – Ланчестера

Общеизвестными и получившими широкое развитие являются так называемые модели Осипова – Ланчестера (с приоритетом нашего соотечественника [15, 19]), использующие аппарат дифференциальных уравнений для описания динамики численности сил участников военных конфликтов – см. модель Ланчестера [34] и ее развитие (см. обзоры в [13, 27, 40]). Приведем их описание и классификацию, актуализировав соответствующие разделы статьи [14].

Пусть имеются две противоборствующие стороны. Обозначим через $x(t)$ ($y(t)$) *численность войск* первой (второй) стороны в момент времени $t \geq 0$. Начальные условия (численности в нулевой момент времени) – x_0 и y_0 соответственно. Скорость изменения численности войск каждой из сторон определяется тремя факторами:

– операционными потерями (пропорциональными численности своих войск);

– боевыми потерями (пропорциональными численности войск противника или произведению численностей войск обеих сторон);

– вводом резервов (выводом в резерв).

Обычное сражение описывается следующей системой дифференциальных уравнений (слагаемые соответствуют вышеперечисленным факторам):

(1) $\dot{x}(t) = -a\,x(t) - b\,y(t) + u(t)$,

(2) $\dot{y}(t) = -c\,x(t) - d\,y(t) + v(t)$,

где a, b, c и d – положительные константы, $u(t)$ и $v(t)$ – темпы ввода резервов.

Аналогично описывается *партизанская война*:

(3) $\dot{x}(t) = -a\,x(t) - g\,x(t)\,y(t) + u(t)$,

(4) $\dot{y}(t) = -d\,y(t) - h\,x(t)\,y(t) + v(t)$,

где g и h – положительные константы, и *смешанная война*:

(5) $\dot{x}(t) = -a\,x(t) - g\,x(t)\,y(t) + u(t)$,

(6) $\dot{y}(t) = -c\,x(t) - d\,y(t) + v(t)$.

Модели отличаются учетом боевых потерь. Предполагается, что в обычном сражении каждая сторона в единицу времени поражает число противников, пропорциональное своей численности: коэффициенты b и c, называемые *коэффициентами боевой эффективности*, могут интерпретироваться как число выстрелов, производимое одним сражающимся в единицу времени, умноженное на вероятность поражения одним выстрелом одного противника (именно такую модель первоначально и предложил Ф. Ланчестер в [34]).

Другой тип сражения – «партизанский», или «стрельба по площадям», когда потери противника зависят как от интенсивности огня, так и от концентрации его войск, что отражается «смешанными» слагаемыми, пропорциональными произведению численностей войск обеих сторон $x(t)\,y(t)$. Существует и другая (так называемая *дуэльная*) интерпретация модели (3)–(4), в соответствии с которой сражение рассматривается как война в древнем мире – набор индивидуальных попарных поединков между воинами (в условиях невозможности локализации и концентрации поражающих факторов).

Можно говорить не о типах сражений, а о типах ведения огня:

1) прицельный огонь по рассредоточенным целям;
2) прицельный огонь по сосредоточенным целям;
3) стрельба по площадям [8].

Отметим, что возможно рассмотрение более общих моделей, т.е. таких, в которых скорости изменения численностей пропорциональны произведению численностей, возведенных в определенные степени (эти степени могут быть и дробными – так называемые фрактальные модели Ланчестера [36]).

Следует подчеркнуть, что выше речь идет только о традиционном оружии (боевых единицах с низкой вероятностью поражения в отдельном выстреле): применение современного высокоточного оружия, робототехнических средств должно описываться другими моделями, развитие которых представляется чрезвычайно перспективным.

Самым простым (ставшим хрестоматийным) является случай отсутствия операционных потерь и резервов, когда (1)–(2) превращается в

(7) $\dot{x}(t) = -b\, y(t),\quad \dot{y}(t) = -c\, x(t).$

Решением системы (7) является так называемая *квадратичная модель* динамики численности войск:

(8) $b\,(y^2(t) - y_0^2) = c\,(x^2(t) - x_0^2).$

Траекториями (8) в координатах (x, y) будут гиперболы (прямая при $b\ y_0^2 = c\ x_0^2$ – так называемое *условие ничьей* или «равенства сил»). Проигравшей будет сторона, чья численность войск первая обратится в ноль (поэтому Ланчестеровские модели иногда называют *моделями истощения*). Если $b\ y_0^2 > c\ x_0^2$, то побеждает вторая сторона, при $b\ y_0^2 < c\ x_0^2$ побеждает первая. *Условие равенства сил* имеет вид

(9) $y_0 = \sqrt{\dfrac{c}{b}}\, x_0.$

Следует отметить некоторую условность выражений типа (9), которые не учитывают известного факта, что существует определенный критический процент потерь, при которых сторона отказывается от продолжения боя (см. , например, [12]).

По аналогии, рассмотрев (3)–(4) в отсутствие операционных потерь и резервов, получим

(10) $\dot{x}(t) = -g\, x(t)\, y(t),\quad \dot{y}(t) = -h\, x(t)\, y(t).$

Решением системы (10) является так называемая *линейная модель* динамики численности войск – прямая

$g\,(y(t) - y_0) = h\,(x(t) - x_0)$,
а условием «равенства сил» –

(11) $y_0 = \dfrac{h}{g}\,x_0$.

Для линейной модели из условия (11) можно получить следующее выражение численности войск первой стороны, оставшейся после победы над противником:

(12) $x(x_0, y_0) = x_0 - \delta\, y_0$,

где $\delta = g / h$ – отношение коэффициентов боевой эффективности соответственно второй и первой сторон в модели (3)–(4) или (10). В силу линейности выражения (12) исход боя определяется только начальными количествами войск и отношением δ и не зависит от того, как стороны разделили свои войска на части, какие части сражаются с какими и в какой последовательности. В рамках модели (7) ситуация становится несколько более разнообразной [14].

Смешанная война (см. (5)–(6)) в отсутствие операционных потерь и резервов описывается

(13) $\dot{x}(t) = -g\,x(t)\,y(t)$, $\dot{y}(t) = -c\,x(t)$.

Решением системы (13) является $g\,(y^2(t) - y_0^2) = 2\,c\,(x(t) - x_0)$. Результаты идентификации модели (13) для действия регулярных войск против партизанских движений приведены в [26].

Модель Осипова – Ланчестера имеет массу вариаций и обобщений:

– оптимизация распределения (разделения на части) сил обороны и нападения [37];

– введение переменных (зависящих от времени) коэффициентов боевой эффективности [39] и других параметров [24];

– рассмотрение дискретных моделей залпового огня [32];

– учет неопределенности (стохастических факторов) [6, 18];

– многоуровневые модели [23], в которых на нижнем уровне методом Монте-Карло имитируется взаимодействие отдельных боевых единиц, на среднем уровне взаимодействие описывается марковскими моделями, а на верхнем (агрегированном, детерминированном) уровне используются дифференциальные уравнения [41]. Такой подход удобен для идентификации реальных задач и более адекватного учета специфики конкретной моделируемой ситуации;

– рассмотрение дифференциальных игр, в которых управлениями игроков являются темпы ввода резервов $u(t)$ и $v(t)$, а критериями эффективности – разность между численностями войск в заданный момент времени [22];

– анализ моделей длительных (многостадийных) конфликтов с учетом ввода резервов [1, 16, 17, 33];

– модели агрегированного описания театра военных действий, состоящего из нескольких областей, сражения в каждой из которых описываются квадратичным законом Ланчестера [25] (учет и оптимизация распределения сил и средств в пространстве и во времени (см. обзор в [36], а также модели многостадийных конфликтов);

– модели военных конфликтов нескольких сторон [10, 21] с использованием нескольких видов вооружений [30] и оптимизацией их соотношений [9] и др.

Множество работ посвящено идентификации конфликтов (подбору параметров модели) [11, 20, 28, 29 и др.]. Модели Осипова – Ланчестера являются хрестоматийным содержимым многих учебников по исследованию операций и математическим моделям в военном деле [12, 42].

Добавление в уравнения типа Осипова – Ланчестера управляющих переменных (отражающих ввод резервов, распределение сил и средств и т.д. [5]) приводит уже к оптимизационным моделям, в том числе к соответствующим задачам оптимального управления. Перспективным представляется использование подобного «надстроечного» подхода для перехода к иерархиям моделей – теоретико-игровым «надстройкам» над Ланчестеровскими моделями [14].

Перейдем к постановкам новых задач. Предположим для определенности, что начальные численности и боевые эффективности сторон таковы, что побеждает первая сторона. Так как при заданных уравнениях динамики результат зависит только от начальных численностей и коэффициентов боевой эффективности, то у второй стороны есть лишь два способа обеспечить ничью или победить:

1) повысить свою боевую эффективность;

2) ввести в действие резерв (будем предполагать, что ввести резерв можно однократно).

Рассмотрим эти два способа сначала поодиночке, а затем совместно.

3. Роль опыта

В классических моделях Осипова – Ланчестера предполагается, что боевая эффективность сторон постоянна во времени. Однако если их взаимодействие имеет место достаточно продолжительное время, то участники приобретают *опыт*[1] (боевой и/или учебный, см. обзор и классификацию математических моделей формирования опыта в [1]), изменение которого может отражаться возрастающей зависимостью боевой эффективности от времени. Предположим, что вторая сторона приобретает боевой опыт в соответствии со следующим законом (соответственно для модели (7) или (10)):

(14) $b(t) = b_\infty - (b_\infty - b_0)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$ или $g(t) = g_\infty - (g_\infty - g_0)\,\mathrm{e}^{-\alpha t}$,

где b_0 – начальное, b_∞ – предельное ($b_\infty > b_0$) значения боевой эффективности второй стороны, $\alpha > 0$ – *скорость научения* [1].

Задача о минимальной скорости научения заключается в том, чтобы для заданного момента времени $\tau > 0$ найти минимальное значение скорости научения $\alpha \geq 0$ второй стороны[2], обеспечивающее совпадение численностей сторон в этот момент времени (и, в силу монотонности (14) по времени, приводящее к победе второй стороны). В каждом конкретном случае эта задача легко решается численно.

---

[1] *Применительно к боевым действиям научение понимается в самом широком смысле: повышение эффективности боевых формирований за счет совершенствования их организационно-штатных структур, поставки новых образцов вооружения и военной техники, проведения учений и тренировок и т.д. и т.п.*

[2] *Ситуации, в которых опыт приобретают одновременно обе стороны, описываются и исследуются аналогично.*

Рассмотрим два примера о роли приобретения второй стороной опыта, соответственно в линейной и квадратичной моделях.

Пример 1 (линейная модель). Пусть динамика численности войск описывается выражением (10) с постоянными боевыми эффективностями $g = 0{,}001$ и $h = 0{,}001$, а начальные значения численностей войск $x_0 = 130$, $y_0 = 100$. При одинаковых боевых эффективностях второй стороне «не хватает» сил для победы, и ее силы исчерпываются к моменту, когда первая сторона имеет еще 30 единиц (см. непрерывную кривую и точку A на рис. 1).

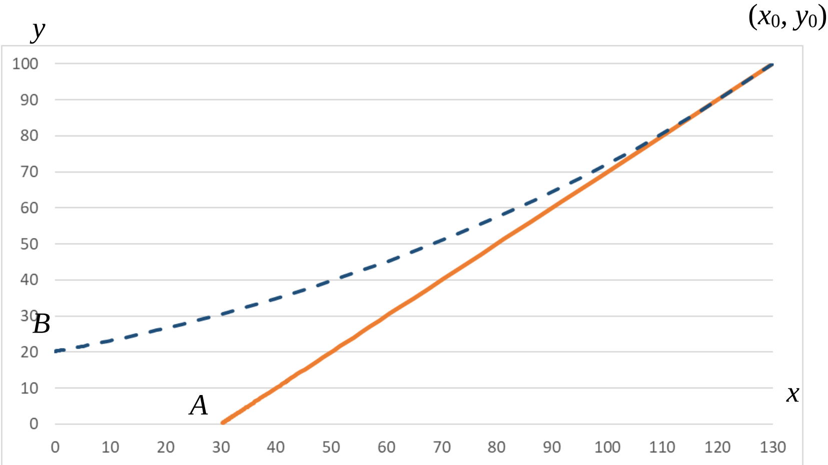

Рис. 1. Пример победы второй стороны (*пунктирная кривая*) *за счет приобретения боевого опыта в модели* (10)

Пусть в рассматриваемом примере боевая эффективность второй стороны $g(t)$ растет со временем в соответствии с выражением (14), где $g_0 = 0{,}001$, $g_\infty = 0{,}004$, $\alpha = 0{,}04$. Тогда побеждает вторая сторона: у нее остаются 20 единиц к моменту, когда силы первой стороны исчерпываются (см. пунктирную кривую и точку B на рис. 1).

Решение задачи о минимальной скорости научения при $\tau = 172$: $\alpha \approx 0{,}0013$.

Если условием завершения боя является достижение сторонами определенного процента потерь убитыми и ранеными (а не нулевой численности), то решение принципиально не изменится.

Пример 2 (квадратичная модель). Пусть динамика численности войск описывается выражением (7) с постоянными боевыми эффективностями b = 0,015 и c = 0,01, а начальные значения численностей войск x_0 = 130, y_0 = 100. Несмотря на более высокую боевую эффективность, второй стороне «не хватает» сил для победы и ее силы исчерпываются к моменту (см. также выражение (23) ниже), когда первая сторона имеет еще 43 единицы (см. непрерывную кривую и точку A на рис. 2).

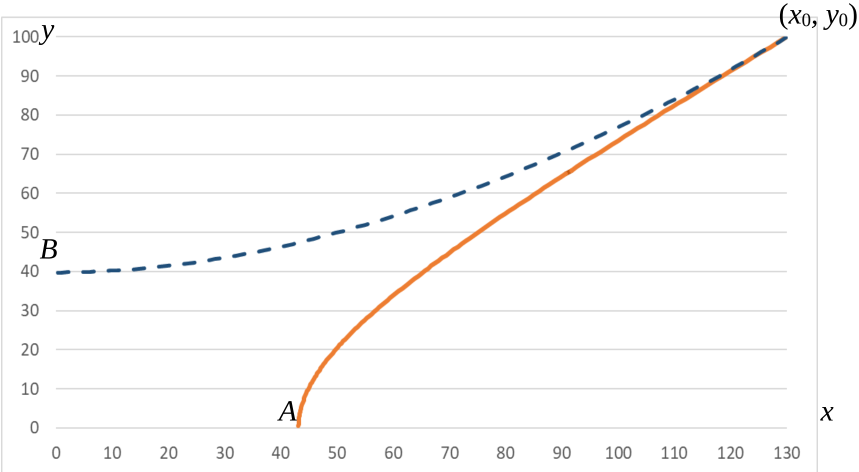

Рис. 2. Пример победы второй стороны (*пунктирная кривая*) *за счет приобретения боевого опыта в модели* (7)

Пусть в рассматриваемом примере боевая эффективность второй стороны $b(t)$ растет со временем в соответствии с выражением (14), где b_0 = 0,015, b_∞ = 0,06, α = 0,005. Тогда побеждает вторая сторона: у нее остаются 40 единиц к моменту, когда силы первой стороны исчерпываются (см. пунктирную кривую и точку B на рис. 1).

Решение задачи о минимальной скорости научения при τ = 172: $\alpha \approx$ 0,0093.

Завершив рассмотрение примеров, отметим, что, во-первых, легко убедиться, что не всегда (не при всех соотношениях параметров) существует значение скорости научения второй стороны, обеспечивающее совпадение численностей сторон в заданный момент времени.

Во-вторых, рассматриваемые модели легко переформулировать для задачи о моменте оптимального (для той или иной стороны) момента начала сражения, до которого одна сторона при фиксированной своей численности повышает боевую эффективность (за счет учений, инженерных мероприятий и т.п.), а вторая имеет возможность увеличить численность за счет подхода резервов.

В настоящем разделе рассмотрен случай, когда опыт приобретают участвующие в сражении войска второй стороны. В следующем разделе анализируются модели, в которых боевые эффективности первоначально введенных в сражение войск не меняются со временем, а опыт, начиная с момента начала сражения, приобретает только резерв второй стороны.

4. Задача об оптимальном моменте ввода резерва

Задача об оптимальном моменте ввода резерва заключается в том, чтобы найти минимальный резерв $\Delta \geq 0$ второй стороны и момент его ввода (до момента полного истощения – обращения в ноль численности – этой стороны), обеспечивающие «ничью» (одновременное обращение в ноль численностей обеих сторон или достижение ими определенного процента потерь).

Линейная модель. Для модели (10) условие ничьей имеет вид $g\,(y_0 + \Delta) = h\,x_0$. В силу линейности условия равенства сил (см. выше) $g\,(y(t) - y_0) = h\,(x(t) - x_0)$ *минимальный размер резерва не зависит от момента его введения* (!) и равен

$$(15)\quad \Delta_L = \frac{h}{g} x_0 - y_0 .$$

Обозначив через $\rho = hx_0 - gy_0$, запишем решение системы (10) [40]:

(16) $x(t) = \dfrac{\rho\, x_0}{h\, x_0 - g\, y_0 \exp(-\rho\, t)}$,

(17) $y(t) = \dfrac{\rho\, y_0}{h\, x_0 \exp(\rho\, t) - g\, y_0}$.

Если имеет место приобретение резервом второй стороны опыта (функция $g(t)$ для него является неубывающей, т.е. считаем, что резерв приобретает опыт за счет, например, учений, обобщения результатов сражающихся частей и т.д.), то из (15) следует, что *резерв ей следует вводить максимально подготовленным* – как можно позже, т.е. в момент t_L обращения в $\varepsilon > 0$ (неравенство строгое, так как численность проигрывающей стороны стремится к нулю асимптотически, оставаясь строго положительной – см. (17); величина $(y_0 - \varepsilon)/y_0$ может рассматриваться как максимально выдерживаемая второй стороной доля потерь) численности первоначально задействованных второй стороной сил, где, как следует из выражений (16)–(17):

$$t_L(\varepsilon) = \frac{1}{\rho} \ln\left[\frac{y_0\,(\rho + \varepsilon\, g)}{\varepsilon\, h\, x_0}\right].$$

Сформулируем полученные результаты в виде утверждений.

Утверждение 1. В линейной модели (10) с постоянными боевыми эффективностями минимальный размер резерва (15) не зависит от момента его введения.

Утверждение 2. В линейной модели (10) с приобретением опыта минимальный размер резерва $\dfrac{h}{g(t_L(\varepsilon))} x_0 - y_0$ достигается при максимально возможно ε-позднем его введении.

Квадратичная модель. Обозначив через $a = \sqrt{b\,c}$ произведение боевых эффективностей сторон (и используя введенное выше обозначение $\gamma = b / c$), запишем решение системы (7) [4, 40]:

(18) $x(t) = x_0 \operatorname{ch}(a\, t) - y_0 \sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(a\, t)$,

(19) $y(t) = y_0 \operatorname{ch}(a\,t) - \dfrac{x_0}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{sh}(a\,t)$.

Ввод второй стороной резерва $\Delta_Q \geq 0$ в момент времени t в модели (7) приведет к ничьей, если

(20) $y(t) + \Delta_Q = \dfrac{x(t)}{\sqrt{\gamma}}$.

Подставляя в выражение (20) выражения (18) и (19), получим:

$$(21)\ \Delta_Q = \frac{x_0}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{ch}(a\,t) - y_0 \operatorname{sh}(a\,t) - y_0 \operatorname{ch}(a\,t) + \frac{x_0}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{sh}(a\,t) =$$

$$= \left(\frac{x_0}{\sqrt{\gamma}} - y_0\right) \left[\operatorname{ch}(at) + \operatorname{sh}(at)\right] = \left(\frac{x_0}{\sqrt{\gamma}} - y_0\right) \exp(a\,t) =$$

$$= \left(x_0\sqrt{\frac{c}{b}} - y_0\right) \exp(\sqrt{b\,c}\ \ t).$$

Так как исходно предполагалось, что без ввода резервов побеждает первая сторона, то первое слагаемое положительно (см. условие равенства сил (9)). Значит, с ростом t величина Δ_Q возрастает, причем экспоненциально (!), следовательно, чем позднее осуществляется ввод резерва, тем больше он должен быть.

Утверждение 3. В квадратичной модели (7) с постоянными боевыми эффективностями минимальный размер резерва (21) достигается в начальный момент времени.

Найдем из выражения (19) момент времени, в который численность войск второй стороны обращается в ноль:

$$(22)\ t_Q = \frac{1}{\sqrt{b\,c}} \operatorname{arth}\left(\frac{y_0}{x_0}\sqrt{\frac{b}{c}}\right).$$

Если в момент времени $\tau \in [0; t_Q]$ вводится резерв Δ_0 с боевой эффективностью $b(\tau)$, а оставшиеся войска второй стороны имеют прежнюю (начальную) боевую эффективность b_0, то уравнения динамики (7) для описания сражения после ввода резерва примут вид (см. [35, 37]):

(23) $\dot{x}(t) = -b_0\, y(t) - b(\tau)\ \Delta(t)$, $\dot{y}(t) = -c\, x(t)\ \dfrac{y(t)}{y(t)+\Delta(t)}$,

$$\dot{\Delta}(t) = -c\, x(t)\ \frac{\Delta(t)}{y(t)+\Delta(t)},\ t \geq \tau,$$

с начальными условиями $x(\tau)$, $y(\tau)$ – см. (18) и (19) – и Δ_0 соответственно.

Условие равенства сил для системы (23):

(24) $c\, x^2(\tau) = (b_0\, y(\tau) + b(\tau)\ \Delta_0)\ (y(\tau) + \Delta_0)$.

Из выражения (24), подставив (18) и (19), для каждого фиксированного $\tau \in [0; t_Q]$ можно численно найти соответствующий минимальный резерв $\Delta_0^*(\tau)$, а затем вычислить оптимальный момент его ввода (значение $\tau \in [0; t_Q]$), который может отличаться от нулевого и конечного (t_Q) моментов:

(25) $\Delta_0^*(\tau) \to \min\limits_{\tau \in [0;\, t_Q]}$.

<u>Пример 3.</u> Пусть имеют место начальные условия из примера 2 и $\alpha = 0{,}02$. Тогда $t_Q = 143$. Зависимость $\Delta_0^*(\tau)$ представлена на рис. 3. Решение задачи (25): $\tau^* = 22$, $\Delta_0^*(\tau^*) \approx 5{,}26$.

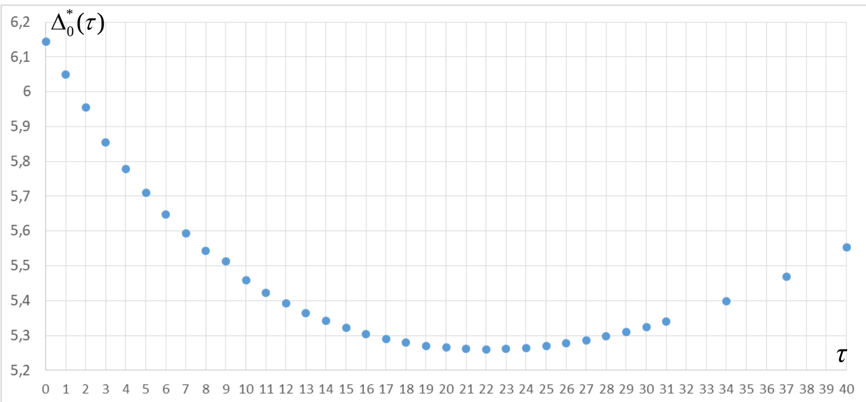

Рис. 3. Зависимость минимального размера резерва от момента его ввода в примере 3

Завершив рассмотрение примера 3, отметим, что аналитическое выражение для соответствующей оптимизационной задачи можно записать для достаточно «надуманной» модели, в которой опыт тех, кто воюет с самого начала, меняется скачкообразно с b_0 на $b(\tau)$ в момент τ ввода резерва. Тогда можно, воспользовавшись выражением (21), записать:

$$(26)\quad \Delta_Q(\tau) = \left(x_0 \sqrt{\frac{c}{b(\tau)}} - y_0 \right) \exp\left(\sqrt{b(\tau)\, c\tau} \right).$$

Утверждение 4. В квадратичной модели (7) со скачкообразным приобретением опыта минимальный размер резерва $\Delta_0^*(\tau)$ достигается при его введении в момент времени

$$(27)\quad \tau^* = \arg \min_{\tau \in [0; t_Q]} \left[\left(x_0 \sqrt{\frac{c}{b(\tau)}} - y_0 \right) \exp\left(\sqrt{b(\tau)\, c\tau} \right) \right].$$

Задача (27) является стандартной скалярной задачей условной оптимизации.

Пример 4. Пусть имеют место начальные условия из примера 2 и $\alpha = 0{,}002$. Тогда из (22) находим $t_Q \approx 143$, а из (27) и (26): $\tau^* = 29$, $\Delta_0^*(\tau^*) \approx 3$.

Динамика численностей сторон приведена на рис. 4.

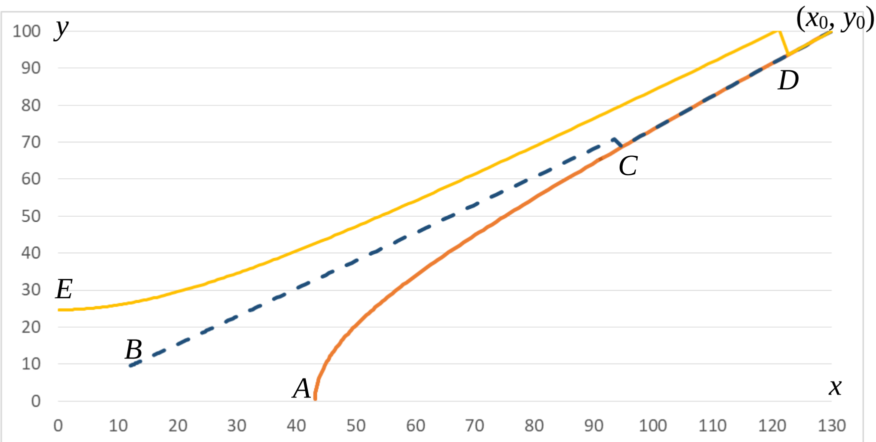

Рис. 4. Пример ничьей (пунктирная кривая) за счет введения резерва (26) *в точке C*

Без ввода резерва вторая стороны проигрывает (см. нижние непрерывные кривые и точку A на рис. 2 и рис. 4 – эти кривые одинаковы). За счет ввода резерва в 3 единицы в точке C обеспечивается ничья (см. точку B на рис. 4).

Если ввести резерв в 8 единиц в точке D ($t = 6$), то вторая сторона уверенно победит (см. точку E на рис. 4).

5. Заключение

Качественно основные результаты заключаются в следующем:

- учет возможности научения сторон может качественно изменить результаты их боевого вхаимодействия;

– в линейной модели Осипова – Ланчестера с постоянными боевыми эффективностями минимальный размер требуемого резерва не зависит от момента его введения (утверждение 1);

– в линейной модели Осипова – Ланчестера с приобретением опыта минимальный размер требуемого резерва достигается при как можно более позднем его введении (утверждение 2).

– в квадратичной модели Осипова – Ланчестера с постоянными боевыми эффективностями минимальный размер требуемого резерва достигается при как можно более раннем его введении (утверждение 3);

– задачи поиска минимальной скорости научения и/или нахождения минимального размера и оптимального момента ввода подготовленного резерва сводятся к типовым скалярным задачам условной оптимизации.

Рассмотренные модели являются достаточно простыми, но эта «простота» дает возможность получать аналитические выражения для решений соответствующих задач, что позволяет анализировать их зависимость от параметров моделей, начальных условий и т.д.

Литература

1. БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Модели опыта* // Проблемы управления. – 2021. – №1. – С. 43–60.

2. БИРШТЕЙН Б.И., БОРШЕВИЧ В.И. *Стратагемы рефлексивного управления в западной и восточных культурах* // Рефлексивные процессы и управление. – 2002. – Т. 2, №1. – С. 27–44.
3. ВАГНЕР Г. *Основы исследования операций*. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 335 с., Т. 2. – 488 с., Т. 3. – 501 с.
4. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Введение в исследование операций*. – М.: Советское радио, 1964. – 388 с.
5. ЖЕРЕБИН А.М., ЗУРАБЬЯН Н.И. *Модель боевых действий для оценки эффективности перспективного авиационного вооружения* // Вестник МАИ. – 2009. – С. 8– 3.
6. ЗАДОРОЖНИЙ В.Г., ЧЕБОТАРЕВ А.С., ДИКАРЕВ Е.Е. *Стохастическая модель боевых действий Ланчестера* // Матем. моделирование. – 2021. – Т. 33, №5. – С. 57–77.
7. КОРЕПАНОВ В.О., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г., ШУМОВ В.В. *Базовые модели боевых действий* // Управление большими системами. – 2023. – Вып. 103. – С. 40–77.
8. КРАСНОЩЕКОВ П.С., ПЕТРОВ А.А. *Принципы построения моделей*. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 264 с.
9. ЛАРЮШИН И.Д., КОЛТОЧЕНКО Я.А. *Расширенная модель Ланчестера – Осипова для учета боевых единиц с однократным действием в стратегических компьютерных играх* // Автоматика и телемеханика. – 2024. – №10. – С. 144–154.
10. МАКАРЕНКО С.И., АФОНИН И.Е., КОПИЧЕВ О.А. и др. *Обобщенная модель Ланчестера, формализующая конфликт нескольких сторон* // Автоматизация процессов управления. – 2021. – №2(64). – С. 66–76.
11. МИТЮКОВ Н.В. *Определение жертв войн через Ланчестерские модели* // Историческая психология и социология истории. – 2009. – №2. – С. 122–140.
12. *Модели военных, боевых и специальных действий: монография* / Под ред. академика РАН Д.А. Новикова. – М.: Ленанд, 2025. – 528 с.
13. МОРЗ Ф., КИМБЕЛЛ Д. *Методы исследования операций*. – М.: Советское радио, 1956. – 307 с.
14. НОВИКОВ Д.А. *Иерархические модели военных действий* // Управление большими системами. – 2012. – №37. – С. 25–62.

15. ОСИПОВ М.П. *Влияние численности сражающихся сторон на их потери* // Военный сборник. – 1915. – №6. – С. 59–74; №7. – С. 25–36; №8. – С. 31–40; №9. – С. 25–37.
16. *Применение теории игр в военном деле* // Сборник переводов. – М.: Советское радио, 1961. – 360 с.
17. ЧУЕВ Ю.В., МЕЛЬНИКОВ П.М. и др. *Основы исследования операций в военной технике*. – М.: Советское радио, 1965. – 592 с.
18. УЛАНОВ А.С., ЗАВАДСКИЙ В.В., ЗАЙЧЕНКО Я.Б. *Эффекты неопределенности при оценке превосходства сторон в моделях Осипова – Ланчестера* // Вооружение и экономика. – 2024. – №4(70). – С. 43–51.
19. ЮСУПОВ Р.М., ИВАНОВ В.П. *Из истории математического моделирования боевых действий в России (1900–1917 гг.)* // Информатика и автоматизация. – 2023. – Вып. 22., Т. 5. – С. 947–967.
20. BRACKEN J. *Lanchester Models of the Ardennes Campaign* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42. – P. 559–577.
21. CANGIOTTI N., CAPOLLI M., SENSI M. *A Generalization of Unaimed Fire Lanchester's Model in Multi-battle Warfare* // Oper Res Int J. – 2023. – Vol. 23. – P. 38.
22. CHEN X., JIANG N., JING Y. et al. *Differential Game Model and Its Solutions for Force Resource Complementary via Lanchester Square Law Equation* // Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy), 2011. – P. 14229–14233.
23. CLARK G. *The Combat Analysis Model* (Ph.D. Thesis). - Columbus: Ohio State University, 1969.
24. COULSON S. *Lanchester Equations with Time Dependent Parameters for Modelling Intelligence Collection in Adversarial Situations* // IMA Journal of Management Mathematics. – 2025. – dpaf012.
25. DAVIS P. *Aggregation, Disaggregation and 3:1 Rule in Ground Combat* // RAND Research MR-638-AF/A/OSD, 1995. – 52 p.
26. DEITCHMAN S. *A Lanchester Model of Guerilla Warfare* // Operations Research. – 1962. – No. 10. – P. 818–827.
27. DUPUY T. *Understanding War. History and Theory of Combat*. – Nova Publishers, 1998. – 312 p.

28. ENGEL J. *A Verification of Lanchester's Law* // Operations Research. – 1954. – Vol. 2, No. 2. – P. 163–171.
29. HARTLEY D., HELMBOLD R. *Validating Lanchester's Square Law and Other Attrition Models* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42. – P. 609–33.
30. HILLESTAD R., OWEN J. *Experiments in Variable-Resolution Combat Modeling* // RAND Note № 3631-DARPA. – Santa Monica: RAND, 1993. – 46 p.
31. HILLIER F., LIEBERMAN G. *Introduction to Operations Research*. – Boston. McGraw-Hill, 2005. – 1061 p.
32. HUGHES W. *A Salvo Model of Warships in Missile Combat Used to Evaluate Their Staying Power* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42, No. 2. – P. 267–289.
33. KOSTIĆ M., JOVANOVIĆ A. *Lanchester's Differential Equations as Operational Command Decision Making Tools* // Serbian Journal of Management. – 2023. – No. 18(1). – P. 71–92.
34. LANCHESTER F. *Aircraft in Warfare: the Dawn f the Fourth Arm*. – London: Constable and Co, 1916. – 243 p.
35. MACKAY N. *Lanchester Combat Models* // arXiv preprint. – arXiv:0606300v1. – 9 p.
36. PERRY N. *Fractal Effects in Lanchester Models of Combat* // Australian Joint Operations Division Defense Science and Technology Organization Report DSTO-TR-2331, 2008. – 23 p.
37. SCHEEBA P., GHOSE D. *Optimal Resource Partitioning in Conflicts based on Lanchester Attrition Model* // Proc. of the 44th IEEE Conf. on Decision and Control and the European Control Conf. – Seville, 2005. – P. 5859–5864.
38. TAHA H. *Operations Research: An Introduction*. – NY: Prentice Hall, 2011. – 813 p.
39. TAYLOR J., BROWN G. *Canonical Methods in the Solution of Variable-Coefficient Lanchester-Type Equations of Modern Warfare* // Operations research. – 1976. – Vol. 24. – P. 44–69.
40. TAYLOR J. *Lanchester Models of Warfare*. – Arlington: Operations Research Society of America. – 1983. – Vol. 1. – 570 p.; Vol. 2. – 815 p.
41. TAYLOR J., YILDIRIM U., MURPHY W. *Hierarchy-of-Models Approach for Aggregated-Force Attrition* // Proc. of the 2000 Winter Simulation Conf. - Orlando, 2000. P. 925 – 932.

42. ZHANG L. *Combat Modelling using Lanchester Equations* // Int. Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – 2023. – No. 55(2). – P. 224–234.

LEARNING IN OSIPOV – LANCHESTER MODELS

Dmitry Novikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Academician RAS (novikov@mail.ru).

Abstract: Traditionally, in the Osipov – Lanchester models, which describe the dynamics of the number of combatants in terms of differential equations, the combat effectiveness of the parties is considered constant over time. In this paper, we consider the role of learning in modifying the linear and quadratic Osipov – Lanchester models, taking into account two effects: a one-shot introduction of a trained reserve by the initially losing party and the acquisition of combat experience by the parties, which affects the combat effectiveness coefficients. The problems of determining the optimal moment for introducing such a reserve so that its size is minimal, but ensures a "parity"; finding the minimum learning rate of the initially losing party, also ensuring a "parity"; and determining the optimal duration of reserve training before its input, are solved.

Keywords: mathematical modeling, Osipov – Lanchester models, combat effectiveness, reserves input, learning.

УДК 519.8
ББК 32.81

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.

Поступила в редакцию 08.06.2025.
Опубликована 31.07.2025.