

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СУДНА НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ И ЕГО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА¹

Соляков О. В.²

*(ФГАОУ ВО Российский университет транспорта,
Москва)*

Уварова Л. А.³

*(Московский государственный технологический
университет «СТАНКИН», Москва)*

Методом возмущений получено аналитическое решение нелинейной динамической системы, являющейся моделью плоскопараллельного движения судна. Полученные решения позволяют учесть влияние всех основных параметров на линейную и угловую скорости. Проанализированы малые параметры, выбор которых определяется конкретными параметрами задачи. Показано влияние линейной скорости на угловую скорость, обусловленное нелинейностью задачи. Показано влияние статического момента на каждую из составляющих скорости. Рассмотрено влияние солёности и температуры и, следовательно, плотности на параметры системы и, как следствие, на скорость движения судна. Влияние солёности рассмотрено в виде кусочно-постоянной функции и кусочно-линейной функции. Показана модификация решений для скоростей, которую необходимо сделать для уточнения их величин на разных участках траектории. Предложен аналитико-численный метод моделирования плоскопараллельного движения судна, учитывающий влияние неоднородности водного бассейна на основе гидрометеорологических данных. Полученные решения могут быть использованы для автоматизации движения судна по ограниченному фарватеру с использованием автоматической системы управления.

Ключевые слова: математическое моделирование, водный транспорт, динамические нелинейные системы, методы возмущения, солёность.

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта 0707-2020-0034.

² Олег Владимирович Соляков, к.т.н., доцент (solyakov1@yandex.ru).

³ Людмила Александровна Уварова, д.ф.-м.н., профессор (Uvar1@yandex.ru).

1. Введение

В последние годы все большее значение приобретает решение проблем автоматизации водного транспорта. В ближайшей перспективе необходимо будет решить проблему полной автоматизации управления судном – так называемой «безэкипажной навигации». Сегодня в рамках государственных заказов различных стран активно ведутся работы по проектированию таких систем автоматического управления безэкипажными судами различного назначения, в которых участвуют как частные организации, так и государственные разработчики. В связи со сложностью задачи, когда судно, корабль или катер движется по стеснённому руслу (речное судно, судно уровня река – море) под влиянием многих погодных факторов, меняющейся плотности воды в различных частях водного бассейна и с необходимостью быстрого принятия решений системой управления, возникает вопрос о включении в управляющую программу формул и выражений, удобных для быстрого расчета. Такие формулы могут быть получены (при определенных ограничениях) аналитическими методами или надежными численными методами. В то же время такие решения являются критериями правильности получения решений прямыми численными методами интегрирования динамических систем с широким варьированием параметров задачи. В данной работе мы решаем полулинейную динамическую систему плоскопараллельного движения судна с использованием метода возмущений. Учитывается также влияние изменяющейся плотности воды вследствие различия в солёности или (и) температуре в различных частях водной акватории.

2. Математическая модель в виде динамической системы и её решение с применением метода возмущений

Основные системы аналитических уравнений движения судов и их решения формировались с 50-х годов прошлого века и в настоящее время широко известны [17]. Эти методы и их

современные модификации приведены, в частности, в [2, 3, 5, 9, 10, 12, 15, 21, 23, 27]. Законы влияния ветра и турбулентности на движение судов разработаны и уточнены многими специалистами, например, в [4, 18, 19, 20, 22, 25]. Моделирование динамики речных судов численными методами может быть выполнено на основе системы Matlab/Simulink [7], в программном пакете «FlowVision» [11], среде моделирования Unity [1], специализированных и универсальных CAD-системах, например, SolidWorks [24] и в других программных средах. Однако ограничением численных моделей является их необходимая привязка к граничным условиям на каждом участке фарватера, а также к конкретным параметрам конструкций судов, которые должны быть определены с высокой точностью для обеспечения адекватности результатов.

В работе [17] авторы хорошо проанализировали существующие подходы к математическому моделированию движения судна как управляемой динамической системы, функционирующей в сложных изменяющихся условиях внешней среды, и основные классы задач, связанных с этими моделями. Отмечены недостатки частично линеаризованных моделей движения судна. Отличительным элементом каждой из существующих математических моделей этого типа является способ определения коэффициентов дифференциальных уравнений, отражающих гидродинамические силы на корпусе судна, в зависимости от геометрических параметров корпуса судна [17].

Метод возмущений с учетом возможности выбора параметра возмущений позволяет существенно уменьшить недостатки и расширить применение нелинейной динамической системы, являющейся моделью плоскопараллельного движения судна, для различных условий движения, в том числе в стесненном фарватере. Исследования аналитических решений позволят учесть влияние всех основных параметров на линейную и угловую скорости.

Общие аналитические решения, в отличие от визуального контроля и замера показателей с датчиков, состоят в последовательном проведении математических преобразований исходной модели, приводящих к заданному результату, и поскольку на

последнем этапе имеются формулы для расчётов, в которые достаточно подставить числа для получения цифрового результата, такие решения могут эффективно использоваться в широком диапазоне внешних условий.

В этой статье мы рассматриваем следующую полулинейную модель, представляющую собой динамическую систему уравнений [3]:

$$\begin{aligned} & -(m + \lambda_{11}) \frac{dV_x}{dt} + mV_y\omega + X = 0, \\ (1) \quad & -(m + \lambda_{22}) \frac{dV_y}{dt} - mV_x\omega - \lambda_{26} \frac{d\omega}{dt} + Y = 0, \\ & -(I_z + \lambda_{66}) \frac{d\omega}{dt} - \lambda_{26} \frac{dV_y}{dt} + M = 0, \end{aligned}$$

где V_x , V_y – компоненты скорости; ω – угловая скорость вращения корпуса судна; X , Y – суммарные силы, действующие вдоль осей x и y соответственно; M – суммарный момент относительно оси z ; m – масса водоизмещения судна; I_z – момент инерции корабля относительно оси z ; t – время. Через λ_{11} , λ_{22} , λ_{66} , λ_{26} обозначены присоединенные массы при движении вдоль осей X , Y , при вращении относительно оси Z и от статического момента соответственно. Начальные условия имеют вид

$$(2) \quad \omega(t=0) = \omega_0, V_x(t=0) = V_{x0}, V_y(t=0) = V_{y0}.$$

При получении аналитического решения системы (1) в нулевом приближении можно пренебречь членами уравнений, содержащими меньшее значение по сравнению с другими параметрами. Пренебрегаем в третьем уравнении системы величиной $\lambda_{26} \frac{dV_y}{dt}$. Тогда зависимость угловой скорости от времени

определяется из третьего уравнения системы:

$$(3) \quad \omega = \omega_0 + \frac{Mt}{I_z + \lambda_{66}}.$$

В этом случае система из двух первых уравнений системы (1) становится линейной. Дифференцирование второго уравнения из системы (1) с учётом (3) даёт

$$(4) \quad (m + \lambda_{22}) \frac{d^2 V_y}{dt^2} + m \left(\omega_0 + \frac{Mt}{I_z \lambda_{66}} \right) \frac{dV_x}{dt} + m V_x \frac{M}{I_z \lambda_{66}} = 0.$$

Выражение для V_x может быть получено из второго уравнения (1) и имеет вид

$$(5) \quad V_x = \frac{Y(I_z + \lambda_{66})}{m(\omega_0(I_z + \lambda_{66}) + Mt)} - \frac{(m + \lambda_{22})(I_z + \lambda_{66})}{m(\omega_0(I_z + \lambda_{66}) + Mt)} \frac{dV_y}{dt}.$$

Подстановка V_x из (5), $\frac{dV_x}{dt}$ из первого уравнения системы

(1), ω из (3) в уравнение (4) приводит к следующему дифференциальному уравнению второго порядка для V_y :

$$(6) \quad p \frac{d^2 V_y}{dp^2} + \frac{mMD}{(I_z + \lambda_{66})} p^3 V_y - \frac{dV_y}{dp} = -\frac{Y}{(m + \lambda_{22})} - DXp^2.$$

Здесь введены обозначения:

$$D = \frac{mM}{(m + \lambda_{11})(m + \lambda_{22})(I_z + \lambda_{66})}, \quad \gamma = \omega_0(I_z + \lambda_{66})/M, \quad p = \gamma + t.$$

Соответственно, однородное уравнение запишется в виде

$$(7) \quad p \frac{d^2 V_y}{dp^2} + \frac{mMD}{(I_z + \lambda_{66})} p^3 V_y - \frac{dV_y}{dp} = 0.$$

Уравнение (7) является линейным уравнением с переменным коэффициентом вида 2.98 из [6]:

$$(8) \quad xy'' - y' - \alpha x^3 y = 0.$$

$$\text{В данном случае коэффициент } \alpha = -\frac{mMD}{I_z + \lambda_{66}}.$$

С учётом решения (8) для решения уравнения (7) можно записать как

$$(9) \quad V_{yh} = C_1 \cos(0,5kp^2) + C_2 \sin(0,5kp^2), \quad k = \sqrt{-\alpha}.$$

Определитель Вронского равен $2kp$. С помощью определителя Вронского и (9) определим общее решение уравнения (6):

$$V_y = C_1 \cos(0,5kp^2) + C_2 \sin(0,5kp^2) - \frac{DX}{k^2} -$$

$$(10) - \frac{Y}{2k(m + \lambda_{22})} (\sin(0,5kp^2)(Ci(0,5kp^2) - Ci(0,5k\gamma^2)) -$$

$$- \cos(0,5kp^2)(Si(0,5kp^2) - Si(0,5k\gamma^2))).$$

Из формул (5) и (10) определяется скорость V_x :

$$V_x = \frac{Y(I_z + \lambda_{66})}{mMp} - C_1 kp \sin(0,5kp^2) + C_2 kp \cos(0,5kp^2) -$$

$$(11) - Yp / (m + \lambda_{22}) \times (\cos(0,5kp^2)(Ci(0,5kp^2) - Ci(0,5k\gamma^2)) +$$

$$+ \sin(0,5kp^2)(Si(0,5kp^2) - Si(0,5k\gamma^2))).$$

Из формул (10)–(11) видно, что решения для компонент линейной скорости выражаются через интегральный синус и интегральный косинус:

$$(12) \quad Si(x) = \int_0^x \frac{\sin q}{q} dq, \quad Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos q}{q} dq.$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий (2). Они равны:

$$(13) \quad C_1 = \left(V_{y0} + \frac{DX}{k^2} \right) \cos(0,5k\gamma^2) - \left(V_{x0} - \frac{Y(I_z + \lambda_{66})}{mM\gamma} \right) \sin(0,5k\gamma^2)/k\gamma,$$

$$C_2 = \left(V_{x0} - \frac{Y(I_z + \lambda_{66})}{mM\gamma} \right) \cos(0,5k\gamma^2)/k\gamma + \left(V_{y0} + \frac{DX}{k^2} \right) \sin(0,5k\gamma^2).$$

Таким образом, в линейном приближении величины $V_x^{(0)}$, $V_y^{(0)}$, $\omega^{(0)}$ полностью определяются выражениями (3), (10)–(13). Отметим, что угловую скорость также можно записать через параметр γ и переменную p :

$$(3') \quad \omega = \frac{M(\gamma + t)}{I_z + \lambda_{66}} = \frac{Mp}{I_z + \lambda_{66}}.$$

Далее уточним решение, принимая в расчет параметр λ_{26} . Для этого будем использовать метод возмущений.

В качестве подходящего безразмерного малого параметра можно выбрать один из следующих параметров в зависимости от конкретной задачи:

$$(14) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\lambda_{26} M}{V_0^2 m^2 R}, \quad V_0 = (V_{0x}^2 + V_{0y}^2)^{0.5} \neq 0, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\lambda_{26} V_0^2}{QR^2}, \quad Q = (X^2 + Y^2)^{0.5} \neq 0, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\lambda_{26} R}{I_z}, \quad \varepsilon_4 = \frac{\lambda_{26}}{mR}, \quad \varepsilon_5 = \frac{\lambda_{26} Q}{V_0^2 m^2}, \end{aligned}$$

где R – характерный размер судна: длина L или ширина B . Можно обозначить: $\varepsilon_i \equiv \varepsilon = \lambda_{26} \sigma$, $\lambda_{26} = \varepsilon / \sigma$; σ – величина, зависящая от выбранного малого параметра в соответствии с (14). Тогда искомые скорости можно представить в следующем виде:

$$(15) \quad V_x = V_x^{(0)} + \varepsilon V_x^{(1)}, \quad V_y = V_y^{(0)} + \varepsilon V_y^{(1)}, \quad \omega = \omega^{(0)} + \varepsilon \omega^{(1)}.$$

Подстановка (15) в систему (1) и начальные условия (2) и определение выражений при одинаковых степенях ε приводит к следующей задаче Коши для $V_x^{(1)}$, $V_y^{(1)}$, $\omega^{(1)}$:

$$(16) \quad \begin{aligned} -(m + \lambda_{11}) \frac{dV_x^{(1)}}{dt} + m(V_y^{(1)} \omega^{(0)} + V_y^{(0)} \omega^{(1)}) &= 0, \\ (m + \lambda_{22}) \frac{dV_y^{(1)}}{dt} + m(V_x^{(1)} \omega^{(0)} + V_x^{(0)} \omega^{(1)}) + \frac{1}{\sigma} \frac{d\omega^{(0)}}{dt} &= 0, \\ (I_z + \lambda_{66}) \frac{d\omega^{(1)}}{dt} + \frac{1}{\sigma} \frac{dV_y^{(0)}}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

$$(17) \quad \omega^{(1)}(t=0) = 0, \quad V_x^{(1)}(t=0) = V_y^{(1)}(t=0) = 0.$$

Интегрирование третьего из уравнений данной системы приводит к решению

$$(18) \quad \omega \cong \omega^{(0)}(t) + \frac{\varepsilon}{\sigma(I_z + \lambda_{66})} (V_{y0} - V_y^{(0)}(t)).$$

Дифференцирование первого из уравнений (16) приводит к следующему уравнению:

$$(19) \quad \begin{aligned} & -(m + \lambda_{11}) \frac{d^2 V_x^{(1)}}{dt^2} + m \left(\frac{dV_y^{(1)}}{dt} \omega^{(0)}(t) + V_y^{(1)} \frac{M}{I_z + \lambda_{66}} \right) + \\ & + m \left(\frac{(V_{y0} - V_y^{(0)}(t))}{\sigma(I_z + \lambda_{66})} \frac{dV_y^{(0)}}{dt} - \frac{V_y^{(0)}(t)}{\sigma(I_z + \lambda_{66})} \frac{dV_y^{(0)}}{dt} \right) = 0. \end{aligned}$$

Подстановка $\omega^{(0)}(t) \frac{dV_y^{(1)}}{dt}$ (из второго уравнения (16)), $V_y^{(1)}$ (из первого уравнения (16)) и переход от t к переменной p в (19) преобразует последнее к следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(20) \quad \frac{d^2 V_x^{(1)}}{dt^2} - \frac{1}{p} \frac{dV_x^{(1)}}{dp} + k^2 p^2 V_x^{(1)} = F(p),$$

где

$$\begin{aligned} F(p) &= \tilde{F}(p) / \sigma, \\ \tilde{F}(p) &= -\frac{(m + \lambda_{22}) D V_y^{(0)}(p) \tilde{\omega}^{(1)}(p)}{\omega^{(0)}(p)} - m \kappa \omega^{(0)}(p) \tilde{\omega}^{(1)}(p) V_x^{(0)}(p) - \\ (21) \quad & -\frac{D}{\sigma} \omega^{(0)}(p) + \frac{m}{m + \lambda_{11}} \tilde{\omega}^{(1)}(p) \frac{dV_y^{(0)}}{dp} - \frac{\kappa}{\sigma} V_y^{(0)}(p) \frac{dV_y^{(0)}}{dp}, \\ \tilde{\omega}^{(1)}(p) &= \frac{V_{y0} - V_y^{(0)}(p)}{I_z + \lambda_{66}}, \quad \kappa = \frac{m}{(m + \lambda_{11})(m + \lambda_{22})}, \\ \omega^{(0)}(p) &= \frac{Mp}{I_z + \lambda_{66}}, \quad \frac{dV_y^{(0)}}{dp} = \left(Y - \frac{mMpV_x^{(0)}(p)}{I_z + \lambda_{66}} \right) / (m + \lambda_{22}). \end{aligned}$$

Соответствующее уравнению (20) однородное уравнение имеет вид

$$(22) \quad \frac{d^2 V_x^{(1)}}{dp^2} - \frac{1}{p} \frac{dV_x^{(1)}}{dp} + k^2 p^2 V_x^{(1)} = 0.$$

Данное уравнение относится к уравнению вида 2.162 из справочника [6]:

$$x^2 y'' + ax y' + (bx^m + c)y = 0, \\ (23) \quad y = x^{(1-a)/2} Z_\nu \left(\frac{2}{m} \sqrt{b} x^{m/2} \right), \quad \nu = \frac{1}{m} \sqrt{(1-a)^2 - 4c}.$$

Здесь через $Z_\nu \left(\frac{2}{m} \sqrt{b} x^{m/2} \right)$ обозначены функции Бесселя первого и второго рода порядка ν .

В данном случае $a = -1$, $m = 4$, $b = k^2$, $\nu = 1/2$. Поскольку порядок ν является полуцелым, то функции Бесселя выражаются в элементарных функциях и решение однородного уравнения (22) запишется так:

$$(24) \quad V_{xh}^{(1)} = C_3 \sqrt{p} \cos(0,5kp^2) + C_4 \sqrt{p} \sin(0,5kp^2),$$

где C_3, C_4 – постоянные интегрирования. Определитель Вронского из фундаментальных решений равен $kp^{3/2}$. Соответственно можно определить общее решение уравнения (20) и затем с помощью первого уравнения (16) – общее решение для $V_y^{(1)}$. Подстановка общих решений в начальные условия (17) приводит к равенству нулю постоянных C_3, C_4 . Таким образом, возмущённые решения определяются только неоднородной частью (21) уравнения (20). Они имеют вид:

$$(25) \quad V_x^{(1)} = \sqrt{p}/(\sigma k) (\sin(0,5kp^2) \int_\gamma^p \cos(0,5kp^2) \tilde{F}(p) p^{-3/2} dp - \\ - \cos(0,5kp^2) \int_\gamma^p \sin(0,5kp^2) \tilde{F}(p) p^{-3/2} dp),$$

$$(26) \quad V_y^{(1)}(p) = -\frac{V_y^{(0)}(p)(V_{y0} - V_y^{(0)}(p))}{\sigma M p} + \frac{(m + \lambda_{11})(I_z + \lambda_{66})}{m M p \sigma} \times \\ \times \left((\sin(0,5kp^2)/(2k\sqrt{p}) - p^{3/2} \cos(0,5kp^2)) \times \right. \\ \times \int_\gamma^p \cos(0,5kp^2) \tilde{F}(p) p^{-3/2} dp + (p^{3/2} \sin(0,5kp^2) - \\ \left. - \cos(0,5kp^2)/(2k\sqrt{p})) \int_\gamma^p \sin(0,5kp^2) \tilde{F}(p) p^{-3/2} dp \right).$$

Интегралы, включенные в (25)–(26), не берутся в элементарных функциях и могут быть проинтегрированы численно.

3. Моделирование влияния на движение судна изменения солёности или (и) температуры

Для того чтобы оценить влияние изменения плотности воды за счёт изменения солёности или (и) температуры на движение корабля, необходимо рассмотреть параметры, входящие в систему (1). Влияние изменения плотности воды за счёт солёности или температуры может оказывать существенное влияние на скорость корабля. Так, в случае нескольких слоёв воды с различной солёностью, локализующихся в некоторой части бассейна, может возникнуть явление Экмана: так называемая «мёртвая вода», движение по которой становится крайне затруднительным [26]. В данной статье рассматривается плоскопараллельная модель движения судна, однако в пограничных областях «река – море», «пролив – море» также происходит встреча водных слоёв с разной солёностью и (или) разной температурой. Вблизи поверхности водоёмов плотность воды зависит от концентрации соли и температуры следующим образом:

$$(27) \quad \rho(s, \tau) = \rho_0(T) + A(T)s + F(T)s^{3/2} + Cs^2.$$

Здесь $\rho_0(T)$ – плотность чистой воды; s – концентрация соли; T – температура;

$$(28) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= 999,84259 + 6,793952 \cdot 10^{-2}T - 9,095290 \cdot 10^{-3}T^2 + \\ &+ 1,0011685 \cdot 10^{-4}T^3 - 1,120083 \cdot 10^{-6}T^4 + 6,636332 \cdot 10^{-9}T^5, \\ A(T) &= 0,824493 - 4,0899 \cdot 10^{-3}T + 7,6438 \cdot 10^{-5}T^2 - \\ &- 8,2467 \cdot 10^{-7}T^3 + 5,3875 \cdot 10^{-9}T^4, \\ F(T) &= -5,72466 \cdot 10^{-3} + 1,0227 \cdot 10^{-4}T - 1,6546 \cdot 10^{-6}T^2, \\ C &= 4,8314 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Приведём далее параметры задачи, поскольку они зависят от массы или от плотности:

- присоединенная масса воды при движении судна по оси X :

$$\lambda_{11} = \frac{m\tau}{2L},$$

– присоединенная масса воды при движении судна по оси Y :

$$\lambda_{22} = m \left(\frac{2\tau}{B} \left(1 - \frac{B}{2L} \right) \right),$$

– момент инерции от присоединенной массы воды по оси Z :

$$(29) \quad \lambda_{66} = m \left(\frac{2\tau}{B} \left(1 - 1.6 \frac{B}{\tau} \right) \right),$$

– момент инерции судна относительно оси Z :

$$I_z = km/(L^2 + B^2), \quad k = (1 + \delta^{4.5}) / 24..$$

– присоединенный статический момент жидкости относительно оси Z на проекции миделя:

$$(30) \quad \lambda_{26} = \frac{\rho\tau^3}{2} \left(1 - \frac{8}{3} \left(\frac{\tau - 0,18}{1 + \tau - 0,18} \right) \right),$$

где τ – осадка судна. При постоянной плотности масса водоизмещения судна равна: $m = \rho LB\tau\delta$; δ – коэффициент общей объемной полноты. Как видно из (29), параметры λ_{11} , λ_{22} , λ_{66} , I_z пропорциональны массе, поэтому можно разделить уравнения (1) и (16) на m и ввести обозначения: $\tilde{\lambda}_{11} = \lambda_{11}/m$, $\tilde{\lambda}_{22} = \lambda_{22}/m$, $\tilde{\lambda}_{66} = \lambda_{66}/m$, $\tilde{I}_z = I_z/m$. Также можно выделить из действующих сил и момента части, пропорциональные плотности воды (например, величины составляющих волновой силы и момента) и не содержащие ρ :

$$X = \tilde{X}_1\rho + X_2, Y = \tilde{Y}_1\rho + Y_2, M = \tilde{M}_1\rho + M_2.$$

Коэффициент $\lambda_{26} = \tilde{\lambda}_{26}\rho$, где $\tilde{\lambda}_{26}$ не зависит от плотности и равен

$$\tilde{\lambda}_{26} = \frac{\tau^2}{2LB\delta} \left(1 - \frac{8}{3} \left(\frac{\tau - 0,18}{1 + \tau - 0,18} \right) \right). \text{ Тогда в качестве малых па-}$$

раметров можно взять $\varepsilon_3 = \frac{\tilde{\lambda}_{26}R}{\tilde{I}_z}$ или $\varepsilon_4 = \frac{\tilde{\lambda}_{26}}{R}$.

Пусть на пути следования имеются зоны с разной солёностью и температурой. Средние значения в то или иное время года в этих зонах известны. Обозначим эти зоны в водоёмах $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2$.

Величина x как функция времени (и при необходимости y) может быть найдена с помощью полученных выше решений путём интегрирования:

$$(31) \quad \begin{aligned} x(t) &= \int_0^t V_x(t) dt = \int_0^t (V_x^{(0)}(t) + \varepsilon V_x^{(1)}(t)) dt = \\ &= \int_{\gamma}^{p+\gamma} (V_x^{(0)}(p) + \varepsilon V_x^{(1)}(p)) dp. \end{aligned}$$

Тогда, попав в точку x_i , можно уточнить значения компонент скорости в пределах данного полуинтервала $[x_i, x_{i+1}]$, задавая соответствующие значения плотности ρ_i . Соответственно, в формулах решений (3), (10), (11), (13), (18), (21), (25), (26) необходимо сделать следующие замены:

$$(32) \quad \begin{aligned} X &= \tilde{X}_1 \rho_i + X_2, \quad Y = \tilde{Y}_1 \rho_i + Y_2, \quad M = \tilde{M}_1 \rho_i + M_2, \\ D &= D(m_i), \quad k = k(m_i), \quad \gamma = \gamma(m_i), \\ \lambda_{11} &= \tilde{\lambda}_{11} m_i, \quad \lambda_{22} = \tilde{\lambda}_{22} m_i, \quad \lambda_{66} = \tilde{\lambda}_{66} m_i, \quad I_z = \tilde{I}_z m_i. \end{aligned}$$

Также можно рассмотреть плавное изменение солёности на отдельных отрезках пути. В этом случае необходимо использовать формулы (27)–(28). При относительно небольших колебаниях температуры в период движения судна можно полагать, что температура равна своему среднему значению в соответствии с метеоданными на том или ином участке пути. Изменение солёности будем полагать линейным по координате на каждом выбранном промежутке:

$$(33) \quad \rho_{i,i+1} \equiv \rho(x_i \leq x < x_{i+1}) = l_{i0} + l_{i1} x.$$

Подстановка (33) в (27) и интегрирование получаемого выражения на указанном отрезке приводит к следующему выражению для массы m_i :

$$\begin{aligned}
 m_i = & \frac{\tau B \delta}{n} [\rho_0(\bar{T})nL + A(\bar{T})l_{i0}nL + 0.5A(\bar{T})l_{i1}(n^2L^2 + 2Lnx_i) + \\
 (34) & + \frac{0,4F(\bar{T})}{l_{i1}} \left((l_{i0} + l_{i1}(x_i + nL))^{2,5} - (l_{i0} + l_{i1}x_i)^{2,5} \right) + \\
 & + \frac{C}{3l_{i1}} \left(((l_{i0} + l_{i1}(x_i + nL)))^3 - (l_{i0} + l_{i1}x_i)^3 \right)].
 \end{aligned}$$

При получении формулы (34) полагалось, что $x_{i+1} = x_i + nL$, n – количество шагов на выбранном отрезке длиной L . В формулах полученных выше решений необходимо сделать замены:

$$X = \tilde{X}_1 \rho_{i,i+1}(x) + X_2, \quad Y = \tilde{Y}_1 \rho_{i,i+1}(x) + Y_2,$$

$$M = \tilde{M}_1 \rho_{i,i+1}(x) + M_2, \quad x \in [x_i, x_{i+1}).$$

Далее – такие же замены, что и в (32). После выполнения указанных замен получаются уточнённые решения для линейной и угловой скоростей. В зависимости от требуемой точности можно вместо $\rho_{i,i+1}(x)$ рассматривать среднюю плотность на данном промежутке $\bar{\rho}_i$. В этом случае малые параметры $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ не зависят от плотности и остаются такими же, что и в предыдущем случае.

Таким образом, получен аналитико-численный метод моделирования плоско-параллельного движения судна, учитывающий влияние неоднородности водного бассейна на основе гидрометеорологических данных.

С целью апробации результатов работы аналитико-численного метода моделирования плоско-параллельного движения судна необходимо провести натурные испытания.

Адекватность и корректность работы алгоритмов может быть подтверждена на водном транспорте (катере, судне) на реальной акватории водного бассейна, с применением комплекса автоматической системы управления автономным катером.

4. Натурные испытания

По итогам разработки алгоритма было создано программное обеспечение автоматической системы управления автоном-

ным судном – катером – и в июле 2022 года проведены его натурные испытания.

Для формирования линии пути (маршрута) движения был назначен следующий маршрут из 10 галсов: 2 раза по 5 галсов (туда и обратно), см. рис. 1.



Рис.1 Маршрут натурных испытаний на акватории водоема по адресу г.Санкт-Петербург, Петродворцовый район, п. Стрельна, Санкт-Петербургское ш., 43, ручей Стрелка

В качестве средства разработки АСУ использовалась среда IDE CBuilder. Преимуществом предложенной модели являлась сравнительная лаконичность уравнений и зависимостей, обеспечивающая заданную точность управления катером и учитывающая вместе с тем характеристики воды (плотность и солесность).

ПО управляло двумя двигателями катера через микроконтроллер, используя разработанный алгоритм, корректируя ошибку с помощью датчика (Д)ГНСС GPS/ГЛОНАСС.

Ресурсоемкость решений (скорость вычислений, вычислительные, энерго- и иные затраты) на обработку данных напрямую зависят от производительности аппаратуры, объема обрабатываемой информации, корпуса судна движительно-рулевого комплекса и внешних факторов. Аналитическое решение не превышает 1390 строк в среде АСУ IDE CBuilder. Оптимизация решений зависит от требуемых задач и полезной нагрузки.

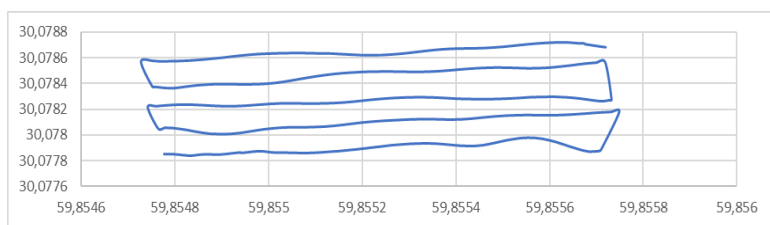


Рис.2 Трек прохода катера в автономном режиме

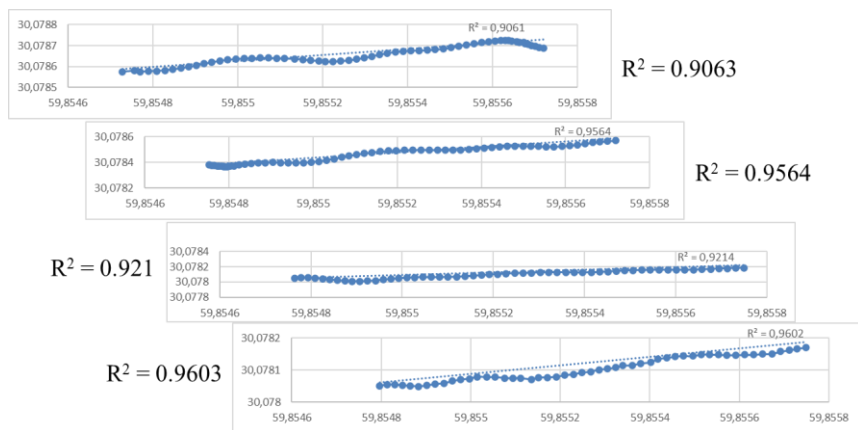


Рис.3 Обоснование адекватности модели с использованием методов математической статистики

В ходе испытаний катер уверенно обеспечивал заданную точность при движении по маршруту (отклонение до 1 м).

Среднеквадратичное отклонение катера от оси маршрута R^2 составило от 0,9063 до 0,9603, что равно абсолютному отклонению от оси маршрута 0,4–1 м.

Проблемным остается скорость распознавания объектов навигационной обстановки и его обработка для выдачи нужной команды в автоматизированной системе управления. Сегодня существуют способы распознавания специализированными камерами высокого разрешения. В работе [14] подробно описан способ и алгоритм автоматического обнаружения и сопровождения объектов на морской поверхности без использования жёстко запрограммированных эталонных изображений. Где алгоритм основывается на пространственно-временном анализе потока полутоновых изображений видимого диапазона с оптико-электронной системы, установленной на борту безэкипажного катера [14].

Вместе с тем, авторы статьи не ставили целью использование дополнительных методов навигации, также как затраты на энергоресурсы обработки данных, так как апробация проходила как в модельном испытании с использованием ЭВМ «Программное средство системы автоматического управления судном, катером в условиях стесненного фарватера», так и в натурном на катере, где ПО управляло двумя движителями катера через микро-контроллер, используя разработанный алгоритм, корректируя ошибку с помощью датчика (Д)ГНСС GPS/ГЛОНАСС.

Использование искусственного интеллекта и правильно обученной нейросети позволит ускорить обработку навигационной информации, в частности оптимизации решений уравнений.

5. Обсуждение

Таким образом, в первом разделе было получено решение исходной полулинейной модели движения судна, найденное с использованием метода возмущений и содержащее линейную и угловую скорости в следующем виде:

$$(35) \quad \begin{aligned} V_x &= V_x^{(0)} + \varepsilon V_x^{(1)} = V_x^{(0)} + \lambda_{26} \tilde{V}_x^{(1)}, \\ V_y &= V_y^{(0)} + \varepsilon V_y^{(1)} = V_y^{(0)} + \lambda_{26} \tilde{V}_y^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\omega = \omega^{(0)} + \lambda_{26} \tilde{\omega}^{(1)},$$

$$\tilde{V}_x^{(1)} = \frac{V_x^{(1)}}{\sigma}, \tilde{V}_y^{(1)} = \frac{V_y^{(1)}}{\sigma}, \tilde{\omega}^{(1)} = \frac{\omega^{(1)}}{\sigma}.$$

Величины, входящие в (35) определяются формулами (3), (10), (11), (13), (18), (21), (25), (26). Полученные решения позволяют учесть влияние всех основных параметров на линейную и угловую скорости. При этом компоненты линейной скорости зависят от тригонометрических функций и интегральных синуса и косинуса. Что касается угловой скорости, то из формул (3) и (18) следует, что линейное увеличение угловой скорости с течением времени должно быть ограничено, что достигается за счет перекадки руля. Также на изменение угловой скорости, обусловленное возмущением, влияет y – компонента линейной скорости. Малый параметр может быть выбран тем или иным способом в соответствии с формулами (14) в зависимости от конкретных значений параметров задачи.

Отметим, что значение малого параметра ε_5 зависит только от величин, включенных в задачу Коши (1)–(2) и не зависит в явной форме от характерного размера судна. Используя метод возмущений, можно получить добавки к скоростям квадратичного порядка по ε (и более высоких порядков), но при этом величины вкладов не оправдывают возрастающей сложности получающихся дифференциальных уравнений.

Учитывая выражение для λ_{26} (30) как параметра, непосредственно связанного с использованием метода возмущений, можно сделать оценку величины вклада. Мы сделали такую оценку по реальным данным. Были рассмотрены данные судна сухогруза проекта 1743 (Омский): длина $L = 108,4$ м, ширина $B = 15,2$ м, $T = 3,3$ м. Считалось, что на угловую скорость влияет только момент, вызванный волной (волна принималась равной

4 баллам по шкале Бофорта), время поворота определялось по формуле (3) и по значению предельного угла:

$$\omega_0 t^* + \frac{M(t^*)^2}{2(I_z + \lambda_{66})} = \psi_{lim}.$$

Необходимые формулы для расчета были взяты из [3]. Оценка вклада $\varepsilon\omega^{(1)}$ по отношению к $\omega^{(0)}$, обусловленного только моментом при нерегулярном волнении, составляет около 3%, что является небольшой величиной. В целом при рассмотрении суммарного момента и суммарных сил вклад увеличивается, но малость реальных значений ε позволяет применять метод возмущений.

В третьем разделе рассматривается влияние изменения плотности воды в основном за счёт изменения солёности (температура учитывается в среднем). Рассматривается влияние солёности в виде кусочно-постоянной функции и кусочно-линейной функции. Поскольку полученное в первом разделе решение для скорости V_x позволяет определить путём интегрирования координату $x(t)$, то, как показано в разделе 3, по гидрометеорологическим данным можно определять значение плотности воды в зависимости от солёности и в общем случае от температуры на том или ином промежутке пути. Определив плотность, можно найти массу водоизмещения на выбранном отрезке и соответственно учесть изменение параметров задачи, зависящих от массы или плотности.

В разделе анализируются такие зависимости. В частности, показано, что малые параметры ε_3 , ε_4 не зависят от плотности воды или массы m_i и могут быть использованы для расчётов на всём пути следования судна независимо от неоднородности бассейна. В разделе 3 показана модификация решений первого раздела для скоростей V_x , V_y , ω , которую необходимо сделать для уточнения величин скоростей на разных участках траектории по мере движения корабля.

Таким образом, в статье предложен аналитико-численный метод моделирования плоско-параллельного движения судна, учитывающий влияние неоднородности водного бассейна на основе гидрометеорологических данных. В разделе 3 показано

влияние неоднородности водной среды на скорости движения корабля через параметры исходной динамической системы (1) с начальными данными (2).

В частности, в решения для скоростей (3'), (10)–(11) и соответственно для скоростей, найденных с учётом метода возмущений, входит параметр γ , непосредственно связанный с начальной угловой скоростью ω_0 . Параметр γ зависит от массы m_i . Поэтому он будет меняться в зависимости от солёности.

Поскольку данный параметр пропорционален ω_0 , то даже небольшое изменение массы может оказать заметное влияние на скорость при выходе на фарватер из зоны условно стоячей воды. Отметим, что в работе [26] при проведении модельного эксперимента, поставленного с целью исследования явления Экмана, показано заметное усиление эффекта на начальном этапе движения судна.

По результатам испытаний отработки алгоритма на реальном катере была подтверждена его адекватность, что продемонстрировала точность позиционирования катера на линии маршрута с отклонением до 1 метра.

6. Заключение

Методом возмущений получено аналитическое решение нелинейной динамической системы, являющейся моделью плоскопараллельного движения судна. Полученные решения позволяют учесть влияние всех основных параметров на линейную и угловую скорости. Показано, что компоненты линейной скорости зависят от тригонометрических функций и интегральных синуса и косинуса. Проанализированы малые параметры, выбор которых определяется конкретными параметрами задачи. Показано влияние линейной скорости на угловую скорость, обусловленное нелинейностью задачи. Рассмотрено влияние солёности и температуры на скорость движения судна. Влияние солёности рассмотрено в виде кусочно-постоянной функции и кусочно-линейной функции. Оно обусловлено изменением плотности воды на различных отрезках пути движения корабля. Показана модификация решений для скоростей V_x , V_y , ω , которую необ-

ходима для уточнения их величин на разных участках траектории. Предложен аналитико-численный метод моделирования плоскопараллельного движения судна, учитывающий влияние неоднородности водного бассейна на основе гидрометеорологических данных.

С учетом успешной апробации на натурной модели, полученные решения могут быть использованы для проектирования обратной связи в системе автоматического управления движением судна по ограниченному фарватеру.

Литература

1. АБДУЛЛАЕВА З.М. *Моделирование движения судна на мелководье по заданной траектории при переменной глубине* // Вестник ДагГТУ: Технические науки. – 2017. – №1. – 10 с.
2. БАСИН А.М. *Ходкость и управляемость судов*. – Л.: 1977. – 455 с.
3. ВОЙТКУНСКИЙ Я.И., ПЕРШИЦ Р.Я., ТИТОВ И.А. *Справочник по теории корабля*. Л: Судостроение, 1978. – 382с.
4. ГОЛИКОВ В.В., МАЛЫЦЕВ С.Э. *Анализ вектора смещения пути судна от ветра* // Морской и речной транспорт. №1, 2015. – С.29-35
5. ГОФМАН А.Д. *Движительно-рулевой комплекс и маневрирование судна*. – Л.: Судостроение, 1988. – 360 с.
6. КАМКЕ Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* // Под ред. Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
7. КОСТЮКОВ В.А., МАЕВСКИЙ А.М., ГУРЕНКО Б.В. *Математическая модель надводного мини-корабля* // Инженерный вестник Дона. – 2015. – №3. – 18 с.
8. КЛЮЕВА С.Ф., ЗАВЬЯЛОВ В.В. *Синтез алгоритмов батиметрических систем навигации*. – Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2013. – 132 с.
9. ПАВЛЕНКО В.Г., АНФИМОВ В.Н., ВАГАНОВ Г.И. *Судовые тяговые расчеты* // Под ред. В.Г.Павленко. – М.: Транспорт, 1978. – 216 с.

10. ПАВЛЕНКО В.Г. *Маневренные качества речных судов.* – М.: Транспорт, 1979. – 184 с.
11. ПЕЧЕНЮК А.В. *Численное моделирование обтекания корпуса судна в условиях мелководья.* – ООО «Digital Marine Technology», 2005. – 10 с.
12. СОЛЯКОВ О.В., СОКОЛОВ С.С., ЯКУНЧИКОВ В.В. *Методическое обеспечение управления автономными надводными судами внутреннего водного плавания* // Системный анализ, управление и обработка информации. Известия ТулГУ. Технические науки. – 2024. – Вып. 9. – С. 393–401. – DOI: 10.24412/2071-6168-2024-9-393-394.
13. СОЛОВЬЕВ А.А. и др. *Применение метода пропорциональной навигации при решении задач судовождения* // Вестник МГТУ. – 2022. – Т. 25, №4. – С. 400–408. – DOI: 10.21443/1560-9278-2022-25-4-400-408.
14. ТУПИКОВ В.А., ПАВЛОВА В.А., БОНДАРЕНКО В.А. и др. *Способ автоматического обнаружения объектов на морской поверхности в видимом диапазоне* // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2016. – Вып. 11, Ч. 3. – С. 105–121
15. ТУМАШИК А.П. *Расчет гидродинамических характеристик судна при маневрировании.* – Л.: Судостроение, 1978. – 80 с.
16. ЮДИН Ю.И. *Идентификации математической модели судна.* – М: Моркнига, 2015. – 157 с.
17. ЮДИН Ю.И., СОТНИКОВ И.И. *Математические модели плоскопараллельного движения судна. Классификация и критический анализ* // Вестник МГТУ. – 2006. – Т. 9, №2. – С. 200–208
18. ЮРКАНСКИЙ А.В. *Исследование управляемости судов в условиях ветра и волнения.* Автореферат дисс. ... канд. техн. наук. – СПб, 2006. – 28 с.
19. AUNG MYAT THU, EIEI HTWE, HTAY HTAY WIN *Mathematical Modeling of a Ship Motion in Waves under Coupled Motions* // Int. Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS). – 2015. – Vol. 2, Iss. 12. – P. 97–102.

20. CHEN, SHIGEAKI SHIOTANI, KENJI SASA *Numerical ship navigation based on weather and ocean simulation* // Ocean Engineering. – 2013. – Vol. 69. – P. 44–53.
21. DONNARUMMA S.; MARTELLI M.; VIGNOLO S. *Numerical models for ship dynamic positioning* // "MARINE VI : Proc. of the VI Int. Conf. on Computational Methods in Marine Engineering". – CIMNE, 2015. – P. 1078–1088.
22. EMRE UZUNOGLU *Numerical and Experimental Study of Parametric Rolling of a Container Ship in Waves. Centre of Marine Technology*. – Technical University of Lisbon, 2011. – 98 p.
23. HENRY PETER PIEHL. *Ship roll damping analysis / Genehmigte Dissertation Universität Duisburg-Essen*. – Hamburg, 2016. – 178c.
24. HINOSTROZA M.A. et al. *Ship Movements' Analysis In a Scale Model* // 10th Congresso Nacional de Mecanica Experimental, CNME, 2016. – 12 p.
25. IBRAHIM R.A., GRACE I.M. *Modeling of Ship Roll Dynamics and Its Coupling with Heave and Pitch*. // Mathematical Problems in Engineering. – 2010. – Wayne State University, Detroit, USA. – 32 p.
26. MERCIER M.J., VASSEUR R., DAUXOIS T. *Resurrecting Dead-water Phenomenon* // Nonlinear Processes in Geophysics. – 2011. – Vol. 18 (2). – P. 193–208
27. SOLYAKOV O.V., UVAROVA L.A., YAKUNCHIKOV V.V. et al. *Movement Based on a Semi-linear System of Differential Equations using the Perturbation Method* // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. – 2021. – Vol. 666. – Int. Science and Technology Conference "Earth Science", 8–10 December 2020, Vladivostok, Russia. – 052087 – 6 p.

**MODELING OF PLANE-PARALLEL MOTION
OF A VESSEL BASED ON A NONLINEAR DYNAMIC
SYSTEM WITH VARYING PARAMETERS USING
THE PERTURBATION METHOD AND ITS
EXPERIMENTAL VERIFICATION**

Oleg Soliakov, Russian University of Transport, Moscow, Cand.Sc.,
Assistant Professor (solyakov1@yandex.ru).

Ludmila Uvarova, Moscow State University of Technology «STANKIN», Moscow, Doct.Sc., Professor (uvar11@yandex.ru).

Abstract: The analytical solution of a nonlinear dynamic system, which is a model of plane-parallel motion of a vessel, was obtained by the perturbation method. The solutions obtained allow us to take into account the influence of all the main parameters on linear and angular velocities. Small parameters are analyzed, the choice of which is determined by the specific parameters of the task. The influence of linear velocity on angular velocity due to the nonlinearity of the back is shown. The influence of the static moment on each of the velocity components is shown. The influence of salinity and temperature and, consequently, density on the parameters of the system and, as a result, on the speed of the vessel is considered. The effect of salinity is considered in the form of a piecewise constant function and a piecewise linear function. A modification of the solutions for velocities is shown, which must be done to clarify their values in different sections of the trajectory. An analytical and numerical method for modeling the plane-parallel motion of a vessel is proposed, taking into account the influence of heterogeneity of the water basin on the basis of hydrometeorological data. The obtained solutions can be used to automate the movement of a vessel along a limited fairway using an automatic control system.

Keywords: mathematical modeling, water transport, dynamic nonlinear systems, perturbation methods, salinity.

УДК 519.8

ББК 22.16

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Н.А. Коргиным.*

Поступила в редакцию 22.02.2025.

Опубликована 31.07.2025.