АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В МОДЕЛЯХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ[1]

Буслова К. В.[2]
(*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва*)

Работа посвящена исследованию асимптотического поведения функции плотности вероятности стоимости акций в рамках различных моделей, характеризующихся стохастической волатильностью. Центральное внимание сосредоточено на дальнейшем развитии и распространении ранее достигнутых результатов, связанных с классической однофакторной моделью Хестона, на более широкий круг многомерных ситуаций, отражающих реальную сложность современного финансового рынка. Методы исследования базируются на использовании инструментов аффинной теории, позволяющих изучать основные характеристики асимптотического поведения рассматриваемых функций путем подробного анализа соответствующих уравнений Риккати вблизи критических точек. Значительное внимание уделено использованию высокоэффективных алгоритмов оценки функций по схеме Эйлера высоких порядков, что обеспечивает высокую точность расчетов и надежность полученных выводов. Кроме того, активно применяется подход, основанный на комбинировании техники седловой точки и принципа Таубера, что позволяет получать важную дополнительную информацию относительно свойств асимптотического поведения исходных функций непосредственно из анализа преобразований вблизи критических значений. Представленные результаты имеют важное значение для развития современной теории стохастических дифференциальных уравнений и открывают перспективные направления приложения в ряде важнейших областей, таких как финансовая математика, эконометрия и теория риска.

Ключевые слова: асимптотическая формула для стоимости опциона, многомерная модель Хестона, преобразование Меллина.

1. Введение

На первых этапах формирования рыночных опционов их ценообразование осуществлялось в случайном порядке, но всё изменила докторская диссертация Луи Башелье, в которой была

---

[1] *Автор признателен О.С. Розановой за помощь и ценное обсуждение содержания статьи.*

[2] *Кристина Владимировна Буслова, студент* (*buslova.kristina@mail.ru*).

представлена первая математическая модель броуновского движения и ее использование для оценки опционов на акции. Модель Башелье оказала влияние на разработку других широко используемых моделей, включая модель Блэка – Шоулза. Главной предпосылкой появления модели Блэка – Шоулза является предположение о том, что динамика цены базового актива описывается случайным процессом в непрерывном времени вида

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t,$$

где μ – тренд и σ – волатильность доходности базового актива, который предполагается постоянным; W_t – броуновское движение.

В период со времени публикации (1973 г.) и по 1987 год модель Блэка – Шоулза являлась общепринятым стандартом для практических расчётов стоимостей опционов. Но из наблюдений за реальными стоимостями опционов возникла необходимость разработки новых моделей оценки опционов, учитывающих непостоянство волатильности. Одним из первых, кто разработал соответствующую модель, был Стивен Хестон. Модель Хестона имеет вид

$$dX_t = \mu X_t dt + \sqrt{\nu_t} X_t dW_t,$$
$$d\nu_t = k(\theta - \nu_t)dt + \sigma\sqrt{\nu_t} dZ_t,$$

где ν_t – волатильность, заданная стохастическим процессом, а броуновские движения W_t и Z_t имеют корреляцию ρ.

Среди однофакторных моделей модель Хестона до сих пор остается одной из наиболее популярной и простой в реализации, но зависимость модели от одного фактора не позволяет ей учесть всех зависимостей, которые присутствуют на рынке, поэтому стали разрабатывать многофакторные модели. Многофакторная модель Хестона, которая будет рассмотрена в данной работе, впервые была рассмотрена в статье [5]. Отличительная особенность модели в том, что факторный процесс, определяющий волатильность, основан на матричном процессе Уишарта.

В книге [14] автор анализирует асимптотику цен на акции для различных стохастических моделей. Нас интересует один из ключевых результатов данной главы, а именно формула, характеризующая асимптотику цен акций в модели Хестона. Первоначально формула была получена в статье [15] для некоррелированой модели Хестона, а затем результат был обобщен в статье [11] на случай, когда корреляция между броуновскими движениями есть. Можем ли мы получить аналогичный результат для многофакторной модели Хестона? Оказывается, что для класса многофакторных моделей вид асимптотической формулы аналогичен виду для однофакторной модели Хестона.

Методы, используемые в данной работе, основаны на аффинных принципах: всю необходимую информацию об асимптотике получим из анализа соответствующих уравнений Риккати вблизи так называемого момента критичности, используя оценки Эйлера высокого порядка. Далее вместе с использованием метода седловой точки используем принцип Таубера, согласно которому точное поведение преобразованной функции вблизи критической точки содержит всю асимптотическую информацию об исходной функции.

2. Асимптотическая формула для плотности стоимости акции в многофакторной модели Хестона

Рассмотрим следующую многофакторную модель Хестона:

$$dX_t = X_t Tr[\sqrt{\Sigma_t} dZ_t],$$

$$d\Sigma_t = (AA^\top + B\Sigma_t + \Sigma_t B^\top)dt + \sqrt{\Sigma_t} dW_t C + C^\top (dW_t)^\top \sqrt{\Sigma_t},$$

где X_t – цена актива; Tr – след оператора; $Z_t, W_t \in M_n$ (множество квадратных матриц размера $n \times n$) – матрицы броуновского движения (т.е. состоящие из n^2 независимых броуновских движений) при нейтральной к риску мере (т.е цена каждой акции в точности равна дисконтированному ожиданию цены акции в соответствии с этой мерой).

Волатильность Σ_t принадлежит множеству симметричных $n \times n$ положительно определенных матриц; $A, B, C \in M_n$ – диагонализируемые коммутирующие матрицы, матрица A обратима.

Чтобы учесть эффект улыбки волатильности, предположим, что два матричных броуновских движения W_t и Z_t имеют диагональную матрицу корреляций $R = (\rho_j)_{j=1,\cdots,n} \in M_n$, где

$$dW_t^{ij} dZ_t^{ij} = \rho_j dt.$$

Для простоты мы предполагаем, что $x_0 = 1$ и $-1 < \rho_j \leqslant 0$ (ограничение на ρ_j не является математически существенным), где x_0 – начальное условие для процесса, определяющего цену акции.

Основным результатом данной работы является теорема, которая характеризует асимптотическое поведение плотности распределения стоимости акции в многофакторной модели Хестона. Она является обощением аналогичного результат для однофакторной модели Хестона.

Теорема 1. *Для каждого $T > 0$ существуют положительные константы A_1, A_2 и A_3 такие, что для плотности распределения D_T цены акций X_T в многомерной модели Хестона справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$(1) \quad D_T(x) = A_1 x^{-A_3} e^{A_2\sqrt{\ln x}} (\ln x)^{-\frac{3}{4}+\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{4c_j^2}} \times \\ \times (1 + O((\ln x)^{-\frac{1}{2}})), \ \ x \to \infty,$$

где a_j, c_j – элементы соответствующих диагональных матриц коэффициентов A' и C' (результаты диагонализации соответсвующих матриц коэффициентов A и C).

Доказательство теоремы будет представлено в следующих разделах. Ниже приведена схема доказательства.

1. Приводим матрицы коэффициентов многофакторной модели Хестона A, B, C к диагональному виду.

2. Находим явную формулу для преобразования Меллина.

3. Выводим асимптотические формулы для функций, входящих в преобразование Меллина, вблизи так называемого момента критичности.

4. Вычисляем седловую точку и заменяем исходное выражение локальным разложением вокруг седловой точки.

5. Находим асимптотику интеграла вблизи седловой точки.

6. Уточняем оценку погрешности до заявленной в теореме.
7. Выводим явную формулу для константы A_1.

3. Диагонализация матриц коэффициентов

Следующая теорема (см. [17]) характеризует совместно диагонализируемые матрицы:

Теорема 2. *Множество матриц является множеством диагонализируемых коммутирующих матриц тогда и только тогда, когда оно является совместно диагонализируемым.*

Так как матрицы коэффициентов A, B, C – диагонализируемые и коммутируют между собой, то по теореме это множество матриц является совместно диагонализируемым. Это значит, что существует единственная обратимая матрица P, такая что $A' = P^{-1}AP$, $B' = P^{-1}BP$ и $C' = P^{-1}CP$ являются диагональными матрицами. Проведем диагонализацию матриц, получим:

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}.$$

Тогда наша модель преобретает следующий вид:

$$dX_t = X_t Tr[\sqrt{\Sigma_t} dZ_t],$$

$$d\Sigma_t = (A'(A')^\top + B'\Sigma_t + \Sigma_t (B')^\top)dt +$$
$$+ \sqrt{\Sigma_t} dW_t C' + (C')^\top (dW_t)^\top \sqrt{\Sigma_t}.$$

Далее знаки $'$ у матриц будут опущены.

4. Преобразование Меллина

Преобразование Меллина для плотности D_t определяется следующим образом (см. [9]):

$$MD_t(u) = \mathbb{E}[X_t^{u-1}] = \int_0^\infty x^{u-1} D_t(x) dx,$$

где переменная u – комплексная. Следовательно, плотность D_t можно восстановить по формуле обратного преобразования Меллина:

$$D_t(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} x^{-u} MD_t(u) du, \ x > 0. \tag{2}$$

Далее выведем явную формулу для преобразования Меллина. Для этого рассмотрим процесс логарифма цены $X_t^{\ln} = \ln X_t$ в многофакторной модели Хестона. Будем искать логарифм в виде производящей функции моментов:

(3) $$\ln \mathbb{E}[\exp\{sX_t^{\ln}\}] = \phi(s,t) + Tr[\psi(s,t)\Sigma_0],$$

где функции ϕ и ψ удолетворяют следующим уравнениям Риккати:

$$\phi' = U(s,\psi), \;\; \phi(0) = 0,$$
$$\psi' = V(s,\psi), \;\; \psi(0) = 0,$$

где

$$U(s,v) = Tr[AA^\top v],$$
$$V(s,v) = vB + (B^\top + 2sRC)v + 2vC^\top Cv + \frac{1}{2}(s^2 - s)I_n.$$

Здесь ϕ' и ψ' являются частными производными по t функций ϕ и ψ соответственно. Переменная s – действительная. Однако уравнения Риккати будут также справедливы, если заменить s комплексной переменной $u = s + iy$. Найдем решение уравнений Риккати.

Для начала найдём решение матричного уранения Риккати для $\psi(t)$. Для этого воспользуемся процедурой линеаризации, а именно, представим $\psi(t)$ в виде произведения двух матриц $F(t)$ и $G(t)$:

(4) $$\psi(t) = F(t)^{-1}G(t),$$

где $F(t) \in GL(n), G(t) \in M_n, F(0) = I, G(0) = 0$. Тогда

$$\frac{d}{dt}[F(t)\psi(t)] - \frac{d}{dt}[F(t)]\psi(t) = F(t)\frac{d}{dt}\psi(t),$$

и

$$\frac{d}{dt}G(t) - \frac{d}{dt}[F(t)]\psi(t) = \frac{s(s-1)}{2}F(t) + G(t)B +$$
$$+ (F(t)(B^\top + 2sRC) + 2G(t)C^\top C)\psi(t).$$

Последнее уравнение приводит нас к следующей системе:

$$\frac{d}{dt}G(t) = \frac{s(s-1)}{2}F(t) + G(t)B,$$
$$\frac{d}{dt}F(t) = -F(t)(B^\top + 2sRC) - 2G(t)C^\top C.$$

Переписав систему покомпонентно, получим:

$$\frac{d}{dt}G_{ij}(t) = \frac{s(s-1)}{2}F_{ij}(t) + b_j G_{ij}(t),$$

$$\frac{d}{dt}F_{ij}(t) = -(b_j + 2s\rho_j c_j)F_{ij}(t) - 2c_j^2 G_{ij}(t),$$

откуда следует

$$G'_{ij}(t) = \frac{s(s-1)}{2}F_{ij}(t) + b_j G_{ij}(t),$$

$$G_{ij}(t) = -\frac{1}{2c_j^2}\left(F'_{ij}(t) + (b_j + 2s\rho_j c_j)F_{ij}(t)\right).$$

Подставляя $G_{ij}(t)$ в первое уравнение, получим:

$$-\frac{1}{2c_j^2}(F''_{ij}(t) + (b_j + 2s\rho_j c_j)F'_{ij}(t)) = \frac{s(s-1)}{2}F_{ij}(t) -$$

$$-\frac{b_j}{2c_j^2}(F'_{ij}(t) + (b_j + 2s\rho_j c_j)F_{ij}(t)),$$

откуда следует

$$(5)\quad F''_{ij}(t) + 2s\rho_j c_j F'_{ij}(t) + \left(c_j^2 s(s-1) - b_j(b_j + 2s\rho_j c_j)\right)F_{ij}(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение для (5) имеет вид:

$$\lambda^2 + 2s\rho_j c_j \lambda + \left(c_j^2 s(s-1) - b_j(b_j + 2s\rho_j c_j)\right) = 0,$$

$$\mathcal{D}/4 = s^2\rho_j^2 c_j^2 - c_j^2 s(s-1) + b_j(b_j + 2s\rho_j c_j) =$$

$$= (s\rho_j c_j + b_j)^2 - c_j^2 s(s-1) = P_j^2,$$

$$\lambda_{1,2} = -s\rho_j c_j \pm P_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{ij}(t) = M_{ij}e^{(-s\rho_j c_j + P_j)t} + N_{ij}e^{(-s\rho_j c_j - P_j)t}.$$

Найдем теперь $G_{ij}(t)$:

$$G_{ij}(t) = -\frac{1}{2c_j^2}\left(F'_{ij}(t) + (b_j + 2s\rho_j c_j)F_{ij}(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{2c_j^2}(-b_j - s\rho_j c_j - P_j)M_{ij}e^{(-s\rho_j c_j + P_j)t} +$$

$$+ \frac{1}{2c_j^2}(-b_j - s\rho_j c_j + P_j)N_{ij}e^{(-s\rho_j c_j - P_j)t}.$$

Осталось найти постоянные M_{ij} и N_{ij} из начальных условий $F(0) = I,\ \ G(0) = 0$:

$$M_{ij} + N_{ij} = 1,\ \ i = j,$$
$$M_{ij} + N_{ij} = 0,\ \ i \neq j,$$
$$\frac{1}{2c_j^2}(-b_j - s\rho_j c_j - P_j)M_{ij} = -\frac{1}{2c_j^2}(-b_j - s\rho_j c_j + P_j)N_{ij},$$

откуда имеем

$$M_{ij} = \frac{1}{2P_j}(-b_j - s\rho_j c_j + P_j),\ \ i = j,$$
$$N_{ij} = -\frac{1}{2P_j}(-b_j - s\rho_j c_j - P_j),\ \ i = j,$$
$$M_{ij} = N_{ij} = 0,\ \ i \neq j.$$

Для нахождения $\psi(t)$ осталось найти $F(t)^{-1}$:

$$F(t)^{-1} = \begin{pmatrix} F_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_n(t) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} F_1(t)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_n(t)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда элементы матрицы $\psi(t)$ имеют вид:

$$\psi_{ij}(t) = F_{ij}(t)^{-1}G_{ij}(t) =$$
$$= \frac{1}{2c_j^2} \cdot \frac{(-b_j - s\rho_j c_j + P_j)(-b_j - s\rho_j c_j - P_j)(e^{P_j t} - e^{-P_j t})}{(-b_j - s\rho_j c_j + P_j)e^{P_j t} - (-b_j - s\rho_j c_j - P_j)e^{-P_j t}} =$$
$$= \frac{1}{2c_j^2} \cdot \frac{c_j^2(s^2 - s)(e^{P_j t} - e^{-P_j t})}{2P_j\left(\dfrac{e^{P_j t} + e^{-P_j t}}{2}\right) + 2(-b_j - s\rho_j c_j)\left(\dfrac{e^{P_j t} - e^{-P_j t}}{2}\right)} =$$
$$= \frac{\frac{1}{2}(s^2 - s)\sinh(P_j t)}{P_j \cosh(P_j t) + (-b_j - s\rho_j c_j)\sinh(P_j t)},\ \ i = j,$$
$$\psi_{ij}(t) = 0,\ \ i \neq j.$$

При $t = 0$ все элементы матрицы обнуляются, т.е. граничное условие $\psi(0) = 0$ выполняется. Теперь найдем $\phi(t)$ из следующего уравнения:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = Tr[AA^\top \psi].$$

Тогда

$$\phi(t) = \int (a_1^2\psi_1 + \cdots + a_n^2\psi_n)dt,$$

где

$$\int a_j^2 \psi_j dt = \frac{a_j^2}{2c_j^2} \ln\left(\frac{\exp((-b_j - s\rho_j c_j)t)}{P_j \cosh(P_j t) + (-b_j - s\rho_j c_j)\sinh(P_j t)}\right) + a_j^2 C_j.$$

Рассмотрим граничные условия на $\phi(t)$. Так как $\phi(0) = 0$, то

$$-\frac{a_1^2}{2c_1^2} \ln P_1 - \cdots - \frac{a_n^2}{2c_n^2} \ln P_n + a_1^2 C_1 + \cdots + a_n^2 C_n = 0.$$

Следовательно, возьмём $C_j = \dfrac{1}{2c_j^2} \ln P_j$, получаем:

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{2c_j^2} \ln\left(\frac{P_j \exp((-b_j - s\rho_j c_j)t)}{P_j \cosh(P_j t) + (-b_j - s\rho_j c_j)\sinh(P_j t)}\right).$$

Из определения преобразования Меллина и формулы (3) получаем

$$\ln MD_T(u) = \phi(u-1, T) + Tr[\psi(u-1, T)\Sigma_0].$$

5. Время расхождения момента

Предполагая действительную переменную $s \geqslant 1$, определим время расхождения для момента порядка s по формуле:

$$T^*(s) = \sup\{t > 0 : E[X_t^s] < \infty\},$$

и для любого $T > 0$ определим верхний критический момент $s_+(T)$ по формуле

$$s_+ = s_+(T) = \sup\{s \geqslant 1 : E[X_t^s] < \infty\}. \tag{6}$$

При фиксированном T критический момент определяется численно из уравнения

$$T^*(s_+(T)) = T.$$

Аналогично определяется нижний критический момент:

$$s_- = s_-(T) = \inf\{s \leqslant 0 : E[X_t^s] < \infty\}. \tag{7}$$

Определение 1. *Пусть время $T > 0$ фиксировано. Величины*

$$\sigma_+ = -\left.\frac{\partial T^*(s)}{\partial s}\right|_{s=s_+}, \quad \kappa_+ = \left.\frac{\partial^2 T^*(s)}{\partial s^2}\right|_{s=s_+} \tag{8}$$

называются верхним критическим наклоном и верхней критической кривизной соответственно. Аналогично определяются нижний критический наклон и нижняя критическая кривизна:

$$\sigma_- = -\left.\frac{\partial T^*(s)}{\partial s}\right|_{s=s_-}, \quad \kappa_- = \left.\frac{\partial^2 T^*(s)}{\partial s^2}\right|_{s=s_-}.$$

Пусть $s \geqslant 1$ и $T^*(s)$ – время расхождения для момента порядка s. Используя уравнения Риккати для ψ, видим, что

$$(1/\psi)' = -\frac{\psi'}{\psi^2} = -\frac{R(s,\psi)}{\psi^2}$$

или

$$(1/\psi_j)' = -\frac{\psi_j'}{\psi_j^2} = -\frac{R_j(s,\psi_j)}{\psi_j^2},\ \ j = 1, \cdots, n.$$

Так как

$$\frac{R_j(s,u)}{u^2} \to 2c_j^2,\ \ u \to \infty\ ,$$

то

$$\psi_j(s,t) \sim \frac{1}{2c_j^2(T^*(s)-t)},\ \ t \uparrow T^*(s). \tag{9}$$

Далее зафиксируем время $T > 0$. Тогда $T = T^*(s_+)$. Используя тот факт, что функция T^* непрерывно дифференцируема относительно s, получаем

$$\begin{aligned}T^*(s) - T = T^*(s) - T^*(s_+) = \\ = (s_+ - s)(\sigma + O(s_+ - s)) \sim \sigma(s_+ - s),\ \ s \uparrow s_+,\end{aligned} \tag{10}$$

где σ – критический наклон. Следовательно:

$$\psi_j(s,T) \sim \frac{1}{2(s_+ - s)c_j^2\sigma},\ \ s \uparrow s_+. \tag{11}$$

Из (9) и (11) следует, что

$$\phi(s,t) = \int_0^t (a_1^2\psi_1 + \cdots + a_n^2\psi_n)d\nu$$

имеет логарифмическое приращение:

$$\phi(s,t) \sim -\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2} \cdot \ln(T^*(s) - t),\ \ t \uparrow T^*(s),$$

или

$$\phi(s,T) \sim -\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2} \cdot \ln(\sigma(s_+ - s)),\ \ s \uparrow s_+.$$

Следующая лемма уточняет эти асимптотические результаты.

<u>Лемма 1.</u> *Пусть $T > 0$ и $s \uparrow s_+$. Тогда справедливы следующие формулы:*

$$\psi_j(s,T) = \frac{1}{2c_j\sigma(s_+ - s)} - \frac{b_j + s_+\rho_j c_j}{2c_j^2} - \frac{\kappa}{4c_j^2\sigma^2} + \\ + O(s_+ - s), \quad j = 1, \cdots, n,$$

$$\phi(s,T) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{2c_j^2}\left(\ln\frac{1}{s_+ - s} + \ln\frac{T}{\sigma}\right) + \\ + a_j^2 \int_0^{\top} \left(\psi_j(s_+,\nu) - \frac{1}{2c_j^2(T-\nu)}\right) d\nu + O(s_+ - s).$$

Доказательство. Введем время достижения критической точки

$$\tau = T^*(s) - t$$

и положим

$$\hat{\psi}_j(s,\tau) = \psi_j(T^*(s) - \tau).$$

Заметим, что $1/\hat{\psi}_j(s,0) = 0$ и

$$(1/\hat{\psi}_j)' = -\frac{(\hat{\psi}_j)'}{\hat{\psi}_j^{\,2}} = \frac{R_j(s,\hat{\psi}_j)}{\hat{\psi}_j^{\,2}} = \\ = 2c_j^2 + \frac{2(b_j + s\rho_j c_j)}{\hat{\psi}_j} + \frac{s^2 - s}{2\hat{\psi}_j^{\,2}} = W_j(s, 1/\hat{\psi}_j),$$

где

$$W_j(s,u) = 2c_j^2 + 2(b_j + s\rho_j c_j)u + \frac{s^2 - s}{2}u^2.$$

Схема Эйлера второго порядка для этого ОДУ дает

$$(1/\hat{\psi}_j)(s,\tau) = (1/\hat{\psi}_j)(s,0) + W_j(s,0)\tau + \\ + W_j(s,0)W_j'(s,0)\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2), \quad \tau \to 0.$$

Так как $W_j(s,0) = 2c_j^2$ и $W_j'(s,0) = 2(b_j + s\rho_j c_j)$, получаем

$$(1/\hat{\psi}_j)(s,\tau) = 2c_j^2\tau + c_j^2(b_j + s\rho_j c_j)\tau^2 + o(\tau^2) = \\ = 2c_j^2\tau\left(1 + (b_j + s\rho_j c_j)\tau + o(\tau^2)\right) = \\ = 2c_j^2\tau\left(1 - b_j + s\rho_j c_j)\tau + o(\tau^2)\right)^{-1}.$$

Из этого следует, что

$$\hat{\psi}_j(s,\tau) = \frac{1}{2c_j^2\tau}\left(1-(b_j+s\rho_j c_j)\tau + o(\tau^2)\right) = \\ = \frac{1}{2c_j^2\tau} - \frac{b_j+s\rho_j c_j}{2c_j^2} + o(\tau), \tag{12}$$

где $\tau = T^*(s) - t \downarrow 0$. Обратим внимание, что

$$\frac{1}{\tau} = \left(\sigma(s_+ - s) + \frac{1}{2}\kappa(s_+ - s)^2 + O\left((s_+ - s)^3\right)\right)^{-1} = \\ = \frac{1}{\sigma(s_+ - s)} - \frac{\kappa}{2\sigma^2} + O(s_+ - s).$$

Следовательно

$$\psi_j(s,T) = \frac{1}{2c_j^2\sigma(s_+ - s)} - \frac{b_j + s\rho_j c_j}{2c_j^2} - \frac{\kappa}{4c_j^2\sigma^2} + O(s_+ - s), \quad s \uparrow s_+.$$

Для функции

$$\phi(s,t) = \int_0^t (a_1^2\psi_1 + \dots + a_n^2\psi_n)d\nu$$

получаем

$$\phi(s,t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t a_j^2\psi_j d\nu = \\ = \sum_{j=1}^n \int_0^t \left(a_j^2\psi_j - \frac{a_j^2}{2c_j^2}\cdot\frac{1}{T^*(s)-\nu} + \frac{a_j^2}{2c_j^2}\cdot\frac{1}{T^*(s)-\nu}\right)d\nu = \\ = \sum_{j=1}^n \left(a_j^2 \int_0^t \left(\psi_j - \frac{1}{2c_j^2(T^*(s)-\nu)}\right)d\nu + \frac{a_j^2}{2c_j^2}\int_0^t \frac{1}{T^*(s)-\nu}d\nu\right) = \\ = \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2}\left(\ln\frac{1}{T^*(s)-t} + \ln T^*(s)\right) + \\ + \sum_{j=1}^n a_j^2 \int_0^t \left(\psi_j - \frac{1}{2c_j^2(T^*(s)-\nu)}\right)d\nu = \\ = \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2}\left(\ln\frac{1}{T^*(s)-t} + \ln T^*(s)\right) + \\ + \sum_{j=1}^n a_j^2 \int_0^{T^*(s)} \left(\psi_j - \frac{1}{2c_j^2(T^*(s)-\nu)}\right)d\nu + O(T^*(s)-t).$$

Чтобы установить последнее равенство, отметим, что подынтегральное выражение в интеграле
$$\int_t^{T^*(s)} \left(\psi_j(s,\nu) - \frac{1}{2c_j^2(T^*(s)-\nu)}\right) d\nu$$
имеет разложение, полученное в (12). Это выражение можно почленно проинтегрировать, что даст нам множитель $O(T^*(s) - t)$. Далее, используя (10), получаем нужную формулу.

***Замечание* 1.** Лемма 1 также будет справедлива при $s \mapsto s_+$ в комплексной плоскости при условии $\Re(s) < s_+$.

6. Метод седловой точки

Можем представить преобразование Меллина следующим образом:
$$\ln MD_T(u) = \phi(u-1,T) + \Sigma_0^{11}\psi_1(u-1,T) + \cdots + \Sigma_0^{nn}\psi_n(u-1,T).$$
Следовательно, используя формулу (2), получаем
$$(13)\quad D_T(x) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{-uL+\phi(u-1,T)+\Sigma_0^{11}\psi_1(u-1,T)+\cdots+\Sigma_0^{nn}\psi_n(u-1,T)}du.$$
В (13) используем обозначение $L = \ln x$ и предполагаем, что $\Re(s) \in (s_-(T), s_+(T))$, где $s_+(T)$ и $s_-(T)$ – верхний и нижний критические моменты соответственно.

Почему формула (13) применима к многофакторной модели Хестона? Известно (см. статья [19]), что все особенности преобразования Меллина для плотности цен на акции в модели Хестона расположены на вещественной прямой. Следовательно, функция
$$u \mapsto \exp\{\phi(u-1,T) + \Sigma_0^{11}\psi_1(u-1,T) + \cdots + \Sigma_0^{nn}\psi_n(u-1,T)\}$$
аналитична везде на комплексной плоскости за исключением точек сигулярности на вещественной прямой. Из следующей леммы следует, что интеграл в правой части формулы (13) существует.

Лемма 2. *Пусть $T > 0$ и $1 \leqslant s_1 \leqslant \Re(s) \leqslant s_2$. Тогда при $\Im(s) \to \infty$ справедлива следующая оценка:*

$$| e^{\phi(s,T)+\Sigma_0^{11}\psi_1(s,T)+\cdots+\Sigma_0^{nn}\psi_n(s,T)} | = O(e^{-C\Im(s)}),$$

где константа $C > 0$ зависит от $T, s_1, s_2, \Sigma_0^{11}, \cdots, \Sigma_0^{nn}$.

Изучим асимптотическое поведение выражения в (13) методом седловой точки (или наискорейшего спуска). Метод седловой точки является расширением метода Лапласа для аппроксимации интеграла, при котором контурный интеграл в комплексной плоскости деформируется для прохождения вблизи седловой точки примерно в направлении наикрутейшего спуска или стационарной фазы. Основная идея состоит в том, чтобы преобразовать контур интегрирования в траекторию наиболее крутого спуска от седловой точки подынтегрального выражения. В тех случаях, когда метод может быть успешно применен, седловина становится круче и более выраженной по мере увеличения параметра (в нашем случае x). Поскольку подынтегральное выражение является аналитическим, контур может быть деформирован в новый контур без изменения значения интеграла.

Седловую точку подынтегрального выражения в (13) найдём из условия равенства нулю её производной. Обычно достаточно вычислить приблизительную седловую точку. Ниже будут приведены данные вычисления. Из леммы 1 и замечания после неё следует формула

$$\phi(u-1,T) + \sum_{j=1}^{n} \Sigma_0^{jj}\psi_j(u-1,T) = \\ = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\beta_j^2}{u^*-u} + \frac{a_j^2}{2c_j^2}\ln\frac{1}{u^*-u} + \Gamma_j\right) + O(u^*-u) \tag{14}$$

при $u \to u^* = s_+ + 1 = A_3$ с условием $\Re(u) < u^*$. Здесь мы положили

$$\beta_j^2 = \frac{\Sigma_0^{jj}}{2c_j^2\sigma} \tag{15}$$

и

$$\Gamma_j = -\Sigma_0^{jj}\left(\frac{b_j + s_+\rho_j c_j}{2c_j^2} + \frac{\kappa}{4c_j^2\sigma^2}\right) + \frac{a_j^2}{2c_j^2}\ln\frac{T}{\sigma} + \\ + a_j^2\int_0^{\top}\left(\psi_j(s_+,\nu) - \frac{1}{2c_j^2(T-\nu)}\right)d\nu. \tag{16}$$

Сохраняя только главный член в (14), получаем приближенное уравнение седловой точки:

$$\left[x^{-u}\exp\left\{\sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j^2}{u^*-u}\right\}\right]' = 0,$$

что эквивалентно

$$-L + \sum_{j=1}^{n}\frac{\beta_j^2}{(u^*-u)^2} = 0. \tag{17}$$

Решение (17) задается формулой

$$\hat{u} = \hat{u}(x) = u^* - \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{-1/2}. \tag{18}$$

Выражение в (18) является приблизительной седловой точкой подынтегрального выражения. Далее нам нужно продолжить в комплексную плоскость функцию
$u \mapsto \exp\{\phi(u-1,T) + \Sigma_0^{11}\psi_1(u-1,T) + \cdots + \Sigma_0^{nn}\psi_n(u-1,T)\}$
в точке $u = \hat{u}$. Положим $u = \hat{u} + iy$. Поскольку приблизительная седловая точка $\hat{u}$ приближается к u при $L \to \infty$, можем продолжить в комплексную точку приведенную выше функцию, используя (14). Для обеспечения сходимости интеграла ограничим y следующим интервалом:

$$|y| < L^{-\alpha},\ \frac{2}{3} < \alpha < \frac{3}{4}. \tag{19}$$

Выбор верхней границы для α в (19) далее будет обоснован. Поскольку $u^* - u = \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{-1/2} - iy$, получаем:

$$\frac{1}{u^*-u} = \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2}\left(1 - i\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2}y\right)^{-1} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2}\times$$

$$= \left(1 + i\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2}y - \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1} Ly^2 + O(L^{\frac{3}{2}-3\alpha})\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2} + i\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1} Ly -$$

$$- \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-3/2} L^{3/2}y^2 + O(L^{2-3\alpha}).$$

Из этого следует, что

$$\ln\frac{1}{u^*-u} = \ln\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2}\left(1 + O(L^{\frac{1}{2}-\alpha})\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\ln L - \frac{1}{2}\ln\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right) + O(L^{\frac{1}{2}-\alpha}).$$

Далее, подставляя предыдущие разложения с $u = \hat{u} + iy$ в (18), получаем следующую асимптотическую формулу

$$\phi(\hat{u}-1+iy,T) + \sum_{j=1}^{n}\Sigma_0^{jj}\psi_j(\hat{u}-1+iy,T) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} + iLy - \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2}y^2 +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^2}{4c_j^2}\right)\left(\ln L - \ln\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)\right) + \sum_{j=1}^{n}\Gamma_j + O(L^{2-3\alpha}).$$

7. Апроксимация плотности в седловой точке

Для простоты докажем теорему с более слабой оценкой погрешности $O((\ln x)^{-1/4+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Далее получим более сильную оценку $O((\ln x)^{1/2})$.

Для начала сместим контур в формуле обратного преобразования Меллина (13) в седловую точку $\hat{u}$. Это дает

$$(20)\quad D_T(x) = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{u}-i\infty}^{\hat{u}+i\infty} e^{-uL+\phi(u-1,T)+\Sigma_0^{11}\psi_1(u-1,T)+\dots+\Sigma_0^{nn}\psi_n(u-1,T)}du.$$

Следовательно,

$$(21)\quad D_T(x) = x^{-\hat{u}}\frac{1}{2\pi}\times \\ \times\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyL+\phi(\hat{u}-1+iy,T)+\Sigma_0^{11}\psi_1(\hat{u}-1+iy,T)+\dots+\Sigma_0^{nn}\psi_n(\hat{u}-1+iy,T)}dy.$$

Коэффициент $x^{-\hat{u}} \approx x^{-u^*} = x^{-A_3}$ приводит к главному члену асимптотики. Его показатель степени соответствует местоположению главной сингулярности преобразования Меллина.

Лемма 3. *Пусть $B > 0$ и положим $L = \ln x$. Тогда часть интеграла в (20), где $\Im(u) > B$, равна $O(x^{-A_3}\exp\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\})$.*

Доказательство. Если $\widetilde{B} > B$ – достаточно большая положительная константа, то утверждение леммы 3 следует из леммы 2:

$$\left|\int_{\hat{u}+i\widetilde{B}}^{\hat{u}+i\infty} e^{-uL+\phi(u-1)+\Sigma_0^{11}\psi_1(u-1)+\dots+\Sigma_0^{nn}\psi_n(u-1)}du\right| \leqslant \\ \leqslant Cx^{-A_3}\exp\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\}\int_{\widetilde{B}}^{\infty} e^{-Cy}dy = \\ = O\left(x^{-A_3}\exp\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\}\right).$$

Более того, так как преобразование Меллина не имеет особенностей за пределами вещественной прямой, получаем

$$\left|\int_{\hat{u}+iB}^{\hat{u}+i\widetilde{B}} e^{-uL+\phi(u-1)+\Sigma_0^{11}\psi_1(u-1)+\dots+\Sigma_0^{nn}\psi_n(u-1)}du\right| =$$

$$= O\left(e^{-\hat{u}L}\right) = O\left(x^{-A_3}\exp\{\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\}\right).$$

На этом завершается доказательство леммы 3.

Лемма 3 показывает, что часть хвоста интеграла, где $\Im(u) > B$, асимптотически намного меньше центральной части. Далее оценим весь хвост интеграла.

Лемма 4. *Для хвоста интеграла справедлива следующая оценка:*

$$\left|\int_{\hat{u}+iL^{-\alpha}}^{\hat{u}+i\infty} e^{-uL+\phi+\Sigma_0^{11}\psi_1+\dots+\Sigma_0^{nn}\psi_n}du\right| =$$

$$= x^{-A_3}\exp\{2\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}-\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha}+O(\ln L)\},$$

$$L \to \infty.$$

Доказательство. Докажем, что существует константа $B > 0$, такая что абсолютное значение части хвоста интеграла, где $L^{-\alpha} < \Im(u) < B$, определяется как

(22)

$$x^{-A_3}\exp\{2\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(\ln L)\}.$$

Достаточно подтвердить предыдущее утверждение леммы 3, так как лемма 4 показывает, что абсолютное значение интеграла от $\hat{u} + iB$ до $\hat{u} + i\infty$ асимптотически меньше, чем выражение в (22).

Действительно, разделив (22) на $x^{-A_3}\exp\{\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}$, получим слагаемое $\exp\{\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} + O(L^{3/2-2\alpha})\}$, которое стремится к бесконечности, так как согласно условию (23) $3/2 - 2\alpha < 1/2$. Далее, используя лемму 1 и замечание после неё, видим, что для некоторой константы $\gamma > 0$

$$e^{\phi(u-1,T)+\Sigma_0^{11}\psi_1(u-1,T)+\cdots+\Sigma_0^{nn}\psi_n(u-1,T)} =$$

$$= O\left(\exp\{\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j^2}{A_3 - u} - \gamma\ln(A_3 - u)\}\right),$$

поскольку u стремится к $u^* = s_+ + 1 = A_3$ внутри полосы аналитичности. Точнее, существует константа $C > 0$, такая что для достаточного малого числа $B > 0$ и для всех u в полосе аналитичности с условиями $|\Im(u)| < B$ и $\Re(u) > u^* - B$, получаем

$$|e^{\phi(u-1)+\Sigma_0^{11}\psi_1(u-1)+\cdots+\Sigma_0^{nn}\psi_n(u-1)}| \leqslant$$

$$\leqslant C|A_3 - u|^{-\gamma}\exp\{\Re\left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j^2}{A_3 - u}\right)\}.$$

Из этого следует, что

$$|\int_{\hat{u}+iL^{-\alpha}}^{\hat{u}+iB} e^{-uL+\phi+\Sigma_0^{11}\psi_1+\cdots+\Sigma_0^{nn}\psi_n}du| \leqslant$$

$$\leqslant Cx^{-A_3}\exp\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\}\times$$

$$\times\int_{L^{-\alpha}}^{B} |A_3 - (\hat{u}+iy)|^{-\gamma}\exp\{\Re\left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j^2}{A_3 - (\hat{u}+iy)}\right)\}dy$$

$$\leqslant Cx^{-A_3}\exp\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\}L^{\gamma/2}\exp\{\frac{(A_3-\hat{u})\sum_{j=1}^n \beta_j^2}{(A_3-\hat{u})^2 + L^{-2\alpha}}\} =$$

$$= Cx^{-A_3}\exp\{2\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(\ln L)\}.$$

Здесь мы пользуемся тем, что

$$\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{-1/2} = A_3 - \hat{u} \leqslant |A_3 - (\hat{u}+iy)|,$$

откуда имеем

$$L^{\gamma/2} \leqslant |A_3 - (\hat{u} + iy)|^{-\gamma}.$$

Кроме того, величина

$$\mathfrak{R}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2}{A_3 - (\hat{u} + iy)}\right) = \frac{(A_3 - \hat{u})\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2}{(A_3 - \hat{u})^2 + y^2} \tag{23}$$

уменьшается с ростом $|y|$. Следовательно, можем оценить интеграл от функции (23) на интервале $[L^{-\alpha}, B]$ значением её подынтегральной функции, умноженным на длину пути интегрирования в L раз. Тогда

$$\frac{(A_3 - \hat{u})\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2}{(A_3 - \hat{u})^2 + L^{-2\alpha}} = \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}}{\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right) L^{2\alpha-1} + 1} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(L^{5/2-4\alpha}).$$

Наконец, записываем коэффициент $L^{\gamma/2}$ как $\exp\{O(\ln L)\}$. На этом доказательство леммы 4 завершается.

«Хвост» интеграла в (21), соответсвующий $|y| > L^{-\alpha}$, можно оценить с помощью Леммы 4. Отсюда следует, что

$$D_T(x) = x^{-\hat{u}}\frac{1}{2\pi}\times$$

$$\times\int_{-L^{-\alpha}}^{L^{-\alpha}} e^{-iyL+\phi(\hat{u}-1+iy,T)+\Sigma_0^{11}\psi_1(\hat{u}-1+iy,T)+\cdots+\Sigma_0^{nn}\psi_n(\hat{u}-1+iy,T)}dy$$

$$+x^{-A_3}\exp\{2\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(\ln L)\}.$$

Далее, используя асимптотическую формулу и равенство

$$x^{-\hat{u}}\exp\{\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\} = x^{-u^*}\exp\{2\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\},$$

получаем

$$D_T(x) = \frac{\exp\{\sum_{j=1}^n \Gamma_j\}}{2\pi} x^{-u^*} e^{2\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}} \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}} L^{\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}} \times$$

$$\times \int_{-L^{-\alpha}}^{L^{-\alpha}} \exp\{-\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2} y^2\} dy (1 + O(L^{2-3\alpha}))$$

$$+ x^{-A_3} \exp\{2\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(\ln L)\}.$$

Вычисляя интеграл Гаусса, получаем

$$\int_{-L^{-\alpha}}^{L^{-\alpha}} \exp\{-\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2} y^2\} dy =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/4} L^{-3/4} \int_{-\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/4} L^{3/4-\alpha}}^{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/4} L^{3/4-\alpha}} \exp\{-w^2\} dw \sim$$

$$\sim \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/4} L^{-3/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-w^2\} dw = \sqrt{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/4} L^{-3/4}.$$

Принимая во внимание последние два выражения, можем сравнить основную часть асимптотического разложения и получившиеся два члена ошибки:

$$const \cdot x^{-A_3} L^{\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2} - \frac{3}{4}} \exp\{2\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\}$$

(основная часть),

$$x^{-A_3} L^{\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2} - \frac{3}{4}} \exp\{2\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\} O(L^{2-3\alpha})$$

(ошибка из-за локального расширения вокруг седловой точки) и

$$x^{-A_3}\exp\{2\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2}L^{1/2}-\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2}L^{3/2-2\alpha}+O(\ln L)\}$$

(ошибка из-за конечной оценки).

Так как $2-3\alpha<0$, выражение во второй строке асимптотически меньше основной части. Кроме того, поскольку $3/2-2\alpha>0$, величина $\exp\{\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{-1/2}L^{3/2-2\alpha}\}$ убывает быстрее, чем любая степень L в ошибке локального разложения. Получаем, что выражение в третьей строке пренебрежимо мало по сравнению с ошибкой в локальном разложении. Следовательно, достаточно взять только значение ошибки, возникающее в результате локального расширения.

В результате погрешность в асимптотической формуле для D_T равна $O(L^{2-3\alpha})=O(L^{-1/4+\varepsilon})$ (возьмем α, близкое к $\frac{3}{4}$). Получаем следующую формулу:

$$D_T(x)=\left[\frac{\exp\{\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j\}}{2\pi}\sqrt{\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/4-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^2}{4c_j^2}}\right]\times$$
$$\times\, x^{-(s_++1)}e^{2\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/2}L^{1/2}}L^{-3/4+\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^2}{4c_j^2}}\times$$
$$\times\,(1+O(L^{-1/4+\varepsilon})),\quad L\to\infty.$$

Из этого следует, что Теорема 1 с более слабой оценкой погрешности верна при

$$A_1=\frac{\exp\{\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j\}}{2\pi}\sqrt{\pi}\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2\right)^{1/4-\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^2}{4c_j^2}}. \tag{24}$$

Далее докажем теорему 1 с относительной погрешностью $O((\log x)^{-1/2})$. Для этого возьмем ещё два члена разложения для $1/(u^*-u)$:

$$\frac{1}{u^*-u} = \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2} \left(1 - i\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2} y\right)^{-1} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2}(1 + i\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2} y - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1} L y^2 -$$

$$- i\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-3/2} L^{3/2} y^3 + \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{2} L^2 y^4 + O(L^{\frac{5}{2}-5\alpha})) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2} + i\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1} L y - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-3/2} L^{3/2} y^2 -$$

$$- i\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-2} L^2 y^3 + \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-5/2} L^{5/2} y^4 + O(L^{3-5\alpha}).$$

Разложив логарифм, получим:

$$\ln\frac{1}{u^*-u} = \frac{1}{2}\ln L - \ln\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right) + i\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{1/2} y -$$

$$- \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1} L y^2 + O(L^{\frac{3}{2}-3\alpha}).$$

Далее, подставив два предыдущих разложения в (14), получаем уточнение разложения подынтегральной функции:

$$x^{-\hat{u}-iy}\exp\{\phi(\hat{u}-1+iy,T) + \sum_{j=1}^n \Sigma_0^{jj}\psi_j(\hat{u}-1+iy,T)\} =$$

$$= x^{-u^*}\exp\{2\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}\right)\left(\ln L - \ln\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)\right) -$$

$$- \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2} y^2 + \sum_{j=1}^{n} \Gamma_j\} \cdot (1 + c_1 L^2 y^3 + c_2 L^{5/2} y^4 + c_3 L^{1/2} y +$$

$$+ c_4 L y^2 + c_5 L^{-1/2} + O(L^{-3/4+\varepsilon}))$$

с константами $c_1, \cdots, c_5$. Обратим внимание, члены с c_1 и c_2 взяты из $(u^* - u)^{-1}$, те, которые включают c_3 и c_4, – из $\ln(u^* - u)^{-1}$, и тот, который содержит c_5, взят из $(u^* - u)$. Здесь используется факт, что -член в (14) имеет вид $c(u^* - u) + O((u^* - u)^2)$.

Используя те же идеи, что в доказательстве для более слабой оценки погрешности, видим, что основной член и член ошибки из-за конечной оценки остаются неизменными. Получим значение ошибки из-за локального расширения. Сначала проинтегрируем функции в формуле выше и примем во внимание, что

$$\int_{-L^{-\alpha}}^{L^{-\alpha}} y^3 \exp\{- \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2} y^2\} dy =$$

$$= \int_{-L^{-\alpha}}^{L^{-\alpha}} y \cdot \exp\{- \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2} y^2\} dy = 0.$$

Два интеграла, полученные из множителей с y^2 и y^4, можно вычислить. Они дают относительный вклад $L^{-1/2}$, который можно объединить с членом $c_5 L^{-1/2}$. Из этого следует, что абсолютная погрешность, полученная из локального разложения, равна

$$x^{-A_3} L^{-3/4 + \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{4c_j^2}} \exp\{2 \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\} O(L^{-1/2}).$$

Осталось увидеть, что константы A_2 и A_3 задаются формулами

$$A_3 = s_+ + 1, \;\; A_2 = 2 \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2\right)^{1/2} = 2 \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\Sigma_0^{jj}}{2c_j^2 \sigma}\right)^{1/2}. \tag{25}$$

8. Явная формула для константы A_1

Найдем явную формулу для константы A_1, которая фигурирует в формуле (1). Тогда доказательство теоремы будет завершено. Для любого $t \in (0, T)$ положим

$$J_t^j = a_j^2 \int_0^t \left(\psi_j(s_+, \nu) - \frac{1}{2c_j^2(T-\nu)} \right) d\nu. \tag{26}$$

Из формулы для функции ϕ следует, что

$$\sum_{j=1}^n J_t^j = \phi(s_+, t) - \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2} \right) \ln \frac{T}{T-t}.$$

Тогда

$$J_t^j = \frac{a_j^2}{2c_j^2} \ln \left(\frac{(T-t)P_j(s_+) \exp\{(-b_j - s_+\rho_j c_j)t\}}{T[P_j(s_+) \cosh(P_j(s_+)t) - (b_j + s_+\rho_j c_j) \sinh(P_j(s_+)t)]} \right). \tag{27}$$

Используя правило Лопиталя, получаем

$$L_j = \lim_{t \uparrow T} \frac{T-t}{P_j(s_+) \cosh(P_j(s_+)t) - (b_j + s_+\rho_j c_j) \sinh(P_j(s_+)t)} =$$

$$= \lim_{t \uparrow T} \frac{-1}{P_j^2(s_+) \sinh(P_j(s_+)t) - P_j(s_+)(b_j + s_+\rho_j c_j) \cosh(P_j(s_+)t)}.$$

Обратим внимание, что знаменатель в первом пределе стремится к нулю, так как функция ϕ расходится при $u = s_+(T)$ и $t = T$, т.е.

$$P_j(s_+) \cosh(P_j(s_+)t) = (b_j + s_+\rho_j c_j) \sinh(P_j(s_+)t),$$

тогда

$$L_j = \frac{1}{(b_j + s_+\rho_j c_j)^2 \sinh(P_j(s_+)t) - P_j^2(s_+) \sinh(P_j(s_+)t)}. \tag{28}$$

Из (26)–(28) следует, что

$$\lim_{t \uparrow T} e^{J_t^j} = \exp\left(a_j^2 \int_0^{\top} \left(\psi_j(s_+, \nu) - \frac{1}{2c_j^2(T-\nu)} \right) d\nu \right) =$$

$$= \exp\left(\frac{(-b_j - s_+\rho_j c_j)a_j^2 T}{2c_j^2}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{(b_j + s_+\rho_j c_j)^2 + c_j^2(s_+ - s_+^2)}}{Tc_j^2 s_+(s_+ - 1)\sinh[T\sqrt{(b_j + s_+\rho_j c_j)^2 + c_j^2(s_+ - s_+^2)}]}\right)^{\frac{a_j^2}{2c_j^2}}.$$

Далее, используя формулу для Γ, видим, что

$$e^{\Gamma_j} = \left(\frac{T}{\sigma}\right)^{\frac{a_j^2}{2c_j^2}} \exp\left(-\Sigma_0^{jj}\left(\frac{b_j + s_+\rho_j c_j}{2c_j^2} + \frac{\kappa}{4c_j^2\sigma^2}\right)\right) \times$$

$$\times \exp\left(\frac{(-b_j - s_+\rho_j c_j)a_j^2 T}{2c_j^2}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{(b_j + s_+\rho_j c_j)^2 + c_j^2(s_+ - s_+^2)}}{Tc_j^2 s_+(s_+ - 1)\sinh[T\sqrt{(b_j + s_+\rho_j c_j)^2 + c_j^2(s_+ - s_+^2)}]}\right)^{\frac{a_j^2}{2c_j^2}}.$$

Следовательно, из (24) следует, что

$$A_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\Sigma_0^{jj}}{2c_j^2\sigma}\right)^{-\frac{1}{4} - \sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^2}{4c_j^2}} \left(\frac{T}{\sigma}\right)^{\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j^2}{2c_j^2}} \times$$

$$\times \exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\Sigma_0^{jj}\left(\frac{b_j + s_+\rho_j c_j}{2c_j^2} + \frac{\kappa}{4c_j^2\sigma^2}\right) + \frac{(b_j + s_+\rho_j c_j)a_j^2 T}{2c_j^2}\right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{(b_j + s_+\rho_j c_j)^2 + c_j^2(s_+ - s_+^2)}}{Tc_j^2 s_+(s_+ - 1)\sinh[T\sqrt{(b_j + s_+\rho_j c_j)^2 + c_j^2(s_+ - s_+^2)}]}\right)^{\frac{a_j^2}{2c_j^2}}.$$

Таким образом, доказательство теоремы 1 завершено.

9. Заключение

В теореме 1 мы рассмотрели асимптотику плотности для многофакторной модели Хестона $D_T(x)$ при $x \to \infty$. Но как ведет себя плотность $D_T(x)$ вблизи нуля? Оказывается, что при

$x \downarrow 0$ подынтегральное выражение имеет седловую точку, которая приближается к сингулярной точке $s_- + 1$ со скоростью $(-\log x)^{-1/2}$ (s_- обозначает нижний критический момент). Далее, используя те же идеи, что и в случае $x \to \infty$, можем получить аналогичные асимптотические формулы.

Также стоит отметить тот факт, что явным видом функций преобразования Меллина мы пользовались только для вычисления константы A_1, в основном использовали соответствующие уравнения Риккати. Поэтому общий вид асимптотической формулы плотности распределения стоимости акции можем получить для любой многофакторной модели без процесса диагонализации матриц.

Литература

1. BRU M. *Wishart processes* // Journal of Theoretical Probability. – 1991. – Vol. 4. – P. 725–743.
2. CARR P., MADAN D.B. *Option valuation using the fast Fourier transform* // Journal of Computational Finance. – 1999. – Vol. 2, No. 4.
3. CARR P., WU L. *Stochastic Skew in Currency Options* // Preprint, 2004.
4. CONT R., DA FONSECA J. *Dynamics of implied volatility surfaces* // Quantitative Finance. – 2002. – Vol. 2, No. 1. – P. 45–60.
5. DA FONSECA J., GRASSELLI M., TEBALDI C. *A multifactor volatility Heston model* // Quantitative Finance. – 2008. – Vol. 8, No. 6. – P. 591–604.
6. DAI Q., SINGLETON K. *Specification Analysis of Affine Term Structure Models* // Journal of Finance. – 2000. – Vol. 55. – P. 1943–1978.
7. DUFFIE D., KAN R. *A Yield-Factor Model of Interest Rates* // Mathematical Finance. – 1996. – Vol. 6(4). – P. 379–406.
8. DUFFIE D., PAN J., SINGLETON K. *Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions* // Econometrica. – 2000. – Vol. 68. – P. 1343–1376.

9. FLAJOLET P., GOURDON X., DUMAS P. *Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums* // Theoretical Computer Science. – 1995. – Vol. 144. – P. 3–58.
10. FREILING G. *A Survey of Nonsymmetric Riccati Equations* // Linear Algebra and Its Applications. – 2002. – P. 243–270.
11. FRIZ P., GERHOLD S., GULISASHVILI A. et al. *On refined volatility smile expansion in the Heston model* // Quantitative Finance. – 2011. – Vol. 11. – P. 1151–1164.
12. GOURIEROUX C., SUFANA R. *Derivative Pricing with Multivariate Stochastic Volatility: Application to Credit Risk* // Working paper. – CREST, 2004.
13. GRASSELLI M., TEBALDI C. *Solvable Affine Term Structure Models* // Mathematical Finance. – 2004.
14. GULISASHVILI A. *Analytically Tractable Stochastic Stock Price Models* // Springer Finance. – 2012. – P. 167–184.
15. GULISASHVILI A., STEIN E.M. *Asymptotic behavior of the stock price distribution density and impied volatility in stochastic volatility models* // Applied Mathematics and Optimization. – 2010. – Vol. 61. – P. 287–315.
16. HESTON S. *A Closed-Form Solution for Option with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options* // Review of Financial Studies. – 1993. – Vol. 6. – P. 327–343.
17. HORN R.A., JOHNSON C.R. *Matrix analysis.* – Cambridge, 1990. – P. 464–469.
18. LEWIS A.L. *Option Valuation Under Stochastic Volatility.* – Finance Press, 2000.
19. LUCIC V. *On singularities in the Heston models* // Large Deviations and Asymptotic Methods in Finance, 2007. – P. 439–448.
20. WONG G. *Forward Smile and Derivative Pricing* // Equity Quantitative. Strategists Working Paper, UBS, 2004.

ASYMPTOTIC REPRESENTATION IN STOCHASTIC VOLATILITY MODELS

Kristina Buslova, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Student (buslova.kristina@mail.ru).

Abstract: This work is devoted to the study of the asymptotic behavior of the probability density function of stock prices within models with stochastic volatility. The main focus is on generalizing previously known results for the one-factor Heston model to more complex cases, including multivariate models. The research methodology is based on the use of affine principles, which allow analyzing the necessary aspects of asymptotics through solving corresponding Riccati equations near the critical point. The application of high-order Euler estimates ensures accuracy in calculations and robustness of conclusions. Additionally, the method of steepest descent combined with Tauber's principle is used, providing an opportunity to extract precise data about the asymptote of the original function from the analysis of its transformation near the critical point. This allows a deeper understanding of the structure of probability density functions in the context of complex stochastic systems. The obtained results are important for the development of the theory of stochastic differential equations and can find applications in various fields such as financial mathematics and econometrics.

Keywords: asymptotic formula for the stock of an option, multidimensional Heston model, Mellin transform.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.И. Орловым.*

*Поступила в редакцию 03.12.2024.
Дата опубликования 31.07.2025.*