

Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

Выпуск 107
Январь 2024

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл. №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2024

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова

**УПРАВЛЕНИЕ
БОЛЬШИМИ
СИСТЕМАМИ**

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 107

Москва – 2024

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики: Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Куржанский А.Б., Новиков Д.А., Попков Ю.С., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Галяев А.А., Савватеев А.В.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П. (ИПУ РАН), Кульба В.В. (ИПУ РАН), Павлов Б.В. (ИПУ РАН), Рутковский В.Ю. (ИПУ РАН).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: академик Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. техн. наук Калимулина Э.Ю. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИТМО), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ, ГУ ВШЭ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН); д-р техн. наук доцент Коргин Н.А. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН); д-р биол. наук проф. Михальский А.И. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Райгородский А.М. (МФТИ), проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ); д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. (АПИ НГТУ); **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – д-р техн. наук проф. Зоркальцев В.И. (ЛИН СО РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., проф. Сараяв П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И.; **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фургат И.Б. (ИПМ РАН).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Котюков А.М., Павлова Н.Г.

Алгоритм поиска точек совпадения в сложных системах 6

Матюшенко С.И., Самуйлов К.Е.

Преобразование Лапласа – Стилтъяеса функции распределения пикового возраста информации в группе передачи, моделируемой двухузловой сетью. 28

Анализ и синтез систем управления

Краснов Д.В., Антипов А.С.

Реализация комбинированного управления в системе слежения для однозвенного манипулятора с неопределенным входом..... 43

Информационные технологии в управлении

Жуков П.И., Глушенко А.И.

Об устойчивости численного метода неявной адаптации модели нестационарной теплопроводности к теплофизическим параметрам твердого тела 66

Сетевые модели в управлении

Широкий А.А.

Учёт влияния структуры сложной системы при управлении рисками 88

**Управление техническими системами
и технологическими процессами**

Дабас М.Р., Сараев П.В.

*Моделирование температурного режима полосы
и валка в клетях стана горячей прокатки
с интервальными параметрами.....* 107

Полещенко Д.А., Коренев А.В.

*Разработка метода раннего распознавания шлака
сталеразливочного ковша машины непрерывного
литья заготовок.....* 121

Управление подвижными объектами и навигация

Кокунько Ю.Г.

*Динамическое дифференцирование и сглаживание
зашумленных сигналов, задающих траекторию
беспилотного летательного аппарата.....* 142

Третьякова Е.А.

*Компенсация наведенной помехи и решение задачи
относительного позиционирования
в электромагнитном поле двух диполей.....* 162

АЛГОРИТМ ПОИСКА ТОЧЕК СОВПАДЕНИЯ В СЛОЖНЫХ СИСТЕМАХ¹

Котюков А. М.²

(Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Павлова Н. Г.³

(Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Москва; Российский университет дружбы народов
им. Патриса Лумумбы, Москва; Тамбовский государственный
университет им. Г.Р. Державина, Тамбов)

Статья посвящена методам исследования сложных систем, в частности, вопросу поиска точек совпадения двух отображений. Понятие точки совпадения отображений является обобщением понятия неподвижной точки отображения и, по определению, является точкой пересечения областей определения отображений, имеющей одинаковые образы. Понятие точки совпадения отображений используется в различных прикладных задачах системного анализа, обработки информации и искусственного интеллекта. Также оно применяется для решения различных экономических задач, в частности, задач распределения ресурсов, определения объемов производства и государственного регулирования цен. В настоящей работе теория точек совпадения применена к исследованию вопроса существования положения равновесия в рыночной системе. Положением равновесия называется состояние рынка, в котором спрос на каждый товар, присутствующий на рынке, равен его предложению. Разработан численный алгоритм поиска точки совпадения для накрывающего и липищевского отображений. Работа алгоритма продемонстрирована при исследовании модельного примера рыночной системы, в которой отображения спроса и предложения восстановлены по соответствующим эластичностям. Для этой системы решается задача определения положения частичного равновесия – ситуации, при которой реализуется равновесие для некоторого подмножества товаров. Положение частичного равновесия рассмотрено как точка совпадения отображений спроса и предложения. С помощью алгоритма определено положение частичного равновесия по первому товару для рынка двух товаров.

Ключевые слова: сложная система, равновесие, накрывающее отображение, точка совпадения, эластичность.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект №20-11-20131). Лемма 2 получена Н.Г. Павловой при финансовой поддержке РНФ (проект №23-11-20020) в Тамбовском государственном университете им. Г.Р. Державина.

² Александр Михайлович Котюков, м.н.с. (amkotyukov@mail.ru).

³ Наталья Геннадьевна Павлова, к.ф.-м.н., доцент (natasharussia@mail.ru).

1. Введение

Нередко при моделировании тех или иных объектов и явлений возникает необходимость решения систем неявных алгебраических уравнений. С точки зрения анализа интересно прежде всего получить условия существования решения для таких систем. Если эти условия определены и выполнены, требуется найти решение этой системы и исследовать его свойства.

Известно значительное количество методов исследования систем неявных алгебраических уравнений, которые могут быть представлены в виде $\Psi(x) = \Phi(x)$, где $\Psi, \Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Многие из них опираются на применение теоремы об обратной функции. Если рассмотреть систему неявных уравнений как систему $F(x) = 0$, где $F = \Psi - \Phi$, то существование решения вытекает из невырожденности матрицы Якоби отображения F . Однако часто в прикладных задачах отображение F не является сюръективным, более того матрица Якоби такого отображения может не быть квадратной. В этом случае применить теорему об обратной функции нельзя. Другие методы основаны на предположении о гладкости отображений Ψ и Φ , что также является сильным требованием, поскольку в моделях, построенных на статистических данных, отображения в лучшем случае являются кусочно-непрерывными. Третьи методы основаны на сведении системы неявных уравнений к решению системы линейных алгебраических уравнений. Существует множество способов решения таких систем, как аналитических, так и численных, однако они могут требовать большого количества вычислительных ресурсов при программной реализации. Таким образом, возникает необходимость создания методов исследования систем неявных алгебраических уравнений, которые были бы менее требовательны к рассматриваемым отображениям и вычислительным ресурсам и более просты в своей реализации.

Настоящая работа посвящена разработке методов исследования систем неявных алгебраических уравнений с помощью результатов теории накрывающих отображений и точек совпадения.

Разработка этих методов началась сравнительно недавно (см., например, [5, 6, 7, 8, 11]). Ключевой особенностью методов накрывающих отображений является отсутствие требований гладкости и сюръективности к исследуемым отображениям. В статье разработан алгоритм поиска точки совпадения, основанный на итерационном процессе из [1], который основан на методе простой итерации. Алгоритм является модификацией метода случайного поиска, который широко применяется для решения различных прикладных задач. Этот метод имеет два основных недостатка: определение области поиска новой точки на каждом шаге и условия перехода на следующий шаг. Как будет показано ниже, разработанный алгоритм компенсирует эти недостатки с помощью двух условий, одно из которых задает радиус поиска новой точки, а второе – условие перехода на новый шаг алгоритма.

Разработанные в настоящей статье методы могут быть применены для исследования различных систем. В качестве демонстрации такого применения была выбрана рыночная система. Основная проблема, решаемая при исследовании системы, – определение положения равновесия в этой системе. Перейдем к описанию сути этого понятия.

Рассмотрим экономическую систему, состоящую из рынка, производства и потребления. Подсистема производства состоит из производителей, которые создают товары и поставляют их на рынок с целью продажи и получения прибыли. Подсистема потребления состоит из потребителей, которые имеют бюджет и тратят его, приобретая товары на рынке с целью удовлетворения своих потребностей. Выходом подсистемы производства по каждому товару является количество произведенного и доставленного товара, которое называется предложением этого товара. Выходом подсистемы потребления по каждому товару является количество товара, которое потребители хотят приобрести. Это количество называется спросом на этот товар. Очевидно, что внутри моделируемого региона существует большое количество как товаров, так и участников системы в лице производителей и потребителей. Более того, возможна ситуация, в которой произ-

водитель может становится потребителем (например, при покупке сырья для производства) и наоборот (например, при продаже собственного имущества). В настоящей работе мы рассматриваем совокупных производителя и потребителя, поскольку нас будет интересовать подсистемы рынка, а не подсистемы производства и потребления.

Легко видеть, что если для какого-либо товара спрос превышает предложение, то на рынке возникает дефицит, что может привести к негативным последствиям внутри моделируемого региона. В зависимости от типа рынка это могут быть массовый голод, эпидемия, нехватка строительных ресурсов и т.д. Неблагоприятные факторы такого рода могут оказать сильное влияние на устойчивость и эффективное функционирование системы и привести к ее разрушению. Следовательно, для устойчивости системы необходимо, чтобы спрос на всякий товар на рынке не должен быть меньше его предложения.

С другой стороны, профицит товара, т.е. когда предложение товара превышает спрос на него, также может негативно влиять на моделируемый регион. Это происходит из-за того, что непроданный товар создает убытки для производителей, вследствие чего они могут поднять цены на товары с целью компенсировать свои потери. Повышение цен отрицательно сказывается на покупательской способности потребителей: они приобретают еще меньше товара, из-за чего производители терпят еще большие убытки. В конце концов это приводит к ситуации, при которой производители не могут продать произведенные товары, а потребители ничего не покупают.

Таким образом, для устойчивого развития моделируемого региона благоприятной будет ситуация, при которой спрос на каждый товар будет равен его предложению. Такая ситуация называется положением равновесия, а цены, при которых положения равновесия реализуется, – равновесными.

Мы рассмотрим модель рынка, в которой отображения спроса и предложения восстановлены по эластичностям спроса и предложения по цене соответственно. Эластичность спроса

по цене показывает, как меняется спрос на товар при относительном изменении цены на этот или другой товар. Аналогично определяется эластичность предложения по цене. Условия существования положения равновесия для этой модели были получены в [4]. Доказательство соответствующей теоремы основано на применении принципа сжимающих отображений. Нас будет интересовать положение частичного равновесия. Под частичным равновесием понимается равновесие не для всех товаров на рынке, а для некоторого их подмножества. Определение положения частичного равновесия является важным вопросом наряду с положением равновесия, что обусловлено экономическими причинами. Так, например, если на рынке присутствуют товары первой необходимости, которые будут приобретаться независимо от цены, мы можем за счет цены на них достичь частичного равновесия на остальных товарах.

В данной работе положение равновесия рассматривается как точка совпадения отображений спроса и предложения. С помощью аппарата теории накрывающих отображений получены условия существования положения частичного равновесия, а также проведен численный эксперимент по поиску положения равновесия в модели открытого рынка двух товаров.

2. Накрывающие отображения и точки совпадения

В дальнейшем нам потребуются результаты из теории накрывающих отображений и точек совпадения. Сначала сформулируем определение накрывающего отображения.

Пусть (X, ρ_X) , (Y, ρ_Y) – метрические пространства с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Пусть задано отображение $\Psi : X \rightarrow Y$. Через $B_X(x, r)$ обозначим шар с центром в точке $x \in X$ радиуса $r > 0$, аналогично обозначим $B_Y(y, r)$.

Определение 1 [2]. Пусть $\alpha > 0$. Отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ называется α -накрывающим, если

$$\Psi(B_X(x, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r), \quad \forall x \in X, r > 0.$$

Очевидно, что если отображение Ψ является α -накрывающим, то оно является α' -накрывающим при любом

$0 < \alpha' < \alpha$. Точную верхнюю грань всех $\alpha > 0$ таких, что отображение Ψ является α -накрывающим, обозначим через $\text{cov}(\Psi)$.

Пусть теперь $M \subseteq X$ – множество с непустой внутренностью.

Определение 2 [10]. Пусть $\alpha > 0$. Отображение Ψ называется α -накрывающим на множестве $M \subseteq X$, если для любых $x \in M$, $r > 0$ таких, что $B_X(x, r) \subseteq M$, выполнено включение

$$\Psi(B_X(x, r)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha r).$$

Точную верхнюю грань всех таких чисел $\alpha > 0$, что отображение Ψ является α -накрывающим на множестве M , обозначим через $\text{cov}(\Psi|M)$.

Определение 3 [10]. Пусть $\alpha > 0$. Отображение Ψ называется α -накрывающим в точке $x \in \text{int } M$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что $B_X(x, \delta) \subset M$ и

$$\Psi(B_X(x, \delta)) \supseteq B_Y(\Psi(x), \alpha \delta).$$

Точную верхнюю грань всех таких чисел $\alpha > 0$, что отображение Ψ является α -накрывающим в точке $x \in X$, обозначим через $\text{cov}(\Psi|x)$.

В [10] было также показано, что если X, Y – банаховы пространства, а $\Psi : X \rightarrow Y$ строго дифференцируемо в каждой точке открытого множества $M \subset X$ и $\Psi'(x)$ является α -накрывающим в каждой точке $x \in M$ с общей константой $\alpha > 0$, то отображение Ψ является α' -накрывающим на M с любой константой $\alpha' < \alpha$, т.е.

$$(1) \quad \text{cov}(\Psi|M) = \inf_{x \in \text{int } M} \text{cov}(\Psi|x).$$

В случае, когда отображение Ψ является линейным сюръективным оператором из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^k , справедлива следующая лемма.

Лемма 1 [3]. Пусть $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k$ – нормированные пространства, а $\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ – сюръективный линейный оператор. Тогда

$$(2) \quad \text{cov}(\Psi) \geq \frac{1}{\|\Psi^*(\Psi\Psi^*)^{-1}\|},$$

где Ψ^* – оператор, сопряженный к Ψ .

Здесь и далее норма произвольного линейного оператора $Q : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ определена формулой: $\|Q\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Qx\|_Y$.

Определение 4 [2]. Точка $\xi \in X$ называется точкой совпадения отображения Ψ и некоторого отображения $\Phi : X \rightarrow Y$, если

$$\Psi(\xi) = \Phi(\xi).$$

Сформулируем условия, гарантирующие существование точки совпадения для α -накрывающего на множестве M отображения и отображения, удовлетворяющего на M условию Липшица. Соответствующая теорема доказана в [10].

Теорема 1 [10]. Пусть пространство X полное и заданы $\alpha > 0$, $x_0 \in X$ и $R > 0$. Пусть также $\Psi : X \rightarrow Y$ является α -накрывающим на $B_X(x, R)$ и замкнутым. Тогда для любого неотрицательного $\beta < \alpha$ и любого отображения $\Phi : B_X(x_0, R) \rightarrow Y$, удовлетворяющего условию Липшица с константой β такого, что

$$\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leq (\alpha - \beta)R,$$

для отображений Ψ и Φ существует точка совпадения $\xi \in X$, т.е. $\Psi(\xi) = \Phi(\xi)$, такая, что

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq \frac{\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

При доказательстве используется следующий итерационный процесс. Зафиксируем $x_0 \in X$ и построим по индукции x_i , $i = 1, 2, \dots$, такие, что

$$(3) \quad \rho_X(x_{i+1}, x_i) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)),$$

$$(4) \quad \rho_Y(\Psi(x_{i+1}), \Phi(x_i)) \leq \delta \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)),$$

где

$$(5) \quad \delta > 0 : \beta + \alpha\delta < \alpha.$$

Существование данной последовательности вытекает из того, что отображение Ψ является α -накрывающим.

Теорема о сходимости итерационного процесса доказана в [1].

Теорема 2 [1]. Пусть пространство X полное, отображение Ψ является α -накрывающим и его график $\text{grh}(\Psi) = \{(x, y) \in X \times Y : y = \Psi(x)\}$ замкнут, а отображение Φ удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$.

Тогда для любого $x_0 \in X$ существует последовательность $\{x_i\}$, которая удовлетворяет условиям (3), (4) при всех i , и любая такая последовательность сходится к некоторой точке совпадения $\xi = \xi(x_0)$, для которой справедливо неравенство

$$\rho_Y(\xi, x_0) \leq (\alpha - (\beta + \alpha\delta))^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

3. Основной результат

Используя метод доказательства теоремы 1, мы можем доказать следующий результат.

Теорема 3. [о сходимости итерационного процесса]. Пусть пространство X полно и заданы $x_0 \in X$, $R > 0$. Далее, пусть отображение Ψ является α -накрывающим на $B_X(x_0, R)$ и замкнутым, а отображение Φ удовлетворяет условию Липшица на $B_X(x_0, R)$ с константой $\beta < \alpha$. Тогда для любого $\delta > 0$ такого, что $\beta + \alpha\delta < \alpha$,

$$\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) < (\alpha - (\beta + \alpha\delta))R$$

и для любых $k > 0$ и набора векторов $x_1, \dots, x_k \in B_X(x_0, R)$, удовлетворяющих (3), (4), найдется вектор $x_{k+1} \in B_X(x_0, R)$, удовлетворяющий (3), (4), и любая такая последовательность $\{x_k\}$ сходится к точке совпадения ξ , т.е.

$$(6) \quad \Psi(\xi) = \Phi(\xi),$$

причем

$$(7) \quad \rho_X(x_0, \xi) \leq (\alpha - (\beta + \alpha\delta))^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Доказательство. Доказательство проводится путем индуктивного построения последовательности, удовлетворяющей (3), (4). Докажем сначала, что существует x_1 , удовлетворяющий (3), (4). Положим

$$r_0 = \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leq \alpha^{-1} (\alpha - (\beta + \alpha\delta))R \leq R.$$

Следовательно, $B_X(x_0, r_0) \subseteq B_X(x_0, R)$. Далее, в силу определения накрывающего отображения на множестве:

$$\Psi(B_X(x_0, r_0)) \supseteq B_Y(\Psi(x_0), \alpha r_0).$$

Отсюда мы получаем, что $\Phi(x_0) \in \Psi(B_X(x_0, r_0))$. Следовательно, существует $x_1 \in B_X(x_0, r_0)$ такое, что

$$\Psi(x_1) = \Phi(x_0).$$

Пусть теперь $x_1 \in B_X(x_0, R)$ такой, что выполнено (3), (4) при $i = 0$. Покажем, что $x_1 \in B_X(x_0, r_0)$. Положим

$$r_1 = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) r_0.$$

Покажем, что $B_X(x_1, r_1) \subset B_X(x_0, R)$. В самом деле, для любого $x \in B_X(x_1, r_1)$ имеем

$$\begin{aligned} \rho_X(x_0, x) &\leq \rho_X(x_0, x_1) + \rho_X(x_1, x) \leq \delta \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) + r_1 = \\ &= \delta r_0 + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) r_0 \leq (\alpha^{-1}(\alpha - (\beta + \alpha\delta))R) \left(1 + \delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) = \\ &= R \left(1 - \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right) \leq R. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\delta < 1$ в силу условия $\beta + \alpha\delta < \alpha$. Теперь покажем, что $\Phi(x_1) \in \Psi(B_X(x_1, r_1))$. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho_Y(\Phi(x_1), \Psi(x_1)) &\leq \rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_0)) + \rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_1)) \leq \\ &\leq \beta \rho_X(x_1, x_0) + \delta \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leq \left(\frac{\beta}{\alpha} + \delta \right) \alpha r_0 = \alpha r_1. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(x_1) \in B_Y(\Psi(x_1), \alpha r_1)$. Поскольку Ψ является α -накрывающим на $B_X(x_0, R)$, имеем:

$$\Psi(B_X(x_1, r_1)) \supseteq B_Y(\Psi(x_1), \alpha r_1).$$

Отсюда следует, что существует $x_2 \in B_X(x_1, r_1)$ такой, что $\Psi(x_2) = x_1$.

Далее, возьмем $x_2 \in B_X(x_0, R)$, которое удовлетворяет (3), (4) при $i = 2$. Положим

$$r_2 = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) r_1.$$

Покажем, что $B_X(x_2, r_2) \subseteq B_X(x_0, R)$. В самом деле, если $x \in B_X(x_2, r_2)$, то

$$\begin{aligned} \rho_X(x_0, x) &\leq \rho_X(x_0, x_1) + \rho_X(x_1, x_2) + \rho_X(x_2, x) \leq \\ &\leq \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) + \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) + r_2 = \\ &= r_0 + r_1 + r_2 = \left(1 + \delta + \frac{\beta}{\alpha} + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right) r_0 \leq \\ &\leq \left(1 - \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right)^{-1} r_0 \leq R. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\Phi(x_2) \in \Psi(B_X(x_2, r_2))$. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho_Y(\Phi(x_2), \Psi(x_2)) &\leq \rho_Y(\Phi(x_2), \Phi(x_1)) + \rho_Y(\Phi(x_1), \Psi(x_2)) \leq \\ &\leq \beta \rho_X(x_2, x_1) + \delta \rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) \leq \alpha^{-1} \beta \rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) + \\ &+ \delta \rho_Y(\Psi(x_1), \Phi(x_1)) = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) \alpha r_1 = \alpha r_2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Phi(x_2) \in B_Y(\Psi(x_2), \alpha r_2)$. Поскольку Ψ является α -накрывающим на $B_X(x_0, R)$, имеем

$$B_Y(\Psi(x_2), \alpha r_2) \subseteq \Psi(B_X(x_2, r_2)).$$

Таким образом, $\Phi(x_2) \in \Psi(B_X(x_2, r_2))$ и, следовательно, существует $x_3 \in B_X(x_2, r_2)$ такой, что

$$\Psi(x_3) = \Phi(x_2).$$

Далее, пусть построены x_1, \dots, x_{k-1} . Возьмем x_k , удовлетворяющее (3), (4), и положим

$$r_k = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) r_{k-1}.$$

Покажем, что $B_X(x_k, r_k) \subseteq B_X(x_0, R)$. Действительно, если $x \in B_X(x_k, r_k)$, то:

$$\begin{aligned} \rho_X(x_0, x) &\leq \rho_X(x_0, x_1) + \dots + \rho_X(x_{k-1}, x_k) + \rho_X(x_k, x) \leq \\ (8) \quad &\leq r_0 + r_1 + \dots + r_{k-1} + r_k = \left(1 + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 + \dots \right. \\ &\left. \dots + \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^k \right) r_0 \leq \left(1 - \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) \right)^{-1} r_0 \leq R. \end{aligned}$$

Теперь покажем, что $\Phi(x_k) \in \Psi(B_X(x_k, r_k))$. В самом деле,

$$\begin{aligned} & \rho_Y(\Phi(x_k), \Psi(x_k)) \leq \\ & \leq \rho_Y(\Phi(x_k), \Phi(x_{k-1})) + \rho_Y(\Phi(x_{k-1}), \Psi(x_k)) \leq \\ & \leq \beta \rho_X(x_k, x_{k-1}) + \delta \rho_Y(\Phi(x_{k-1}), \Psi(x_{k-1})) \leq \\ & \leq \beta \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_{k-1}), \Phi(x_k)) + \delta \rho_Y(\Psi(x_{k-1}), \Phi(x_{k-1})) = \\ & = \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) \rho_Y(\Psi(x_{k-1}), \Phi(x_{k-1})) \leq \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) r_{k-1} \leq \alpha r_k. \end{aligned}$$

Таким образом, $\Phi(x_k) \in B_Y(\Psi(x_k), \alpha r_k)$. Поскольку Ψ является α -накрывающим на $B_X(x_0, R)$, то $B_Y(\Psi(x_k), \alpha r_k) \subseteq \subseteq \Psi(B_X(x_k, r_k))$. Отсюда следует, что существует $x_{k+1} \in B_X(x_0, R)$ такой, что $\Psi(x_{k+1}) = \Phi(x_k)$. Продолжая процесс по индукции, мы получаем необходимую последовательность $\{x_k\}$. Из (4) мы получаем, что построенная последовательность является фундаментальной. В самом деле,

$$\begin{aligned} \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) & \leq \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_{i-1})) + \rho_Y(\Phi(x_{i-1}), \Phi(x_i)) \leq \\ & \leq \rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_{i-1})) + \beta \rho_X(x_i, x_{i-1}) \leq \\ & \leq \delta \rho_Y(\Psi(x_{i-1}), \Phi(x_{i-1})) + \beta \rho_X(x_i, x_{i-1}) \leq \\ & \leq \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right) \rho_Y(\Psi(x_{i-1}), \Phi(x_{i-1})). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i)) \leq \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^i \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \quad \forall i.$$

В силу (3) мы получаем, что

$$\rho_X(x_i, x_0) \leq \frac{\rho_Y(\Psi(x_i), \Phi(x_i))}{\alpha} \leq \left(\delta + \frac{\beta}{\alpha} \right)^i \frac{\rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0))}{\alpha}.$$

Наконец, поскольку $\delta + \beta/\alpha < 1$, мы получаем, что последовательность $\{x_i\}$ является фундаментальной и

$$\rho_X(x_i, x_0) \leq (\alpha - (\alpha\delta + \beta))^{-1} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Так как пространство X полное, $\{x_k\}$ сходится к точке $\xi \in B_X(x_0, R)$. Используя непрерывность отображения Φ и замкнутость отображения Ψ , мы переходим к пределу и получаем (6) и (7). Теорема доказана.

В дальнейшем мы будем рассматривать отображения Ψ и Φ , действующие из $B_X(x^0, r)$, где $r > 0$. Для того чтобы воспользоваться теоремами 1 и 2, нам необходимо, чтобы эти отображения действовали в одно и то же метрическое пространство. Чтобы добиться этого, нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и существует $R > 0$:

$$(9) \quad \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)) \leq (\alpha - \beta)R.$$

Тогда $\Phi(B_X(x_0, R)) \subseteq \Psi(B_X(x_0, R))$.

Доказательство. Пусть $x \in B(x_0, R)$. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_Y(\Phi(x), \Psi(x_0)) &\leq \rho_Y(\Phi(x), \Phi(x_0)) + \rho_Y(\Phi(x_0), \Psi(x_0)) \leq \\ &\leq \beta\rho_X(x, x_0) + (\alpha - \beta)R \leq \beta R + (\alpha - \beta)R = \alpha R. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(x) \in \Psi(B(x_0, R))$, и отсюда в силу произвольности выбора точки x имеем $\Phi(B_X(x_0, R)) \subseteq \Psi(B_X(x_0, R))$. Лемма доказана.

4. Алгоритм поиска точки совпадения двух отображений

На основе доказанной теоремы разработан алгоритм, позволяющий численно найти точку совпадения двух отображений. Итак, пусть даны метрические пространства X и Y с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно, отображения $\Psi, \Phi : X \rightarrow Y$, начальная точка $x_0 \in X$ и известны константа накрытия α отображения Ψ и константа Липшица β отображения Φ .

Шаг 1. Зафиксировать $\varepsilon > 0$ – погрешность приближения. Определить $\delta \in (0; 1 - \beta/\alpha)$ – параметр итерационного процесса. Положить номер итерации $k = 0$.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства $\rho_Y(\Psi(x_k), \Phi(x_k)) < \varepsilon$. Если неравенство выполнено, то закончить алгоритм. Если нет, то перейти к шагу 3.

Шаг 3. Произвольным образом вычислить точку \tilde{x} , удовлетворяющую условию

$$(10) \quad \rho_X(\tilde{x}, x_k) \leq \alpha^{-1} \rho_Y(\Psi(x_k), \Phi(x_k)).$$

Шаг 4. Проверить выполнение условия

$$(11) \quad \rho_Y(\Psi(\tilde{x}), \Phi(x_k)) \leq \delta \rho_Y(\Psi(x_k), \Phi(x_k)).$$

Если условие выполнено, то перейти к шагу 5. Если нет, перейти к шагу 3.

Шаг 5. Положить $x_{k+1} = \tilde{x}$, увеличить k на единицу и перейти к шагу 1.

Данный алгоритм будет применен для поиска положения равновесия в рыночной системе. Перейдем к описанию этой системы.

5. Положение частичного равновесия в модели открытого рынка

5.1. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ ОТКРЫТОГО РЫНКА

Пусть на рынке присутствуют $n \in \mathbb{N}$ товаров, цены на которые описываются вектором $p \in \mathbb{R}_+^n, p = (p_1, \dots, p_n)$, и существуют такие векторы $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^n, c_1 = (c_{11}, \dots, c_{1n}), c_2 = (c_{21}, \dots, c_{2n})$, что

$$c_{1i} < c_{2i}, p_i \in [c_{1i}, c_{2i}], i = \overline{1, n}.$$

Обозначим $\tilde{c} = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$ и $P = [c_{11}, c_{21}] \times \dots \times [c_{1n}, c_{2n}]$. Рассмотрим отображения спроса

$$D : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n, D(p) = (D_1(p), \dots, D_n(p))$$

и предложения

$$S : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n, S(p) = (S_1(p), \dots, S_n(p)).$$

Эти отображения в будущем будут иметь специальный вид.

Предположим, что при некоторых ценах $p^* \in P$ нам известны значения спроса и предложения

$$(12) \quad D^* = D(p^*) = (D_1^*, \dots, D_n^*),$$

$$(13) \quad S^* = S(p^*) = (S_1^*, \dots, S_n^*).$$

Пусть также известны матрица $\mathcal{E} = (E_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, где E_{ij} – эластичность спроса на i -й товар по цене на j -й товар, которая удовлетворяет равенству

$$(14) \quad E_{ij} = \frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) \frac{p_j}{D_i(p)}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Аналогично определим матрицу $\tilde{\mathcal{E}} = (\tilde{E}_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, элементы которой удовлетворяют равенству

$$(15) \quad \tilde{E}_{ij} = \frac{\partial S_i}{\partial p_j}(p) \frac{p_j}{S_i(p)}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Пусть также известен вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ такой, что $a_i \geq 0 \forall i = \overline{1, n}$ – вектор импорта. a_i является количеством i -го товара, который импортируется на рынок. Мы предполагаем, что существует $i : a_i > 0$.

Определение 5. Моделью открытого рынка назовем следующий набор

$$\sigma_o = (a, c_1, c_2, p^*, D^*, S^*, \mathcal{E}, \tilde{\mathcal{E}}).$$

В [9] была доказана следующая теорема.

Теорема 4 [9]. Параметры модели σ_o однозначно определяют отображения

$$(16) \quad D : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n, \quad S : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^n$$

по формулам

$$(17) \quad D_i(p_1, \dots, p_n) = D_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$(18) \quad S_i(p_1, \dots, p_n) = S_i^* \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-\tilde{E}_{ij}} p_j^{\tilde{E}_{ij}}, \quad i = \overline{1, n}.$$

5.2. ПОЛОЖЕНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Теперь дадим определение положения равновесия в модели σ_o .

Определение 6. Вектор $p^0 \in P$ называется вектором равновесных цен (или положением равновесия) в модели $\sigma_o \in \Sigma_o$, если

$$(19) \quad S(p^0) + a = D(p^0).$$

Определение 7. Положением частичного равновесия в модели σ_o назовем такой вектор $p^0 \in P$, что

$$S_i(p^0) + a_i = D_i(p^0), \quad i = \overline{1, m},$$

где $m < n$.

Замечание 1. Здесь мы рассматриваем новые отображения

$$\tilde{S}, \tilde{D} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^m, \quad \tilde{S} = P \circ S, \quad \tilde{D} = P \circ D,$$

где $P : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+^m$ – оператор проектирования из \mathbb{R}_+^n в \mathbb{R}_+^m , определяемый следующей формулой:

$$P = \begin{pmatrix} I_{m \times m} & 0_{m \times n-m} \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица. Легко видеть, что отображение \tilde{S} (как и \tilde{D}) не является биективным, и поэтому применить принцип сжимающих отображений нельзя. Однако мы можем свести задачу поиска положения частичного равновесия в модели σ_o к задаче поиска точки совпадения отображений \tilde{S} и \tilde{D} . В дальнейшем для удобства мы будем использовать старые обозначения через S и D соответственно.

Задача состоит в том, чтобы определить условия, при которых положение частичного равновесия в модели σ_o существует.

5.3. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Введем обозначения:

$$(20) \quad \hat{\alpha}(\sigma_o) = \min_{p \in P} \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \right)^{-1} \right\|^{-1},$$

$$(21) \quad \hat{\beta}(\sigma_o) = \max_{i=1, m} D_i^* \left(\prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} \right) \times \\ \times \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \max_{l=1, 2} \left\{ c_{lk}^{E_{ik}-1} \right\} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \max_{l=1, 2} c_{lj}^{E_{ij}},$$

$$(22) \quad \hat{\gamma}(\sigma_o) = \max_{i=1, m} |S_i(\tilde{c}) + a_i - D_i(\tilde{c})|.$$

Теорема 5. Пусть параметры модели σ_o удовлетворяют условиям:

- 1) $\det \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \neq 0$;
- 2) $\hat{\gamma}(\sigma_o) < \hat{\alpha}(\sigma_o) - \hat{\beta}(\sigma_o)$.

Тогда в модели σ_o существует положение частичного равновесия $p^0 \in \text{int } P$.

Доказательство. В пространстве \mathbb{R}^n определим две нормы:

$$(23) \quad \|x\|_1 = \max_{i=1, n} \frac{2|x_i|}{c_{2i} - c_{1i}}, \quad x = (x_1, \dots, x_n);$$

$$(24) \quad \|y\|_2 = \max_{i=1, n} |y_i|, \quad y = (y_1, \dots, y_n).$$

Рассмотрим пространства $X = (X, \rho_X)$ и $Y = (Y, \rho_Y)$, где $X = \mathbb{R}_+^n$, $Y = \mathbb{R}_+^m$, а метрики ρ_X и ρ_Y порождены нормами, определенными в (23), (24) соответственно. Сначала оценим $\text{lip}(D|P)$. Обозначим $\mathcal{K}_i = \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}}$. Из равенства

$$\frac{\partial D_i}{\partial p_j}(p) = \frac{E_{ij} D_i(p)}{p_j}$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| &= \max_{\|x\|_1=1} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p)x \right\|_2 = \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=1, m} \left| \sum_{k=1}^n \frac{\partial D_i}{\partial p_k}(p) x_k \right| = \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=1, m} \left| \sum_{k=1}^n E_{ik} \frac{D_i(p)}{p_k} x_k \right| = \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=1, m} \left| \sum_{k=1}^n E_{ik} \frac{D_i^*}{p_k} x_k \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \right| \leq \\ &\leq \max_{\|x\|_1=1} \max_{i=1, m} \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{D_i^*}{p_k} |x_k| \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \leq \\ &\leq \max_{i=1, m} D_i^* \sum_{j=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2p_k} \prod_{j=1}^n (p_j^*)^{-E_{ij}} p_j^{E_{ij}} \leq \\ &\leq \max_{i=1, m} D_i^* \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \mathcal{K}_i \max_{l=1, 2} \left\{ c_{lk}^{E_{ik}-1} \right\} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n p_j^{E_{ij}} \leq \\ &\leq \max_{i=1, m} D_i^* \mathcal{K}_i \sum_{k=1}^n |E_{ik}| \frac{c_{2k} - c_{1k}}{2} \max_{l=1, 2} \left\{ c_{lk}^{E_{ik}-1} \right\} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \max_{l=1, 2} c_{lj}^{E_{ij}} = \hat{\beta}(\sigma_o). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{lip}(D|P) = \max_{p \in P} \left\| \frac{\partial D}{\partial p}(p) \right\| \leq \hat{\beta}(\sigma_o).$$

Теперь перейдем к оценке величины $\text{cov}(S|P)$. Из [10] известно, что

$$\text{cov}(S|P) = \min_{p \in P} \text{cov} \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right).$$

Кроме того, в силу леммы 1 мы имеем

$$\text{cov} \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \geq \left\| \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \left(\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \right)^{-1} \right\|^{-1} = \tilde{\alpha}(p),$$

где $\left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^*$ – оператор, сопряженный к $\frac{\partial S}{\partial p}(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

В силу условия 5 норма в последнем выражении конечна.

Следовательно,

$$\text{cov}(S|P) = \min_{p \in P} \text{cov}(S|p) \geq \min_{p \in P} \text{cov} \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \geq \min_{p \in P} \tilde{\alpha}(p) = \hat{\alpha}(\sigma_o).$$

В силу условия 5, леммы 2 и неравенств

$$\text{cov}(S|P) \geq \hat{\alpha}(\sigma_o), \text{lip}(D|P) \leq \hat{\beta}(\sigma_o)$$

следует, что существуют такие α, β , что $\hat{\gamma}(\sigma_o) < \alpha - \beta$, отображение S является α -накрывающим на P , а отображение D удовлетворяет условию Липшица на P с константой β . Поскольку P – полное метрическое пространство, то по теореме 1 существует вектор $p^0 \in \text{int } P$ такой, что

$$S(p^0) + a = D(p^0).$$

Более того, в силу условия 5 мы получаем, что $p^0 \in \text{int } P$, так как в силу теоремы 1

$$\rho_X(p^0, \tilde{c}) \leq \frac{\rho_Y(S(\tilde{c}), D(\tilde{c}))}{\alpha - \beta} < 1.$$

Теорема доказана.

6. Численный эксперимент

В модели открытого рынка мы можем определить радиус поиска, вместо того чтобы проверять условие (10). Действительно, поскольку отображения спроса и предложения определены на пространстве \mathbb{R}^n , новую точку можно выразить через старую с помощью формулы $x_{k+1} = x_k + h_k$, где $h_k = (h_{k1}, \dots, h_{kn}) \in \mathbb{R}^n$ – пока неизвестный вектор. Тогда

$$\rho_X(x_k, x_{k+1}) = \|x_k - (x_k + h_k)\|_n = \|h_k\|_n.$$

Следовательно,

$$\|h_k\|_n \leq \frac{\rho_Y(\Psi(x_k), \Phi(x_k))}{\alpha} = \frac{\|\Psi(x_k) - \Phi(x_k)\|_m}{\alpha}.$$

В силу формул (23) и (24) имеем

$$\max_{i=1, n} \frac{2|h_{ki}|}{c_{2i} - c_{1i}} \leq \alpha^{-1} \max_{i=1, n} |S_i(x_k) + a_i - D_i(x_k)|.$$

Отсюда мы получаем формулу, определяющую радиус поиска новой точки:

$$(25) \quad |h_{ki}| = \frac{c_{2i} - c_{1i}}{2\alpha} \max_{i=1, n} |S_i(x_k) + a_i - D_i(x_k)|.$$

Алгоритм поиска положения частичного равновесия в модели открытого рынка выглядит следующим образом.

Шаг 0. Вычислить константы α и β по формулам (20), (21).

Шаг 1. Зафиксировать $\varepsilon > 0$ – погрешность приближения, $p_0 \in P$ – начальное приближение, $\delta \in (0; 1 - \beta/\alpha)$ – параметр итерационного процесса, положить номер итерации $k = 0$.

Шаг 2. Проверить выполнение неравенства $\rho_Y(S(p_k) + a, D(p_k)) < \varepsilon$, где D и S определены формулами (17), (18) с учетом замечания 1. Если неравенство выполнено, то закончить алгоритм. Если нет, то перейти к шагу 3.

Шаг 3. Используя приближение p_k , вычислить радиус поиска h_k по формуле (25).

Шаг 4. Произвольным образом вычислить точку \tilde{p} , удовлетворяющую условию $\rho_X(p_k, \tilde{p}) \leq h_k$.

Шаг 5. Проверить выполнение условия

$$(26) \quad \rho_Y(S(\tilde{p}) + a, D(p_k)) \leq \delta \rho_Y(S(p_k) + a, D(p_k)).$$

для полученной точки \tilde{p} . Если условие выполнено, то перейти к шагу 6. Если нет, перейти к шагу 4.

Шаг 6. Положить $p_{k+1} = \tilde{p}$, увеличить k на единицу и перейти к шагу 2.

7. Модельный пример

Рассмотрим следующую модель из σ_o (здесь опущены параметры модели, которые не используются при исследовании вопроса о частичном равновесии):

$$\begin{aligned} a &= 27,5, \quad c_1 = (61,91, 43,75)^\top, \quad c_2 = (143,62, 75,40)^\top, \\ p^* &= (69,59, 43,93)^\top, \quad S^* = 34,17, \quad D^* = 71,41, \\ \mathcal{E} &= (0,14, 0,53)^\top, \quad \tilde{\mathcal{E}} = (0,63, 0,93)^\top. \end{aligned}$$

Проверим выполнение условий теоремы 5 для этой модели:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(\sigma_o) &= 55,44490, \\ \bar{\beta}(\sigma_o) &= 23,76032, \\ \bar{\gamma}(\sigma_o) &= 3,1412564215777223. \end{aligned}$$

Более того, условие 1) также выполнено, поскольку

$$\det \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right) \left(\frac{\partial S}{\partial p}(p) \right)^* \approx 1,41 \neq 0.$$

Таким образом, условия теоремы 5 выполнены и в модели σ_o существует положение равновесия. Положим $\varepsilon = 0,0001$. С экономической точки зрения наш выбор обуславливается тем, что на товарных рынках цены, отличающиеся меньше чем на 0,001 расчетной валюты, считаются равными, и такая погрешность является достаточно низкой.

Для поиска положения равновесия необходимо решить следующее уравнение:

$$\frac{34,17}{69,59^{0,63} 43,93^{0,93}} p_1^{0,63} p_2^{0,93} + 27,5 = \frac{71,41}{69,59^{0,14} 43,93^{0,53}} p_1^{0,14} p_2^{0,53}.$$

Результаты работы алгоритма представлены в таблице 7.

Таким образом, положение частичного равновесия по первому товару достигается при ценах $p^0 = (113,75474; 62,90146)$.

Таблица 1. Результаты работы алгоритма поиска

Итерация	p^{kT}	$\rho_Y(S(p^k) + a, D(p^k))$
1	(71,17413; 47,37823)	5,41649
5	(98,13107; 56,67820)	2,60855
10	(109,88172; 61,29676)	0,65167
15	(112,61622; 62,48339)	0,19734
20	(113,49145; 62,79764)	0,05652
25	(113,67713; 62,87628)	0,01487
30	(113,73544; 62,89466)	0,00363
35	(113,75160; 62,89979)	0,00082
40	(113,75403; 62,90126)	0,00021
41	(113,75437; 62,90135)	0,00014
42	(113,75459; 62,90141)	0,00011
43	(113,75474; 62,90146)	0,00008

8. Заключение

Разработанный алгоритм поиска точек совпадения двух отображений может быть использован для решения большого количества прикладных задач, связанных с решением системы неявных алгебраических уравнений. Этот алгоритм является относительно простым в программной реализации и, помимо этого, не требовательным ко входным данным модели, что позволяет применять его для исследования широкого круга вопросов. Трудность применения данного алгоритма может состоять в оценке констант накрытия и Липшица для рассматриваемых отображений, однако часто эта трудность устраняется путем аналитического исследования модели и получения констант в формульном выражении, как это было сделано в настоящей работе.

Литература

1. АРУТЮНОВ А.В. Итерационный метод нахождения точек совпадения двух отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2012. – Т. 52, №11. – С. 1947–1950.
2. АРУТЮНОВ А.В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Докл. РАН. – 2007. – Т. 416, №2. – С. 151–155.

3. АРУТЮНОВ А.В., ЖУКОВСКИЙ С.Е. *Применение методов обыкновенных дифференциальных уравнений для глобальных теорем об обратной функции // Дифференциальные уравнения.* – 2019. – Т. 55, №4. – С. 452–463.
4. АРУТЮНОВ А.В., КОТЮКОВ А.М., ПАВЛОВА Н.Г. *Equilibrium in Market Models with Known Elasticities // Advances in Systems Science and Applications.* – 2021. – Vol. 24, №4. – P. 130–144.
5. АРУТЮНОВ А.В., ПАВЛОВА Н.Г., ШАНАНИН А.А. *Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Матем. моделирование.* – 2016. – Т. 28, №3. – С. 3–22.
6. АРУТЮНОВ А.В., ЖУКОВСКИЙ С.Е., ПАВЛОВА Н.Г. *Равновесные цены как точка совпадения двух отображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* – 2013. – Т. 53, №2. – С. 225–237.
7. ЖУКОВСКИЙ С.Е. *О накрываемости линейных операторов на полиэдральных множествах // Изв. вузов. Матем.* – 2016. – №9. – С. 74–77.
8. КОТЮКОВ А.М. *Итерационный процесс поиска точек совпадения в модели «спрос-предложение» // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры.* – 2022. – Т. 207. – С. 68–76.
9. КОТЮКОВ А.М., ПАВЛОВА Н.Г. *Устойчивость и неединственность положения равновесия в модели открытого рынка // Труды 15-й Международной конференции «Управление развитием крупномасштабных систем» (MLSD'2022).* – 2022. – С. 665–668.
10. ARUTYUNOV A., AVAKOV E., GEL'MAN B., DMITRUK A. et al. *Locally covering maps in metric spaces and coincidence points // J. Fixed Points Theory and Applications.* – 2009. – Vol. 5, №1. – P. 5–16.
11. KOTYUKOV A.M., PAVLOVA N.G. *Nonuniqueness of Equilibrium in Closed Market Model // Advances in Systems Science and Applications.* – 2023. – 23(2). – P. 184–194.

COINCIDENCE POINT SEARCH ALGORITHM IN COMPLEX SYSTEMS

Alexander Kotyukov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, junior researcher (amkotyukov@mail.ru).

Natal'ya Pavlova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow; RUDN University, Moscow; G.R. Derzhavin Tambov State University, Tambov; PhD, assistant professor (natasharussia@mail.ru).

Abstract: The paper is dedicated to complex systems analysis, in particular, the question of searching a coincidence point for two mappings. A coincidence point is a point at which the image of one mapping coincides with the one of another mapping at this point. This notion is a generalization of fixed point concept. It can be applied to information processing, artificial intellect and system analysis. Besides, this concept may be applied in economical problems such as resource management, production volume calculation and price regulation. In this paper coincidence points theory is applied to the question of equilibrium in market system. An equilibrium is a state at which the supply of all goods on the market equals to thier demand. We developed a search algorithm of coincidence point for covering and Lipschitz-continuous mappings. The work of this algorithm is demonstrated on open market model. In this model supply and demand mappings are restored by their price elasticities. Elasticity is a measure of change for one variable under the change of another. We consider partical equilibrium in this model. It is a state at which supply equals demand for some subset of goods, not all of them. Equilibrium is conisidered as a coincidence point of supply and demand mappings. We complement the results with the example of partial equilibrium in the model of two goods.

Keywords: complex system, equilibrium, covering map, coincidence point, elasticity.

УДК 519.6

ББК 22.193

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.1

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

Поступила в редакцию 02.01.2024.

Дата опубликования 31.01.2021.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА – СТИЛТЬЕСА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИКОВОГО ВОЗРАСТА ИНФОРМАЦИИ В ГРУППЕ ПЕРЕДАЧИ, МОДЕЛИРУЕМОЙ ДВУХУЗЛОВОЙ СЕТЬЮ

Матюшенко С. И.¹

(Российский университет дружбы народов, Москва)

Самуйлов К. Е.²

(Федеральный исследовательский центр «Информатика
и управление» РАН, Москва)

Рассматривается двухузловая группа передачи информации, состоящая из периферийного узла (узла-отправителя), центра управления (узла-получателя) и двух последовательных каналов связи между ними. Процесс передачи информации из узла-отправителя в узел-получатель моделируется посредством двухузловой сети массового обслуживания с произвольной функцией распределения интервалов между поступлениями заявок и произвольными длительностями обслуживания в каждом узле сети, т.е. сетью, которую в соответствии с обозначениями Кендалла принято кодировать как $G/G/1 - G/G/1$. При этом передаваемые пакеты информации моделируются заявками, а процесс передачи пакетов по каналам системы моделируется процедурой обслуживания в узлах сети. В работе получено выражение для преобразования Лапласа – Стильтеса стационарной функции распределения пикового возраста информации – метрики, позволяющей количественно оценить «свежесть» информации, поступающей в узел-получатель с целью принятия управленческих решений. Данная работа продолжает цикл работ авторов, посвященных проблеме анализа возраста информации, обобщая результаты работ других авторов, что достигается за счет наиболее общих предположений относительно распределений длительностей генерации и обслуживания заявок в узлах сети. Корректность полученных результатов проверена на ряде частных случаев, рассмотренных ранее, а также путем сравнения аналитических результатов с результатами имитационного моделирования.

Ключевые слова: возраст информации, пиковый возраст информации, сеть массового обслуживания, стационарное распределение.

¹ Сергей Иванович Матюшенко, к.ф.-м.н., доцент (matyushenko-si@rudn.ru).

² Константин Евгеньевич Самуйлов, д.т.н., в.н.с. (samuylov-ke@rudn.ru).

1. Введение

Понятие «возраст информации» впервые было введено в [4] для количественной оценки «свежести» знаний об удаленном объекте. Впоследствии в специальной литературе для обозначения этого понятия стали использовать аббревиатуру AoI от английского «Age of Information». Со временем это понятие превратилось в метрику, отражающую качество предоставляемых услуг, для которых фактор времени играет наиважнейшую роль. Проблема своевременной доставки информации в центр контроля и управления возникает в различных сферах человеческой деятельности: в энергетических системах, в индустриальном интернете вещей, в сфере автономного транспорта, в системах видеонаблюдения и системах сотовой связи и т.д.

Наиболее удобным средством для исследования проблемы возраста информации является аппарат теории массового обслуживания. Обзор работ, использующих этот аппарат, можно найти, например, в [7]. Однако следует отметить, что большинство исследователей ограничиваются простыми моделями, например, системами массового обслуживания с экспоненциальным распределением времени между моментами генерации пакетов в узле-отправителе и экспоненциальным [5] либо детерминированным [3] распределением длительности обработки информации в узле-получателе. Такие модели позволяют получить лишь грубую оценку возраста информации, поскольку однопараметрические распределения не дают возможности учесть все особенности протоколов работы современных систем диспетчерского управления.

В данной работе мы моделируем процесс передачи информации с помощью двухузловой сети массового обслуживания с распределениями длительностей генерации заявок и длительностей их обслуживания на приборах общего типа, предполагая лишь их независимость. При этом наша модель учитывает требование протокола передачи информации, состоящее в том, что процесс передачи делится на два последовательных этапа и пред-

полагает наличие накопителей неограниченной емкости для размещения заявок, ожидающих обслуживания на соответствующих приборах. Подобная техническая система рассматривалась ранее в работе [2]. Однако математическая модель для данной системы строилась на основе сети $M/M/1 - M/M/1$, что, как уже отмечалось выше, позволило получить лишь достаточно грубую оценку для стационарной функции распределения возраста информации.

2. Описание модели

Рассмотрим группу передачи (ГП) информации, состоящую из узла-отправителя (УО), узла-получателя (УП) и канала связи между ними (рис. 1).

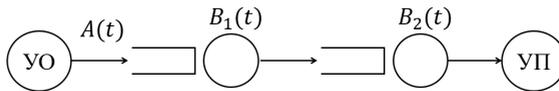


Рис. 1. Двухузловая ГП

Процесс передачи информации из УО в УП будем моделировать с помощью двухузловой сети, представляющей собой последовательное соединение двух систем массового обслуживания (СМО). На вход первой системы (узла) поступает произвольный рекуррентный поток с функцией распределения интервалов между поступлениями $A(t)$. Обслуживание на приборе j -го узла производится в соответствии с произвольной ФР времени обслуживания $B_j(t)$, $j = 1, 2$. Накопители обеих систем имеют неограниченную емкость.

3. Основные обозначения, предположения и факты

Цель нашего исследования – найти распределение пикового возраста информации, передаваемой из УО в УП. Как обычно, под пиковым возрастом Z^{n-1} ($n - 1$)-заявки, поступающей с систему, будем понимать сумму [1]

$$Z^{n-1} = G^n + T^n, \quad n \geq 1,$$

где G^n – случайная величина (с.в.) – интервал времени между поступлениями $(n-1)$ -й и n -й заявки (n -заявки) с ФР $A(t)$, а T^n – с.в. – время пребывания n -заявки в сети.

Далее введем ряд обозначений:

- T_j – с.в. – время пребывания заявки в узле j ;
- $T_j(t)$ – стационарная ФР с.в. T_j ;
- $\tau_j(t) = \frac{d}{dt}T_j$ – плотность распределения с.в. T_j ;
- $\theta_j(t) = \int_0^\infty e^{itx} dT_j(x)$ – характеристическая функция (ХФ) с.в. T_j ;
- $\theta_j(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dT_j(x)$ – преобразование Лапласа – Стилтеса (ПЛС) с.в. T_j ;
- W_j – с.в. – время ожидания обслуживания заявки в узле j ;
- $W_j(t)$ – стационарная ФР с.в. W_j ;
- $w_j(t)$ – плотность распределения с.в. W_j ;
- $\omega_j(t)$ – ХФ с.в. W_j ;
- $\omega_j(s)$ – ПЛС с.в. W_j ;
- G – с.в. – длина интервалов между поступлениями заявок;
- $a(t) = \frac{d}{dt}A(t)$ – плотность распределения с.в. G (длительности генерации);
- $\alpha(t)$ – ХФ с.в. G ;
- $\alpha(s)$ – ПЛС с.в. G ;
- $a = \int_0^\infty tdA(t)$ – средняя длина интервалов между поступлениями заявок;
- S_j – с.в. – длительность обслуживания заявки в узле j ;
- $b_j(t) = \frac{d}{dt}B_j(t)$ – плотность распределения с.в. S_j ;
- $\beta_j(t)$ – ХФ с.в. S_j ;
- $\beta_j(s)$ – ПЛС с.в. S_j ;
- $b_j = \int_0^\infty tdB_j(t)$ – средняя длительность обслуживания заявки в узле j ;
- $c_j = b_j - a$ – разница между средней длительностью обслуживания и средней длительностью генерации;
- $\lambda = 1/a$ – интенсивность поступления потока;
- $\mu_j = 1/b_j$ – интенсивность обслуживания в узле j ;

- $\rho_j = \lambda/\mu_j = b_j/a$ – нагрузка узла j ;
- $d_j = \mu_j - \lambda$ – разница между интенсивностью обслуживания в узле j и интенсивностью поступающего потока, $j = 1, 2$.

Далее будем предполагать, что все введенные нами величины существуют и конечны, а также, что длительности обслуживания на приборе j независимы между собой, не зависят от длительности обслуживания на приборе $3 - j$ и не зависят от длительности генерации. Кроме этого, будем полагать, что $\rho_j < 1$, $j = 1, 2$, а также выполнены условия хотя бы одной из двух следующих теорем, доказательство которых можно найти, например, в [2] на стр. 483–485.

Теорема 1. Пусть ХФ $\beta_j(t)$ представима в виде $\beta_j(t) = \frac{P_j(t)}{Q_j(t)}$, где $P_j(t)$ и $Q_j(t)$ – полиномы степеней соответственно k_j и l_j , $k_j \leq l_j$. Тогда ХФ $\omega_j(t)$ вычисляется по формуле

$$(1) \quad \omega_j(t) = \frac{Q_j(t)R_j(0)}{R_j(t)Q_j(0)},$$

где $R_j(t) = \prod_{m=1}^{l_j} (t - t_m)$, t_m – корни уравнения $1 - \alpha(-t)\beta_j(t) = 0$ в подпространстве комплексных чисел с отрицательной мнимой частью.

Теорема 2. Пусть ХФ $\alpha(t)$ представима в виде $\alpha(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, где $P(t)$ и $Q(t)$ – полиномы степеней соответственно k и l , $k < l$. Тогда ХФ $\omega_j(t)$ вычисляется по формуле

$$(2) \quad \omega_j(t) = \frac{-ic_j t R(t) Q(0)}{[1 - \chi_j(t)] Q(-t) R(0)},$$

где $R(t) = \prod_{m=1}^{l-1} (t - t_m)$, t_m – ненулевые корни уравнения $1 - \alpha(-t)\beta_j(t) = 0$ в подпространстве комплексных чисел с неотрицательной мнимой частью, а $\chi_j(t) = \alpha(-t)\beta_j(t)$.

4. ПЛС функции распределения пикового возраста информации

Перейдем к основной цели нашего исследования. Для этого, используя подход, предложенный в [3], рассмотрим следующие

события:

1) событие A_1 – поступающая в сеть заявка застанет оба узла занятыми;

2) событие A_2 – поступающая в сеть заявка застанет занятым узел 1 и свободным – узел 2;

3) событие A_3 – поступающая в сеть заявка застанет свободным узел 1 и занятым – узел 2;

4) событие A_4 – поступающая в сеть заявка застанет оба узла свободными.

Обозначим через $z(s)$ – ПЛС с.в. Z – пиковый возраст информации. Далее, мы подсчитаем вероятности событий $P(A_j)$ и получим выражения для определения условных ПЛС $z_{A_j}(s)$, $j = 1, \dots, 4$.

Итак, начнем с события A_1 . Для его наступления необходимо наличие двух условий одновременно:

- генерация заявки n должна завершиться раньше момента выхода из узла 1 заявки $n - 1$, т.е. должно быть выполнено условие: $G^n < T_1^{n-1}$ для любого $n \geq 1$,

- время обслуживания заявки n в узле 1 не должно завершиться пребыванием $(n - 1)$ -й заявки в узле 2, т.е. $S_1^n < T_2^{n-1}$. Заметим, что начало обслуживания n -заявки совпадает с моментом перехода $(n - 1)$ -й заявки из узла 1 в узел 2 (рис. 2).

Здесь и далее на рисунках используются следующие обозначения:

- $t_{in,j}^n$ – момент поступления в узел j заявки n ;
- $t_{out,j}^n$ – момент выхода из узла j заявки n ;
- s_j^n – момент начала обслуживания заявки n в узле j , $j = 1, 2$.

Учитывая вышеизложенное получаем:

$$(3) P(A_1) = \int_0^\infty \int_0^y a(y) dy \tau_1(t_1) dt_1 \cdot \int_0^\infty \int_0^{t_2} b_1(u) du \tau_2(t_2) dt_2.$$

При этом заметим, что $\tau_j(t_j) = \frac{d}{dt_j} (W_j(t_j) * B_j(t_j))$, а $W_j(t_j)$ может быть найдена из (1) либо (2) обращением соответствующих ХФ, $j = 1, 2$.

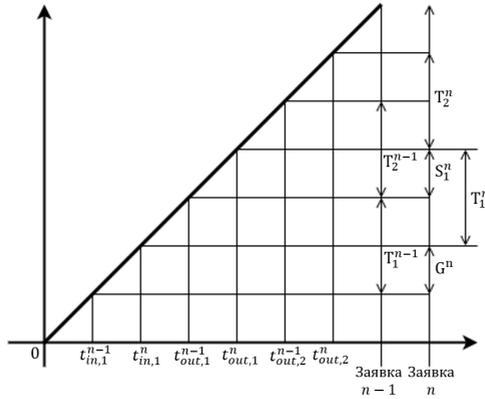


Рис. 2. Диаграмма пикового возраста для события A_1

Очевидно, что пиковый возраст при условии справедливости A_1 определяется выражением:

$$(4) \quad Z^{n-1} = G^n + T_1^n + T_2^n$$

и не зависит от n .

Учитывая независимость слагаемых в правой части (4), приходим к следующему результату:

$$(5) \quad z_{A_1}(s) = \alpha(s)\theta_1(s)\theta_2(s).$$

Теперь рассмотрим событие A_2 . Для наступления этого события необходимо наличие двух условий одновременно

- генерация n -заявки должна завершиться раньше момента выхода из узла 1 заявки $n - 1$, т.е. $T_1^{n-1} > G^n$;
- за время обслуживания заявки n в узле 1 должно завершиться пребывание $(n - 1)$ -ой заявки в узле 2, т.е. $S_1^n > T_2^{n-1}$ (рис. 3).

Следовательно,

$$(6) \quad P(A_2) = \int_0^\infty \int_0^y a(y)dy\tau_1(t_1)dt_1 \cdot \int_0^\infty \int_{t_2}^\infty b_1(u)du\tau_2(t_2)dt_2,$$

$$(7) \quad z_{A_2}(s) = \alpha(s)\theta_1(s)\beta_2(s).$$

Для наступления события A_3 также необходимо наличие двух условий одновременно:

- генерация n -заявки должна идти дольше, чем пребывание

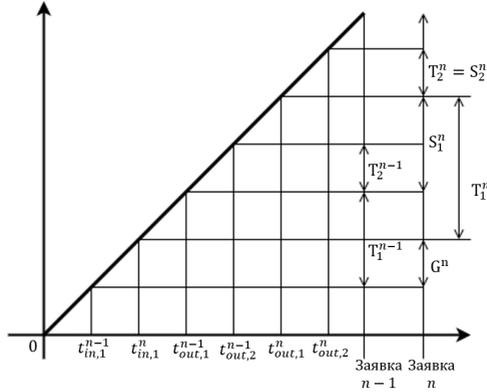


Рис. 3. Диаграмма пикового возраста для события A_2

$(n - 1)$ -й заявки в узле 1, т.е. $G^n > T_1^{n-1}$;

- на момент окончания обслуживания n -й заявки в узле 1 заявка $n - 1$ должна оставаться в узле 2, т.е. $T_1^{n-1} + T_2^{n-1} > G^n + S_1^n$ (рис. 4).

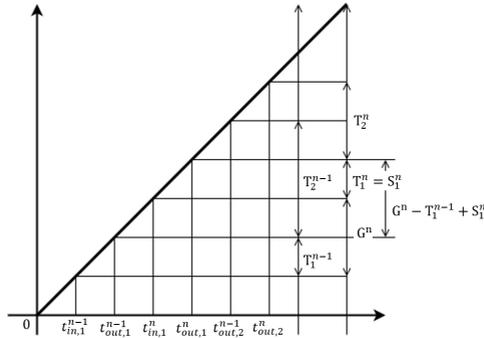


Рис. 4. Диаграмма пикового возраста для события A_3

Следовательно,

$$(8) \quad P(A_3) = \int_0^\infty \int_0^y \int_0^\infty a(y)\tau_1(t_1)b_1(u) \int_{y-t_1+u}^\infty \tau_2(t_2)dt_2dudt_1dy,$$

$$(9) \quad z_{A_3}(s) = \alpha(s)\beta_1(s)\theta_2(s).$$

И, наконец, переходим к событию A_4 , для наступления которого необходимо одновременное наличие следующих условий:

- генерация n -заявки должна происходить дольше, чем заявка $n - 1$ находится в узле 1, т.е. $G^n > T_1^{n-1}$;
- поскольку n -заявка сразу поступит на обслуживание в узле 1, то за время ее обслуживания $(n - 1)$ -я заявка должна завершить пребывание в узле 2, т.е. $G^n + S_1^n > T_1^{n-1} + T_2^{n-1}$ (рис. 5).

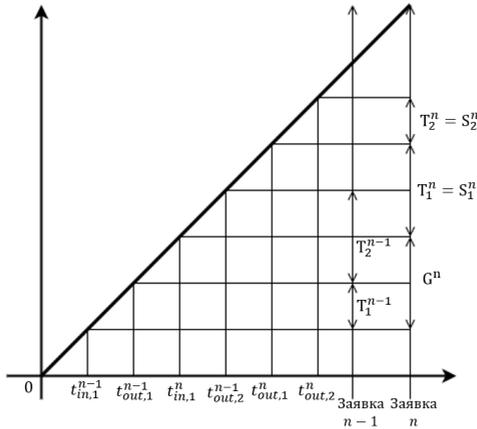


Рис. 5. Диаграмма пикового возраста для события A_4

Таким образом, получаем:

$$(10) \quad P(A_4) = \int_0^\infty \int_0^y \int_0^\infty a(y)\tau_1(t_1)b_1(u) \int_0^{y+u-t_1} \tau_2(t_2)dt_2dudt_1dy,$$

$$(11) \quad z_{A_4}(s) = \alpha(s)\beta_1(s)\beta_2(s).$$

Применяя формулу полной вероятности, приходим к следующему результату.

Теорема 3. ПЛС пикового возраста информации в двухузловой ГП, моделируемой с помощью сети $G/G/1 \rightarrow G/G/1$, вычисляется по формуле

$$(12) \quad z(s) = \sum_{m=1}^4 z_{A_m}(s)P(A_m),$$

где $z_{A_m}(s)$ и $P(A_m)$ определяются выражениями (3)–(11).

**5. Стационарные характеристики пикового
возраста информации для ГП, моделируемой
сетью $M/M/1 \rightarrow M/M/1$**

Рассмотрим частный случай, когда передача информации в ГП моделируется двухузловой сетью, на которую поступает пуассоновский поток заявок интенсивности λ , а обслуживание в узле сети производится в соответствии с экспоненциальным законом распределения с параметрами $\mu_j, j = 1, 2$ (рис. 6).

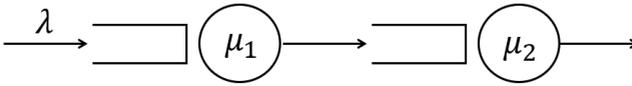


Рис. 6. Двухузловая сеть $M|M|1 \rightarrow M|M|1$

Найдем ПЛС пикового возраста и определим его среднее значение. Опуская подробности вычислений, выпишем результаты, учитывая известный факт [2]:

$$\tau_j(t) = d_j e^{-d_j t}, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2.$$

Из (3)–(11) получаем:

$$(13) \quad P(A_1) = \int_0^\infty \int_0^y \lambda e^{-\lambda y} dy d_1 e^{-d_1 t_1} dt_1 \cdot \int_0^\infty \int_0^{t_2} \mu_1 e^{-\mu_1 u} du d_2 e^{-d_2 t_2} dt_2 = \frac{\lambda}{\mu_1 + d_2},$$

$$(14) \quad P(A_2) = \int_0^\infty \int_0^y \lambda e^{-\lambda y} dy d_1 e^{-d_1 t_1} dt_1 \cdot \int_0^\infty \int_{t_2}^\infty \mu_1 e^{-\mu_1 u} du d_2 e^{-d_2 t_2} dt_2 = \frac{\lambda d_2}{\mu_1(\mu_1 + d_2)},$$

$$(15) \quad P(A_3) = \int_0^\infty \int_0^y \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} d_1 e^{-d_1 t_1} \mu_1 e^{-\mu_1 u} \cdot \int_{y+u-t_1}^\infty d_2 e^{-d_2 t_2} dt_2 du dt_1 dy = \frac{\lambda d_1}{\mu_2(\mu_1 + d_2)},$$

$$(16) \quad P(A_4) = \int_0^\infty \int_0^y \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda y} d_1 e^{-d_1 t_1} \mu_1 e^{-\mu_1 u} \cdot \int_0^{y+u-t_1} d_2 e^{-d_2 t_2} dt_2 du dt_1 dy = \frac{d_1 \mu_2 (\mu_1 + d_2) - \lambda \mu_1 d_1}{\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + d_2)},$$

$$(17) \quad z_{A_1}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{d_1}{d_1 + s} \frac{d_2}{d_2 + s},$$

$$(18) \quad z_{A_2}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{d_1}{d_1 + s} \frac{\mu_2}{\mu_2 + s},$$

$$(19) \quad z_{A_3}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} \frac{d_2}{d_2 + s},$$

$$(20) \quad z_{A_4}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s} \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} \frac{\mu_2}{\mu_2 + s}.$$

Дифференцируя $z_{A_j}(s)$ по s в нуле, приходим к следующему результату.

Теорема 4. Средний пиковый возраст информации в двухузловой ГП, моделируемой сетью $M|M|1 \rightarrow M|M1$, определяется выражением

$$(21) \quad E(z) = \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right] P(A_1) + \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{d_1} + \frac{1}{\mu_2} \right] P(A_2) + \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{d_2} \right] P(A_3) + \left[\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right] P(A_4),$$

где $P(A_j)$ вычисляются в соответствии с (13)–(16).

6. Численные результаты

В таблице 1 представлены результаты вычислений среднего пикового возраста информации для сети $M|M|1 \rightarrow M|M1$ для трех различных значений μ_1 : 1,0, 1,2 и 1,5 при фиксированном $\mu_2 = 1,1$ и различных λ , принимающих значения от 0,1 до 0,9 с шагом 0,1. Пример для $\mu_1 = 1,5$ посчитан двумя способами: с помощью формулы (21) и с помощью имитационной модели.

Результаты вычислений, представленные в таблице 1, также отражены на графиках (рис. 7), согласно которым можно прийти к следующим выводам

- существуют минимальные значения среднего возраста информации, соответствующие средним значениям загрузки системы;
- чем выше загрузка системы, тем существеннее различие среднего возраста информации при относительно небольшом различии в пропускной способности канала.

Таблица 1. Результаты вычислений среднего пикового возраста информации

	аналит.	аналит.	аналит.	имитац.
	$\mu_1 = 1,0$	$\mu_1 = 1,2$	$\mu_1 = 1,5$	$\mu_1 = 1,5$
λ	$\mu_2 = 1,1$	$\mu_2 = 1,1$	$\mu_2 = 1,1$	$\mu_2 = 1,1$
0,10	1,92847	11,757	11,5872	11,611
0,20	6,99582	6,80693	6,62616	6,584
0,30	5,46397	5,23818	5,0354	5,029
0,40	4,86466	4,57022	4,32931	4,375
0,50	4,75344	4,33479	4,03122	4,041
0,60	5,07080	4,4208	4,01524	4,018
0,70	5,98339	4,86395	4,28895	4,322
0,80	8,12218	5,86662	4,99519	5,011
0,90	14,46731	8,07564	6,63398	6,651

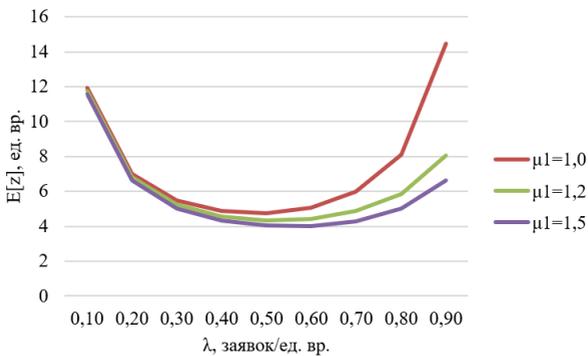


Рис. 7. Зависимость среднего пикового возраста информации от интенсивности входящего потока

7. Заключение

В результате проведенного исследования удалось получить выражение для преобразования Лапласа – Стильтьеса стационарной функции распределения пикового возраста информации, передаваемой из периферийного источника в центр управления, моделируя процесс передачи с помощью двухузловой сети массового обслуживания с распределениями длительностей генерации и обслуживания общего типа. В данной работе мы не только обобщили результаты [2], но и провели численный анализ пикового возраста информации при различных предположениях относительно распределений длительностей генерации и обслуживания, а также проверили корректность полученных результатов с помощью имитационного моделирования.

Литература

1. БОЧАРОВ П.П., ПЕЧИНКИН А.В. *Теория массового обслуживания*. – М.: Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
2. CHIARIOTTI F., VIKHROVA O., SORET B., POPOVSKI P. *Peak Age of Information Distribution in Tandem Queue Systems* // arXiv.2004.05088. – 2020. – DOI: 10.48550/arXiv.2004.05088.
3. COSTA M., CODREANU M., EPHREMIDES A. *On the Age of Information in Status Update Systems With Packet Management* // IEEE Trans. on Information Theory. – 2016. – Vol. 62, No. 4. – P. 1897–1910. – DOI: 10.1109/TIT.2016.2533395.
4. KAUL S., GRUTESER M., RAI V., KENNEY J. *Minimizing age of information in vehicular networks* // Proc. of the 2011 8th Annual IEEE Communications Society Conference on Sensor, Mesh and ad hoc Communications and Networks. – IEEE, 2011. – P. 350–358.

5. KAUL S. K., YATES R. D., GRUTESER M. *Status updates through queues* // 46th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS). – 2012. – P. 1–6. – DOI: 10.1109/CISS.2012.6310931.
6. KOSTA A., PAPPAS N., AGELAKIS V. *Age of Information: A New Concept, Metrics and Tools* // Foundations and Trends in Networking. – 2017. – Vol. 12, No. 3. – P. 162–259. – DOI: 10.1561/13000000060.
7. ZHBANKOVA E., MANAEVA V., MARKOVA E., GAIDAMAKA YU. *The Age of Information in Wireless Cellular Systems: Gaps, Open Problems, and Research Challenges* // Sensors. – 2023. – Vol. 23, No. 19. – P. 8238. – DOI: 10.3390/s23198238.

**THE LAPLACE – STIELTJES TRANSFORMATION
OF THE DISTRIBUTION FUNCTION OF THE PEAK
AGE OF INFORMATION IN A TRANSMISSION
GROUP MODELED BY A TWO-NODE NETWORK**

Sergey Matyushenko, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Cand.Sc., assistant professor (matyushenko-si@rudn.ru).

Konstantin Samouylov, Federal Research Center «Computer Science and Control» of the Russian Academy of Sciences, Moscow, principal scientist, Doctor of Science. (samuylov-ke@rudn.ru).

Abstract: In this paper, we consider a two-node information transmission group consisting of a peripheral node (sender node), a control center (recipient node) and two serial communication channels between them. The process of transferring information from the sending node to the receiving node is modeled by means of a two-node queuing network with an arbitrary function for distributing intervals between requests and arbitrary service durations at each node of the network, i.e., a network that, according to Kendall's designations, is usually encoded as $G/G/1 - G/G/1$. In this case, the transmitted packets of information are modeled by requests, and the process of transmitting packets through the system channels is modeled by the maintenance procedure at the network nodes. The paper provides an expression for the Laplace – Stieltjes transformation of the stationary distribution function of the peak age of information – a metric that allows quantifying the “freshness” of information entering the receiving node in order to accept management decisions. This work continues the cycle of works by the authors devoted to the problem of analyzing the age of information, summarizing the results of the work of other authors, which is achieved through the most arbitrary assumptions about the distributions of the durations of generating and servicing applications in the network nodes. The correctness of the obtained results was verified on a number of special cases considered earlier, as well as by comparing the analytical results with the results of simulation modeling.

Keywords: information age, peak information age, queuing network, stationary distribution.

УДК 519.7

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.2

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.*

Поступила в редакцию 03.12.2023.

Дата опубликования 31.01.2024.

РЕАЛИЗАЦИЯ КОМБИНИРОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ВХОДОМ

Краснов Д. В.¹, Антипов А. С.²
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Объектом управления является однозвенный манипулятор с гибким шарниром, функционирующий в условиях параметрической неопределенности и воздействия внешних неконтролируемых возмущений. Динамика токового контура не учитывается. В качестве управления рассматривается ток якоря двигателя постоянного тока, который может быть пересчитан в крутящий момент, приложенный к валу редуктора. Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей заданные изменения углового положения манипулятора в следующих нетипичных предположениях: 1) измерениям доступно только текущее отклонение положения манипулятора от заданного сигнала (ошибка слежения); 2) множитель перед управлением точно не известен. Первый фактор предписывает переход к блочной форме «вход – выход» относительно ошибки слежения для решения задачи наблюдения и синтеза динамической обратной связи на основе смешанных переменных (комбинаций переменных состояния, внешних воздействий и их производных). К основным полученным научным результатам относится, во-первых, метод проектирования наблюдателя смешанных переменных минимально возможной размерности с кусочно-линейной коррекцией на основе измерений ошибки слежения. Для упрощения настройки параметров наблюдателя в одном алгоритме одновременно используются и принципы построения наблюдателя состояния, и дифференциатора внешних сигналов. Вторым основным результатом – метод формирования комбинированного управления с компенсацией согласованных возмущений в условиях неопределенного множителя перед управлением. Приведены результаты численного моделирования, которые демонстрируют робастность замкнутой системы и гарантированную стабилизацию ошибки слежения с заданной точностью при изменении внешних возмущений, задающих воздействия и неопределенных параметров в допустимых диапазонах.

Ключевые слова: однозвенный манипулятор с гибким шарниром, слежение, внешние возмущения, неопределенный вход, комбинированное управление, наблюдатель смешанных переменных.

¹ Дмитрий Валентинович Краснов, н.с. (dim93kr@mail.ru).

² Алексей Семенович Антипов, к.т.н. (scholess18@mail.ru).

1. Введение

Задачи управления механическими системами в разных постановках и предположениях рассматривались в рамках различных подходов, прежде всего с применением классических методов теории автоматического управления, таких как оптимальное управление [7, 12], построение ПИ- и ПИД- регуляторов [9, 13]. В настоящее время популярность приобрели нечеткие регуляторы и методы нейросетевого управления [11, 17]. Лучшая производительность, как правило, достигается при сочетании различных подходов.

Основные усилия специалистов направлены на разработку робастного и адаптивного управления в условиях параметрической неопределенности модели объекта и при воздействии на него внешних неконтролируемых возмущений. Отдельную проблему составляют задачи построения наблюдателей состояния, когда по разным причинам нельзя установить полный комплект датчиков [2]. Часто указанные проблемы рассматриваются по отдельности, когда к системе с параметрическими или внешними возмущениями конкретного типа можно применить известные подходы [10, 14, 20].

В данной работе на примере механического объекта управления с одним входом и одним выходом рассматривается проблема синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей отслеживание выходной переменной заданного сигнала в условиях параметрических и внешних (согласованных и несогласованных) возмущений, а также измерения только ошибки слежения. Цель состоит в разработке простого в вычислительной реализации робастного регулятора с минимальным расширением динамического порядка замкнутой системы. С этой целью модель объекта управления приводится к блочной форме «вход – выход» относительно ошибки слежения и смешанных переменных (комбинаций переменных состояния, внешних воздействий и их производных) [1]. В этой форме все неопределенности становятся согласованными, т.е. действуют по одному каналу с управлением. Однако множитель перед управлением точно

не известен, что является препятствием для реализации желаемого закона управления и компенсации возмущений.

Научная новизна предлагаемого подхода заключается в том, что, во-первых, проблемы оценивания неизвестных параметров, внешних возмущений и неизмеряемых переменных состояния рассматриваются в комплексе и сводятся к наблюдению смешанных переменных с помощью редуцированного наблюдателя состояния. Для упрощения его настройки в одном алгоритме одновременно реализуются принципы построения наблюдателя состояния и дифференциатора внешних сигналов. Во-вторых, управляющее воздействие представлено в виде суммы двух слагаемых с номинальным (известным) коэффициентом усиления и неопределенным множителем. Сформулированы условия, при которых второе слагаемое может быть включено в состав смешанной переменной, которая описывает согласованные возмущения. Этот прием позволил синтезировать наблюдатель смешанных переменных и реализовать комбинированное управление с простой линейной составляющей, стабилизирующей ошибку слежения. Вторая составляющая комбинированного управления, которая содержит оценку согласованного возмущения, полученную с помощью наблюдателя, компенсирует его воздействие и обеспечивает инвариантность к возмущениям в координатном базисе смешанных переменных.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 приводится описание математической модели объекта управления, ее особенностей и выдвигаемых предположений, формулируется постановка задачи. В разделе 3 описывается преобразование исходной модели к блочной форме «вход – выход» относительно ошибки слежения, на основе которой в разделе 4 синтезируется редуцированный наблюдатель смешанных переменных, а в разделе 5 – выполняется синтез комбинированного управления. В разделе 6 приведены результаты численного моделирования разработанных алгоритмов.

2. Описание модели объекта управления. Постановка задачи

В качестве объекта управления рассматривается однозвенный манипулятор, эластично соединенный с валом редуктора, динамика токового контура не учитывается. Математическая модель включает четыре связанных обыкновенных дифференциальных уравнения [16]:

$$(1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = a_{21}(x_3 - x_1) - a_{22} \sin(x_1) + f_2(t),$$

$$(2) \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = -a_{43}(x_3 - x_1) - a_{44}x_4 + f_4(t) + a_{45}u,$$

где $x_1, x_2 \in R$ и $x_3, x_4 \in R$ – угловые положения и скорости звена манипулятора и вала редуктора соответственно; a_{ij} – положительные конструктивные коэффициенты [5]; $f_2(t), f_4(t)$ – соответственно несогласованные и согласованные (т.е. действующие по одному каналу с управлением) внешние неконтролируемые возмущения; u – ток якоря, который рассматривается как управляющее воздействие.

Рассматривается задача отслеживания выходной переменной $x_1(t)$ заданного сигнала $g(t)$ в следующих предположениях:

– прямым измерениям доступна только ошибка слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$, шумы в измерениях отсутствуют; датчик положения имеет высокое разрешение;

– задание $g(t)$ является допустимым и гладким, его производные ограничены, но неизвестны;

– внешние возмущения $f_2(t), f_4(t)$ и конструктивные коэффициенты a_{ij} точно не известны и могут меняться в известных диапазонах; все функции подсистемы (1) – гладкие, в подсистеме (2) допускаются негладкие;

– система (1)–(2) при отсутствии внешних возмущений ($f_2(t) \equiv 0, f_4(t) \equiv 0$) является управляемой и наблюдаемой относительно выходной переменной $x_1(t)$ во всех диапазонах неопределенных параметров, в частности, при всех $a_{21} > 0, a_{45} > 0$. Произведение этих коэффициентов представимо в виде

$$(3) \quad b = a_{21}a_{45} = b_0 + \hat{b} > 0, \quad b_0 > 0,$$

где b_0 – номинальное (известное) значение.

В сделанных предположениях ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей в замкнутой системе стабилизацию ошибки слежения с заданной точностью в установившемся режиме:

$$(4) \quad |e_1(t)| = |x_1(t) - g(t)| \leq \delta, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Данная задача включает решение следующих подзадач: 1) приведение системы (1)–(2) к блочной форме «вход – выход» относительно ошибки слежения и смешанных переменных с согласованным возмущением и определенным входом; 2) построение редуцированного наблюдателя для оценивания смешанных переменных и согласованного возмущения по измерениям ошибки слежения; 3) синтез комбинированного управления по полученным оценкам, которое линеаризует замкнутую систему.

3. Переход в координатный базис смешанных переменных

В сделанных предположениях для системы (1)–(2) существует невырожденная замена переменных

$$(5) \quad \begin{aligned} e_1 &= x_1 - g, \quad e_2 = x_2 - \dot{g} + k_1 e_1, \\ e_3 &= a_{21} x_3 + w_2 + k_2 e_2, \quad e_4 = a_{21} x_4 + w_3 + k_3 e_3, \end{aligned}$$

где $e_i \in R$, $i = 1, \dots, 4$, – смешанные переменные, они являются комбинацией переменных состояния системы (1)–(2), внешних возмущений и их производных, а также производных задающих воздействий,

$$w_2 = -a_{21} x_1 - a_{22} \sin(x_1) + f_2(t) - \ddot{g} + k_1(x_2 - \dot{g}),$$

$$w_3 = \frac{d}{dt} w_2 + k_2(a_{21} x_3 + w_2).$$

После выполнения замены переменных (5) система (1)–(2) будет представлена в блочной форме «вход – выход» с замкнутыми линейными локальными связями [1], входом (управлением) с определенным коэффициентом b_0 (3) и согласованным возмущением:

$$(6) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2, \quad \dot{e}_2 = -k_2 e_2 + e_3, \\ \dot{e}_3 &= -k_3 e_3 + e_4, \quad \dot{e}_4 = b_0 u + e_5, \quad k_i = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

В качестве согласованного возмущения выступает смешанная переменная

$$e_5 = a_{21}(-a_{43}(x_3 - x_1) - a_{44}x_4 + f_4(t)) + \\ + \frac{d}{dt}w_3 + k_3(a_{21}x_4 + w_3) + \hat{b}u,$$

которая зависит от параметров и переменных состояния системы (1)–(2), внешних воздействий и их производных

$$\dot{f}_2(t), \ddot{f}_2(t), f_4(t), g(t), g^{(i)}(t), i = \overline{1,4}.$$

Сюда включена также часть управления с неопределенным множителем $\hat{b}u$ (3) [19]. Предполагается, что в процессе управления все смешанные переменные в системе (6) ограничены по модулю известными положительными константами:

$$(7) \quad |e_i(0)| \leq E_i, |e_i(t)| \leq \bar{E}_i, i = \overline{1,5}, t \geq 0.$$

Эти оценки рассчитываются для «худшего» случая и будут конкретизированы ниже.

Форма (6), которая управляема и наблюдаема относительно выхода $e_1(t)$, является основой и для построения динамического наблюдателя, и синтеза комбинированного управления. Обе задачи решаются относительно смешанных переменных (5).

4. Синтез редуцированного наблюдателя смешанных переменных

Для синтеза обратной связи, обеспечивающей достижение цели управления (4), нужно получить оценки смешанных переменных $e_i(t)$, $i = 2, \dots, 5$, по измерениям ошибки слежения $e_1(t)$. Для решения этой задачи вводится наблюдатель смешанных переменных минимально возможного динамического порядка как копия системы (6), где $u(t)$ полагается известной функцией времени. В отличие от стандартных подходов [8, 15, 18, 19], уравнение, описывающее динамику согласованного возмущения $e_5(t)$, в построения не вводится. Таким образом, осуществляется редукция динамического порядка подсистемы наблюдения, которая будет включать четыре дифференциальных уравнения при наличии пяти смешанных переменных.

Для упрощения настройки наблюдателя была модифицирована схема, предложенная в работах [4, 5]: в одном алгоритме одновременно реализуются принципы построения и наблюдателя состояния, и дифференциатора внешних сигналов [3, 6]. Эта модифицированная динамическая модель имеет вид:

$$(8) \quad \dot{z}_i = -k_i z_i + v_i, \quad i = \overline{1, 3}; \quad \dot{z}_4 = b_0 u + v_4,$$

где $z_i \in R$ – переменные состояния, $v_i \in R$ – корректирующие воздействия наблюдателя – дифференциатора. Введем ошибки наблюдения $\varepsilon_i = e_i - z_i \in R, i = 1, \dots, 4$, и в силу (6), (8) составим виртуальную систему

$$(9) \quad \dot{\varepsilon}_i = -k_i \varepsilon_i + e_{i+1} - v_i, \quad i = \overline{1, 3}; \quad \dot{\varepsilon}_4 = e_5 - v_4,$$

где смешанные переменные $e_i(t), i = 2, \dots, 5$, рассматриваются как внешние ограниченные возмущения (7).

В системах (8), (9) установим следующие начальные значения:

$$(10) \quad \begin{aligned} z_1(0) = e_1(0) &\Rightarrow \varepsilon_1(0) = 0; \\ z_i(0) = 0 &\Rightarrow \varepsilon_i(0) = e_i(0), \quad |\varepsilon_i(0)| \leq E_i, \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Настройка наблюдателя – дифференциатора (8) выполняется так, чтобы последовательно обеспечить стабилизацию с заданной точностью ошибок наблюдения и их производных (9):

$$(11) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1(t) \approx 0, \dot{\varepsilon}_1(t) \approx 0 &\Rightarrow v_1(t) \approx e_2(t), \\ \varepsilon_i(t) \approx 0, \dot{\varepsilon}_i(t) \approx 0 &\Rightarrow v_i(t) \approx e_{i+1}(t), \quad i = 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Тогда в качестве оценочных сигналов смешанных переменных можно использовать и переменные наблюдателя, и его корректирующие воздействия. Введем кусочно-линейные корректирующие воздействия как функции от измеряемого выхода $e_1(t)$ и переменных наблюдателя в виде

$$(12) \quad \begin{aligned} v_1 = m_1 \text{sat}(l_1(e_1 - z_1)), \quad v_i = m_i \text{sat}(l_i(v_{i-1} - z_i)), \\ m_i, l_i = \text{const} > 0, \quad i = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где

$$m_i \text{sat}(l_i \varepsilon_i) = \begin{cases} m_i \text{sign}(l_i \varepsilon_i), & |\varepsilon_i| > 1/l_i, \\ m_i l_i \varepsilon_i, & |\varepsilon_i| \leq 1/l_i; \end{cases}$$

$$m_i \text{sat}(l_i(v_{i-1} - z_i)) = \begin{cases} m_i \text{sign}(l_i(v_{i-1} - z_i)), & |(v_{i-1} - z_i)| > 1/l_i, \\ m_i l_i(v_{i-1} - z_i), & |(v_{i-1} - z_i)| \leq 1/l_i. \end{cases}$$

Кусочно-линейные корректирующие воздействия с насыщением (12) являются непрерывным негладким гибридом линейных и разрывных функций и имеют по два настраиваемых параметра. Первый параметр m_i – это амплитуда, его нужно выбрать так, чтобы обеспечить сходимость ошибки наблюдения $\varepsilon_i(t)$ в малую окрестность нуля, где корректирующее воздействие v_i является линейным (12). Вторым параметром l_i – это большой коэффициент, его величина обратно пропорциональна радиусу линейной зоны, от которой зависит точность стабилизации.

Сформулируем достаточные условия для настройки наблюдателя – дифференциатора, обеспечивающие заданную точность решения задачи наблюдения.

Лемма. Если в системе (9)–(10), (12) выполняются условия (7), то тогда можно обеспечить выполнение приближенных равенств (11) с заданной точностью на следующих временных интервалах:

$$(13) \quad \begin{aligned} & |\varepsilon_1(t)| \leq 1/l_1 \leq \beta, \quad t \geq 0; \\ & |e_2(t) - v_1(t)| \leq \alpha_1, \quad t \geq t_1; \\ & |v_{i-1}(t)| \leq 1/l_i \Leftrightarrow |\varepsilon_i(t)| \leq \alpha_{i-1} + 1/l_i \leq \beta_i, \quad t \geq t_{2i-2}; \\ & \qquad \qquad \qquad \leq \beta_i/2 \quad \leq \beta_i/2 \\ & |e_{i+1}(t) - v_i(t)| \leq \alpha_i, \quad t \geq t_{2i-1}, \quad i = 2, 3, 4, \end{aligned}$$

где

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_6 < t_7, \quad t_2 > t_1 + 1/k_2, \quad t_4 > t_3 + 1/k_3, \quad t_6 > 2t_5,$$

$t_7 = T$ – общее время оценивания, при выборе коэффициентов кусочно-линейных корректирующих воздействий (12) на основе следующих неравенств:

$$m_1 > \bar{E}_2, m_i \geq \frac{E_i k_i + \bar{E}_{i+1} (k_i (t_{2i-2} - t_{2i-3}) + 1)}{k_i (t_{2i-2} - t_{2i-3}) - 1}, \quad i = 2, 3,$$

$$m_4 \geq \frac{E_4 + \bar{E}_5 t_6}{t_6 - 2t_5};$$

$$(14) \quad l_1 \geq \max \left\{ \frac{1}{\beta_1}; \frac{1}{m_1} \left(\frac{1}{t_1} \ln \frac{2(m_1 - \bar{E}_2)}{\beta_2} - k_1 \right) \right\};$$

$$l_i \geq \max \left\{ \frac{2}{\beta_i}; \frac{1}{m_i} \left(\frac{1}{t_{2i-1} - t_{2i-2}} \ln \frac{2(m_i - \bar{E}_{i+1})}{\beta_{i+1}} - k_i \right) \right\}, \quad i = 2, 3;$$

$$l_4 \geq \max \left\{ \frac{2}{\beta_4}; \frac{1}{m_4 (t_7 - t_6)} \ln \frac{m_4 - \bar{E}_5}{\alpha_4} \right\}.$$

В доказательстве, которое здесь не приводится, реализуется метод разделения движений в задаче наблюдения (по аналогии со схемами, представленными в работах [3–6]).

Из (14) также следуют условия

$$k_1 < \frac{1}{t_1} \ln \frac{2(m_1 - \bar{E}_2)}{\beta_2},$$

$$k_i < \frac{1}{t_{2i-1} - t_{2i-2}} \ln \frac{2(m_i - \bar{E}_{i+1})}{\beta_{i+1}}, \quad i = 2, 3.$$

Таким образом, с помощью наблюдателя (8), (12) за конечное время можно восстановить смешанные переменные системы (6). Из неравенств (13) следует, что оценочные сигналы

$$v_i(t) \approx e_{i+1}(t), \quad i = 1, 2, 3$$

содержат меньшую погрешность, чем оценочные сигналы

$$z_i(t) \approx e_i(t), \quad i = 2, 3, 4.$$

Поэтому в качестве оценок смешанных переменных в законе управления будут использованы корректирующие воздействия, а именно:

$$(15) \quad v_i(t) = e_{i+1}(t) \pm \alpha_i, \quad i = \overline{1, 4}, \quad t \geq T.$$

5. Синтез комбинированного управления

Для стабилизации системы (6) применим комбинированное управление, которое состоит из двух частей. Первая часть – это обычная и легко реализуемая линейная стабилизирующая составляющая. Вторая часть компенсирует согласованное возмущение $e_5(t)$. В условиях полной информации статическая обратная связь

$$(16) \quad u = -(k_4 e_4 + e_5) / b_0, \quad k_4 = \text{const} > 0, b_0 > 0$$

полностью линеаризует замкнутую виртуальную систему (6), (16), а именно:

$$(17) \quad \begin{aligned} \dot{e}_1 &= -k_1 e_1 + e_2, \quad \dot{e}_2 = -k_2 e_2 + e_3, \\ \dot{e}_3 &= -k_3 e_3 + e_4, \quad \dot{e}_4 = -k_4 e_4. \end{aligned}$$

Переменные системы (17) последовательно «снизу вверх» экспоненциально сходятся к нулю

$$|e_i(t)|_{t \rightarrow +\infty} = O(\exp(-k_i t)), \quad i = \overline{4, 1}.$$

Соответственно, в замкнутой системе (1)–(2), (16) обеспечивается экспоненциальная стабилизация ошибки слежения:

$$(18) \quad \begin{aligned} |x_1(t) - g_1(t)|_{t \rightarrow +\infty} &= O(\exp(-k_1 t)) + \\ &+ \frac{1}{k_1} \left(O(\exp(-k_2 t)) + \frac{1}{k_2} \left(O(\exp(-k_3 t)) + \frac{1}{k_3} (\exp(-k_4 t)) \right) \right). \end{aligned}$$

Как видим, система (18) является более удобной для анализа устойчивости по сравнению с классической канонической системой, так как здесь можно выбирать коэффициенты усиления, непосредственно влияющие на скорость стабилизации выходной переменной.

В условиях неполной информации с использованием наблюдателя смешанных переменных (8) и оценочных сигналов (15) базовый закон комбинированного управления (16) будет реализован в виде

$$(19) \quad u = -(k_4 v_3 + v_4) / b_0.$$

На рис. 1 приведена блок-схема замкнутой системы (1)–(2), (19) с наблюдателем смешанных переменных (8), (12).

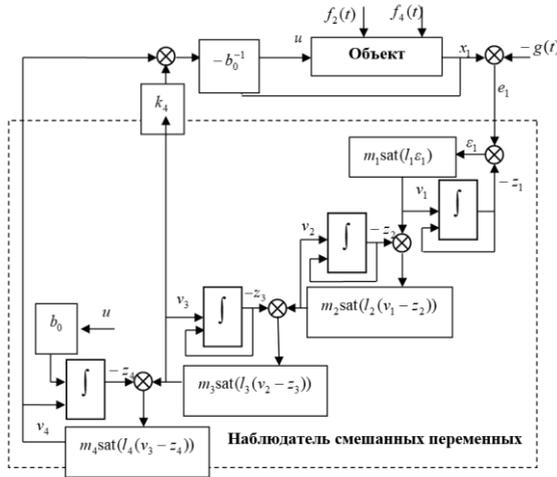


Рис. 1. Блок-схема замкнутой системы (1)–(2), (19)

В замкнутой системе (6) с динамической обратной связью (19) последнее уравнение в силу (15) принимает вид

$$(20) \quad \dot{e}_4 = -k_4 e_4 + \phi(t), \quad |\phi(t)| \leq k_4 \alpha_3 + \alpha_4, \quad t \geq T,$$

где $\phi(t) = k_4(e_4 - v_3) + e_5 - v_4$, $k_4 \alpha_3 + \alpha_4$ – некомпенсируемые малые погрешности оценивания.

С учетом (20) для смешанных переменных (5) можно конкретизировать области изменения (7) при известных допустимых границах их начальных значений:

$$|e_4(t)| \leq E_4 + \frac{|\phi(t)|}{k_4} = \bar{E}_4,$$

$$|e_i(t)| \leq E_i + \frac{\bar{E}_{i+1}}{k_i} = \bar{E}_i, \quad i = 3, 2, 1, \quad t \geq 0.$$

Для ошибки слежения в установившемся режиме имеем оценку:

$$|e_1(t)| = |x_1(t) - g(t)| \leq \frac{k_4 \alpha_3 + \alpha_4}{k_1 k_2 k_3 k_4}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Желаемая точность стабилизации ошибки слежения (4) достигается заданием точности решения задачи наблюдения (13) с учетом выбранных коэффициентов усиления k_i .

Таким образом, наблюдатель (8), построенный как копия виртуальной системы (6), дает оценки смешанных переменных, которые непосредственно используются в законе управления (19). Это очень упрощает структуру регулятора, так как не нужно выполнять прямых и обратных замен переменных в реальном времени. Более того, наблюдатель (8) может повысить производительность замкнутой системы даже в условиях полной определенности и полных измерений. Это связано с тем, что аналитический вид выражений $e_4(t)$, $e_5(t)$ очень громоздкий и вычисление этих формул в реальном времени может потребовать гораздо больше времени, чем счет динамической модели (8), (12), которая имеет минимально допустимый динамический порядок, равный четырем. Реализация разработанного подхода может потребовать меньшую вычислительную сложность по сравнению с методами адаптивного управления, которые также подстраиваются под разные рабочие режимы объекта и практически не опираются на знание его модели. Однако в отличие от методов адаптивного управления для предложенного подхода необходимо, чтобы система была устойчивой, т.е. выполнялись условия (7). В отличие от ПИД-регуляторов предложенный подход позволяет адаптироваться к разным рабочим режимам объекта, но настройка его параметров может быть более трудоемкой.

6. Результаты численных экспериментов

Численное моделирование проводилось в среде MATLAB-Simulink. При интегрировании дифференциальных уравнений применялся явный метод Эйлера с постоянным шагом 10^{-4} (с). Номинальные значения параметров объекта полагались следующими:

$$(21) \quad \begin{aligned} a_{210} &= 8,8 \text{ (1/с}^2\text{)}, \quad a_{220} = 29,43 \text{ (1/с}^2\text{)}, \quad a_{430} = 9,9 \text{ (1/с}^2\text{)}, \\ a_{440} &= 2,475 \text{ (1/с)}, \quad a_{450} = 13,5 \text{ (рад/(А} \cdot \text{с}^2\text{))}. \end{aligned}$$

При этом для синтеза системы управления использовались только значения a_{210} и a_{450} , которые определяли множитель при управлении $b_0 = a_{210}a_{450} = 118,8$ (3) в преобразованной системе (6). Кроме того, были известны допустимые области изменения неопределенностей. Их значения не превышали 70 % от значений номинальных параметров (21). С учетом этой информации и желаемой точности оценивания смешанных переменных $|e_4(t) - v_3(t)| \leq \alpha_3 = 0,02$ (рад/с³) и $|e_5(t) - v_4(t)| \leq \alpha_4 = 5$ (рад/с⁴) на основе (14) были приняты следующие коэффициенты наблюдателя (8):

$$l_1 = 110, l_2 = 840, l_3 = 510, l_4 = 5,$$

$$(22) m_1 = 6 \text{ (рад/с)}, m_2 = 15 \text{ (рад/с}^2\text{)},$$

$$m_3 = 35 \text{ (рад/с}^3\text{)}, m_4 = 280 \text{ (рад/с}^4\text{)}.$$

Исходя из желаемого времени регулирования 3 (с) и заданной точности в установившемся режиме $|x_1(t) - g(t)| \leq 0,005$ (рад), $t \rightarrow +\infty$ были выбраны коэффициенты регулятора (19):

$$(23) k_1 = 2 \text{ (1/с)}, k_i = 5 \text{ (1/с)}, i = \overline{2,4}.$$

Для моделирования были заданы следующие значения параметров объекта:

$$a_{21} = 10,56 \text{ (1/с}^2\text{)}, a_{22} = 35,32 \text{ (1/с}^2\text{)}, a_{43} = 11,88 \text{ (1/с}^2\text{)},$$

$$a_{44} = 2,97 \text{ (1/с)}, a_{45}(t) = (1 + 0,2 \sin(t))a_{450} \text{ (рад/(А} \cdot \text{с}^2\text{))}.$$

Они отличались от номинальных значений (21) не более чем на 20%. При этом параметр $a_{45}(t)$ был функцией, зависящей от времени. Функции, описывающие внешние возмущения, имели вид:

$$f_2(t) = 0,04 \sin(2t) \text{ (рад/с}^2\text{)}, f_4(t) = 0,08t \text{ (рад/с}^2\text{)},$$

где $f_4(t)$ – пилообразная функция с главным периодом 2 (с).

Требовалось, чтобы угловое положение маятника отслеживало заданный сигнал:

$$g(t) = 0,18 \sin(t) + 0,02 \text{ (рад)}.$$

При этом начальные условия объекта и наблюдателя были следующими:

$$(24) \quad \begin{aligned} x_i(0) &= 0, \quad i = \overline{1,4}, \\ z_1(0) &= e_1(0), \quad z_i(0) = 0, \quad i = 2,3,4. \end{aligned}$$

Для сравнения моделировались две замкнутые системы:

1) эталонная система с законом управления $u = -(k_4 e_4 + e_5)/b_0$ (16) в предположении, что все значения параметров объекта, внешние воздействия и их производные известны и все сигналы доступны для измерений;

2) замкнутая система с законом управления $u = -(k_4 v_3 + v_4)/b_0$ (19) и информационной поддержкой наблюдателя (8), когда из параметров объекта известны только номинальные значения a_{210} и a_{450} (21) и измеряется лишь ошибка слежения e_1 (разработанный подход).

Для этих замкнутых систем на рис. 2а приведены графики задающего воздействия $g(t)$ и выходной переменной $x_1(t)$, которая его отслеживает, на рис. 2б – графики ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$. На рис. 3 представлены графики управления $u(t)$.

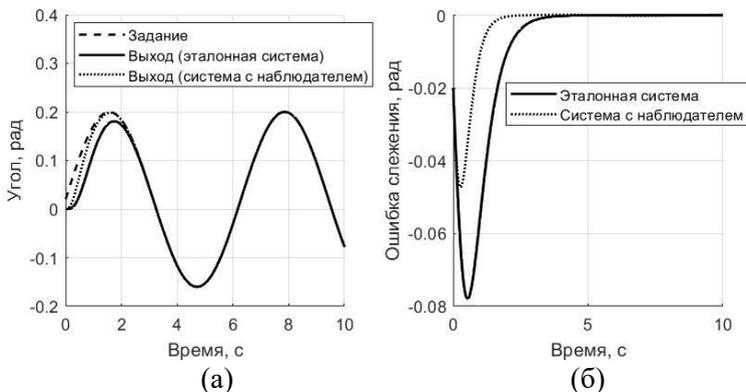


Рис. 2. Графики задающего воздействия $g(t)$, углового положения $x_1(t)$ (а) и ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ (б)

Для замкнутой системы с наблюдателем на рис. 4а приведены графики смешанной переменной $e_4(t)$ и ее оценки $v_3(t)$, полученной с помощью наблюдателя (8). На рис. 4б показаны гра-

фики ошибки оценивания $e_4(t) - v_3(t)$; на рис. 5а показаны графики смешанной переменной $e_5(t)$, которая трактовалась как внешнее возмущение, а также ее оценки $v_4(t)$. На рис. 5б – графики ошибки оценивания $e_5(t) - v_4(t)$.

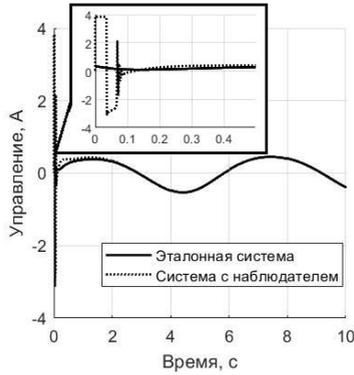


Рис. 3. Графики управления $u(t)$

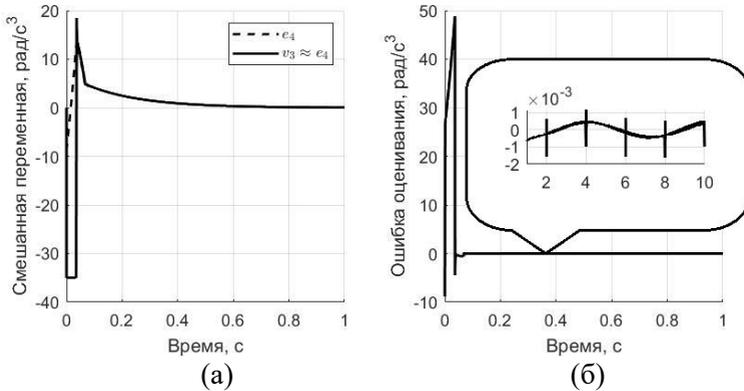


Рис. 4. Графики смешанной переменной $e_4(t)$ и ее оценки $v_3(t)$ (а) и ошибки оценивания $e_4(t) - v_3(t)$ (б)

В таблице 1 для замкнутых систем приведены значения следующих показателей качества регулирования: времени регулирования t_p (с): $|e_1(t)| \leq 0,005$ (рад), $t \geq t_p$; перерегулирования для ошибки слежения $e_{1,\max}$ (рад): $e_{1,\max} \geq |e_1(t)|$, $t \geq 0$, средне-

квадратической ошибки слежения в установившемся режиме Δ_1 (рад); максимального значения модуля управления u_{\max} (А): $u_{\max} \geq |u(t)|, t \geq 0$.

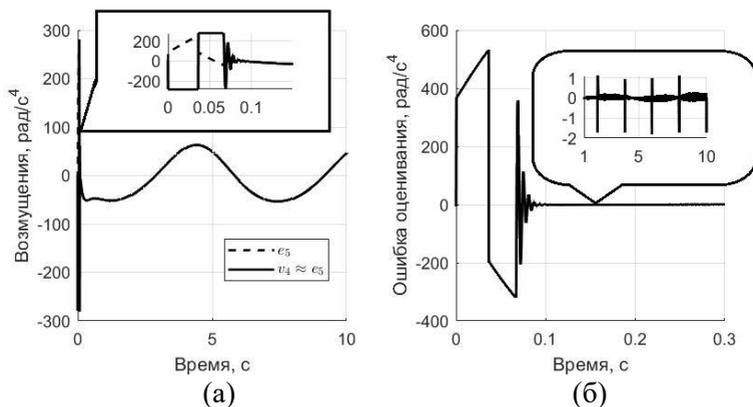


Рис. 5. Графики смешанной переменной $e_5(t)$, ее оценки $v_4(t)$ (а) и ошибки оценивания $e_5(t) - v_4(t)$ (б)

Таблица 1. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Замкнутая система	
	Эталонная	С наблюдателем
t_p , с	2,3695	1,2293
$e_{1,\max}$, рад	0,0780	0,0473
Δ_1 , рад	$7,04 \cdot 10^{-6}$	$1,03 \cdot 10^{-4}$
u_{\max} , А	0,5325	3,83

Из рис. 2 следует, что цель управления достигнута: ошибка слежения сходится в заданную окрестность. Были получены следующие значения показателей качества оценивания сигналов $e_4(t)$ и $e_5(t)$, на основе которых формировалось управление (19):

$$\begin{aligned}
 &|e_4(t) - v_3(t)| \leq 48,90 \text{ (рад/с}^3\text{)}, t \geq 0, \\
 &|e_5(t) - v_4(t)| \leq 532,74 \text{ (рад/с}^4\text{)}, t \geq 0, \\
 (25) \quad &|e_4(t) - v_3(t)| \leq 0,02 \text{ (рад/с}^3\text{)}, t \geq 0,1 \text{ (с)}, \\
 &|e_5(t) - v_4(t)| \leq 5 \text{ (рад/с}^4\text{)}, t \geq 0,1 \text{ (с)}, \\
 &|e_4(t) - v_3(t)| \leq 0,0017 \text{ (рад/с}^3\text{)}, t \geq 1 \text{ (с)}, \\
 &|e_5(t) - v_4(t)| \leq 1,88 \text{ (рад/с}^4\text{)}, t \geq 1 \text{ (с)}.
 \end{aligned}$$

Ошибки оценивания в переходном процессе до 532,74 (рад/с⁴) (25) приводят к увеличению максимального значения управления примерно в 7 раз для замкнутой системы с наблюдателем по сравнению с эталонной системой (таблица 1). При этом ухудшается точность отслеживания заданного сигнала примерно в 14,6 раз (для эталонной системы теоретически достигается асимптотическая сходимость ошибки слежения). Однако ошибки оценивания сходятся достаточно быстро (менее чем за 0,2 с) (25)), и значения времени регулирования и перерегулирования для ошибки слежения не превышают значений, полученных для эталонной системы (таблица 1). Заметим, что для эталонной системы требуется точное знание не только всех значений параметров объекта, но также и внешних воздействий вместе с их производными. Организация таких измерений нереализуема на практике. При этом значения показателей качества, полученных для неопределенной системы с наблюдателем, могут соответствовать заданным требованиям.

Для проверки робастности разработанного закона управления (19) было проведено три эксперимента с численным моделированием. В ходе экспериментов реальные значения параметров объекта были константами, превышающими номинальные значения (21) на 10, 40 и 70% соответственно. В этих экспериментах использовались другое задающее воздействие и другие внешние возмущения (по сравнению с прошлыми экспериментами):

$$\begin{aligned}
 f_2(t) &= 0,04 \cos t \text{ (рад/с}^2\text{)}, f_4(t) = 0,16 |\sin(t)| \text{ (рад/с}^2\text{)}, \\
 g(t) &= 0,1 \cos t - 0,13 \sin t \text{ (рад)}.
 \end{aligned}$$

При этом коэффициенты наблюдателя и регулятора оставались теми же (22), (23). Начальные условия объекта и наблюдателя задавались согласно (24).

Для эксперимента с изменением значений параметров объекта на 70% от номинальных на рис. 6а приведены графики задающего воздействия $g(t)$ и выходной переменной $x_1(t)$, которая его отслеживает. На рис. 6б – графики ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$. Графики для случаев с изменением значений параметров на 10% и 40% от номинальных не приводятся, поскольку они практически полностью повторяют графики, представленные на рис. 6. В таблице 2 для всех экспериментов приведены значения показателей качества регулирования, аналогичных тем, что были в таблице 1.

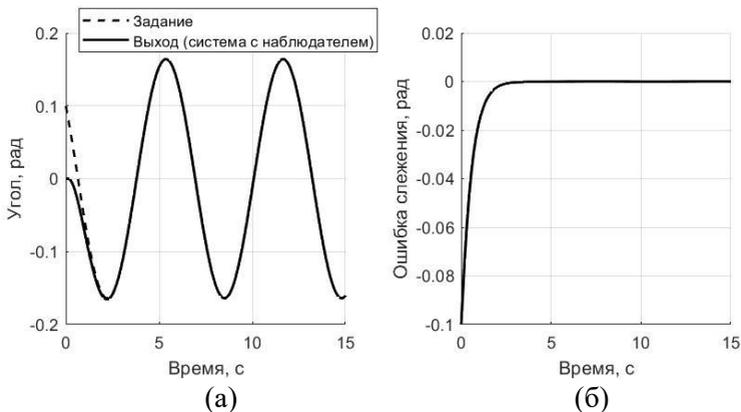


Рис. 6. Графики задающего воздействия $g(t)$, углового положения $x_1(t)$ (а) и ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t)$ (б) (значения параметров объекта отличались от номинальных на 70%)

Таблица 2. Значения показателей качества регулирования

Показатель	Вариация параметров		
	10%	40%	70%
t_p, c	1,6140	1,6166	1,6197
$e_{1,max}, рад$	0,1	0,1	0,1
$\Delta_1, рад$	$8 \cdot 10^{-5}$	$8,28 \cdot 10^{-5}$	$8,46 \cdot 10^{-5}$
$u_{max}, А$	3,83	3,83	3,83

Из таблицы 2 следует, что значения показателей качества регулирования остаются практически неизменными при разной вариации параметров объекта.

Таким образом, результаты численного моделирования подтверждают робастность разработанного метода синтеза следящей системы в условиях неполных измерений и при наличии неопределенности как в описании модели объекта управления, так и среды его функционирования.

7. Заключение

Цель работы заключалась в разработке простой в вычислительной реализации и робастной системы слежения для однозвенного манипулятора с гибким шарниром без учета динамики токового контура. Задача осложнялась действием на систему параметрических и внешних возмущений, как согласованных, так и несогласованных. Допускалось, что согласованные возмущения могут быть негладкими. При этом измерения была доступна только ошибка слежения. Цель была достигнута за счет приведения системы к блочной форме «вход – выход» относительно ошибок слежения, в которой все неопределенности находились в последнем уравнении и становились согласованными. На основе этой формы синтезирован комбинированный закон управления. Для его информационного обеспечения был разработан наблюдатель смешанных переменных с кусочно-линейными корректирующими воздействиями. Эти корректирующие воздействия позволяют ограничить всплески оценочных сигналов и предоставляют оценки смешанных переменных с заданной точностью. Как следствие, отслеживание заданного сигнала также происходит с заданной точностью.

В предложенной блочной форме использованы линейные локальные связи, за счет выбора коэффициентов которых можно непосредственно влиять на скорость стабилизации смешанных переменных и ошибки слежения. Поэтому блочная форма вход-выход является более удобным инструментом для анализа устойчивости по сравнению с канонической системой. При этом

разработанные наблюдатели смешанных переменных имеют наименьший возможный порядок.

Результаты моделирования подтвердили эффективность разработанного подхода. Без ограничения общности его можно распространить на полноприводные электромеханические системы с несколькими степенями свободы.

Литература

1. АХОБАДЗЕ А.Г., КРАСНОВА С.А. *Решение задачи слежения в условиях неопределенности на основе совместной блочно-канонической формы управляемости и наблюдаемости* // Управление большими системами. – 2009. – Вып. 24. – С. 34–80.
2. БУСУРИН В.И., ШТЕК С.Г., КОРОБКОВ В.В., ЖЕГЛОВ М.А., КОРОБКОВ К.А. Исследование компенсационного преобразователя ускорения с дифференциальным оптоическим считыванием // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2021. – №3. – С. 29–38.
3. КОКУНЬКО Ю.Г., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Каскадный синтез дифференциаторов с кусочно-линейными корректирующими воздействиями* // Автоматика и телемеханика. – 2021. – №7. – С. 37–68.
4. КРАСНОВ Д.В. *Синтез наблюдателя пониженного порядка для полноприводной электромеханической системы* // Управление большими системами. – 2022. – Вып. 96. – С. 31–48.
5. КРАСНОВ Д.В., АНТИПОВ А.С. Синтез двухконтурного наблюдателя в задаче управления однозвенным манипулятором в условиях неопределенности // Проблемы управления. – 2021. – №4. – С. 27–39.
6. КРАСНОВА С.А. *Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей* // Управление большими системами. – 2018. – Вып. 76. – С. 6–25.
7. INDRI M., BELLISSIMO M., PESCE S., PERNA V. *A Robust H_∞ Application for Motor-Link Control Systems of Industrial Manipulators* // Applied Sciences. – 2022. – Vol. 12. – P. 1–22.

8. KHALIL H.K., PRALY L. *High-Gain Observers in Nonlinear Feedback Control* // Int. Journal of Robust and Nonlinear Control. – 2014. – Vol. 24, No. 6. – P. 993–1015.
9. LI H., HUI Y., WANG Q., WANG H., WANG L. *Design of Anti-Swing PID Controller for Bridge Crane Based on PSO and SA Algorithm* // Electronics. – 2022. – Vol. 11, No. 19. – P. 1–21.
10. LE-TIEN L., ALBU-SCHÄFFER A. *Robust Adaptive Tracking Control Based on State Feedback Controller With Integrator Terms for Elastic Joint Robots With Uncertain Parameters* // IEEE Trans. on Control Systems Technology. – 2018. – Vol. 26, No. 6. – P. 2259–2267.
11. LING S., WANG H., LIU P.X. *Adaptive fuzzy tracking control of flexible-joint robots based on command filtering* // IEEE Trans. on Industrial Electronics. – 2019. – Vol. 67, No. 5. – P. 4046–4055.
12. MILIĆ V., KASAC J., LUKAS M. *Min–Max Optimal Control of Robot Manipulators Affected by Sensor Faults* // Sensors. – 2023. – Vol. 23. – P. 1–28.
13. MOHAMED K.T., ABDEL-RAZAK M.H., HARAZ E.H., ATA A.A. *Fine tuning of a PID controller with inlet derivative filter using Pareto solution for gantry crane systems* // Alexandria Engineering Journal. – 2021. – Vol. 61, No. 9. – P. 6659–6673.
14. MUSTAFA M.M., HAMARASH I., CRANE C.D. *Dedicated Nonlinear Control of Robot Manipulators in the Presence of External Vibration and Uncertain Payload* // Robotics. – 2020. – Vol. 9, No. 2. – P. 1–16.
15. NGUYEN D.G., TRAN D.T., AHN K.K. *Disturbance Observer-Based Chattering-Attenuated Terminal Sliding Mode Control for Nonlinear Systems Subject to Matched and Mismatched Disturbances* // Applied Sciences. – 2021. – Vol. 11. – P. 1–23.
16. SPONG M. *Modeling and control of elastic joint robots* // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1987. – Vol. 109. – P. 310–319.

17. TEMKIN I., DERYABIN S., KONOV I., KIM M. *Possible Architecture and Some Neuro-Fuzzy Algorithms of an Intelligent Control System for Open Pit Mines Transport Facilities* // *Frontiers in Artificial Intelligence and Applications*. – 2019. – Vol. 320. – P. 412–420.
18. ULLAH H., MALIK F.M., RAZA A., MAZHAR N., KHAN R., SAEED A., AHMAD I. *Robust Output Feedback Control of Single-Link Flexible-Joint Robot Manipulator with Matched Disturbances Using High Gain Observer* // *Sensors*. – 2021. – Vol. 21. – P. 1–22.
19. WANG H., ZHANG Z., TANG X., ZHAO Z., YAN Y. *Continuous output feedback sliding mode control for underactuated flexible-joint robot* // *Journal of the Franklin Institute*. – 2022. – Vol. 359. – P. 7847–7865.
20. ZHANG Q., MU M., WANG X. *A Modified Robotic Manipulator Controller Based on Bernstein-Kantorovich-Stancu Operator* // *Micromachines*. – 2023. – Vol. 14, No. 1. – P. 1–21.

IMPLEMENTATION OF COMBINED CONTROL IN THE TRACKING SYSTEM OF A SINGLE-LINK MANIPULATOR WITH AN UNCERTAIN INPUT

Dmitry Krasnov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, researcher (dim93kr@mail.ru)

Aleksey Antipov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc. (scholess18@mail.ru).

Abstract: As a control plant, we consider a single-link manipulator with a flexible joint that functions under parametric uncertainty and external uncontrollable disturbances. The dynamic of the current loop is not introduced. The armature current of the DC motor is considered as the control, which can be converted into torque applied to the gearbox shaft. We pose the problem of synthesizing dynamic feedback that provides specified changes in the angular position of the manipulator under the following atypical assumptions: 1) only the current deviation of the manipulator position from the reference signal (tracking error) is available for measurements; 2) the multiplier before the control (input matrix) is not known exactly. The first factor motivates the use the transformation to the block form of input-output with respect to the tracking error for solving the problem of observation and synthesis of dynamic feedback based on mixed variables (combinations of state variables, external influences and their derivatives). The main contributions include, firstly,

a method for designing a mixed variable observer of minimum possible order with piecewise linear corrective actions. This observer recovers mixed variables from tracking error measurements. To simplify its tuning, both the principles of construction of the state observer and the differentiator of external signals are simultaneously used in one algorithm. The second main contribution is a method for the formation of combined control with compensation of matched disturbances under conditions of uncertain multiplier before control. The numerical simulation results are presented. They demonstrate the robustness of the closed-loop system and guaranteed stabilization of the tracking error with a given accuracy when external disturbances, reference actions, and uncertain parameters change within acceptable ranges.

Keywords: single-link manipulator with flexible joint, tracking, external disturbances, uncertain input, combined control, mixed variable observer.

УДК 62.50

ББК 32.817

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.3

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.А. Уткиным.*

Поступила в редакцию 09.10.2023.

Опубликована 31.01.2024.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА НЕЯВНОЙ АДАПТАЦИИ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ К ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМ ПАРАМЕТРАМ ТВЕРДОГО ТЕЛА¹

Жуков П. И.²

(Старооскольский технологический институт
им. А.А. Угарова (филиал) НИТУ «МИСИС», Старый Оскол)

Глуценко А. И.³

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Работа посвящена анализу алгоритмической устойчивости и сложности модели нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией к теплофизическим параметрам нагреваемого твердого тела. В основе метода неявной адаптации лежит замена таких параметров как теплоемкость, теплопроводность и плотность в уравнении нестационарной теплопроводности на два безразмерных настраиваемых коэффициента, равномерно дискретизированных по всему времени жизни модели, с дальнейшей их настройкой при помощи модифицированного метода стохастического градиентного спуска. Для того чтобы обеспечить стабильность расчетов такой модели на ЭВМ, в предыдущих исследованиях были определены ограничения, которые позволили получить устойчивость, равную 64%. Предполагалось, что оставшиеся 36% были следствием нарушения этих ограничений в процессе коррекции. В данной работе предлагаются алгоритмические ограничения, которые позволяют решить данную проблему. Повторные эксперименты показали, что применение предложенного подхода позволяет повысить устойчивость с 64% до 98%. Также в процессе исследования было проведено аналитическое сравнение классов алгоритмической сложности для моделей с неявной адаптацией и с «групповой явной» адаптацией. В результате было установлено, что предложенный численный метод обладает более низкой алгоритмической сложностью, чем конечно-разностный метод с «групповой явной» адаптацией.

Ключевые слова: сеточная модель, нестационарная теплопроводность, адаптация, градиентный метод, алгоритмическая сложность, вычислительная устойчивость.

¹ Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента РФ (МД.1787.2022.4).

² Пётр Игоревич Жуков, аспирант (Zhukov.petr86@yandex.ru).

³ Антон Игоревич Глуценко, д.т.н., в.н.с. (aiglush@ipu.ru).

1. Введение

На сегодняшний день задачи моделирования тепловых полей в твердых телах различной геометрии находят свое применение во многих областях науки и техники. Среди них наиболее популярными приложениями такого рода моделей можно считать: 1) моделирование нагрева твердых тел в печах и других тепловых агрегатах с целью оптимизации используемой теплотехнологии [16, 23, 33, 34]; 2) моделирование нагрева с целью восстановления теплофизических параметров материала [6, 25]; 3) моделирование нагрева отдельных конструктивных частей тепловых объектов [29, 30].

В зависимости от состояния теплового поля во времени выделяют два способа формализации: 1) на основе дифференциального уравнения стационарной теплопроводности [18]; 2) на основе дифференциального уравнения нестационарной теплопроводности [20]. Для большинства практических задач особый интерес представляет процесс эволюции теплового поля во времени, ввиду чего наиболее широкое применение находят модели на основе нестационарного дифференциального уравнения. Проблемам численного моделирования нестационарного и стационарного нагрева посвящены работы А.И. Канарейкина [13-15], Д.В. Озеркина [21, 22], С.О. Саидова [31], В.К. Толстых [26], А.Ф. Албу [1], А.Б. Бирюкова [2] и др.

Активные исследования в области практического применения математических моделей теплопроводности, в частности нестационарной, показали, что важной частью моделирования является решение задачи адаптации. Под адаптацией тепловой модели нестационарной теплопроводности понимают необходимость определения коэффициентов модели, исходя из области её конечного приложения. В частности, такие параметры как степень черноты поверхности нагреваемого тела, его теплофизические коэффициенты или граничные условия в общем требуют идентификации в каждом отдельном случае применения численной модели. Эта задача является весьма нетривиальной, особенно в случае адаптации одновременно к группе различных по своим свойствам твердых тел. Проблемам параметрической адаптации

численных моделей нестационарной теплопроводности к различным параметрам посвящены работы Е.В. Торопова [27, 28], ранние работы А.Б. Бирюкова [3], некоторые из работ авторов [4, 11] и др.

В работе [11] была предложена математическая модель нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией к теплофизическим параметрам нагреваемого твердого тела и условиям теплообмена на границе. Для данной модели был предложен численный метод, который позволяет решать задачу неявной адаптации, восстанавливая упомянутые параметры из статистических данных о процессе нагрева, адекватных граничным условиям III-го рода. Преимуществом данных решений над ранее рассмотренными является тот факт, что одновременно: 1) восстановление теплофизических параметров в неявном виде производится по статистическим данным о процессах нагрева в конкретном агрегате; 2) сохраняется интерпретируемая структура модели. Данная работа посвящена углубленному анализу алгоритмической сложности и устойчивости такой модели и расширяет результаты работы [10].

Сначала рассмотрим проблему адаптации к теплофизическим параметрам твердого тела и условиям теплообмена на границе, а также предложенную в [11] модель детальной.

2. Постановка задачи

Упомянутая ранее модель нестационарной теплопроводности базируется на одноименном дифференциальном уравнении. В общей постановке данное уравнение, имеет вид (1):

$$(1) \quad \dot{T} = \alpha \cdot \nabla^2 T + F(\bullet),$$

где ∇ – оператор набла; T – температура нагреваемого твердого тела, К; \dot{T} – производная температуры нагреваемого твердого тела по времени, К; α – коэффициент теплопроводности твердого тела, $\text{м}^2/\text{с}$; $F(\bullet)$ – функция внутреннего источника тепла в твердом теле. Дифференциальный закон (1) устанавливает соответствие между изменением температурного поля во времени и величиной его дивергенции в твердом объекте определенной геометрии.

Уравнение (1) применяют для тел различной геометрической формы и пространственной мерности с различными граничными условиями. Наиболее популярными для решения упомянутых ранее задач являются граничные условия III-го рода, так как большинство моделируемых тепловых процессов в промышленности являются высокотемпературными. Граничные условия III-го рода позволяют учесть нелинейность процесса нагрева при одновременном конвективном и радиационном режимах теплообмена на границе исследуемого тела:

$$(2) \quad -\lambda \frac{\partial T}{\partial l} = \kappa \cdot (U(t) - T_{06}) + \varepsilon \cdot \sigma \cdot ([U(t)]^4 - T_{06}^4),$$

где l – нормаль к поверхности твердого тела; λ – коэффициент теплопроводности твердого тела, Вт/(м·К); T_{06} – температура объекта, К; $U(t)$ – температура теплоносителя, определенная как некоторая функция от времени, К; κ – коэффициент теплообмена твердого тела, Вт/(м²·К); ε – приведенная степень черноты границы твердого тела; σ – постоянная Стефана – Больцмана, принятая равной $5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² К⁴).

Однако учет этой нелинейности при двумерном и трехмерном случае описания твердого тела сильно ограничивает получение аналитического решения. Ввиду этого факта большинство работ, опирающихся на дифференциальные задачи нестационарной теплопроводности, решаются численными методами [2, 17, 19, 32]. Однако подобным решениям свойственна проблема их адаптации к теплофизическим параметрам нагреваемого тела. Одно из ее возможных решений было предложено авторами в [10–12].

Данная работа продолжает исследования, изложенные в упомянутых работах [10–12]. В них рассматривалось двумерное уравнение нестационарной теплопроводности, которое имело вид

$$(3) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda(T)}{\rho(T) \cdot c(T)} \cdot \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right],$$

где $\lambda(T)$ – функция теплопроводности от температуры; $\rho(T)$ – функция плотности от температуры; $c(T)$ – функция теплоемкости от температуры.

Рассматривая численные методы решения дифференциального уравнения (3), использовался метод конечных разностей [24], согласно которому все непрерывные дифференциальные операторы аппроксимируются разностными аналогами. Их значения определены в узлах некоторых пространственных и временных сетей, которыми покрывается исследуемая геометрия твердого тела.

В совокупности с методом покоординатного расщепления уравнение (3) можно рассматривать как систему линейных уравнений вида

$$(4) \quad \begin{cases} \rho(T) \cdot c(T) \cdot \left[\frac{T_{x,y}^{n+\frac{1}{2}} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \lambda(T) \cdot \left[\frac{T_{x+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2 \cdot T_x^{n+\frac{1}{2}} + T_{x-1}^{n+\frac{1}{2}}}{h_x^2} \right], \\ \rho(T) \cdot c(T) \cdot \left[\frac{T_{x,y}^{n+1} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \lambda(T) \cdot \left[\frac{T_{y+1}^{n+1} - 2 \cdot T_y^{n+1} + T_{y-1}^{n+1}}{h_y^2} \right], \end{cases}$$

где h_x – шаг сети вдоль Ox ; h_y – шаг сети вдоль Oy ; τ – шаг вдоль временной оси. Аналогичные процедуры выполняются и для граничных условий III-го рода (2), после чего всё сводится к решению двух трехточечных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Это решение хорошо известно и изложено, например, в работе [24].

На рис. 1 приведена геометрическая постановка задачи.

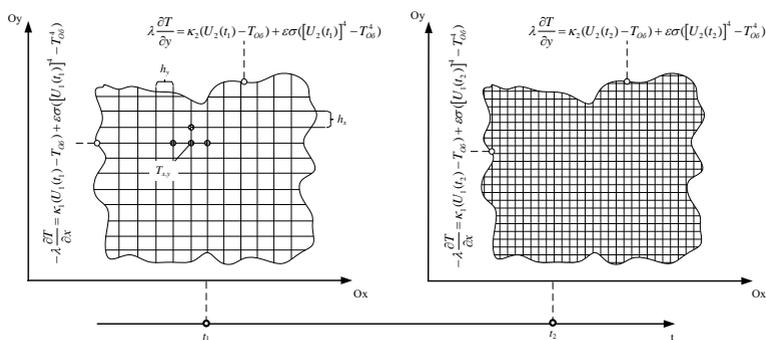


Рис. 1. Геометрическая постановка задачи двумерной нестационарной теплопроводности

Как уже упоминалось, основной проблемой изложенного выше подхода является необходимость адаптации полученной численной модели к теплофизическим параметрам нагреваемого твердого тела, а также к условиям его теплообмена на границе с теплоносителем. В общем случае проблема такой адаптации сводится к поиску и восстановлению правых частей тетрады параметров (5) при помощи «явных» внешних моделей:

$$(5) \quad \lambda = f_{\lambda}(T); c = f_c(T); \rho = f_{\rho}(T); \kappa = f_{\kappa}(T).$$

На сегодняшний день существует множество различных способов решения этой задачи, начиная от обратных коэффициентных задач теплопроводности [1, 8, 9] и заканчивая восстановлением правых частей (5) при помощи регрессионных моделей по дискретным замерам натурального эксперимента или из специализированной справочной литературы [5, 7].

Необходимость «явной» адаптации становится отдельной проблемой, когда речь заходит о «групповой явной» адаптации. Это ситуация, когда правые части для параметров (5) необходимо восстановить для твердых тел из схожих материалов. В таком случае делается предположение, что адаптация параметров (5) ведется к некоторому «усредненному» абстрактному материалу, из которого выполнены все твердые тела, для которых необходимо выполнить моделирование нестационарной теплопроводности.

При этом очевидно, что чем крупнее группа, тем более универсальной получается модель на основе системы (4). Однако имеются две существенные проблемы: 1) при укрупнении группы растет алгоритмическая сложность модели численного решения; 2) при укрупнении группы растет ошибка усреднения.

Проиллюстрируем первое утверждение. Известно, что конечно-разностная сеточная модель имеет алгоритмическую сложность порядка $O(N \cdot (H \cdot W))$, где H – количество шагов вдоль Ox по пространственной сети, W – вдоль Oy по пространственной сети, N – количество шагов по временной сети. В случае равномерности сетей алгоритмическая сложность будет иметь вид $O(N \cdot P^2)$ [12]. При этом та же модель с «групповой явной» адаптацией в лучшем случае будет иметь алгоритмическую сложность

$O(N \cdot [3kP^4])$ (см. раздел 4), так как в каждой точке пространственной сети потребуется рассчитать теплофизические параметры для k усредняемых материалов. Разница в полиномиальной сложности между двумя упомянутыми функциями подтверждает первое утверждение.

Проиллюстрируем второе утверждение. Пусть в каждой точке пространственной сети есть некоторая эталонная температура $\Theta_{x,y}^t$, и расчетная температура $T_{x,y}^t$, т.е. $H \cdot W$ ошибок аппроксимации:

$$(6) \quad \varepsilon_{H \cdot W}^t = \sum_{y=1}^H \sum_{x=1}^W \left[\Theta_{x,y}^t - T_{x,y}^t (H, W, N, f_M(T_{x,y}^{t-1})) \right].$$

Согласно теории разностных схем аппроксимация в точке t зависит от размерности временной и пространственных сетей. При наличии внешней модели «групповой явной» адаптации $f_M(T_{x,y}^{t-1})$ температура в точке становится зависимой еще и от нее. При этом есть N наборов таких точек ($H \cdot W$), ввиду чего ошибка накапливается аддитивно от одного временного слоя к другому:

$$(7) \quad \varepsilon_{MKP} = \sum_{t=1}^N \varepsilon_{H \cdot W}^t; \quad \varepsilon_{MKP} \in O(h^2) + O(\tau) + O(M_k),$$

где M_k – это модель «групповой явной» адаптации по k усредняемым материалам. Таким образом можно заметить, что согласно (7) ошибка тем меньше, чем меньше h^2 , τ и M_k , что подтверждает второе утверждение.

В работе [11] предлагается альтернативное решение проблемы «групповой явной» адаптации – неявная адаптация. Она заключается в замене теплофизических параметров нагреваемого твердого тела на безразмерные настраиваемые параметры:

$$(8) \quad \begin{cases} \overrightarrow{\omega}_x \cdot \left[\frac{T_{x,y}^{n+1} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \overrightarrow{\varphi}_x^{(n)} \cdot \left[\frac{T_{x+1}^{n+1} - 2 \cdot T_x^{n+1} + T_{x-1}^{n+1}}{h_x^2} \right], \\ \overrightarrow{\omega}_y^{(n)} \cdot \left[\frac{T_{x,y}^{n+1} - T_{x,y}^n}{\tau} \right] = \overrightarrow{\varphi}_y^{(n)} \cdot \left[\frac{T_{y+1}^{n+1} - 2 \cdot T_y^{n+1} + T_{y-1}^{n+1}}{h_y^2} \right]. \end{cases}$$

А затем – их дальнейшая дискретизация вдоль всего времени жизни модели:

$$(9) \quad \begin{aligned} \overrightarrow{\omega_l^{(n)}} &= [\omega_l^{(1)} \quad \omega_l^{(2)} \quad \omega_l^{(3)} \quad \dots \quad \omega_l^{(N)}], \\ \overrightarrow{\varphi_l^{(n)}} &= [\varphi_l^{(1)} \quad \varphi_l^{(2)} \quad \varphi_l^{(3)} \quad \dots \quad \varphi_l^{(N)}], \end{aligned}$$

где N – размерность временной сети, $l \in \{x, y\}$. Аналогичным (9) образом происходит дискретизация и коэффициента теплообмена на границе твердого тела (κ), который также равномерно распределяется вдоль всей временной прямой. Затем для модели (8) определяются некоторые траектории управления (u_1 и u_2), которые приводят к смене температуры между временными слоями. Опираясь на эти траектории, ставится вариационная задача:

$$(10) \quad \begin{cases} \{u_1(n), u_1(n+1), \dots, u_1(N)\}, E_x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^V (y_i - g_1(T_x^{(n)}, u_1(n)_i))^2 \rightarrow \min, \\ \{u_2(n), u_2(n+1), \dots, u_2(N)\}, E_y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^V (y_i - g_2(T_y^{(n)}, u_2(n)_i))^2 \rightarrow \min, \end{cases}$$

где $u_l(n) = \{\varphi_x^{(n)}, \omega_x^{(n)}, \kappa_x^{(n)}\}$ $u_2(n) = \{\varphi_y^{(n)}, \omega_y^{(n)}, \kappa_y^{(n)}\}$; y_i – это некоторая эталонная температура уже нагретого вещества, например, измеренная пирометром после выгрузки заготовки из печи; V – количество наблюдений в выборке вариаций. Настройка φ , ω , κ происходит согласно предложенного закона:

$$(11) \quad \begin{aligned} \Delta \varphi_l^{(n)} &= - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}}{\eta} + \eta \right| \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}; \quad \Delta \omega_l^{(n)} = - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \omega_l^{(n)}}}{\eta} + \eta \right| \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \omega_l^{(n)}}; \\ \Delta \kappa_p^{(n)} &= - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \kappa_p^{(n)}}}{\eta} + \eta \right| \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \kappa_p^{(n)}}, \end{aligned}$$

где E_l – ошибка, определенная в уравнении (10) ($l = x$ или $l = y$); k – эмпирически подбираемый параметр; η – шаг коррекции. Это модифицированный метод градиентного спуска, позволяющая предотвратить слишком быстрое затуханием градиента ошибки. Более детально эта модель описана в работе [11], а предложенный численный метод настройки (11) – в работе [12].

В работе [10] приводится анализ алгоритмической устойчивости и сложности описанного вкратце выше численного метода. Полученные критерии устойчивости позволили добиться процента устойчивых запусков процедуры неявной адаптации, равного 64%, что не является достаточным для практического применения предлагаемого решения. Поэтому в данной работе ставится задача разработки модифицированного критерия устойчивости, позволяющего увеличить данный процент. Описанию предложенной модификации посвящен следующий раздел статьи.

3. Дополнительный критерий устойчивости

В упомянутой работе [10] выдвигалась гипотеза о том, что устойчивость модифицированной модели может быть гарантирована устойчивостью классической конечно-разностной модели при определенных условиях.

Там же, в предположении $t_1 \leq t_{\max} \leq t_2$ и $X_1 \leq X \leq X_2$, где X – характеристический размер твердого тела по пространству; t_{\max} – общее время нагрева, были выведены эти условия, которые представляют собой систему ограничений:

$$\begin{aligned} & \varphi_l^{(n)} > 0, \omega_l^{(n)} > 0, N \geq L^2, \\ (12) \quad & \omega_l^{(n)} \in \left(10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) + 1}; (+D_{\max} - \gamma) \cdot 10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) + 1} \right), \end{aligned}$$

где D_{\max} – это программные ограничения хранения вещественных чисел; γ – это эмпирически выбираемый параметр смещения относительно максимально поддерживаемой величины мантиссы вещественного числа на ЭВМ (D_{\max}). Были проведены эксперименты с ограничениями (12), которые показали, что алгоритмическая устойчивость модели составляет 64%. При этом было сделано предположение, что остальные 36% неустойчивых запусков модели связаны с тем, что введенные ограничения нарушаются в процессе коррекции параметров численным методом (11).

Для решения упомянутой проблемы в данной статье предлагается алгоритмическое решение, которое для параметров φ и ω

имеет вид (13) при $\Delta\omega_l^{(n)} \geq 0$ и $\Delta\varphi_l^{(n)} \geq 0$ и (14) – при $\Delta\omega_l^{(n)} < 0$ или $\Delta\varphi_l^{(n)} < 0$, и вид (15) – для параметров κ :

$$(13) \begin{cases} \Delta\varphi_l^{(n)} = - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}}{\eta} \right| \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}, \\ \omega_{corr} = \left[10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) + 1} \right], \\ \Delta\omega_l^{(n)} = - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}}}{\eta} \right| \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \varphi_l^{(n)}} \cdot \omega_{corr}, \end{cases}$$

$$(14) \begin{cases} \Delta\varphi_l^{(n)} = new(\varphi_l^{(n)}), \\ \omega_{corr} = \left[10^{\lg(2 \cdot \varphi_l^{(n)}) + \lg\left(\frac{t_2 - t_1}{X_2^2 - X_1^2}\right) + 1} \right], \\ \Delta\omega_l^{(n)} = -(0 - \Delta\omega_l^{(n)}) + \Delta\varphi_l^{(n)} \cdot \omega_{corr}, \end{cases}$$

$$(15) \Delta\kappa_p^{(n)} = \begin{cases} - \left| \frac{k \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \kappa_p^{(n)}}}{\eta} + \eta \right| \cdot \frac{\partial E_l^{(n)}}{\partial \kappa_p^{(n)}}, & \text{если } \kappa_p^{(n)} > 0, \\ new(\kappa_p^{(n)}), & \text{если } \kappa_p^{(n)} \leq 0, \end{cases}$$

Здесь «new(•)» – это метод повторной инициализации параметра, алгоритм которого приведен на рис. 2.

Алгоритму передается указатель на отрицательный параметр, а сама функция отбирает сначала 20% параметров, индексы которых являются соседними для выбранного, и инициализирует их повторно в соответствии с условиями (12). Это позволяет в процессе коррекции параметров численным методом (11) сдвигать решение из неустойчивой области.

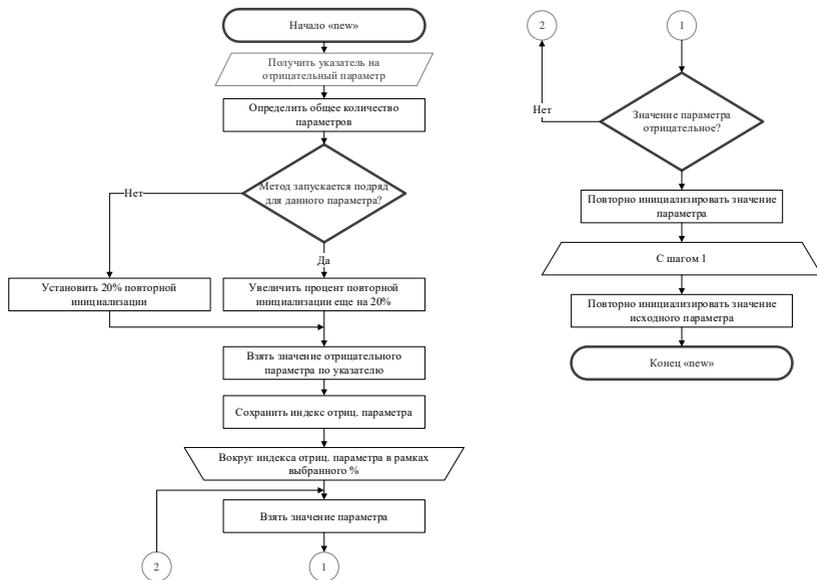


Рис. 2. Алгоритм повторной инициализации отрицательного значения параметра и значений параметров, индексы которых являются соседними для отрицательного параметра

Для того чтобы убедиться в работоспособности предложенного алгоритмического решения, было решено повторить эксперименты, изложенные в работе [10]. Для этого были сформированы (как и в [10]) модель с ограничениями (12) – (M3) и две контрольные модели: 1) модель без дополнительных ограничений (M1); 2) модель, реализующая только ограничение вида $N \geq L^2$ (M2). Все модели имели одинаковую структуру по пространственным сетям ($W = H = 25$) и различную структуру по временным сетям ($N_{M1} = 50, N_{M2} = N_{M3} = 625$).

Эксперимент в целом повторяет условия из работы [10]. Контрольными точками остаются 200 (устойчивый запуск) и 400 (успешный устойчивый запуск) пройденных итераций коррекции параметров. Общее количество запусков моделей равно 60, а статистические данные, используемые в качестве входов, были взяты из неоднократно упомянутого предыдущего исследования. Они, в свою очередь, были получены с одного из действующих

тепловых агрегатов металлургического комбината, расположенного в Белгородской области.

Обозначим численные эксперименты над моделями М1–М3 без учета алгоритмических ограничений (13)–(15) как «Эксперимент №1», а с учетом этих ограничений – как «Эксперимент №2». Результаты экспериментов представлены на рис. 3 и 4.

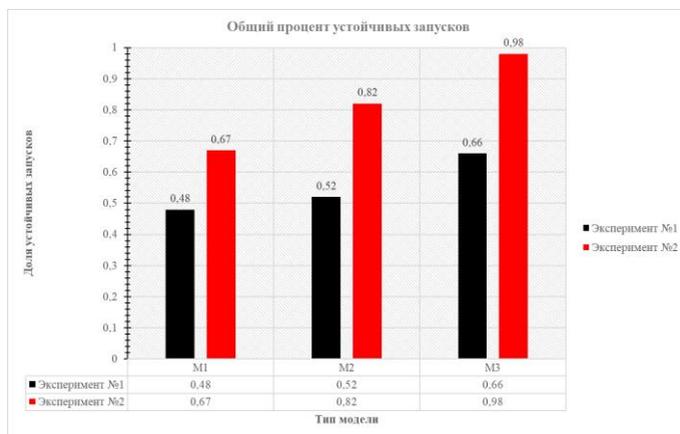


Рис. 3. Общее количество устойчивых запусков моделей

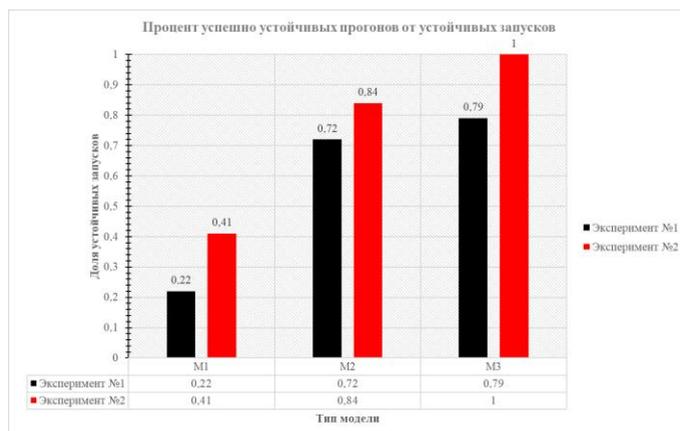


Рис. 4. Результаты успешных устойчивых прогонов моделей от их устойчивых запусков

Применение ограничений (12) и алгоритмических ограничений (13)–(15) позволили повысить общее количество устойчивых запусков модели (200 итераций) до 98% (рис. 3), а количество устойчивых полных циклов (400 итераций) от устойчивых запусков – до 100% (рис. 4).

Оставшиеся 2% неустойчивых запусков, возможно, связаны со стохастическим характером представленного ранее алгоритма в совокупности с неидеальной реализацией всего комплекса программ на языке высокого уровня.

Тем не менее полученный результат валидирует корректность сделанного в [10] предположения. В процессе коррекции параметров действительно нарушалось условие (12), что приводило к резкому ухудшению качества модели. Это же следует и из приведенного выше повторного эксперимента. Предложенное решение позволило решить эту проблему.

4. Аналитическое исследование алгоритмической сложности предложенной модели

В предыдущем исследовании [10] было приведено доказательство, что класс алгоритмической сложности предложенной модели (8)–(11) эквивалентен классу алгоритмической сложности классической модели конечных разностей. Там же было проиллюстрировано, что обе функции сложности в худшем случае относятся к классу $O(n^4)$, где $n = N = W^2 = H^2$. Здесь W – размерность ортогональной сети вдоль Ox , а H – размерность ортогональной сети вдоль Oy ; N – размерность временной сети.

В данной работе предлагается проанализировать функции сложности в лучшем возможном случае, а также проанализировать класс алгоритмической сложности классической конечно-разностной модели с учетом адаптации.

Рассмотрим класс алгоритмической сложности предложенного численного метода. Для этого рассмотрим следующую функцию, восстановленную на основе алгоритмов:

$$(16) f_1(H, W, N) = \sum_{t=0}^N \left(\sum_{j=0}^W \left[\sum_{i=1}^H 1 + \sum_{i=H-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^H \left[\sum_{j=1}^W 1 + \sum_{j=W-2}^0 1 \right] \right) + \sum_{t=0}^N 4.$$

Рассмотрим симметричный случай, когда $H = W = P$ и $N \neq W^2 = H^2$, а каждый из параметров удовлетворяет требованию (17) $N, H, W \in \mathbb{N}$.

Тогда, упрощая (16), получим функцию, описывающую алгоритмический класс сложности предложенного численного метода:

$$(18) f_2(H, W, N) = (4 \cdot P^2 + 2 \cdot P) \cdot (N + 1) + 4 \cdot (N + 1).$$

Поскольку настройка методом (11) предполагает, что имеется некоторая статистика, а полный цикл настройки будет включать проход по этой статистике, то функция в конечном виде будет относиться к классу сложности $O(V \cdot (N \cdot P^2 + N))$.

Теперь рассмотрим функцию, восстановленную на основе модели классической нестационарной теплопроводности с методом «групповой адаптации»:

$$(19) f_2(H, W, N) = \sum_{\tau=0}^N \left[\left(\sum_{j=0}^W \left[\sum_{i=1}^H 1 + \sum_{i=H-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^H \left[\sum_{j=1}^W 1 + \sum_{j=W-2}^0 1 \right] \right) \cdot \right. \\ \left. 3 \cdot \sum_{m=0}^k \left[\left(\sum_{j=0}^W \left[\sum_{i=1}^H 1 + \sum_{i=H-2}^0 1 \right] + \sum_{i=0}^H \left[\sum_{j=1}^W 1 + \sum_{j=W-2}^0 1 \right] \right) \right] \right].$$

Упростим (19), предполагая также равномерные сети и симметричную алгоритмическую сложность расчета вдоль каждой из них. В результате получим функцию следующего вида:

$$(20) f_2(H, W, N) = (12 \cdot k \cdot P^4 + 6 \cdot P^2) \cdot (N + 1).$$

Таким образом, алгоритмическая сложность полученного решения будет относиться к классу сложности $O(N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4])$, как и было упомянуто ранее. Имея два класса сложности, можно провести их аналитическое сравнение.

Определим, какая из функций прирастает быстрее при стремлении отдельных её параметров к бесконечности. Для начала зафиксируем пространственные параметры, предположив, что $H = W = P = const$, $k = const$, $V = const$:

$$(21) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4]} = \frac{V \cdot P^2 + V}{3 \cdot k \cdot P^4}.$$

Как можно заметить из (21), предел отношения двух классов сложности при N стремящейся к бесконечности дает некоторое

константное число. Это означает, что функция в числителе и в знаменателе отношения прирастает с одинаковой скоростью. Это также становится очевидно, если проанализировать две функции напрямую. Сложность обеих функций по N равна $O(N)$.

Далее, сделаем предположение, что $k = const$, $V = const$, $N = const$ и также возьмем предел отношения, но уже при стремлении к бесконечности размерности пространственных сетей:

$$(22) \lim_{P \rightarrow \infty} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4]} = 0.$$

Результат (22) говорит о том, что функция в знаменателе прирастает быстрее по P , чем в числителе. Это также является очевидным из базового анализа функций сложности ($O(P^2)$ против $O(P^4)$).

Рассмотрев отношение двух функций, как некоторую третью функцию со множеством входов $f(N, P, V, k)$, можно проанализировать её предел при стремлении к бесконечности отдельных входных параметров. Наибольший интерес при сравнении вызывает анализ скорости приращения этих двух функций в зависимости от изменения параметров V и k , и от частных подклассов сложности, связанных с этими параметрами:

$$(23) \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4]} = 0.$$

Как можно заметить из (23), предел отношения равен нулю. Это значит, что при последовательном приближении к бесконечности параметров V и k функция в числителе по-прежнему прирастает медленней функции в знаменателе вне зависимости от величины P . Отдельно следует проанализировать скорость возрастания функции в разрезе подклассов $O(V \cdot P^2)$ и $O(k \cdot P^4)$. Для этого необходимо взять предел отношения при V и k стремящихся к бесконечности при зафиксированном $P=1$:

$$(24) \lim_{\substack{V \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \frac{V \cdot (N \cdot P^2 + N)}{N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4]} = 0 \Big|_{P=1}.$$

Как можно заметить из (24) предел отношения по-прежнему равен нулю. Это также подтверждает, что алгоритмическая слож-

ность предложенного в [11] численного метода прирастает медленней, чем алгоритмическая сложность численной конечно-разностной модели с «групповой явной» адаптацией даже в рамках подкласса сложности без учета степенного влияния P .

Для того чтобы подтвердить анализ, проведенный ранее, было решено выполнить простой численный эксперимент и измерить скорость решения двух математических моделей на ЭВМ. Для сравнения бралась программная реализация упомянутых моделей, написанная на языке C# для фреймворка «*Net Core*». Тестирование велось на ЭВМ со следующими характеристиками:

1. Центральное процессорное устройство: Intel(R) Core(TM) i5-10400F.
2. Базовая тактовая частота процессора: 2,90 ГГц.
3. Объем оперативной памяти: 32 Гб.
4. Тактовая частота оперативной памяти: 2667 МГц.

Результаты тестирования приведены в таблице 1. Как можно заметить, результаты подтверждают сделанные ранее аналитические предположения. Алгоритм конечно-разностного моделирования нестационарной теплопроводности с «групповой явной» адаптацией значительно сильнее прирастает по временным затратам, чем численный метод с неявной адаптацией.

Таблица 1. Результаты тестов скорости приращения функций

	Параметры	$N = 100,$ $P = 10$	$N = 625,$ $P = 25$	$N = 10000,$ $P = 100$
$f_2(\bullet)$	$k = 1$	0,00103 с	0,25256 с	1034,5 с
	$k = 3$	0,000103 с	0,7577 с	3103 с
	$k = 5$	0,00000018 с	1,2628 с	5172 с
$f_1(\bullet)$	$V = 5000$	0,0172 с	0,6735 с	172 с
	$V = 10000$	0,0345 с	1,347 с	345 с
	$V = 20000$	0,069 с	2,69 с	690 с

Это позволяет считать предложенную математическую модель и численный метод в работе [11] эффективными относительно частных подклассов сложности $O(V \cdot P^2)$ и $O(k \cdot P^4)$.

5. Заключение

В результате проведенного исследования было предложено алгоритмическое решение проблемы устойчивости численной модели нестационарной теплопроводности с неявной адаптацией. В результате применения этого решения удалось повысить количество устойчивых начальных циклов коррекции (до 200 итераций) с 66% до 98%, а количество устойчивых полных циклов коррекции (400 и более итераций) от устойчивых начальных циклов – до 100%.

Предложенное решение (13)–(15) исчерпывает проблему, изложенную авторами ранее в работе [10], связанную с нарушением ограничений (12) в процессе коррекции параметров модели. Таким образом, в процессе работы остаются лишь 2% случаев нарушения нормального режима работы модели, которые связаны с транслятором и исполняемой средой языка высокого уровня, на котором реализуется модель.

Кроме вышеизложенного, в процессе исследования был проведен комплексный анализ алгоритмической сложности предлагаемого численного метода, изложенного в работе [11]. В результате аналитического исследования функций сложности было установлено, что классическая конечно-разностная модель с «групповой явной» адаптацией относится к классу $O(N \cdot [3 \cdot k \cdot P^4])$, а функция сложности предложенной численной модели – к классу $O(V \cdot (N \cdot P^2 + N))$. При помощи анализа скорости приращений этих функций при стремлении отдельных параметров к бесконечности было установлено, что предложенный численный метод является более эффективным, чем конечно-разностный метод с «групповой явной» адаптацией.

Литература

1. АЛБУ А.Ф., ЗУБОВ В.И. *О восстановлении коэффициента теплопроводности вещества по температурному полю* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2018. – Т. 58, № 10. – С. 1642–1657.

2. БИРЮКОВ А.Б., ГИНКУЛ С.И., ГНИТИЕВ П.А., ОЛЕШКЕВИЧ Т.Г. *Математическое моделирование процессов тепловой обработки металла в печах с учетом окалинообразования* // Сталь. – 2016. – №8. – С. 85–90.
3. БИРЮКОВ А.Б., ГНИТИЁВ П.А., ОЛЕШКЕВИЧ Т.Г. *Адаптация математической модели процессов тепловой обработки металла в печах, учитывающей окалинообразование* // Вестник Донецкого национального технического университета. – 2017. – №2. – С. 30–37.
4. ГЛУЩЕНКО А.И., ЖУКОВ П.И., ФОМИН А.В. *Адаптация сеточной модели нестационарной теплопроводности на основе метода градиентного спуска* // Материалы Всероссийской конференции «Математическая теория управления и ее приложения» (МТУИП–2022). – Санкт-Петербург: Электроприбор, 2022. – С. 59–62.
5. ГОРИНОВ О.И., КОЛИБАБА О.Б., ГАБИТОВ Р.Н. *Использование регрессионной модели для определения теплофизических свойств слоя твердых органических отходов* // Материалы международной научно-технической конференции «Состояние и перспективы развития электро- и теплотехнологии». – Иваново: Ивановский государственный энергетический университет им. В.И. Ленина, 2015. – С. 216–219.
6. ГУБАРЕВА К.В., ПОПОВ А.И., ЗИНИНА С.А., ШУЛЬГА А.С., ЧУЯНОВ Д.О. *Моделирование процесса теплообмена в пластине с переменными теплофизическими свойствами* // Научное обозрение. Технические науки. – 2020. – №6. – С. 52–57.
7. ДАБАС М.Р., ЗУБКОВА Н.С., КОБЗЕВ А.А. *Адаптация математической модели теплового режима полосы в чистовой группе клетей стана горячей прокатки* // Управление большими системами: труды XVII Всероссийской школы-конференции молодых ученых. – М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2021. – С. 515–520.
8. ДИЛИГЕНСКАЯ А.Н., РАПОПОРТ Э.Я. *Метод минимаксной оптимизации в коэффициентной обратной задаче теплопроводности* // Инженерно-физический журнал. – 2016. – Т. 89, №4. – С. 1007–1012.
9. ДМИТРИЕВ О.С., ЖИВЕНКОВА А.А. *Численно-аналитическое решение нелинейной коэффициентной обратной задачи*

- теплопроводности* // Инженерно-физический журнал. – 2018. – Т. 91, №6. – С. 1426.
10. ЖУКОВ П.И., ФОМИН А.В., ГЛУЩЕНКО А.И. *Алгоритмическая устойчивость и сложность процесса неявной адаптации сеточной модели нестационарной теплопроводности к нагреваемому веществу* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2023. – Вып. 101. – С. 39–63.
 11. ЖУКОВ П.И., ФОМИН А.В., ГЛУЩЕНКО А.И. *Неявная адаптация сеточной модели нестационарной теплопроводности к нагреваемому веществу* // Управление большими системами: сборник трудов. – 2022. – Вып. 100. – С. 78–106.
 12. ЖУКОВ П.И., ГЛУЩЕНКО А.И., ФОМИН А.В. *Сравнение эффективности «обучения» сеточной модели нестационарной теплопроводности при различных целевых функциях* // Управление большими системами: труды XVIII Всероссийской школы-конференции молодых ученых. – Челябинск: ЮУрГУ, 2022. – С. 440–448.
 13. КАНАРЕЙКИН А.И. *Распределение температуры в теле эллиптического сечения с внутренним источником тепла при граничных условиях первого рода* // Вестник Калужского университета. – 2020. – №2. – С. 74–76.
 14. КАНАРЕЙКИН А.И. *Стационарное температурное поле в прямоугольной пластине с переменной теплопроводностью по одной координате* // Вестник международной академии холода. – 2023. – №1. – С. 99–104.
 15. КАНАРЕЙКИН А.И. *Уравнение переноса тепла в криволинейном стержне* // Матрица научного познания. – 2021. – №4-1. – С. 42–45.
 16. КУРГОСОВ Д.А., ЛИВАДНЫЙ Н.Е., ЗУБАРЕВ Ю.М. *Математическая модель тепловых процессов при закалке стали* // Актуальные проблемы морской энергетики. – 2019. – С. 489–494.
 17. ЛИСИЕНКО В.Г., МАЛИКОВ Г.К., ТИТАЕВ А.А. *Сравнение зонального метода моделирования теплообмена излучением с методом конечных объемов на примере расчета нагрева непрерывнолитой заготовки в кольцевой печи* // Современные научные достижения металлургической теплотехники и их ре-

- ализация в промышленности: сборник докладов международной научно-практической конференции. – Екатеринбург: УрФУ, 2018. – С. 117–122.
18. ЛОБАСОВА М.С., ЛОБАСОВ А.С. *Тепломассообмен. Стационарная теплопроводность*. – Красноярск: СФУ, 2015. – 60 с.
 19. МАКСИМОВ Д.И. *Метод конечных разностей для уравнения теплопроводности в двумерной неоднородной области // Continuum. Математика. Информатика. Образование*. – 2016. – №1. – С. 36–41.
 20. ОЖЕРЕЛКОВА Л.М., САВИН Е.С. *Температурная зависимость нестационарной теплопроводности твердых тел // Russian Technological Journal*. – 2019. – Т. 7, №2. – С. 49–60.
 21. ОЗЕРКИН Д.В. *Моделирование анизотропности температурного поля объемных интегральных микросхем // Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. – 2020. – Т. 63, №. 7. – С. 657–665.
 22. ОЗЕРКИН Д.В. *Расчет температурного поля многослойных несущих конструкций численными методами // Системы анализа и обработки данных*. – 2022. – №2(86). – С. 105–120.
 23. ПАРСУНКИН Б.Н., АНДРЕЕВ С.М., МУХИНА Е.Ю. *Экстремально-оптимизирующее автоматизированное управление нагревом непрерывнолитых заготовок в печах проходного типа // Вестник Череповецкого государственного университета*. – 2021. – №5(104). – С. 22–34.
 24. САМАРСКИЙ А.А. *Теория разностных схем*. – М.: ФМЛ, 1989. – 616 с.
 25. СОРОКОВАЯ Н.Н., КОРИНЧУК Д.Н. *Математическое моделирование динамики тепломассопереноса, фазовых превращений и термодеструкции при высокотемпературной сушке биомассы // Материалы международной научно-практической конференции «Современные энергосберегающие тепловые технологии (сушка и тепловые процессы) СЭТТ-2020»*. – М.: Мегapolis, 2020. – С. 137–144.
 26. ТОЛСТЫХ В.К., ПШЕНИЧНЫЙ К.А. *Математическое и численное моделирование нестационарных течений с фазовыми переходами в противоточных теплообменных аппара-*

- тах* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2023. – Т. 16, №2. – С. 59–67.
27. ТОРОПОВ Е.В. *Адаптация степени черноты продуктов сгорания топлив к интервалу температур 1000... 2000 К* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Энергетика. – 2018. – Т. 18, №3. – С. 22–29.
28. ТОРОПОВ Е.В., ЛЫМБИНА Л.Е. *Адаптация математической модели обобщенного теплообмена в топках* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Энергетика. – 2020. – Т. 20, №4. – С. 12–22.
29. ФЕДЯЕВСКИЙ М.Р., АЛЕКСЕЕВ П., ЛЕУХИН Ю.Л. *Численное моделирование аэродинамики и конвективного теплообмена струйного модульного рекуператора* // Материалы II Международной научно-практической конференции «Арктические исследования: от экстенсивного освоения к комплексному развитию». – Архангельск: АЗ+, 2020. – С. 601–606.
30. ЧЕРНУХИН Р.В., ДОЛГУШИН А.А., КАСИМОВ Н.Г., ИВАНЦИВСКИЙ В.В., ЛОБАНОВ Д.В., ВАСИЛЬЕВ С.А., МАРТЮШЕВ Н.В. *Обоснование расходных характеристик рекуператора для тепловой подготовки агрегатов машин и оборудования* // Обработка металлов: технология, оборудование, инструменты. – 2020. – Т. 22, №4. – С. 82–93.
31. KAMOLOV J., SAIDOV S. *Development of a mathematical model of a nonstationary heating and cooling process of a thin plate with a cermet coating* // Science and innovation. – 2022. – Vol. 1, No. A6. – P. 626–635.
32. TIAN X., WANG L. *Heat conduction in cylinders: Entropy generation and mathematical inequalities* // Int. Journal of Heat and Mass Transfer. – 2018. – Vol. 121. – P. 1137–1145.
33. ZANOLI S.M., PEPE C., ASTOLFI G., MOSCOLONI E. *Analysis and modeling of steel industry reheating furnace billets temperature* // 23rd Int. Carpathian Control Conference (ICCC). – IEEE, 2022. – P. 337–342.
34. ZANOLI S.M., PEPE C., MOSCOLONI E., ASTOLFI G. *Data Analysis and Modelling of Billets Features in Steel Industry* // Sensors. – 2022. – Vol. 22, No. 19. – P. 7333.

STABILITY OF NUMERICAL METHOD OF IMPLICIT ADAPTATION OF TRANSIENT HEAT CONDUCTION MODEL TO RIGID BODY THERMOPHYSICAL PARAMETERS

Petr Zhukov, STI NUST “MISIS”, Stary Oskol, postgraduate student (Zhukov.petr86@yandex.ru).

Anton Glushchenko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Sciences, docent (aiglush@ipu.ru).

Abstract: This study is devoted to the analysis of algorithmic stability and complexity of the model of transient heat conductivity with implicit adaptation to the thermophysical parameters of the heated solid body. The implicit adaptation method is based on the substitution of such parameters as heat capacity, thermal conductivity and density in the transient heat conduction equation by two dimensionless adjustable coefficients, uniformly discretized over the entire model lifetime, with their further adjustment using a modified stochastic gradient descent method. In order to ensure the stability of calculations of such a model using a computer, some conditions have been defined in previous studies, which allowed us to obtain stability equal to 64%. It was assumed that the remaining 36% was a consequence of violation of these conditions in the process of adjustment. In this paper we propose algorithmic constraints that allow us to solve this problem. The repetition of experiments shows that the application of the proposed approach allows one to increase the stability from 64% to 98%. Also, an analytical comparison of algorithmic complexity classes for models with implicit adaptation and with "group-explicit" adaptation is made. As a result, it is found that the proposed numerical method has a lower complexity in comparison with the finite-difference method with "group explicit" adaptation.

Keywords: mesh model, transient heat conductivity, adaptation, gradient descent method, algorithmic complexity, computational stability.

УДК 519.63

ББК 22.193

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.4

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 31.10.2023.

Опубликована 31.01.2024.

УЧЁТ ВЛИЯНИЯ СТРУКТУРЫ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ ПРИ УПРАВЛЕНИИ РИСКАМИ

Широкий А. А.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Теоретико-игровые модели «Защитник – Атакующий» и «Защитник – Атакующий – Защитник» часто используются в качестве базовых для постановки задач управления рисками. При этом стратегии игроков обычно задаются на множествах допустимых распределений располагаемых игроками ограниченных ресурсов. Возможность дополнительного снижения риска Защитником путём управления составом или структурой защищаемой системы в классических постановках не рассматривается, поскольку на практике подобные действия для него нехарактерны или вовсе невозможны. В то же время вопрос о влиянии структуры системы на её уязвимость весьма актуален на этапе проектирования системы, в связи с чем возникает потребность в методах сравнения структур между собой. В статье предложена модификация классической постановки задачи минимизации интегрального риска сложной системы, позволяющая количественно учесть влияние размещения элементов системы внутри заданной структуры на значение её интегрального риска. Приведено решение поставленной задачи для наиболее простого частного случая – простой цепи, а также представлен алгоритм построения структуры сложной системы, минимизирующей риск. Полученный результат в дальнейшем будет использован для поиска решений этой задачи в случае структур более сложных топологий, в частности древовидных.

Ключевые слова: сложные системы, структура сложной системы, управление рисками.

1. Введение

Риск в семействе стандартов ISO 31000 [26] определяется как следствие влияния неопределённости на достижение поставленных целей. При этом отмечается, что под следствием влияния неопределённости необходимо понимать отклонение от ожидаемого результата или события (позитивное и/или негативное). В терминах системного анализа это определение можно переписать следующим образом:

¹ Александр Александрович Широкий, к.ф.-м.н. (shiroky@ipu.ru).

Определение 1. Риск – системный параметр, свойство системы управления, в частности ЛПР, принимать решения в условиях неопределённости, которые могут повлечь за собой как нежелательные (опасные), так и существенно выигрышные последствия [4].

Управление риском (или менеджмент риска) в стандарте ГОСТ Р ИСО 31000-2019 [1] определено как скоординированные действия по руководству и управлению организацией в области риска. Действительно, исследования по управлению рисками преимущественно сосредоточены в областях теории менеджмента и теории управления.

В терминологии А.М. Новикова [5] первая из них относится к «слабым» наукам, работает преимущественно с качественными оценками рисков, а результаты в этой области получены с минимумом ограничивающих предположений. Вторая же является «сильной» наукой, активно использует математические модели, работает с количественными оценками рисков, а результаты применимы на практике лишь при соблюдении достаточно большого количества подчас трудновыполнимых ограничений.

Глобальной стратегической целью настоящего исследования является сближение этих подходов путём построения общих принципов, методов и технологий управления рисками на основе строгого математического обоснования.

Базовой моделью для постановки задачи управления рисками в данной работе является классическая модель «Защитник – Атакующий». В её рамках защищаемая (или атакуемая, в зависимости от точки зрения исследователя) система представляется в виде графа, вершины которого соответствуют элементам системы, а рёбра – связям между ними. Также вводится функция риска, зависящая от распределения ресурсов Защитником и Атакующим между элементами системы. Задача управления риском может быть поставлена в теоретико-игровой форме либо, в случае отсутствия одного из игроков, в оптимизационной форме.

Для ситуаций, когда связи между элементами неважны, получен ряд фундаментальных результатов. Так, в условиях отсут-

ствия атакующего и полной определённости относительно вида функций локального (соответствующего отдельным элементам системы) риска задача сводится к нахождению минимума (или точной нижней грани) аддитивной функции [2]. При отсутствии информации о конкретном виде функций локального риска решить задачу минимизации риска для системы в целом уже не получается. Однако можно воспользоваться принципом минимального гарантированного результата и перейти к задаче снижения максимума локальных рисков. В работе [3] доказана единственность её решения (если оно существует) и предложен алгоритм его нахождения с помощью арбитражных схем. Впоследствии этот алгоритм был обобщён для учёта вероятностной неопределённости («игры с природой», [2]).

Управление рисками сложной системы в условиях взаимного влияния элементов друг на друга предлагается осуществлять по той же схеме, но только при условии, что при многошаговом линейном импульсном процессе (см., например, [6]) значения локальных рисков элементов системы (весов вершин ориентированного графа) становятся стационарными начиная с некоторого шага. Тогда Защитник распределяет ресурс так, как будто процесс уже стабилизировался. Отметим, что достаточное условие стабилизации при этом довольно сильное: все собственные значения матрицы весов рёбер, характеризующих интенсивность передачи риска между соответствующими элементами, должны оказаться внутри единичного круга на комплексной плоскости.

Таким образом, вопрос о влиянии структуры сложной системы на её интегральный риск всё ещё остаётся открытым. В настоящей статье представлен возможный путь для его решения.

Структура изложения материала в работе следующая.

Раздел 2 содержит краткий обзор математических моделей распространения отказов в сложных сетях. В разделе 3 приведена базовая постановка задачи управления риском сложной системы. Раздел 4 посвящён описанию модификации классической задачи для изучения влияния структуры защищаемой системы на её интегральный риск. В разделе 5 предложено частное решение мо-

дифицированной задачи для простой цепной структуры, а также алгоритм проектирования минимизирующей риск структуры мер безопасности на основе полученного результата. В заключении обсуждаются дальнейшие перспективы исследования.

2. Краткий обзор математических моделей распространения отказов в сложных сетях

В самом общем случае мы можем считать, что структура сложной системы является сложной сетью произвольной топологии. Для исследования различных деструктивных эффектов (включая целенаправленные атаки на узлы и рёбра) в таких сетях разработано достаточно много моделей и постоянно появляются новые. Весьма широко применяются модели оценки риска распространения отказов при исследовании сложных систем различной природы, в частности киберфизических [23, 31], вычислительных [15, 33] и медико-социальных [24, 27].

Ранние модели описывали развитие отказов, вызванных нецеленаправленными (например, случайными) воздействиями. Наиболее известными из них являются модель устойчивости к ошибкам [7], модель распространения лесного пожара [10] и её производные, модели на базе клеточных автоматов [28], а также модели перколяции со случайными атаками [20]. Отметим, что последние имеют ряд модификаций, предполагающих, что деструктивные воздействия на узлы и рёбра сети являются целенаправленными. К таковым относятся собственно перколяции с целенаправленными атаками [8, 14, 19, 25], а также перколяции с локализованными атаками [29] и перколяции с k -ядром [9, 11, 18, 22].

Упомянутые выше модели распространения отказов хорошо сочетаются с классическими моделями управления рисками в сложных сетях «Защитник – Атакующий» [12]. Напомним, что такие модели описывают конфликт между двумя игроками – Защитником и Атакующим, имеющими противоположные цели относительно рассматриваемой системы. Атакующий расходует ресурсы из некоторого доступного ему ограниченного пула с це-

лью вывести систему из строя. Защитник, в свою очередь, пытается противостоять действиям Атакующего. В классических постановках Защитник решает задачу оптимального распределения ресурсов среди элементов системы с целью минимизации её интегрального риска. Но он может выбрать и другой путь, а именно – модифицировать структуру самой системы с той же самой целью. Для описания такого сценария требуются другие модели.

Учёт изменения структуры подразумевают, например, модели каскадного распространения ошибки [13, 21], однако в их рамках такие изменения не предполагаются целенаправленными. Возможность намеренного изменения структуры предусмотрена в моделях, модифицированных для случая двух взаимосвязанных сетей [16, 17, 32], но именно в отношении рёбер, связывающих сети между собой.

Таким образом, для решения задач управления структурой сложной системы, в том числе с целью минимизации её интегрального риска, существующего аппарата моделирования недостаточно. Поэтому далее мы обсудим один из возможных путей для частичного заполнения этого пробела.

3. Базовая постановка задачи управления риском сложной системы

Рассмотрим сложную систему, состоящую из конечного множества элементов (объектов, пока произвольной природы): $S = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_n\}$, $i \in N = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Будем предполагать, что элементы $s_i \in S$ являются автономными и, в частности, не могут оказывать влияние на состояния друг друга.

Предположим также, что существуют два субъекта (также пока произвольной природы), которых мы будем называть игрок A (Атакующий, *Attacker*) и игрок D (Защитник, *Defender*), имеющие несовпадающие интересы относительно состояния системы S .

Будем считать, что игрок D располагает некоторым объёмом ресурса $X \geq 0$, который он может произвольным образом рас-

пределять между элементами системы S :

$$(1) \quad x = (x_1, \dots, x_n), x_i \geq 0, i \in N, \sum_{i=1}^n x_i \leq X.$$

Аналогично будем считать, что игрок A также располагает некоторым объёмом ресурса $Y \geq 0$, который он может произвольным образом распределять между элементами системы S :

$$(2) \quad y = (y_1, \dots, y_n), y_i \geq 0, i \in N, \sum_{i=1}^n y_i \leq Y.$$

В рамках рассматриваемой модели под ресурсом будем понимать любой измеримый и произвольно делимый ресурс, который может быть представлен неотрицательным действительным числом. В качестве ресурсов, в зависимости от контекста, могут пониматься финансовые, трудовые, временные, производственные и иные ресурсы или затраты.

Под *локальным риском* в рамках рассматриваемой модели будем понимать некоторую *локальную характеристику отдельного элемента* $s_i \in S$, зависящую от количества ресурсов, распределённых на указанный элемент игроками D и A , и связанную с возможными потерями (ущербом) от негативного или позитивного (в каком-то смысле) изменения состояния указанного элемента.

В свою очередь, под *интегральным риском* будем понимать некоторую *интегральную характеристику всей системы* S в целом, зависящую от количества ресурсов, распределённых на все элементы системы S игроками D и A , и связанную с возможными потерями (ущербом) от негативного или позитивного (в каком-то смысле) изменения состояния каждого элемента.

В случае, когда элементы системы S являются автономными, локальный риск любого элемента $s_i \in S$ будет зависеть от величины распределённых игроками D и A ресурсов на этот элемент. Определим для каждого элемента $s_i \in S$ функцию локального риска $\rho_i(x_i, y_i) : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, где \mathbb{R}_0^+ – множество действительных неотрицательных чисел.

Далее, в рамках рассматриваемой модели будем полагать, что функции локального риска $\rho_i(\cdot, \cdot)$, $i \in N$, обладают следующими свойствами.

Неотрицательность риска:

$$(3) \quad \forall i \in N, x_i, y_i \geq 0 : \rho_i(x_i, y_i) \geq 0.$$

Нестрогая монотонность риска:

$$(4) \quad \forall i \in N : \frac{\partial \rho_i(x_i, y_i)}{\partial x_i} \leq 0, \frac{\partial \rho_i(x_i, y_i)}{\partial y_i} \geq 0.$$

Ограниченность риска:

$$(5) \quad \forall i \in N, x_i, y_i \geq 0 \exists \rho_i^x = \text{const}, \rho_i^y = \text{const} : \\ \rho_i^x \leq \rho_i(x_i, y_i) \leq \rho_i^y.$$

Свойство неотрицательности риска означает, что потенциальный ущерб, связанный с реализацией локального риска, для любого элемента $s_i \in S$ не может быть отрицательным.

Свойство монотонности риска означает, что для любого элемента $s_i \in S$ *дополнительное* выделение ресурса Защитником не должно приводить к *росту* локального риска этого элемента системы S и, с другой стороны, *дополнительное* выделение ресурса Атакующим не должно приводить к *снижению* локального риска этого элемента системы S .

Свойство ограниченности риска означает, что для любого элемента $s_i \in S$ никакое *дополнительное* выделение Защитником ресурса не позволяет снизить *остаточный риск* для данного элемента «до нуля» и, с другой стороны, вне зависимости от объёмов затраченных Атакующим ресурсов для любого элемента $s_i \in S$ всегда имеет место конечный положительный *предельный риск*.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ – некоторые допустимые распределения ресурсов между вершинами – элементами системы S игроками D и A соответственно. Будем рассматривать функции локального риска вида

$$(6) \quad \rho_i(x, y) = u_i(x, y) \cdot p_i(x, y)$$

для каждой вершины $s_i \in S$. Здесь $u_i(x, y) : \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_n^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ – функция, описывающая зависимость ожидаемого ущерба в случае успешной атаки элемента s_i в зависимости от распределений

ресурсов x и y , а $p_i(x, y) : \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_n^+ \rightarrow (0, 1]$ – вероятность успешной атаки элемента s_i в зависимости от распределений ресурсов x и y .

Зададим функцию интегрального риска $\rho(x, y) : \mathbb{R}_n^+ \times \mathbb{R}_n^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$:

$$(7) \quad \rho(x, y) = \sum_{i=1}^n \rho_i(x, y).$$

Тогда базовая модель управления рисками сложной системы со структурой и периметром задаётся следующим кортежем:

$$(8) \quad \langle S = \{s_i\}_{i \in N}, D, A, X, Y, \{\rho_i(\cdot, \cdot)\}_{i \in N}, \rho(\cdot, \cdot) \rangle.$$

Целью Защитника является распределение доступного ему ресурса X между элементами системы S с тем, чтобы добиться максимально возможного снижения значения функции интегрального риска $\rho(x, y)$.

Цель Атакующего противоположна: ему необходимо распределить доступный ему ресурс Y между элементами системы S таким образом, чтобы добиться максимально возможного увеличения значения функции интегрального риска $\rho(x, y)$.

Обозначим $\mathcal{X}(X)$ множество допустимых распределений ресурса X между элементами системы S игроком D , а $\mathcal{Y}(Y)$ – множество допустимых распределений ресурса Y между элементами системы S игроком A :

$$(9) \quad \mathcal{X}(X) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n^+ : x_i \geq 0, i \in N, \sum_{i=1}^n x_i \leq X \right\},$$

$$(10) \quad \mathcal{Y}(Y) = \left\{ (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_n^+ : y_i \geq 0, i \in N, \sum_{i=1}^n y_i \leq Y \right\}.$$

Тогда задача игрока D («задача Защитника») заключается в нахождении распределения ресурса $x^* \in \mathcal{X}$, минимизирующего интегральный риск, и формально может быть записана в виде:

$$(11) \quad x^* = \arg \min_{x \in \mathcal{X}} \rho(x, y) = \arg \min_{x \in \mathcal{X}} \sum_{i=1}^n \rho_i(x, y).$$

Аналогично задача игрока A («задача Атакующего») заключается в нахождении распределения ресурса $y^* \in \mathcal{Y}$, максимизи-

рующего интегральный риск, и может быть записана в виде:

$$(12) \quad y^* = \arg \min_{y \in \mathcal{Y}} \rho(x, y) = \arg \min_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{i=1}^n \rho_i(x, y).$$

Далее рассмотрим модификацию задачи минимизации риска сложной системы, позволяющую исследовать влияние её структуры на значение интегрального риска.

4. Постановка задачи поиска оптимального размещения элементов защищаемой системы внутри заданной структуры

Пусть на множестве элементов системы S задана структура $W = \langle G(S, E), T \rangle$, где $G(S, E)$ – связный граф на множестве вершин-элементов S со множеством рёбер E , а $T \subseteq S$ – некоторое подмножество вершин, которое будем называть периметром системы S .

Будем считать, что игрок A атакует элементы рассматриваемой системы по выбранной им цепи $c = \langle u, v \rangle, u \in T, v \in S$, причём переход из некоторой вершины $s_i \in c$ по инцидентному ей ребру в смежную вершину $s_j \in c$ осуществляется только в случае успешной атаки элемента s_i .

Если структуру $W = \langle G(S, E), T \rangle$ можно изменять (например, модифицируя множества E или T), то прежде чем решать задачу (11), Защитник может дополнительно снизить риски, решив задачу построения структуры, оптимальной в смысле их минимизации.

Определение 2. Будем говорить, что элемент $s_i \in S$ расположен на расстоянии m от периметра и записывать $l(s_i) = m$, если все простые пути, оканчивающиеся в s_i и начинающиеся в любой из вершин $s_j \in T$, включают в себя не менее m рёбер.

Заметим, что $l(s_i) = 0 \forall i : s_i \in T$.

Предположим, что для каждого элемента $s_i \in S$ защищаемой системы нам известна зависящая от распределений ресурсов $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ вероятность $p_i(x_i, y_i)$ того, что он будет успешно атакован (в некотором смысле) злоумышленни-

ком. Также будем считать, что нам известны величины u_i ущерба защищаемой системе в случае успешной атаки соответствующего узла.

Определение 3. Функцию $\rho_i^0(x_i, y_i) = u_i \cdot p_i(x_i, y_i)$ будем называть *удельным локальным риском элемента s_i* .

Будем рассматривать сценарии, при которых Атакующий последовательно выводит из строя узлы защищаемой сети, начиная с некоторого наперёд заданного узла-периметра и продвигаясь далее по соседям. Предполагаем, что каждый узел он посещает ровно один раз. Тогда функция локального риска примет следующий вид:

$$(13) \quad \rho_i(x, y) = \rho_i^0(x_i, y_i) \prod_{j=0}^{l(s_i)-1} \max_{k:l(s_k)=j} p_k(x_k, y_k).$$

Отметим, что функция интегрального риска, как и раньше, определяется в виде суммы локальных рисков (7). Важное отличие состоит в том, что значения функций локального риска теперь зависят не только от распределений ресурсов Атакующим и Защитником, но и от положения элементов внутри структуры W .

Справедливы следующие утверждения (доказательства приведены в работе [30]).

Утверждение 1. Если $\forall i \in N$ функции $\rho_i^0(x_i, y_i)$ монотонно убывают по первому аргументу и монотонно возрастают по второму, то функции $\rho_i(x, y)$ удовлетворяют свойствам (3)–(5) для всех $i \in N$.

Утверждение 2. Добавление в систему структуры $W = \langle G(S, E), T \rangle$ не увеличивает риск, иными словами $\forall S = \{s_1, \dots, s_n\}$, $i \in N$, $\forall E \neq \emptyset$, $T \subset S$ $\sum_{i=1}^n \rho_i(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^n \rho_i^0(x, y)$.

Теперь мы можем перейти к изучению влияния структуры сложной системы на её интегральный риск. С этой целью формулируем задачу выбора оптимального размещения элементов S внутри заданной структуры. Чтобы исключить влияние выделяемого игроками ресурса, будем считать, что вероятности успешной атаки не зависят от x, y . Тогда функции локального риска при

фиксированном расположении элементов становятся константами.

Определение 4. Пусть защищаемая система включает в себя множество элементов $S = \{s_1, \dots, s_i, \dots, s_n\}$, $i \in N = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, и задана некоторая структура $W = \langle G(V, E), T \rangle$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Взаимно-однозначное отображение $M^{-1} : S \rightarrow V$ такое, что $\forall i \leq n \exists j \leq n : v_j = M^{-1}(s_i)$ будем называть размещением узлов S в структуре W . Соответствующее обратное отображение $M : V \rightarrow S$ будем называть проекцией структуры W на множество элементов S .

Для произвольного заданного размещения $M^{-1} : S \rightarrow V$ можно рассчитать значение интегрального риска

$$(14) \quad \rho(S, W, M^{-1}) = \sum_{i=1}^n \rho_{M(v_i)},$$

где $\rho_{M(v_i)}$ – значение локального риска для узла $M(v_i)$, и записать задачу минимизации интегрального риска, заключающуюся в поиске такого множества размещений, для каждого из которых достигается минимальное значение интегрального риска ρ_{min} :

$$(15) \quad \mathbf{M}_{min} = \arg \min_M \rho(S, W, M^{-1}) :$$

$$\rho_{min} = \sum_{i=1}^n \rho_{M(v_i)} \forall M^{-1} \in \mathbf{M}_{min}.$$

В общем случае задача поиска оптимального размещения, по всей видимости, является NP-трудной. По этой причине поиск точного решения для систем сложной топологии с числом элементов более нескольких десятков уже является крайне трудоёмким. Вместе с тем автор считает возможным нахождение вычислительно простых эвристических алгоритмов, позволяющих решать эту задачу, например, с некоторой гарантированной максимальной погрешностью.

С этой целью планируется последовательно рассматривать структуры с одновершинным периметром в порядке возрастания их сложности, начиная с простой цепи и заканчивая структурами

произвольной топологии. Для простейших структур было найдено аналитическое решение, приведённое в следующем разделе.

5. Задача задачи поиска оптимального размещения элементов защищаемой системы в простой цепи

Определение 5. Пусть задан граф $G(V = \{v_1, \dots, v_n\}, E = \{(v_i, v_{i+1})\}_{i=1}^{m-1})$, $n \in N$, и периметр $T = \{v_1\}$. Тогда будем говорить, что кортеж $W_n = \langle G(V, E), T \rangle$ задаёт сценарий атаки длины n .

Определение 6. Будем говорить, что узлы $s_i, s_j \in S$, $i, j \in N$, $i \neq j$, нестрого упорядочены по возрастанию (убыванию) интегрального риска и записывать $s_i \preceq s_j$ ($s_i \succeq s_j$) если при заданном сценарии атаки W для любых размещений M^{-1}, K^{-1} и любых таких индексов p, q, k, l : $p < q$, $k > l$, что $s_i = M(v_p) = K(v_k)$, $s_j = M(v_q) = K(v_l)$ и выполняется неравенство $\rho(S, W, M^{-1}) \leq \rho(S, W, K^{-1})$ ($\rho(S, W, M^{-1}) \geq \rho(S, W, K^{-1})$).

В работе [30] были доказаны следующие утверждения.

Утверждение 3. Пусть $N = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. Тогда $\forall i \in N \setminus \{n\} : s_i \preceq s_{i+1} \iff \frac{u_i}{u_{i+1}} \leq \frac{p_{i+1}(1-p_i)}{p_i(1-p_{i+1})}$; $s_i \succeq s_{i+1} \iff \frac{u_i}{u_{i+1}} \geq \frac{p_{i+1}(1-p_i)}{p_i(1-p_{i+1})}$.

Утверждение 4. Пусть $N = \{1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. Тогда $\forall i, j, k \in N : i < j < k : s_i \preceq s_j \preceq s_k \iff s_i \preceq s_k$.

Эти утверждения задают транзитивный критерий упорядочивания узлов в простой цепи и позволяют решить задачу (15) для любого такого рассматриваемого сценария атаки в общем виде.

В большинстве реально существующих систем нет возможности изменять положение элементов в структуре. Тем не менее полученный принцип оптимального размещения элементов вполне применим, например, при проектировании компьютерных сетей или систем охраны со вложенными зонами безопасности.

Ниже приведён алгоритм проектирования системы безопасности сложной системы на основе описанного выше принципа.

Рассмотрим сложную систему с n элементами, задающими множество $S = \{s_1, \dots, s_n\}$. Вначале будем предполагать, что все элементы доступны для Атакующего, т.е. структура системы на начальном этапе представляет собой полный граф $G(V, E)$, $V = S, E = \cup_{i \neq j} (s_i, s_j)$, $1 \leq i, j \leq n$, а возможные сценарии атаки – маршруты в нём. Будем рассматривать сценарии, являющиеся простыми путями.

Предположим, что Атакующий хочет нанести рассматриваемой системе максимальный ущерб. Тогда он должен вывести из строя все её элементы без исключения, решив при этом задачу, обратную задаче (15):

$$(16) \quad \mathbf{M}_{max}^{-1} = \underset{M^{-1}}{\text{Arg max}} \rho(S, W, M^{-1}) :$$

$$\rho_{max} = \sum_{i=1}^n \rho_{M(v_i)} \forall M^{-1} \in M_{max}^{-1},$$

где M_{max}^{-1} – множество размещений, для каждого из элементов которого достигается максимальное значение интегрального риска ρ_{max} .

С учётом изложенного выше результата решение строится тривиальным образом и заключается в выборе простого пути $(v_1^A, v_2^A, \dots, v_n^A)$, включающего все вершины графа G , причём $v_i^A \succeq v_{i+1}^A \forall i < n$.

Задача Защитника, в свою очередь, заключается в том, чтобы направить Атакующего по наименее «выгодной» для последнего траектории. Эта траектория также легко вычисляется и, как и в предыдущем случае, представляет собой простой путь $(v_1^D, v_2^D, \dots, v_n^D)$, включающий в себя все вершины графа G , причём $v_i^D \preceq v_{i+1}^D \forall i < n$. Отметим, что в случае, когда выполнено условие

$$(17) \quad \frac{1 - p_i}{u_i p_i} = \frac{1 - p_j}{u_j p_j} \iff i = j, i, j \in \{1, \dots, n\},$$

обе задачи имеют единственное решение, причём $v_i^D = v_{n-i+1}^A$. Иными словами, Атакующий и Защитник стремятся к реализации

противоположных траекторий.

Тогда алгоритм решения задачи Защитника при выполнении условия (17) выглядит следующим образом:

1. Обеспечить единственную точку входа в систему (задан периметр) в узле v_1^D (он же v_n^A).
2. Назначить узел v_1^D текущим (положить i равным 1).
3. Последовательно удалять рёбра, соединяющие текущий узел v_i^D с узлами v_{i+2}^D, \dots, v_n^D .
4. Если $i < n$, то назначить текущим узел v_{i+1}^D (положить i равным $i + 1$). В противном случае завершить алгоритм.
5. Перейти к пункту 3.

Отметим, что при выполнении условия

$$(18) \quad \frac{1 - p_i}{u_i p_i} = \frac{1 - p_j}{u_j p_j} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

узлы становятся нейтральными к перестановкам в смысле утверждения 3. В то же время, если Защитник знает о том, что в дальнейшем будет располагать неким ограниченным ресурсом, с помощью которого он сможет снижать удельные вероятности успешной атаки узлов, то у него появляется дополнительный критерий упорядоченности. А именно, Защитник будет заинтересован в том, чтобы вынести ближе к периметру узлы, наиболее отзывчивые к выделению ресурса в смысле повышения их стойкости к действиям Атакующего. В рамках настоящей работы эта задача не рассматривается, но представляется интересной для будущих исследований.

6. Заключение

В настоящей работе описан ранее не применявшийся подход к исследованию влияния структуры сложной системы на её интегральный риск. Идея заключается в модификации постановки классической задачи минимизации риска с заменой управляемого параметра на размещение элементов защищаемой системы внутри заданной структуры, тогда как в классической постановке управление риском осуществляется путём назначения ресурсов элементам системы.

Предложенная модификация позволяет не рассматривать зависимости локальных рисков от выделенных игроками ресурсов и сосредоточиться на изучении структурных эффектов. В данной статье автор рассматривает наиболее простую структуру сложной системы – простую цепь с одновершинным периметром. Результатом является принцип упорядочения элементов системы внутри простой цепи.

Хотя возможность прямого практического применения полученного результата ограничена тем, что большинство реально функционирующих систем не предполагают возможности перестановки элементов при сохранении структуры связей, полученный принцип будет использован для построения алгоритмов (возможно, не точных) минимизации риска в более сложных структурах, в частности, древовидных.

Литература

1. *ГОСТ Р ИСО 31000-2019 Менеджмент риска. Принципы и руководство. – Официальное издание. – М.: Стандартинформ, 2021.*
2. КАЛАШНИКОВ А.О., АНИКИНА Е.В. *Модели управления информационными рисками сложных систем // Информатика и безопасность. – 2020. – Т. 23, №2. – С. 191–202.*
3. КАЛАШНИКОВ А.О. *Модели и методы организационного управления информационными рисками корпораций. – М.: ИПУ РАН, 2011. – 312 с.*
4. КОНОНОВ Д.А. *Исследование безопасности систем управления на основе анализа их системных параметров // В сб.: Проблемы управления безопасностью сложных систем. Материалы XXVIII международной конференции / Под общ. ред. А.О. Калашникова, В.В. Кульбы. – М: ИПУ РАН, 2020. – С. 102-108.*
5. НОВИКОВ А.М., НОВИКОВ Д.А. *Методология научного исследования. – М.: CRC Press, 2017. – 280 с.*
6. НОВИКОВ Д.А. *«Когнитивные игры»: линейная импульсная модель // Проблемы управления. – 2008. – №3. – С. 14–22.*

7. ALBERT R., JEONG H., BARABASI A.-L. *Error and Attack Tolerance of Complex Networks* // Nature. – 2000. – No. 406. – P. 378–382.
8. ANNIBALE A., COOLEN A.C.C, BIANCONI G. *Network resilience against intelligent attacks constrained by the degree-dependent node removal cost* // J. Phys. A. – 2010. – Vol. 43, No. 39. – e395001.
9. AZIMI-TAFRESHI N., GOMEZ-GARDENES J., DOROGOV-TSEV S.N. *k-Core percolation on multiplex networks* // Phys. Rev. E. – 2014. – Vol. 90, No. 3. – e032816.
10. BAK P., CHEN K., TANG C. *A forest-fire model and some thoughts on turbulence* // Phys. Lett. A. – 1990. – Vol. 147, No. 5–6. – P. 297–300.
11. BAXTER G.J., DOROGOV-TSEV S.N., GOLTSEV A.V., MENDES J.F.F. *Heterogeneous k-core versus bootstrap percolation on complex networks* // Phys. Rev. E. – 2011. – Vol. 83, No. 5. – e051134.
12. BROWN G., CARLYLE M., SALMERON J., WOOD R. *Defending Critical Infrastructure* // Interfaces. – 2006. – Vol. 36. – P. 530–544.
13. BRUMMITT C.D., D’SOUZA R.M., LEICHT E. *Suppressing cascades of load in interdependent networks* // Proc. Natl. Acad. Sci. – 2012. – Vol. 109, No. 12. – e680–689.
14. COHEN R., HAVLIN S., BEN-AVRAHAM D. *Efficient immunization strategies for computer networks and populations* – Phys. Rev. Lett. – 2003. – Vol. 91, No. 24. – e247901.
15. COTRONEO D., DE SIMONE L., LIGUORI P., NATELLA R. et al. *Enhancing Failure Propagation Analysis in Cloud Computing Systems* // Proc. of IEEE 30th Int. Symposium on Software Reliability Engineering (ISSRE). – 2019. – P. 139–150.
16. CUI P., ZHU P., WANG K., XUN P., XIA Z. *Enhancing robustness of interdependent network by adding connectivity and dependence links* // Physica A. – 2018. No. 497. –

- P. 185–197.
17. DONG G., GAO J., DU R., TIAN L. et al. *Robustness of network of networks under targeted attack* // Phys. Rev. E. – 2013. – Vol. 87, No. 5. – e052804.
 18. DOROGOVTSSEV S.N., GOLTSEV A.V., MENDES J.F.F. *k-Core organization of complex networks* // Phys. Rev. Lett. – 2006. – Vol. 96, No. 4. – e040601.
 19. GALLOS L.K., COHEN R., ARGYRAKIS P., BUNDE A. et al. *Network robustness and fragility: Percolation on random graphs* // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85, No. 25. – e5468.
 20. GALLOS L.K., COHEN R., ARGYRAKIS P., BUNDE A. et al. *Stability and topology of scale-free networks under attack and defense strategies* // Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 94, No. 18. – e188701.
 21. GAO C., LI X., ZHANG X., LI K. *Network immunization for interdependent networks* // J. Comput. Inf. Syst. – 2013. – Vol. 9, No. 16. – P. 6661–6668.
 22. GOLTSEV A.V., DOROGOVTSSEV S.N., MENDES J.F.F. *k-Core (bootstrap) percolation on complex networks: Critical phenomena and nonlocal effects* // Phys. Rev. E. – 2006. – Vol. 73, No. 5. – e056101.
 23. GUO H., YU S.S., IU H.H., FERNANDO T. et al. *Complex network theory analytical approach to power system cascading failure – From a cyber-physical perspective* // Chaos. – 2019. – Vol. 29, No. 5. – e053111.
 24. HAJIZADEH M., VISHKAIE F.R., BAKOUIE F., GHARIBZADEH S. *Modeling the Outbreak of an Infectious Disease on a Heterogeneous Network* // Adv. Syst. Sci. Appl. – 2016. – Vol. 16, No. 4. – P. 89–99.
 25. HOLME P., KIM B.J., YOON C.N., HAN S.K. *Attack vulnerability of complex networks* // Phys. Rev. E. – 2002. – Vol. 65, No. 5. – e056109.
 26. *ISO 31000:2018 Risk management – Guidelines*, [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.iso.org/obp/ui/en/#iso:std:iso:31000:ed-2:v1:en>.

27. MOORE S., ROGERS T. *Predicting the speed of epidemics spreading in networks* // Phys. Rev. Lett. – 2020. – Vol. 124, No. 6. – P. e068301.
28. NEWMAN D.E., NKEI B., CARRERAS B.A., DOBSON I. et al. *Risk assessment in complex interacting infrastructure systems* // Proc. of 40th Annual Hawaii Int. Conf. on System Sciences (HICSS'07). – 2007.
29. SHAO S., HUANG X., STANLEY H.E., HAVLIN S. *Percolation of localized attack on complex networks* // New J. Phys. – 2015. – Vol. 17, No. 2. – e023049.
30. SHIROKY A.A., KALASHNIKOV A.O.: *Mathematical Problems of Managing the Risks of Complex Systems under Targeted Attacks with Known Structures* // Mathematics. – 2021. – Vol. 9, No. 19. – e2468.
31. STURARO A., SILVESTRI S., CONTI M., DAS S.K. *A realistic model for failure propagation in interdependent cyber-physical systems* // IEEE Trans. Netw. Sci. Eng. – 2018. – Vol. 7, No. 2. – P. 817–831.
32. TAN F., XIA Y., ZHANG W., JIN X. *Cascading failures of loads in interconnected networks under intentional attack* // EPL. – 2013. – Vol. 102, No. 2. – e28009.
33. WANG L., YAO C., YANG Y., YU X. *Research on a Dynamic Virus Propagation Model to Improve Smart Campus Security* // IEEE Access. – 2018. – No. 6. – P. 20663–20672.

THE INFLUENCE OF THE STRUCTURE OF A COMPLEX SYSTEM IN RISK MANAGEMENT

Alexander Shiroky, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Senior researcher (shiroky@ipu.ru).

Abstract: Risk management problems are often addressed using game-theoretic models such as the «Defender – Attacker» and «Defender – Attacker – Defender». Players employ sets of acceptable distributions of limited resources as strategies. In the classical problem settings, the Defender is unable to reduce risk by changing the composition or structure of the system to be protected, as most real systems cannot be altered in such ways or cannot be altered at all. However, the question of the influence of the system structure on its overall risk is still relevant when designing one. Therefore, there is a need for methods to compare structures with each other. This article proposes a modification of the classical formulation of the problem of minimizing the integral risk of a complex system. This modification allows one to quantify the influence of the placement of system elements within a given structure on the value of risk. The study provides a solution to the problem for a simple chain, which is the simplest specific case, as well as an algorithm to build a structure minimizing the risk of a complex system. The result obtained can be used in the future to find solutions to this problem in the case of structures of more complex topologies, such as tree-like ones.

Keywords: complex systems, complex system structure, risk management.

УДК 519

ББК 22.18

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.5

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Г.А. Угольником.*

Поступила в редакцию 31.10.2023.

Дата опубликования 31.01.2024.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО РЕЖИМА ПОЛОСЫ И ВАЛКА В КЛЕТЯХ СТАНА ГОРЯЧЕЙ ПРОКАТКИ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Дабас М. Р.¹, Сараев П. В.²

(Липецкий государственный технический университет, Липецк)

Рассматривается задача распределения температуры полосы при горячей прокатке в интервальных значениях. Не все параметры при моделировании температуры в полосе заданы точно, так же как не все из них можно измерить с определенной долей погрешности. Рассматриваются сначала вещественные модели, далее приводятся их интервальные постановки. Приведены расчеты энергосиловой части очага деформации в вещественном виде, уточнены интервальные постановки данной задачи. Далее раскрыта комплексная задача моделирования очага деформации с вещественными параметрами, представленная в виде системы уравнений «валок – окалина – полоса». Указана полученная система линейных алгебраических уравнений с интервальными параметрами, которая легла в основу программного обеспечения для моделирования температур в чистовой группе клетей при горячей прокатке. Приведена модель расчета температуры полосы в межклетевом промежутке. С помощью программного обеспечения произведен расчет по рассмотренным моделям, начиная с очага деформации в 6 клетки и заканчивая выходом из 12 клетки. Проведено внешнее оценивание, разброс температур в интервале в среднем составил 50 градусов, что довольно много для практического применения, однако это повод для дальнейших исследований по уменьшению данного диапазона. Приведены выводы.

Ключевые слова: горячая прокатка, энергосиловой расчет, очаг деформации, интервальная арифметика.

1. Введение

Металлургическая отрасль важна в современном мире, она так или иначе стала неотъемлемой частью нашей жизни. Темпы развития подталкивают сотрудничать отрасли с наукой и научными центрами для улучшения характеристик выпускаемых продуктов, повышения рентабельности предприятия, оптимизации процессов и других целей. Тем не менее изучать и моделировать

¹ Моника Раджешевна Дабас, аспирант (monique.dabas@gmail.com).

² Павел Викторович Сараев, д.т.н., профессор (psaraev@yandex.ru).

данную область начали уже давно [14, 15, 16], хотя все еще продолжают исследования в этой области (например, в [20, 21]). С тех пор скорректировались подходы, добавились новые условия и открылись новые свойства. Ведь моделирование может помочь узнать те состояния исследуемого объекта, которые сложно измерить на практике. В предыдущих работах [5, 19] были смоделированы распределения температур в вещественных числах, получено численное решение и апробировано на реальных данных. Далее, определив, что точность входных параметров определяет, насколько выходной результат будет совпадать с ожидаемым (реальным), было исследовано влияние входных интервальных параметров на температуру полосы в межклетевых промежутках [13]. В той или иной степени моделирование неопределенности в разных областях производства или окружающего нас мира интересовало ученых всегда [2, 7, 17, 18]. В данной статье рассматривается очаг деформации не только как теплообмен с полосой, но еще с добавлением окалины и энергосиловых расчетов, возникаемых при пластической деформации. При этом при прокатке сталь проходит в чистовой группе по клетям, состоящих не только из очага деформации, но и межклетевого промежутка. В предыдущих работах (в вещественных моделях) к чистовой группе еще относился промежуточный рольганг и рассматривался полный участок стана горячей прокатки от выхода из черновой группы клетей до выхода из чистовой группы клетей. В рамках данной статьи рассмотрим применение интервальных входных параметров в каждой клетке (очаг с межклетевым промежутком) без учета промежуточного рольганга.

2. Постановка задачи

Расчет тепловых режимов в очаге деформации начинается с геометрической и энергосиловой части. В геометрических расчетах рассчитываются длина очага, необходимые углы, скорректированный радиус; параметры при этом заданы точно, поэтому в данной статье геометрические расчеты не будут рассматриваться. Подробнее рассмотрим энергосиловые расчеты.

2.1. ЭНЕРГОСИЛОВЫЕ РАСЧЕТЫ

Нормальное напряжение $p_{contact}$ [12] в очаге деформации рассчитывается по формуле

$$p_{contact}(\varphi) = \min_{\varphi \in [0; \varphi_{max}]} (p_{back}(\varphi), p_{forw}(\varphi)),$$

где напряжения p_{back} и p_{forw} – нормальные напряжения в зоне отставания и опережения соответственно и удовлетворяют уравнениям равновесия Т. Кармана:

$$(1) \quad dp_{back} = (K_c - \frac{\mu \cdot p_{back}}{\tan \varphi}) \frac{dh}{h},$$

$$(2) \quad dp_{forw} = (K_c + \frac{\mu \cdot p_{forw}}{\tan \varphi}) \frac{dh}{h}.$$

Здесь K_c – сопротивление деформации полосы; μ – коэффициент трения; φ – угол между касательной к поверхности валка и горизонтальной плоскостью; $h = h(\varphi)$ – функция, описывающая изменение толщины полосы в очаге.

Для определения сопротивления деформации K_c полосы используются формулы

$$(3) \quad K_{c_i} = Kdef_0 + (Kdef_1 - Kdef_0) \sqrt{\frac{i \cdot \theta \cdot R_{def}}{L}},$$

$$(4) \quad Kdef_0 = k_{Kdef} \cdot s_{St} \cdot \delta_{Y0} \cdot u^{a_{St}} \cdot (10 \cdot 0,1)^{b_{St}} \cdot \left(\frac{T_{sr}}{1000}\right)^{c_{St}},$$

$$(5) \quad Kdef_1 = k_{Kdef} \cdot s_{St} \cdot \delta_{Y0} \cdot u^{a_{St}} \cdot (10 \cdot \cdot epsH(h_a, h_b))^{b_{St}} \cdot \left(\frac{T_{sr}}{1000}\right)^{c_{St}},$$

$$u = \frac{v_{wr} \cdot L}{R_{def} \cdot (h_b + h_a)},$$

где $s_{St}, a_{St}, b_{St}, c_{St}, \delta_{Y0}$ – коэффициенты Андreyюка, определяемые для марки стали полосы; $k_{Kdef} = 1,15$ – корректирующий коэффициент; u – скорость деформации в клети; $epsH(h_a, h_b)$ – относительное обжатие полосы в очаге; T_{sr} – температура полосы на входе в текущий очаг, С; $v_{wr} = v_{Stand}$ – скорость валка (клетки), м/с; L – длина очага; R_{def} – деформированный радиус валка, м; h_b – толщина полосы на входе в очаг, м; h_a – толщина полосы на выходе из очага, м; θ – шаг по углу.

Можно заметить, что поскольку T_{sr} – усредненная температура полосы, то она напрямую зависит от распределения температуры в полосе v . Выделим интервальную переменную полужирным шрифтом. Таким образом, в интервальной постановке задачи в очаге деформации температура T_{sr} также является интервальной, и уравнения (3)–(5) превращаются в интервальные.

$$(6) \quad \mathbf{K}_{c_i} = \mathbf{K}def_0 + (\mathbf{K}def_1 - \mathbf{K}def_0) \sqrt{\frac{i \cdot \theta \cdot R_{def}}{L}},$$

$$(7) \quad \mathbf{K}def_0 = k_{Kdef} \cdot s_{St} \cdot \delta_{Y0} \cdot u^{a_{St}} \cdot (10 \cdot 0,1)^{b_{St}} \cdot \left(\frac{T_{sr}}{1000}\right)^{c_{St}},$$

$$(8) \quad \mathbf{K}def_1 = k_{Kdef} \cdot s_{St} \cdot \delta_{Y0} \cdot u^{a_{St}} \cdot (10 \cdot epsH(h_a, h_b))^{b_{St}} \cdot \left(\frac{T_{sr}}{1000}\right)^{c_{St}},$$

Пусть $\Delta \mathbf{K}_{c_i} = (\mathbf{K}_{c_i} - \mathbf{K}_{c_{i-1}})$ – изменение сопротивления полосы, тогда итоговые формулы для расчета контактных напряжений $\mathbf{p}x_{0_i}$ и $\mathbf{p}x_{1_i}$, соответствующих уравнениям (1) и (2), с учетом дискретизации пространства:

$$\mathbf{p}x_{0_i} = \mathbf{p}x_{0_{i-1}} + \Delta \mathbf{K}_{c_i} + \mathbf{K}_{c_{i-1}} \cdot epsH(h_{i-1}, h_i) + \frac{\mu \cdot \mathbf{p}x_{0_{i-1}} \cdot \theta \cdot R_{def}}{h_i}, i = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{p}x_{1_i} = \mathbf{p}x_{1_{i-1}} + \Delta \mathbf{K}_{c_i} + \mathbf{K}_{c_{i-1}} \cdot epsH(h_{N-(i-1)}, h_{N-i}) + \frac{\mu \cdot \mathbf{p}x_{1_{i-1}} \cdot \theta \cdot R_{def}}{h_{N-i}}, i = 1, \dots, N,$$

где N – количество точек в очаге деформации; $h_i = curH(i \cdot \theta)$ – толщина полосы для угла φ_i ; σ_B, σ_F – продольные напряжения в полосе на входе в очаг деформации и на выходе из очага.

Тогда контактное напряжение будет рассчитано по формуле

$$\mathbf{p}x_{Cont_i} = \min(\mathbf{p}x_{0_i}, \mathbf{p}x_{1_{N-i}}), i = 0, \dots, N.$$

В рамках текущего исследования было реализовано сравнение интервалов через меру их удаленности, предложенное в работе [6].

После расчета контактного напряжения $\mathbf{p}x_{Cont}$ определяется расчетное усилие прокатки F_{calc} как суммарное давление

по площади контакта:

$$F_{calc} = \int_0^L p_{contact}(\varphi) d\varphi.$$

где L – длина очага деформации.

Коэффициенты трения μ определяются обратным пересчетом по фактическому усилию прокатки.

Нейтральная точка N_{neutr} – точка пересечения решений уравнений (1) и (2). Касательные напряжения определяются выражением

$$\tau_{contAbs}(\varphi) = \mu \cdot p_{cont}(\varphi),$$

а предел текучести –

$$(9) \quad \tau_{shear}(\varphi) = \frac{K_c(\varphi)}{1,15}.$$

$$\tau_{cont}(\varphi) = \begin{cases} \min(\tau_{contAbs}(\varphi); \tau_{shear}(\varphi)), & \text{при } \varphi \in [0; \varphi_{Nneutr}), \\ -\min(\tau_{contAbs}(\varphi); \tau_{shear}(\varphi)), & \text{при } \varphi \in [\varphi_{Nneutr}; \varphi_{max}]. \end{cases}$$

Скорость относительного скольжения ω_{slip} поверхностей валка и полосы вычисляется по формуле

$$w_{slip}(\varphi) = \left| v_{stand} \cdot \left(\frac{h_{neutr}}{h(\varphi)} - 1 \right) \right|,$$

где v_{stand} – скорость полосы в очаге.

2.2. ОЧАГ ДЕФОРМАЦИИ

Распределение температур подчиняется уравнению теплопроводности. Поскольку при горячей прокатке на полосе прокатной стали образуется окалина, то необходимо решить систему из трех уравнений (для валка, окалины и полосы) с краевыми условиями первого и второго рода [8].

В общем виде уравнение для функции $u(r, t)$ выглядит следующим образом [10]:

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(r, t).$$

Для учета вращения валка (против часовой стрелки) будем считать, что один конец стержня закреплен в центре валка, а второй вращается с угловой скоростью ω . При этом тепловой поток q в граничном условии в зависимости от текущего значения времени должен учитывать характеристики текущей зоны охлаждения.

Пусть φ – угол между текущим положением стержня и радиусом. Сделаем в задаче (10) замену $\varphi = t\omega$ с учетом $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \varphi} \omega$, в результате получим:

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{a}{\omega} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(r, t),$$

где $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega$ – угловая скорость вращения вала.

Таким образом, наши уравнения будут представлены в следующем виде:

– для вала в очаге деформации

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - a_{wr} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0, r \in [0; R_{def}], \varphi \in [0; \varphi_{max}], \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0, \varphi) = 0, \varphi \in [0; \varphi_{max}], \\ u(r, 0) = C_1(r), r \in [0; R_{def}], \\ u(R_{def}, \varphi) = v(R, \varphi), \varphi \in [0; \varphi_{max}]; \end{cases}$$

– для окалины

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - a_{sc} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0, \\ \lambda_{sc} \frac{\partial w}{\partial r}(R_{def}, \varphi) = \lambda_{wr} \frac{\partial u}{\partial r}(R_{def}, \varphi) - q(\varphi), \\ \lambda_{sc} \frac{\partial w}{\partial r}(R_{def} + \delta_{sc}, \varphi) = \lambda_S \frac{\partial V}{\partial r}(R_{def} + \delta_{sc}, \varphi), \\ r \in [R_{def}; R_{def} + \delta_{sc}], \varphi \in [0; \varphi_{max}]; \end{cases}$$

– для полосы в очаге деформации

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - a_s \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{f(r, \varphi)}{\omega}, \varphi \in [0; \varphi_{max}], \\ r \in [R_{def} + \delta_{sc}; r_{max}(\varphi)], \\ V(r_{max}(\varphi), \varphi) = C_2(\varphi), \varphi \in [0; \beta], \\ \frac{\partial V}{\partial r}(r_{max}(\varphi), \varphi) = 0, \varphi \in (\beta; \varphi_{max}]. \end{cases}$$

Здесь $a_k = \frac{\lambda_k}{\rho_k c_k \omega}$, $k \in \{sc, s, wr\}$ – коэффициенты температуропроводности окалины, стали полосы и вала соответственно; $\omega = \frac{v_{Stand}}{R_{def}}$ – угловая скорость вращения вала; v_{Stand} – скорость клетки; R_{def} – деформированный радиус вала; λ_k , $k \in \{sc, s, wr\}$ – коэффициенты теплопроводности; ρ_k , $k \in \{sc, s, wr\}$ – плотности материалов; c_k , $k \in \{sc, s, wr\}$ –

удельные теплоемкости; δ_{sc} – толщина окалины; $C_2(\varphi)$ – распределение температур в полосе соответственно на входе в очаг деформации; $q(\varphi)$ – плотность теплового потока от трения в зоне контакта; $C_1(r)$ – распределение температуры в глубину валка на выходе из очага деформации.

В качестве начальных параметров в очаг деформации приходит температура полосы, смоделированная на предыдущем участке стана: на промежуточном рольганге или на межклетевом промежутке. Для расчетов в вещественной модели в качестве входной температуры усреднялись значения температуры по каждой полосе, получаемые с датчика в начале промежуточного рольганга. В рамках другого исследования был проведен анализ трендов температур по полосам и выделен диапазон разброса значений, что позволило подавать на промежуточный рольганг достоверные данные. Соответственно с него и далее температура полосы является интервальной, т.е. и $C_2(\varphi)$. От температуры полосы также зависят коэффициент теплопроводности λ_s и удельная теплоемкость c_s полосы, поэтому они тоже являются интервальными значениями. Таким образом, задача моделирования температуры полосы в очаге деформации (11)–(13) в интервальных значениях принимает вид:

– для валка в очаге деформации

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - a_{wr} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0, r \in [0; R_{def}], \varphi \in [0; \varphi_{max}], \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0, \varphi) = 0, \varphi \in [0; \varphi_{max}], \\ u(r, 0) = C_1(r), r \in [0; R_{def}], \\ u(R_{def}, \varphi) = v(R, \varphi), \varphi \in [0; \varphi_{max}], \end{cases}$$

– для окалины

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - a_{sc} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0, \\ \lambda_{sc} \frac{\partial w}{\partial r}(R_{def}, \varphi) = \lambda_{wr} \frac{\partial u}{\partial r}(R_{def}, \varphi) - q(\varphi), \\ \lambda_{sc} \frac{\partial w}{\partial r}(R_{def} + \delta_{sc}, \varphi) = \lambda_s \frac{\partial v}{\partial r}(R_{def} + \delta_{sc}, \varphi), \\ r \in [R_{def}; R_{def} + \delta_{sc}], \varphi \in [0; \varphi_{max}], \end{cases}$$

– для полосы в очаге деформации

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \mathbf{a}_s \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{\mathbf{f}(r, \varphi)}{\omega}, \varphi \in [0; \varphi_{max}], \\ r \in [R_{def} + \delta_{sc}; r_{max}(\varphi)], \\ \mathbf{v}(r_{max}(\varphi), \varphi) = \mathbf{C}_2(\varphi), \varphi \in [0; \beta], \\ \frac{\partial v}{\partial r}(r_{max}(\varphi), \varphi) = 0, \varphi \in (\beta; \varphi_{max}]. \end{cases}$$

Вследствие того, что решается единая задача для валка, окалины и полосы, температура валка \mathbf{u} и окалины \mathbf{w} , а также коэффициент температуропроводности валка \mathbf{a}_{wr} также стали интервальными параметрами.

Используя конечно-разностную аппроксимацию [3, 9], задача (14)–(16) свелась к расчету $(i + 1)$ -го слоя из СЛАУ относительно \mathbf{u}_j^{i+1} и \mathbf{v}_g^{i+1} , $j = 1, \dots, M_{cont} - 1, g = 1, \dots, M_s - 1$.

$$(17) \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где $\mathbf{A}^{(M_{cont}+M_s-2) \times (M_{cont}+M_s-2)}$ – матрица коэффициентов перед значениями функций в правой части, \mathbf{x} – значения функции на $(i + 1)$ -м слое, \mathbf{b} – вектор из правых частей уравнений.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\theta \mathbf{a}_{wr}}{h^2} & -\frac{\theta \mathbf{a}_{wr}}{h^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{\theta \mathbf{a}_{wr}}{h^2} & 1 + \frac{2\theta \mathbf{a}_{wr}}{h^2} & -\frac{\theta \mathbf{a}_{wr}}{h^2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & -\frac{\theta \mathbf{a}_{wr}}{h^2} & +\frac{2\theta \mathbf{a}_{wr}}{h^2} - \frac{\theta \mathbf{a}_{wr} \beta_2 \beta_4}{h^2(1-\beta_2 \beta_3)} & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & -\frac{\theta \mathbf{a}_s \beta_1 \beta_3}{h_s^2(1-\beta_2 \beta_3)} + \frac{2\theta \mathbf{a}_s}{h_s^2} - \frac{\theta \mathbf{a}_s \beta_4}{h_s^2(1-\beta_2 \beta_3)} & -\frac{\theta \mathbf{a}_s}{h_s^2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\theta \mathbf{a}_s}{h_s^2} & 1 + \frac{2\theta \mathbf{a}_s}{h_s^2} & -\frac{\theta \mathbf{a}_s}{h_s^2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -\frac{\theta \mathbf{a}_s}{h_s^2} & 1 + \frac{2\theta \mathbf{a}_s}{h_s^2} \end{pmatrix},$$

где $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ – выведенные сокращения формул, причем дополнительно

$$\mathbf{A}^{(M_{cont}+M_s-2) \times (M_{cont}+M_s-2)} = \begin{cases} 1 + \frac{2\theta \mathbf{a}_s}{h_s^2} & \text{при } \varphi \in [0; \beta], \\ 1 + \frac{\theta \mathbf{a}_s}{h_s^2} & \text{при } \varphi \in (\beta; \varphi_{max}]; \end{cases}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_j^i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{M_{cont}-2}^i \\ \mathbf{u}_{M_{cont}-1}^i + \frac{\theta \mathbf{a}_{wr} \dot{q}^{i+1}}{h^2} \\ \mathbf{v}_{M_{cont}+2}^i + \theta \mathbf{f}_{M_{cont}+2}^i + \frac{\theta \mathbf{a}_s \beta_3 \dot{q}^{i+1}}{h_s^2 (1 - \beta_2 \beta_3)} \\ \mathbf{v}_{M_{cont}+3}^i + \theta \mathbf{f}_{M_{cont}+3}^i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_j^i + \theta \mathbf{f}_j^i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{M-2}^i + \theta \mathbf{f}_{M-2}^i \\ \begin{cases} \mathbf{v}_{M-1}^i + \theta \mathbf{f}_{M-1}^i + \frac{\theta \mathbf{a}_s}{h_s^2} C_3^{i+1} & \text{при } \varphi \in [0; \beta], \\ \mathbf{v}_{M-1}^i + \theta \mathbf{f}_{M-1}^i & \text{при } \varphi \in (\beta; \varphi_{max}]; \end{cases} \end{pmatrix}.$$

Получившуюся модель объединим с задачей распределения температуры в полосе на межклетевом промежутке в интервальных параметрах [13]:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{a}_s \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial y^2} = 0, y \in [0, \frac{d}{2}], t \in [0, t_{max}], \\ \mathbf{v}(y, 0) = u(y, \varphi_{max}), y \in [0, \frac{d}{2}], \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}(0, t) = 0, t \in [0, t_{max}], \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}(d, t) = -\frac{1}{\lambda_s} \mathbf{q}(t), t \in [0, t_{max}]; \end{cases}$$

где $\mathbf{a}_p = \frac{\lambda_s}{\rho_s c_s}$, λ_s – коэффициент теплопроводности стали; ρ_s – плотность стали; c_s – удельная теплоемкость стали; $\mathbf{q}(t)$ – тепловой поток, соответствующий теплоотдаче за счет излучения полосы и конвективного обмена с водой и воздухом:

$$\mathbf{q}(t) = \alpha_{conv}(t) \left(v \left(\frac{d}{2}, t \right) - \theta(t) \right) + \alpha_{rad}(t) \left(v^4 \left(\frac{d}{2}, t \right) - \theta^4(t) \right).$$

3. Заключение

Таким образом, собрано интервальное решение задачи распределения температуры в чистой группе клеток стана горячей прокатки: от начала 6 клетки до выхода из 12 клетки. Для расчетов по модели было доработано программное обеспечение, главное окно которого представлено на рис. 1, и в него были добавлены интервальные операции, как в [1, 11].

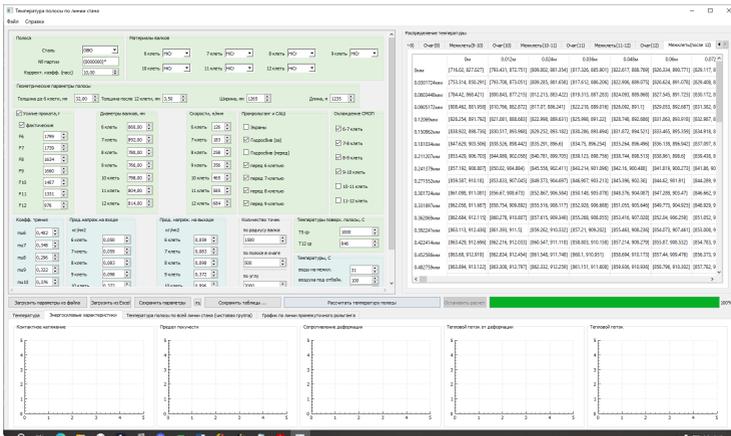


Рис. 1. Главное окно программы

Можно заметить, что в очаге деформации основным фактором, влияющим на интервальное распределение температуры, является входная температура полосы. За счет нее все остальные величины задачи стали интервальными. Апробация вещественной модели была показана в работе [4], поэтому оценкой качества модели можно считать попадание вещественного значения в интервальное. На межклетевом промежутке влияющих параметров больше за счет погрешности расположения датчиков, отсутствия точной информации о характеристиках материала исследуемых объектов, неопределенности окружающей среды, например температур вне стана и внутри клеток. Добавление неопределённости в очаге деформации за 6 клеток накопило разброс между нижней и верхней границей интервального значения температуры в

полосе до 90 градусов, среднее значение отклонения составило 50,9 градусов, минимальное – 50 градусов (рис. 2). Данная внешняя оценка является завышенной, однако она гарантирует, что действительное решение находится в полученных рамках (интервалах).

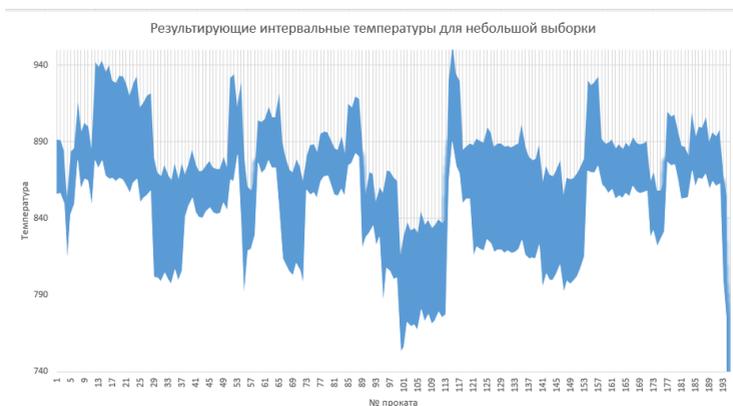


Рис. 2. Интервальные температуры для небольшой выборки

Литература

1. АНДРОСОВ А.С., ШАРЫЙ С.П. *IntvalPy - библиотека интервальных вычислений на языке Python* // Вестник НГУ Серия: Информационные технологии. – 2022. – Т. 20, №4. – С. 5–23.
2. БОЛОТНОВ А.М., ХИСАМЕТДИНОВ Ф.З. *Численные исследования катодной защиты трубопроводов с учетом интервальной неопределенности в исходных данных* // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. – 2018. – Т. 22, №3(81). – С. 105–113.
3. ВЕРЖБИЦКИЙ В.М. *Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения*. – М.: Изд-во «Высшая школа», 2001. – 382 с.
4. ДАБАС М.Р., ЗУБКОВА Н.С., КОБЗЕВ А.А. *Адаптация математической модели теплового режима полосы в чисто-*

- вой группе клеток стана горячей прокатки // XVII Всероссийская школа-конференция молодых ученых «Управление большими системами». – 2021. – С. 515–521.
5. ДАБАС М.Р. *Математическое моделирование теплового режима полосы на межклетевом промежутке при горячей прокатке* // Сборник материалов Шестнадцатой Всероссийской научно-практической конференции студентов и аспирантов. – 2019. – С. 258–260.
 6. ЛЕВИН В.И. *Сравнение интервалов и оптимизационные задачи с интервальными параметрами* // Радиоэлектроника, информатика, управление. – 2002. – №1(7). – С. 57–62.
 7. ЛЕВИН В.И. *Интервально-дифференциальные уравнения и метод их решения* // Вестник российских университетов. Математика. – 2015. – Т. 20, № 2. – С. 302–306.
 8. ПИМЕНОВ В.А., ПОГОДАЕВ А.К., КОВАЛЕВ Д.А. *Влияние тепловых режимов горячей прокатки на образование дефектов поверхности холоднокатаного листа* // Производство проката. – 2018. – № 12. – С. 8–14.
 9. САМАРСКИЙ А.А., ГУЛИН А.В. *Численные методы*. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
 10. ТИХОНОВ А.Н., САМАРСКИЙ А.А. *Уравнения математической физики*. – М.: Главиздат, 1953. – 660 с.
 11. ШАРЫЙ С.П. *Конечномерный интервальный анализ*. – Новосибирск: XYZ, 2021. – 650 с.
 12. CASTRO J.A. DE, MOREIRA L.P. *Modelling the hot rolling process using a finite volume approach* // WIT Transactions on Engineering Sciences. – 2008. – No. 59. – P. 419–428.
 13. DABAS M., SARAIEV P. *Modeling of Temperature Strip with Interval Parameters in Interstand Gap in Hot Rolling* // 3rd Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modeling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA) – 2021. – No. 3. – P. 1–4.
 14. EDBERG J., MANTYLA P. *Requirements of material modeling for hot rolling* // Simulation of Materials Processing: Theory, Methods and Applications / Ed.: Shen S. Dawson. – 1995. – P. 253–258.

15. GASILOV N.A, AMRAHOV S. *On differential equations with interval coefficients* // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. – 2019. – No. 43.
16. GASILOV N.A *Solving a system of linear differential equations with interval coefficients* // *Discrete and Continuous Dynamical Systems – B*. – 2021. – No. 5(26). – P. 2739–2747.
17. HWANG, J.-K. *Thermal Behavior of a Rod during Hot Shape Rolling and Its Comparison with a Plate during Flat Rolling* // *Processes*. – 2000. – No. 8 327. – 14 p.
18. MUOJEKWU C.A. *Modeling of thermomechanical and metallurgical phenomena in steel strip during hot direct rolling and runout table cooling of thin-cast slabs*. Columbia: Department of metals and Materials engineering, the University of British Columbia, 1998.
19. ORESHINA M., DABAS M. *Modeling of Thermal Mode in Steel Rolling* // 2st Int. Conf. on Control Systems, Mathematical Modelling, Automation and Energy Efficiency (SUMMA). – 2020. – No. 2. – P. 1–4.
20. PEREZ-ALVARADO A., CASTANEDA R.S., CHATTOPADHYAY K., MORALES R. *Numerical Simulation of the Hot Rolling Process of Steel Beams* // *Materials*. – 2021. – No. 14, 7038. – 18 p.
21. ROSIAK A., SANTOS T.G. DOS, ALBA D.R., BRITO A.M.G. et al. *Thermal Behavior of a Rod during Hot Shape Rolling and Its Comparison with a Plate during Flat Rolling* // *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences (ASRJETS)*. – 2020. – Vol. 71, No. 1. – P. 182–194.
22. VISOROVA, R., SCHOLZ R., SPITZER K.-H., WENDELSTORF J. *Spray water cooling heat transfer under oxide scale formation conditions* // *Advanced Computational Methods in Heat Transfer IX*. – 2006. – P. 163–172.

**MODELING OF THE TEMPERATURE REGIME
OF THE STRIP AND ROLL IN THE STANDS
OF THE HOT ROLLING MILL WITH INTERVAL
PARAMETERS**

Monika Dabas, Lipetsk State Technical University, Lipetsk,
graduate student (monique.dabas@gmail.com).

Pavel Saraev, Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Doctor
of Technical Science, professor (psaraev@yandex.ru).

Abstract: The article deals with the problem of the distribution of the strip temperature during hot rolling in interval values. Not all parameters in the modeling of the temperature in the steel are set exactly, just as not all of them can be measured with a certain degree of error. Real models are considered first, then their interval statements are given. The article presents calculations of the energy-power part of the deformation focus in real parameters, the interval statements of this problem are clarified. Further, the complex problem of modeling a deformation focus with real parameters is disclosed, presented in the form of a system of equations "roll-scale-strip". The obtained system of linear algebraic equations with interval parameters is presented, which formed the basis of software for modeling temperatures in the finishing group of stands during hot rolling. A model for calculating the temperature of the strip in the interstand gap is given. With the help of the software, the calculation was made according to the models considered, starting with the deformation center in the 6 stand, ending with the exit from the 12 stand. The average temperature value was 50 degrees, which is quite a lot for practical use, but this is a reason for further research to reduce this range. Conclusions are given.

Keywords: hot rolling, energy-force calculation, deformation zone, interval arithmetic.

УДК 519.6

ББК 22.193

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.А. Головинским.*

Поступила в редакцию 02.11.2023.

Дата опубликования 31.01.2024.

РАЗРАБОТКА МЕТОДА РАННЕГО РАСПОЗНАВАНИЯ ШЛАКА СТАЛЕРАЗЛИВОЧНОГО КОВША МАШИНЫ НЕПРЕРЫВНОГО ЛИТЬЯ ЗАГОТОВОК

Полещенко Д. А.¹, Корнев А. В.²

(Старооскольский технологический институт
им. А.А. Угарова (филиал) НИТУ «МИСИС», Старый Оскол)

Рассматривается проблема раннего распознавания шлака сталеразливочного ковша машины непрерывного литья заготовок. В работе исследуется вибрационный метод распознавания шлака, так как он является наиболее информативным. Опробован ряд методов анализа сигнала виброускорения манипулятора защитной трубы для своевременной отсечки шлака и предотвращения его попадания в промежуточный ковш, таких как его усреднение с помощью фильтра скользящего среднего, вычисление энтропии, построение огибающей спектра сигнала, а также огибающей спектра мощности. Анализ результатов апробации показал, что не все методы могут быть применимы для решения этой задачи. Наилучшую эффективность, равную 93%, обеспечил подход, основанный на анализе спектра мощности сигнала виброускорения. Кроме того, в данной работе рассмотрен и протестирован нейросетевой метод обнаружения аномалий в сигнале виброускорения с помощью различных архитектур автоэнкодеров. Этот подход был опробован как на «синтетических данных», где подтвердил свою работоспособность в обнаружении аномалий, так и на реальных данных, где достигнута точность 73%. Дальнейшие исследования будут направлены на более тщательную проработку данного метода.

Ключевые слова: непрерывная разливка стали, усреднение сигнала, вычисление энтропии, огибающая спектра сигнала, огибающая спектра мощности, нейросетевой метод.

1. Введение

Разливка стали является важной стадией сталеплавильного производства. Существует три способа разливки: сверху в изложницы, сифоном и на устройстве непрерывной разливки стали. Самым распространенным является способ непрерывной разливки стали, при котором жидкому металлу придается форма

¹ Дмитрий Александрович Полещенко, к.т.н., доцент (po-dima@yandex.ru).

² Артем Викторович Корнев, студент магистратуры (korenev01@mail.ru).

прямоугольника или квадрата, либо сортовая заготовка для последующей обработки на прокатных станах [14].

Одной из важных технологических операций при непрерывной разливке стали является процесс слива металла из сталеразливочного ковша. При его переливе важным и сложным этапом служит определение момента начала поступления шлака в промежуточный ковш [9].

Решение данной проблемы очень важно, так как, во-первых, унос шлака из сталковша вызывает ухудшение качества стали.

Вторым следствием уноса шлака является сокращение срока службы промежуточного ковша. Шлак очень вреден для огнеупорного материала промежуточного ковша. Даже если его стенки хорошо покрыты высокопрочными материалами, шлак будет растворять их из-за своего состава, температуры и объема. Другими словами, из-за эрозии огнеупорной футеровки промковша необходимо остановить разливку, чтобы устранить риск безопасности процесса [13].

С другой стороны, преждевременное закрытие шибера создает ситуацию, когда вместе со шлаком большое количество годного металла бракуется [4].

Все это приводит к потерям металлургических предприятий.

Мировые исследователи в области металлургии разработали несколько методов обнаружения шлака, основанных на различных принципах.

Так, инфракрасный метод [22] основывается на анализе инфракрасного излучения струи металла. Однако у этого метода есть существенный недостаток: необходима открытая струя металла, а в рассматриваемой работе она защищена от окисления сливной трубой.

Метод косвенного расчета массы сталковша [4] предполагает пересчет массы стали и шлака в уровень. Стоит заметить, что огромное влияние на точность расчета уровня оказывает погрешность измерения массы, которая в подавляющем большинстве случаев является большой.

Электромагнитный метод основывается на расположении, как правило, двух электромагнитных катушек в зону потока металла, одна из которых является излучателем, другая – прием-

ником, а поток стали – своеобразным сердечником [13]. Главным недостатком данной системы является то, что чувствительные элементы необходимо защищать футеровкой от действия повышенных температур.

В настоящее время перспективным является вибрационный метод, так как он наиболее информативен [2, 19]. Данный метод основан на анализе вибрации потока стали при его сливе в промежуточный ковш. В работе [11] описаны результаты апробации системы на основе сигнала вибрации. Эффективность разработанной системы составила 82,5%, что является недостаточным в условиях текущего производства.

Сравнительный анализ методов раннего распознавания шлака показывает, что в настоящее время идеальной системы отсечки шлака не существует. Однако вибрационная система является наиболее привлекательной, так как не требует больших капиталовложений и обладает высокой точностью и быстродействием [11].

2. Цель исследований и исследуемые методы

В данной работе рассмотрен вибрационный метод контроля за процессом начала поступления шлака в промковш. Исследования проводились на сигналах, снятых с реального промышленного объекта. Акселерометры были установлены на манипулятор защитной трубы МНЛЗ.

Вибрация создается за счет удара стали по шиберу, который дросселирует ее поток из сталковша в промежуточный ковш [11].

Исходя из того, что плотность жидкой стали составляет в среднем $6,9 \text{ т/м}^3$, а плотность шлака – $2,5 \text{ т/м}^3$, возникла гипотеза о том, что уровень сигнала вибрации должен уменьшаться при начале поступления шлака в промежуточный ковш. К таким же выводам пришли авторы в работах [6, 20].

Это, в свою очередь, означает, что возникнет уменьшение мощности сигнала вибрации, которое можно будет зафиксировать и своевременно закрыть шибер для предотвращения попадания шлака в промковш [3]. Таким образом, целью исследований является разработка такого алгоритма обработки сигнала

виброускорения, который позволит своевременно (при начале поступления шлама) обнаружить снижение его амплитуды.

В данной работе исследуется ряд методов анализа сигнала виброускорения: его фильтрация и вычисление энтропии во временной области, построение огибающей спектра сигнала, огибающей спектра мощности, а также нейросетевой метод.

3. Временной анализ сигнала

Временной анализ сигнала включает в себя его усреднение с помощью фильтра скользящего среднего по формуле (1), а также вычисление энтропии по формуле (2):

$$(1) \quad SMA_t = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} p_{t-i},$$

где SMA_t – значение скользящего среднего в точке t ; n – сглаживающий интервал или ширина окна, т.е. количество значений сигнала виброускорения, участвующих в расчёте скользящего среднего; p_{t-i} – значение сигнала виброускорения в точке $t - i$.

$$(2) \quad E = \sum_{i=1}^n \ln(x_i^2(i)),$$

где x_t – вектор значений сигнала виброускорения; n – количество снятых значений сигнала за выбранный период времени, равное 30000; t – номер такта (1 такт равен одной секунде).

На рис. 1–2 изображены графики усредненного сигнала и энтропии.

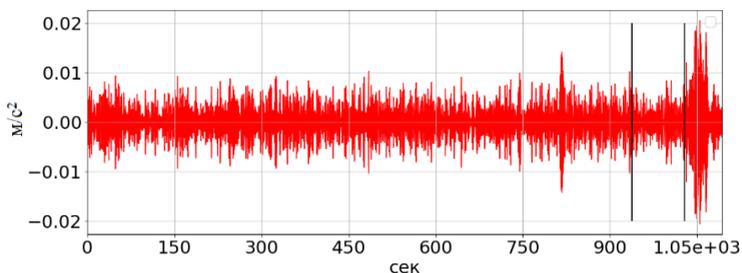


Рис. 1. Усредненный сигнал виброускорения

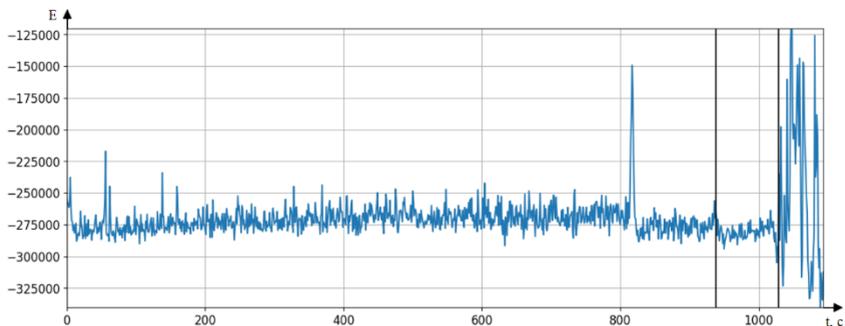


Рис. 2. Энтропия сигнала вибрации

На графиках вертикальная черная линия, расположенная слева, обозначает момент отключения автоматического регулирования шиберов, а правая – момент закрытия шиберов оператором. Как можно увидеть, данные методы не дали положительных результатов, так как они не позволили зафиксировать снижение уровня сигнала вибрации при начале поступления шлама в промковш.

4. Построение огибающей спектра сигнала

В работе было произведено построение огибающей спектра сигнала для различных частотных диапазонов.

Для каждой секунды сигнала виброускорения был построен спектр по формуле

$$(3) \quad X^k(j) = \sum_{n=(k-1)N}^{kN-1} x_n e^{-\frac{2\pi i}{N} jn},$$

где $X^k(j)$ – это амплитуда j -ой гармоники k -го такта сигнала виброускорения; N – количество значений сигнала в одном такте, равное 30000; x_n – измеренные значения сигнала.

На основании спектра сигнала (3) были построены огибающие спектра сигнала по формуле (4):

$$(4) \quad P^q(k) = \frac{\sum_{j=f_{min}}^{f_{max}} X^k(j)}{f_{max} - f_{min}},$$

где $k = 1, \dots, K^q$ – номер такта (1 такт равен одной секунде); K^q – номер такта, на котором оператор закрыл шибер; $q = 1, \dots, 15$ – число экспериментов; f_{min} – нижняя граница частоты; f_{max} – верхняя граница частоты.

Нужно заметить, что данный метод не позволил однозначно определить момент начала засасывания шлака в промежуточный ковш, что можно увидеть на рис. 3.

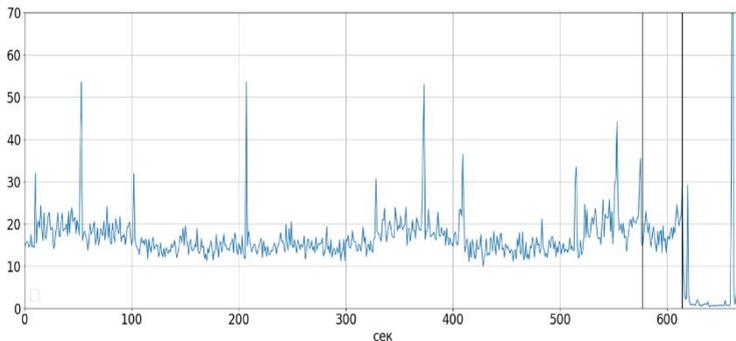


Рис. 3. Огибающая спектра сигнала в частотном диапазоне 100-200 Гц

5. Построение огибающей спектра мощности

Кроме того, в процессе исследования сигнала виброускорения в частотной области была проанализирована его спектральная плотность мощности. Эта величина показывает, как мощность сигнала распределяется по частотам:

$$(5) \quad S_{xx}(f) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{(\Delta t)^2}{T} \left| \sum_{n=1}^N x_n e^{-i2\pi f n \Delta t} \right|^2,$$

где T – период времени; N – длина сигнала x ; Δt – интервал выборки в секундах.

Для более наглядного представления спектральная плотность мощности может быть вычислена по формуле

$$(6) \quad S_{xx}(f) = 10 \lg \left(\frac{(\Delta t)^2}{T} \left| \sum_{n=1}^N x_n e^{-i2\pi f n \Delta t} \right|^2 \right).$$

Построение спектров мощности производилось для частотных диапазонов 0–3000 Гц, 800–1200 Гц, 0–100 Гц, разных объемов выборки данных (150 000–21 000 000 значений), а также различных моментов выборки данных, а именно: спектры мощности начинали вычисляться с момента отключения автоматического регулирования шибера до закрытия шибера оператором, спектры мощности начинали вычисляться за пятнадцать, десять и пять секунд до закрытия шибера оператором.

Их анализ показал, что для большинства сигналов наблюдается снижение мощности в частотном диапазоне 0–100 Гц. Сходные результаты были получены в работе [10].

Следующим этапом стало построение графиков среднего значения мощности за одну секунду в частотном диапазоне 0–100 Гц для сигнала от момента отключения автоматического регулирования шибера до его закрытия оператором, которая была названа огибающей спектра мощности по формуле (7):

$$(7) \quad P_{xx}^q(k) = \frac{\sum_{i=0}^{f_{max}} S_{xx}^k(i)}{f_{max}},$$

где $k = 1, \dots, K^q$ – номер такта (1 такт равен одной секунде и содержит 30000 значений); K^q – номер такта, на котором оператор закрыл шибер; $q = 1, \dots, 15$ – число экспериментов; f_{max} – верхняя граница частоты, равная 100 Гц.

Анализ всех графиков огибающей спектра мощности показал, что наблюдается ниспадающий тренд перед закрытием шибера оператором, т.е. при начале поступления шлама в промковш (см. рис. 4).

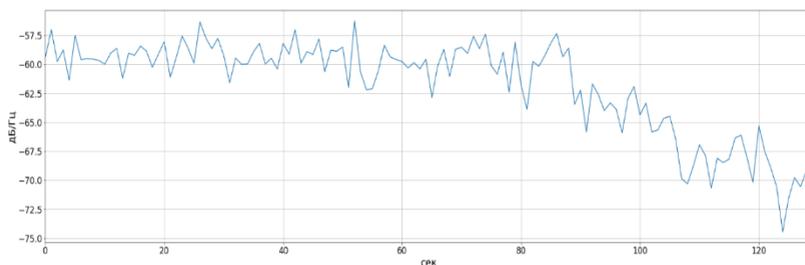


Рис. 4. Огибающая спектра мощности

Для идентификации данного изменения тренда были разработаны следующие критерии:

Критерий 1: если значение мощности снизилось более чем на 4,75 дБ относительно среднего за все время наблюдения, то считаем, что пошел шлак:

$$(8) \quad A = \begin{cases} 1, & P_{xx}^q(k) < \frac{\sum_{j=1}^k P_{xx}^q(j)}{k} - 4,75, \\ 0, & P_{xx}^q(k) \geq \frac{\sum_{j=1}^k P_{xx}^q(j)}{k} - 4,75; \end{cases}$$

где A – искомая пороговая функция; $k = 10, \dots, K^q$.

Результат работы данного критерия представлен на рис. 5.

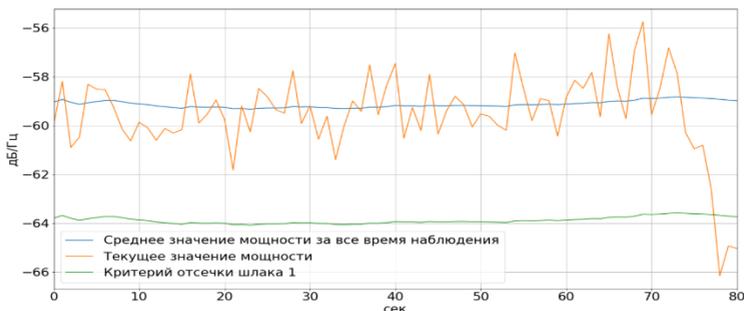


Рис. 5. Тренд отработки критерия 1

Критерий 2: если значение мощности снизилось более чем на 3,8 дБ относительно среднего значения за все время наблюдения дважды в течение трех тактов, то считаем, что пошел шлак: формулы (9)–(12).

Анализируя мощность сигнала виброускорения на каждом такте, определяем величины l, m по формуле

$$(9) \quad \text{if } P_{xx}^q(k) < \frac{\sum_{j=1}^k P_{xx}^q(j)}{k} - 3,8 \text{ then } \begin{cases} l = k, \\ m = m + 1; \end{cases}$$

где k – текущий такт; l – номер такта, при котором мощность снизилась более чем на 3,8 дБ относительно среднего; m – счетчик количества искомых тактов, равный нулю в первоначальный момент времени.

Вычисляем разность d между номерами текущего такта и такта, при котором мощность снизилась более чем на 3,8 дБ относительно среднего, по формуле

$$(10) d = k - l.$$

Анализируя разность между ближайшими тактами, у которых мощность снизилась более чем на 3,8 дБ относительно среднего, обновляем счетчик искомых тактов m по формуле

$$(11) m = \begin{cases} 0, & d \geq 2, \\ m, & d < 2. \end{cases}$$

Искомая пороговая функция A принимает вид согласно формуле

$$(12) A = \begin{cases} 1, & m = 2; \\ 0, & m < 2. \end{cases}$$

Результат работы данного критерия представлен на рис. 6.

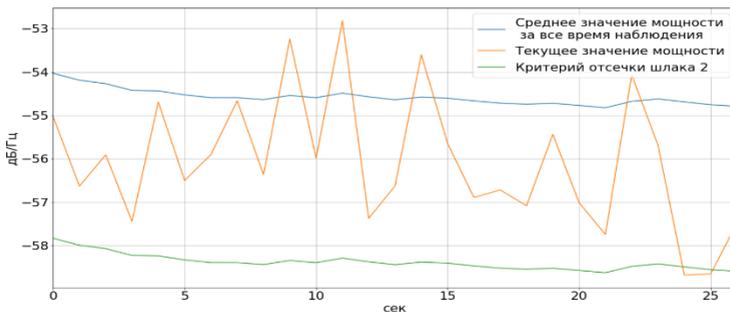


Рис. 6. Тренд отработки критерия 2

Критерий 3: если текущее значение мощности снизилось более чем на 4,2 дБ относительно скользящего среднего (размер окна 10 тактов) при условии, что величина текущей мощности больше величины критерия 2, то считаем, что пошел шлак (см. формулу (13)):

$$(13) A = \begin{cases} 1, & \frac{\sum_{j=1}^k P_{xx}^q(j)}{k} - 3,8 < P_{xx}^q(k) < \frac{\sum_{j=k-10}^k P_{xx}^q(j)}{10} - 4,2, \\ 0, & P_{xx}^q(k) \leq \frac{\sum_{j=1}^k P_{xx}^q(j)}{k} - 3,8 \text{ or } P_{xx}^q(k) \geq \frac{\sum_{j=k-10}^k P_{xx}^q(j)}{10} - 4,2; \end{cases}$$

где $k = 10, \dots, K^q$.

Результат работы данного критерия представлен на рис. 7.

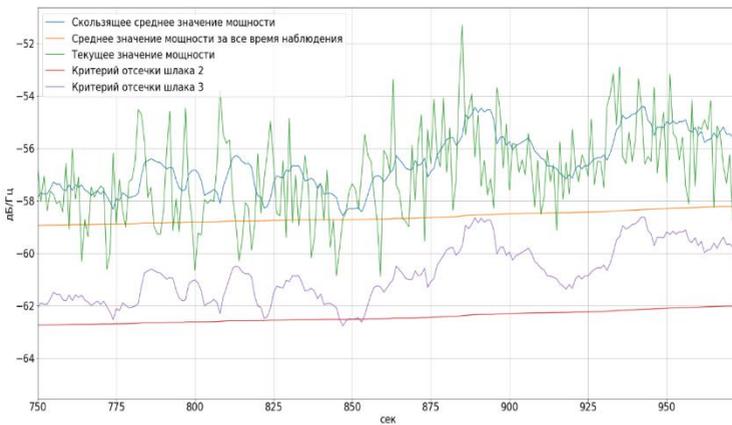


Рис. 7. Тренд отработки критерия 3

Анализ результатов апробации данных критериев показал, что они работали во всех опытах, кроме одного (см. таблицу 1). Значит, в целом было выявлено единообразие изменения мощности сигнала вибрации.

Стоит отметить, что ввиду сильной зашумленности сигнала виброускорения часть экспериментов (порядка 25%) завершилась с излишне заблаговременным срабатыванием, что на реальном объекте приведет к снижению качества работ.

Таблица 1. Результаты срабатывания критериев отсечки шлака на основе анализа спектра мощности сигнала виброускорения

Дата и номер разливки	Срабатывание критерия, такт			Отсечка шлака оператором, такт	Отклонение по критерию, такт		
	1	2	3		1	2	3
23.03.17_1	–	612	–	614	–	2	–
23.03.17_2	749	750	–	751	2	1	–
23.03.17_3	666	666	–	668	2	2	–
12.05.17_1	–	–	876	880	–	–	4
12.05.17_3	1026	1027	1025	1029	3	2	4
12.05.17_4	1223	–	–	1224	1	–	–
12.05.17_5	1088	1085	–	1090	2	5	–
03.08.17_1	–	–	–	817	–	–	–
03.08.17_2	500	510	–	548	48	38	–
03.08.17_3	–	–	983	984	–	–	1
03.08.17_4	533	556	–	565	32	9	–
20.09.17_1	672	–	–	679	7	–	–
20.09.17_2	–	–	764	765	–	–	1
20.09.17_3	–	812	–	837	–	25	–
20.09.17_4	750	–	–	761	11	–	–

6. Нейросетевой метод

6.1. ВЫБОР АРХИТЕКТУРЫ НЕЙРОННОЙ СЕТИ

Машинное обучение в целом и нейронные сети в частности в настоящее время начинают играть все более важную роль в мониторинге и управлении сложными процессами, в том числе и в процессе непрерывной разливки стали [8].

Перспективным является нейросетевой метод анализа сигнала виброускорения, так как нейронные сети способны решать задачи, когда неизвестны взаимосвязи входных и выходных данных.

На сегодняшний день существует большое количество видов нейронных сетей, каждый из которых чаще всего лучше подходит для решения конкретного спектра задач.

В течение последних лет было проблемой автоматически обнаруживать и правильно классифицировать что-то отклоняющееся от нормы как аномальное. И это становится более сложным, когда речь идет о многомерных данных, потому что традиционные подходы машинного обучения не могут уловить сложную структуру несбалансированных данных. Для решения данной проблемы можно использовать архитектуру автоэнкодера для обнаружения аномалий в данных [16]. Метод обнаружения аномалий используется в области статистики для определения выбросов в данных [17].

Аномалии представляют собой отклонения от нормы, т.е. являются какими-то закономерностями в данных, которые не соответствуют четко определенному представлению о нормальном поведении [7, 15].

В нашем случае аномалией является изменяющийся характер сигнала виброускорения при начале попадания шлама в промежуточный ковш.

6.2. ХАРАКТЕРИСТИКА АВТОЭНКОДЕРА

В общем случае автоэнкодер является нейронной сетью, которая состоит из двух основных блоков: энкодера g и декодера f [1].

Входной слой автокодировщика и его выход имеют одинаковый размер, т.е. равное количество нейронов. Между кодером и декодером находится скрытый слой. Его размер, как правило, меньше размера входа.

Архитектура автоэнкодера представлена на рис. 8 [5].

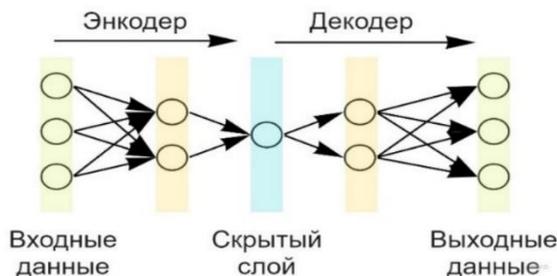


Рис. 8. Архитектура автоэнкодера

Энкодер переводит входной сигнал в латентное (скрытое) представление по формуле

$$(14) \quad h = g(x).$$

Декодер в свою очередь пытается восстановить исходный сигнал по его сжатому представлению:

$$(15) \quad \tilde{x} = f(h).$$

Автокодировщик в процессе обучения стремится изменить g и f так, чтобы минимизировать функционал ошибки $L(x, f(g(x)))$.

Из-за ограничений семейств функций g и f автоэнкодер выбирает только наиболее важные характеристики (свойства) данных.

Другими словами, автоэнкодер является моделью, способной восстанавливать исходный сигнал за счет интерпретации входного сигнала слоем скрытого представления, обученного на образцах. Поэтому была выдвинута гипотеза, что модель на основе автокодировщика, обученная на нормальный ход процесса разливки, при наступлении момента снижения амплитуды сигнала виброускорения (начало истечения шлака) будет неспособна восстанавливать поступающие данные. Это приведет к увеличению метрики ошибки и будет индикатором начала искомого состояния сигнала. То есть конечную задачу можно привести к задаче определения аномалии в сигнале виброускорения.

6.3. АПРОБАЦИЯ АВТОЭНКОДЕРОВ НА «СИНТЕТИЧЕСКИХ ДАННЫХ»

В данной работе были разработаны и опробованы два вида автоэнкодеров: автоэнкодеры на Dense-слоях и LSTM-автоэнкодер.

Dense-автоэнкодер состоит из полносвязных слоев. Полносвязный слой – это слой, выходные нейроны которого связаны со всеми входными нейронами.

LSTM-автоэнкодер состоит из LSTM-ячеек. LSTM – особая разновидность архитектуры рекуррентных нейронных сетей, способная к обучению долговременным зависимостям [12, 18, 21].

На первом этапе исследований было решено опробовать метод обнаружения аномалий на «синтетических данных» с помощью искусственных нейронных сетей.

В виде искусственного сигнала была выбрана синусоида.

Для формирования обучающей выборки были созданы функции синуса одинаковой частоты, но разной амплитуды от 0,1 до 0,4 условных единиц с шагом 0,1:

$$(16) X_1((M-1)k_{max} + k, (n_{0+10(k-1)}, \dots, n_{9+10(k-1)})) = \\ = 0,1M \sin(n_{0+10(k-1)}, \dots, n_{9+10(k-1)}),$$

где $M = 1, \dots, 4$; $k = 1, \dots, 99$; $n = 1, \dots, 989$.

В качестве критерия обнаружения аномалий в сигнале была выбрана среднеквадратичная ошибка.

Расчет был произведен по формуле

$$(17) MSE = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y_i - \tilde{y}_i),$$

где MSE – среднеквадратичная ошибка; m – количество наблюдений; y_i – фактическая координата наблюдения; \tilde{y}_i – предсказанная координата наблюдения.

Тестирование автоэнкодеров производилось на сигналах в виде синуса, но других амплитуд. Кроме того, данные сигналы были модифицированы путем внесения помехи (аномалии) к шестой точке построения графика. Этот сигнал описывается выражением

$$(18) X_3(n_1) = \begin{cases} 0,9 \sin(n_1), & n_1 \neq 6, \\ 0,9 \sin(n_1) + 0,3, & n_1 = 6; \end{cases}$$

где: $n = 0, \dots, 9$.

Эксперименты проводились для разных структур Dense- и LSTM-автоэнкодеров. Структура автоэнкодера, показавшего наилучший результат, представлена следующим выражением:

$$(19) \begin{cases} X_{neurs^1}^{(1)} = f_{ReLU} \left(\sum_{i=1}^{inputs} (X_i^0 W_{neurs^1,i}^{(1)}) + b_{neurs^1}^{(1)} \right), & neurs^1 = 1, \dots, 7, \\ X_{neurs^2}^{(2)} = f_{ReLU} \left(\sum_{neurs^1=1}^7 (X_{neurs^1}^{(1)} W_{neurs^2,neurs^1}^{(2)}) + b_{neurs^2}^{(2)} \right), & neurs^2 = 1, \dots, 5, \\ X_{neurs^3}^{(3)} = f_{ReLU} \left(\sum_{neurs^2=1}^5 (X_{neurs^2}^{(2)} W_{neurs^3,neurs^2}^{(3)}) + b_{neurs^3}^{(3)} \right), & neurs^3 = 1, \dots, 7, \\ X_{neurs^4}^{(4)} = f_{Linear} \left(\sum_{neurs^3=1}^7 (X_{neurs^3}^{(3)} W_{neurs^4,neurs^3}^{(4)}) + b_{neurs^4}^{(4)} \right), & neurs^4 = 1, \dots, 10; \end{cases}$$

где W – вес нейрона; b – смещение нейрона; $inputs$ – количество входных сигналов, равное 10; $neurs^1$ – количество нейронов в первом слое; $neurs^2$ – количество нейронов в латентном слое; $neurs^3$ – количество нейронов в третьем слое; $neurs^4$ – количество нейронов в выходном слое; X^0 – входной слой, который принимал на вход сигналы, описываемые выражениями (16) при обучении и (18) при тестировании; f_{Linear} и f_{ReLU} – линейная функция активации и функция активации ReLU соответственно.

Аномальность сигнала A определялась пороговым значением δ , которое было получено эмпирически и составило 0,1:

$$(20) A = \begin{cases} 1, & MSE \geq \delta; \\ 0, & MSE < \delta. \end{cases}$$

Результат работы автоэнкодера показан на рис. 9–10.

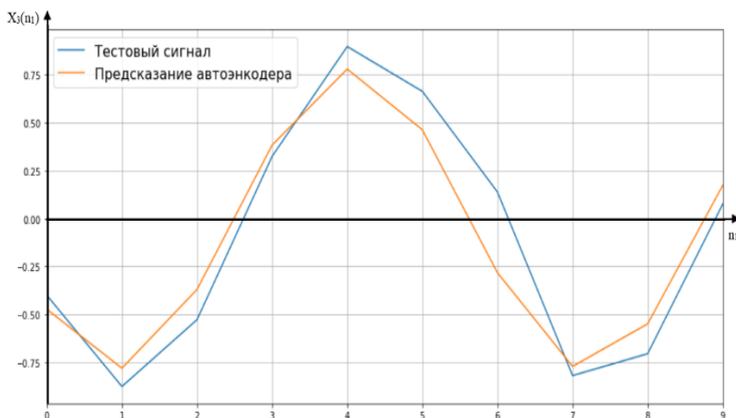


Рис. 9. Результаты тестирования автоэнкодера на сигнале с аномалией

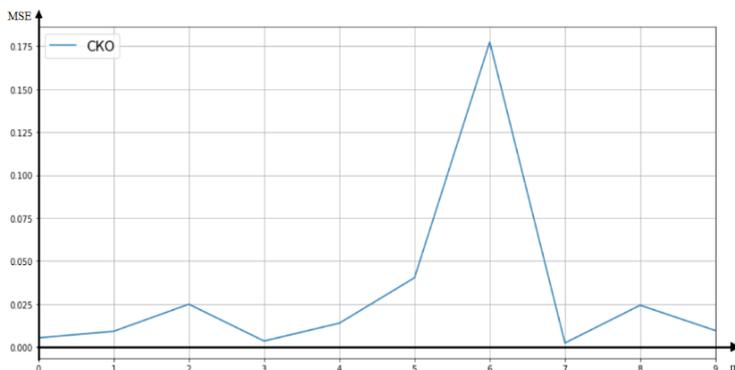


Рис. 10. График среднеквадратичной ошибки

Как видно из графиков, максимальное значение СКО приходится как раз на шестую точку. Она составила около 0,18, что значительно больше δ . Это свидетельствует о том, что автоэнкодер обнаружил аномалию в сигнале (см. рис. 9–10).

6.4. АПРОБАЦИЯ АВТОЭНКОДЕРОВ НА РЕАЛЬНЫХ СИГНАЛАХ

Следующим этапом стала апробация автоэнкодеров на реальном сигнале.

Наряду с автоэнкодером со структурой, описанной выражением (19), были созданы и обучены еще ряд нейронных сетей. Они обучались как на временном, так и на частотном представлении сигнала.

Работа автоэнкодера, показавшего наилучший результат на частотном представлении сигнала, показана на рис. 11.

Как можно увидеть на графиках, автоэнкодер смог воспроизвести спектр сигнала в ходе нормального процесса разливки.

График среднеквадратичной ошибки представлен на рис. 12.

Красной рамкой выделен участок сигнала, где наблюдается увеличение среднеквадратичной ошибки. Это явление возникает перед закрытием шибера оператором, что свидетельствует о том, что автоэнкодер смог обнаружить аномалию в сигнале, т.е. процесс начала поступления шлака в промежуточный ковш.

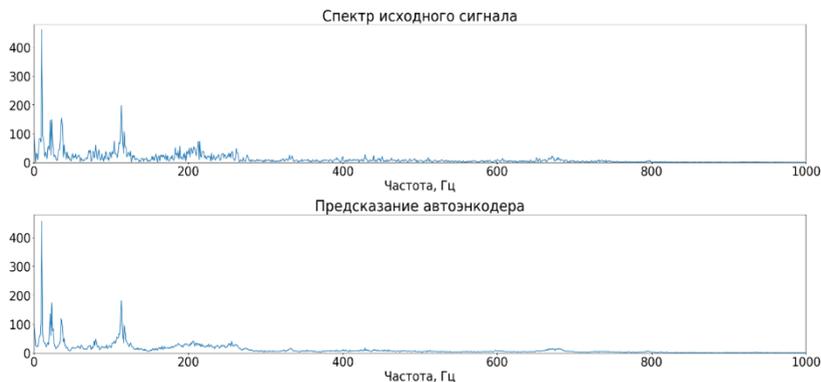


Рис. 11. Анализ качества обучения нейронной сети

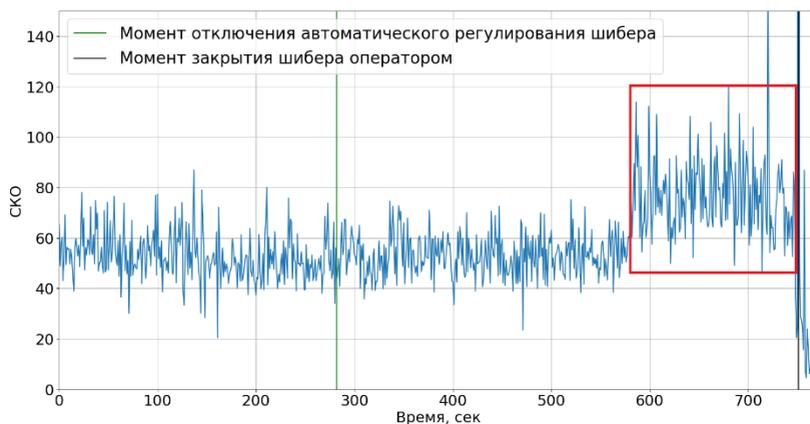


Рис. 12. Тестирование автоэнкодера на реальных данных

На сегодняшний день данный метод позволяет зафиксировать процесс начала засасывания шлака в 73% случаев. Основным объяснением его невысокой эффективности является предположение, что это происходит из-за сильной зашумленности сигнала виброускорения, полученного с реального промышленного объекта.

В дальнейшем планируется более тщательная проработка данного метода с применением различных методов фильтрации при подготовке данных перед подачей на нейронную сеть.

7. Заключение

В данной работе было проведено исследование пяти различных методов анализа сигнала виброускорения: методы усреднения и построения огибающей спектра сигнала, а также вычисления энтропии не дали положительных результатов.

Наилучший результат показали критерии отсечки шлака, основанные на анализе спектра мощности сигнала виброускорения, сработавшие в 93 процентах случаев.

Исследования нейросетевого метода на «синтетических данных» подтвердили его работоспособность в обнаружении аномалий, однако на опытных данных его эффективность пока остается невысокой из-за большой зашумленности сигнала.

Литература

1. АТАРСКАЯ Е.А. Система обнаружения аномалий технологических временных рядов параметров промышленного проекта // Мавлютовские чтения. – 2021. – С. 317–325.
2. ЕРЕМЕНКО Ю.И., ПОЛЕЩЕНКО Д.А. О разработке и промышленной апробации системы отсечки шлака при разливке стали // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. – 2019. – Т. 62, №5. – С. 353–359.
3. КОРЕНЕВ А.В., ПОЛЕЩЕНКО Д.А. Разработка критериев отсечки шлака сталеразливочного ковша МНЛЗ на основе анализа спектра мощности сигнала виброускорения // Сборник XX Всероссийской научно-практической конференции студентов и аспирантов. – 2023. – С. 401–403.
4. КРИВОНОСОВ В.А., МИТИН А.С. Повышение точности оценки уровней металла в стальковше и промковше МНЛЗ с использованием нелинейного наблюдателя состояния // Вестник Воронежского государственного технического университета. – 2010. – Т. 6, №4. – С. 41–45.
5. САФРОНОВ Д.А., КАЦЕР Ю.Д., ЗАЙЦЕВ К.С. Поиск аномалий с помощью автоэнкодеров // Int. Journal of Open Information Technologies. – 2022. – Т. 10, №8. – С. 39–45.

6. СЕМЕНОВ М.В., КРАСИЛЬНИКОВ С.С., ШВИДЧЕНКО Д.В., ПИШНОГРАЕВ Р.С. *Вибродетектирование шлака при сливе стали из стальной ковша в промежуточный ковш // Автоматизированные технологии и производства. – 2015. – №2. – С. 40–42.*
7. BLÁZQUEZ-GARCÍA A., CONDE A., MORI U., LOZANO J.A. *A review on outlier/anomaly detection in time series data // ACM Computing Surveys (CSUR). – 2021. – Vol. 54, No. 3. – P. 1–33.*
8. CEMERNEK D., CEMERNEK S., GURSCH H., PANDESHWAR A. et al. *Machine learning in continuous casting of steel: A state-of-the-art survey // Journal of Intelligent Manufacturing. – 2021. – P. 1–19.*
9. CHAKRABORTY A., GHOSE J., CHAKRABORTY S., CHAKRABORTY B. *Vision-based detection system of slag flow from ladle to tundish with the help of the detection of undulation of slag layer of the tundish using an image analysis technique // Iron-making & Steelmaking. – 2022. – Vol. 49, No. 1. – P. 10–15.*
10. CHEN D., XIAO H., JI Q. *Vibration style ladle slag detection method based on discrete wavelet decomposition // The 26th Chinese Control and Decision Conference (CCDC-2014). – IEEE, 2014. – P. 3019–3022.*
11. GUVENC M.A., KAPUSUZ H., MISTIKOGLU S. *Experimental study on accelerometer-based ladle slag detection in continuous casting process // The Int. Journal of Advanced Manufacturing Technology. – 2020. – Vol. 106. – P. 2983–2993.*
12. HOMAYOUNI H., GHOSH S., RAY I., GONDALIA S. et al. *An autocorrelation-based LSTM-Autoencoder for anomaly detection on time-series data // IEEE Int. Conf. on Big Data (big data – 2020). – IEEE, 2020. – P. 5068–5077.*
13. KAPUSUZ H., GÜVENÇ M.A., MISTIKOĞLU S. *A review study on ladle slag detection technologies in continuous casting process // Int. Advanced Researches and Engineering Journal. – 2019. – Vol. 3, No. 3. – P. 144–149.*
14. LOUHENKILPI S. *Continuous casting of steel // Treatise on process metallurgy. – Elsevier, 2014. – P. 373–434.*

15. NASSIF A.B., TALIB M.A., NASIR Q., DAKALBAB F.M. *Machine learning for anomaly detection: A systematic review* // IEEE Access. – 2021. – Vol. 9. – P. 78658–78700.
16. PROVOTAR O.I., LINDER Y.M., VERES M.M. *Unsupervised anomaly detection in time series using LSTM-based autoencoders* // IEEE Int Conf on Advanced Trends in Information Theory (ATIT–2019). – IEEE, 2019. – P. 513–517.
17. SHAUKAT K., ALAM T.M., LUO S., SHABBIR S. et al. *A review of time-series anomaly detection techniques: A step to future perspectives* // Advances in Information and Communication: Proceedings of the 2021 Future of Information and Communication Conference (FICC), Vol. 1. – Springer International Publishing, 2021. – P. 865–877.
18. SIAMI-NAMINI S., TAVAKOLI N., NAMIN A. S. *The performance of LSTM and BiLSTM in forecasting time series* // IEEE Int. Conf. on Big Data (Big Data – 2019). – IEEE, 2019. – P. 3285–3292.
19. TAN D.P., JI S.M., LI PEIYU, PAN X.H. *Development of vibration style ladle slag detection methods and the key technologies* // Science China. Technological Sciences. – 2010. – Vol. 53, No. 9. – P. 2378–2387.
20. TAN D.P., LI P.Y., JI Y.X., WEN D.H. et al. *SA-ANN-based slag carry-over detection method and the embedded WME platform* // IEEE Trans. on Industrial Electronics. – 2012. – Vol. 60, No. 10. – P. 4702–4713.
21. WEI Y., JANG-JACCARD J., XU W., SABRINA F. et al. *LSTM-autoencoder-based anomaly detection for indoor air quality time-series data* // IEEE Sensors Journal. – 2023. – Vol. 23, No. 4. – P. 3787–3800.
22. ZHANG Z., BIN L., JIANG Y. *Slag detection system based on infrared temperature measurement* // Optik. – 2014. – Vol. 125, No. 3. – P. 1412–1416.

DEVELOPMENT OF THE METHOD OF EARLY RECOGNITION OF THE SLAG OF THE STEEL LADLE OF THE CONTINUOUS CASTING MACHINE

Dmitry Poleshenko, Stary Oskol technological institute n.a. A.A. Ugarov (branch) NUST «MISIS», Stary Oskol, Cand.Sc., assistant professor (po-dima@yandex.ru).

Artyom Korenev, Stary Oskol technological institute n.a. A.A. Ugarov (branch) NUST «MISIS», Stary Oskol, master's student (korenev01@mail.ru).

Abstract: The article deals with the problem of early recognition of the slag of the steel casting ladle of a continuous casting machine. In this paper, the vibration method of slag recognition was investigated, since it is the most informative. A number of methods were tested for analyzing the vibration acceleration signal of the protective tube manipulator for timely cutting off of slag and preventing it from entering the intermediate bucket, such as averaging it using a moving average filter, entropy calculation, construction of the signal spectrum envelope, as well as the power spectrum envelope. The analysis of the results of the approbation showed that not all methods can be applied to solve this problem. The highest efficiency, equal to 93 percent, was provided by an approach based on the analysis of the power spectrum of the vibration acceleration signal. In addition, in this paper, a neural network method for detecting anomalies in the vibration acceleration signal using various autoencoder architectures is considered and tested. This approach was tested on both "synthetic data", where it confirmed its efficiency in detecting anomalies, and on real data, where an accuracy of 73 percent was achieved. Further research will be aimed at a more thorough elaboration of this method.

Keywords: continuous casting of steel, signal averaging, entropy calculation, signal spectrum envelope, power spectrum envelope, neural network method.

УДК 658.562.3 + 004.021

ББК 30.607

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.7

Статья представлена к публикации членом редакционной коллегии С.Л. Подвальным.

Поступила в редакцию 31.10.2023.

Опубликована 31.01.2024.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И СГЛАЖИВАНИЕ ЗАШУМЛЕННЫХ СИГНАЛОВ, ЗАДАЮЩИХ ТРАЕКТОРИЮ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Кокунько Ю. Г.¹

*(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)*

На примере беспилотного летательного аппарата самолетного типа рассматривается проблема создания единого комплексного подхода к фильтрации и сглаживанию опорных траекторий, представляющих собой сигнальные задающие воздействия, и к восстановлению их производных. Для решения данной проблемы разработаны методы построения и алгоритмы настройки динамического генератора допустимых траекторий. Система дифференциальных уравнений, которой описывается генератор заданий, соответствует канонической модели объекта управления «вход – выход». Выходные переменные генератора отслеживают опорный зашумленный и негладкий векторный сигнал задающих воздействий. Таким образом, генератор представляет собой следящий дифференциатор. Для синтеза его локальных связей и корректирующих воздействий применяются гладкие и ограниченные сигмоидальные функции с ограниченными производными. Такой подход позволяет учитывать ограничения на скорость и ускорение конкретного летательного аппарата, поэтому выходные переменные следящего дифференциатора порождают сглаженную естественным образом пространственную кривую и ее производные, которые используются в системе управления объектом в качестве реализуемой эталонной траектории. Результаты численного моделирования продемонстрировали эффективность разработанного подхода к динамическому дифференцированию и сглаживанию векторных сигналов как в детерминированном случае, так и в присутствии шума. Проведен сравнительный анализ динамических генераторов с различными вариантами установки дополнительных фильтров нижних частот. Применение предложенного подхода возможно для обработки задающих воздействий различных объектов управления, динамическая модель которых приводима к каноническому виду.

Ключевые слова: сглаживание траектории, следящий дифференциатор, проектные ограничения, фильтрация и дифференцирование сигнала, сигма-функция.

¹ Юлия Георгиевна Кокунько, н.с. (juliakokunko@gmail.com).

1. Введение

Рассматривается проблема, связанная с оцениванием производных задающих воздействий, поступающих в систему управления беспилотного летательного аппарата (БПЛА) из автономного источника. Аналитическое описание этих сигналов отсутствует, известны только их текущие значения. Производные задающих воздействий необходимы для синтеза системы слежения. Для восстановления производных сигналов используют численное дифференцирование с вычислением конечных разностей [19] или более сложные вычислительные алгоритмы [3]. Однако эти методы неэффективны при обработке зашумленных сигналов, а с ростом порядка восстанавливаемых производных погрешности накапливаются. Использование многомерных фильтров нижних частот порождает запаздывание [10], что может привести к потере устойчивости замкнутой системы. Таким образом, более предпочтительно дифференцирование сигналов с использованием динамических моделей, например, динамического дифференциатора [2]. Однако при зашумленных сигналах препятствием для настройки дифференциатора для целей фильтрации является неопределенный вход, для подавления которого требуется применять специальные методы.

Стандартным решением является использование линейного наблюдателя с большими коэффициентами усиления [5]. Для уменьшения шумовой составляющей в контур наблюдения вводят фильтры нижних частот [8]. Основной недостаток подобного наблюдателя связан с выбросами оценивающих сигналов из-за неограниченности линейных корректирующих воздействий. В [17] разработан наблюдатель на скользящих режимах. С его помощью оценки производных могут быть получены за конечное время без большого перерегулирования. Известны гибридные наблюдатели [13], в которых корректирующие воздействия содержат и линейную, и разрывную функции. Однако использование разрывных управлений приводит к проблеме «чаттеринга». Для его устранения, в частности, используют скользящие режимы высших порядков [18]. Альтернативный метод заклю-

чается в аппроксимации функции знака линейной функцией с насыщением [13–15]. Такие наблюдатели-дифференциаторы сочетают в себе преимущества линейных наблюдателей с большими коэффициентами и наблюдателей на скользящих режимах, но свободны от их недостатков.

Задающие воздействия (как обрабатываемые сигналы) имеют свои особенности. Путь следования мобильного робота на плоскости или в пространстве должен быть достаточно гладким и иметь ограниченную непрерывную кривизну, так как робот не может мгновенно изменить направление движения. Проблема планирования допустимой траектории – отдельная задача. Обычно она решается в режиме офлайн с привлечением сплайновой интерполяции или сложных геометрических расчетов [9, 16, 20–21].

В этой работе рассматривается принципиальная возможность решения одновременно задач фильтрации, дифференцирования и сглаживания поступающих извне векторных сигналов, которые определяют в первом приближении траекторию БПЛА. Эти сигналы могут быть негладкими и содержать паразитные помехи. Для комплексного решения указанных проблем используется динамический генератор заданий в виде следящего дифференциатора [11]. Следящий дифференциатор представляет собой каноническую модель «вход – выход», на вход которой подаются корректирующие воздействия. Это векторная стабилизирующая функция от ошибки слежения (невязки между внешним сигналом и выходом следящего дифференциатора). Научная новизна предложенного подхода состоит в процедуре синтеза *S*-образных корректирующих воздействий [7], в которой учитываются ограничения на скорость и ускорение БПЛА. Показано, что в отличие от обычных дифференциаторов следящий дифференциатор обладает лучшими фильтрующими свойствами. Но при этом восстанавливает производные отслеживаемого сигнала любого требуемого порядка. Переменные следящего дифференциатора используются в качестве реализуемого задания в системе управления БПЛА.

2. Постановка задачи

Пусть в рамках решения задачи слежения, а именно отслеживания выходными переменными объекта управления $y_1(t)$ задающих воздействий $\chi_1(t)$, сформировано управление (программное или в форме обратной связи). Для его реализации требуется первая $\dot{\chi}_1(t)$ и вторая $\ddot{\chi}_1(t)$ производные задающего векторного воздействия. В данной работе учитываются следующие особенности задающих воздействий $\chi_1(t)$.

1. Сигнал $\chi_1(t) = (\chi_{11}(t), \chi_{12}(t), \chi_{13}(t))^T$ поступает в реальном времени из автономного источника, его аналитический вид и его производные заранее не известны. Отсюда возникает проблема восстановления в реальном времени первой и второй производных этого сигнала.

2. На опорный сигнал $\chi_1(t)$ могут накладываться шумовые помехи $\eta(t) = (\eta_1(t), \eta_2(t), \eta_3(t))^T$, т.е. в систему управления поступает зашумленный сигнал $\bar{\chi}_1(t) = \chi_1(t) + \eta(t)$. Это порождает проблему, связанную с необходимостью фильтрации задающих воздействий.

3. Задающие воздействия $\chi_{1j}(t)$, $j = 1, 2, 3$, являются непрерывными, но не гладкими функциями времени и содержат особые точки, где производные $\dot{\chi}_{1j}(t)$ имеют конечные разрывы. Отсюда возникает необходимость сглаживать опорный сигнал, чтобы не допускать выбросов значений производных и управляющих воздействий. При этом надо обеспечить выполнение ограничений на скорость и ускорение конкретного объекта управления и получить путь следования с непрерывной ограниченной кривизной.

Учитывая, что одна из функций вводимого динамического генератора состоит в восстановлении производных, для его построения используется каноническую модель «вход – выход» пространственного движения центра масс БПЛА в траекторной системе координат [12]:

$$(1) \quad \dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = ag + B(\theta, \Psi)gu,$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \Psi & -\sin \theta \cos \Psi & \sin \Psi \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\cos \theta \sin \Psi & \sin \theta \sin \Psi & \cos \Psi \end{pmatrix}, \det B \equiv 1, B^{-1} = B^T,$$

где $a = (0; -1; 0)^T$; $y_{21} := V \cos \theta \cos \Psi$, $y_{22} := V \sin \theta$, $y_{23} := -V \cos \theta \sin \Psi$, $y_1 = (y_{11} := L, y_{12} := H, y_{13} := Z)$; L – продольная дальность полета; H – высота полета; Z – боковое смещение; V – путевая скорость; θ – угол наклона траектории полета к горизонту; Ψ – угол пути; $g = 9,8$ [м/с²] – ускорение свободного падения. В качестве управления $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ приняты продольная n_x и поперечная n_y перегрузки и угол крена вектора перегрузки $|\gamma| < \pi$ в виде $u_1 = n_x$, $u_2 = n_y \cos \gamma$, $u_3 = n_y \sin \gamma$.

Представив систему (1) в координатном базисе ошибок слежения $\xi_1 = y_1 - \chi_1$ и их производных $\dot{\xi}_1 = \xi_2 = \dot{y}_1 - \dot{\chi}_1$

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2,$$

$$\dot{\xi}_2 = ag - \ddot{\chi}_1 + B(\theta, \Psi)gu,$$

сформируем закон управления в форме обратной связи

$$u = B^T(\theta, \Psi)(-C_1 \xi_1 - C_2 \xi_2 - ag + \ddot{\chi}_1) / g =$$

$$(2) = -B^T(\theta, \Psi)(C_1(y_1 - \chi_1) + C_2(y_2 - \dot{\chi}_1) + ag - \ddot{\chi}_1) / g,$$

$$C_i = \text{diag}\{c_{ij}\}, c_{ij} = \text{const} > 0, i = 1, 2, j = 1, 2, 3,$$

который линеаризует замкнутую виртуальную систему в терминах ошибок слежения $\dot{\xi}_1 = \xi_2, \dot{\xi}_2 = -C_1 \xi_1 - C_2 \xi_2$ и обеспечивает ее матрице желаемые собственные значения $\lambda_{1j}, \lambda_{2j} \text{Re}(\lambda_{ij}) < 0$: $c_{1j} = \lambda_{1j} \lambda_{2j}$, $c_{2j} = -\lambda_{1j} - \lambda_{2j}$, $j = 1, 2, 3$, таким образом, достигая цели управления для системы (1).

Чтобы учесть свойства объекта управления $V > 0$, $|\theta(t)| < \pi/2$, $t \geq 0$, необходимые для порождения реализуемых задающих воздействий, каноническая система (1) строится с учетом ограничений на скорости и ускорение конкретного БПЛА:

$$(3) \quad \|y_2\| \leq \bar{V}, \|u\| \leq U, \|\dot{u}\| \leq \bar{U}, \bar{V}^2 < U, U^2 < \bar{U},$$

где \bar{V}, U, \bar{U} – проектные ограничения по норме на скорость, перегрузку и скорость изменения перегрузки для конкретного

БПЛА. Верхняя оценка нормы вектора ускорения вычисляется с учетом значения U :

$$(4) \quad \|\dot{y}_2\| = g \|a + B(\theta, \Psi)u\| \leq 3gU.$$

3. Основные результаты

Базовая математическая модель динамического генератора для обработки задающего воздействия строится как копия системы (1) в виде

$$(5) \quad \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = ag + Bgw,$$

где $w = (w_1, w_2, w_3)^T$ – вектор корректирующих воздействий, формирующиеся для обеспечения отслеживания выходными переменными генератора $x_1(t) \in R^3$ сигнала $\chi_1(t) \in R^3$, $x_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13})^T$ – оценка вектора задающих воздействий, $x_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23})^T$ и $\dot{x}_2 = (\dot{x}_{21}, \dot{x}_{22}, \dot{x}_{23})^T$ – восстанавливаемые первая и вторая производные задания соответственно. Предполагается, что на участках непрерывности норма вектора скорости задания меньше, чем ограничение на норму вектора скорости БПЛА $\|\dot{\chi}_1(t)\| \leq X_2 < \bar{V}$, $t \geq 0$. Ставится задача обеспечить в замкнутой системе (5) соответствующие ограничения (3), (4), а именно:

$$(6) \quad \|x_2(t)\| \leq \bar{V}, \|w(t)\| \leq U \Rightarrow \|\dot{x}_2(t)\| \leq 3gU, \|\dot{w}(t)\| \leq \bar{U}, t \geq 0,$$

которые определяют достижимую величину ошибки слежения $e_1(t) = x(t) - \chi_1(t)$. В результате выход генератора $x_1(t)$ будет порождать сглаженный естественным образом аналог сигнала $\chi_1(t)$, который подается как задающее воздействие в систему управления БПЛА.

Для выполнения заданных ограничений (6) предлагается при синтезе корректирующих воздействий w использовать блочный принцип управления и нелинейные ограниченные обратные связи в виде S -образной сигма-функции (для синтеза фиктивного и истинного управления) [1, 4]. Она определена на всей числовой оси, гладкая, нечетная и ограниченная.

С целью настройки в сигма-функцию вводятся два масштабирующих коэффициента – $k, m = \text{const} > 0$:

$$m\sigma(kx) = m \frac{1 - \exp(-kx)}{1 + \exp(-kx)}, \quad 0,8 \leq m |\sigma(kx)| < m,$$

$$|x| > \Delta \geq 2,2/k, \quad |x| \leq \Delta$$

с помощью которых сигма-функцию можно растягивать и сжимать вдоль вертикальной и горизонтальной осей соответственно.

Для решения задачи слежения система (5) записывается относительно ошибки слежения:

$$\dot{e}_1 = -m_1\sigma(k_1e_1) + e_2 - \dot{\chi}_1, \quad \dot{e}_2 = ag + 0,5m_1k_1\Lambda_1(x_2 - \dot{\chi}_1) + Bgw,$$

где

$$\Lambda_1 = \text{diag}(\Lambda_{1j}), \quad \Lambda_{1j} = 1 - \sigma^2(k_1e_{1j}), \quad 0 < \Lambda_{1j} \leq 1, \quad j = 1, 2, 3.$$

При этом формируются сигмоидальные локальные связи

$$x_2^* = m_1 - \sigma(k_1e_1),$$

$$\sigma(k_1e_1) = (\sigma(k_{11}e_{11}), \sigma(k_{12}e_{12}), \sigma(k_{13}e_{13}))^T, \quad m_1, k_1 = \text{const} > 0,$$

где переменная состояния x_2 трактуется как фиктивное управление. Задача слежения сводится к задаче стабилизации ошибки слежения и невязки между реальным и выбранным фиктивным управлением $e_2 = x_2 - x_2^* = x_2 + m_1\sigma(k_1e_1)$.

Для ее решения при синтезе корректирующих воздействий вводится стабилизирующая сигмоидальная обратная связь с компенсацией известных членов:

$$(7) \quad w = -B^T(m_2\sigma(k_2e_2) + ag + 0,5m_1k_1\Lambda_1x_2) / g,$$

$$m_2, k_2 = \text{const} > 0, \quad \sigma(k_2e_2) = (\sigma(k_{21}e_{21}), \sigma(k_{22}e_{22}), \sigma(k_{23}e_{23}))^T.$$

Формулируя достаточные условия стабилизации полученной системы $\|e_2(t)\| \leq 2,2/k_2 \Rightarrow \|e_1(t)\| \leq 2,2/k_1$, при которых задача слежения будет решена с некоторой точностью, остается обеспечить выполнение заданных ограничений (6). С этой целью составим неравенств для выбора параметров корректирующих воздействий, при которых будут выполнены ограничения на переменные $x_2(t)$ и $\dot{x}_2(t)$, являющиеся аналогом вектора скорости и ускорения БПЛА:

$$\|x_2(t)\| \leq 2,2 / k_2 + 0,8m_1, \quad t \geq 0.$$

$$\|\dot{x}_2(t)\| \leq 0,8m_2 + 0,5m_1k_1(2,2 / k_2 + 0,8m_1), \quad t \geq 0.$$

С учетом сформулированных требований составим систему двойных неравенств для выбора параметров сигмоидальной связи:

$$(8) \quad \begin{cases} 2,2/k_2 + X_2 < 0,8m_1 \leq \bar{V} - 2,2/k_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow k_2 > 4,4/(\bar{V} - X_2), \\ 0,5m_1k_1X_2 < 0,8m_2 \leq 3gU - 0,5m_1k_1\bar{V} \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1k_1 < 6gU/(\bar{V} + X_2). \end{cases}$$

Рассматривается случай, когда на сигнал $\chi_1(t)$ накладывается неизвестный шум $\eta(t)$ и в систему управления поступает зашумленный сигнал $\bar{\chi}_1(t) = \chi_1(t) + \eta(t)$. Полагается, что $\eta(t)$ – нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и ограниченной дисперсией. Тогда замкнутая модель генератора (5), (7) примет вид:

$$(9) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \quad \dot{x}_2 = -m_2\sigma(k_2(x_2 + m_1\sigma(k_1(x_1 - \bar{\chi}_1)))) - \\ &- 0,5m_1k_1 \text{diag}\{1 - \sigma^2(k_1(x_{1j} - \bar{\chi}_{1j}))\}x_2. \end{aligned}$$

В генераторе (9) реализуется задача слежения, в силу метода он является блочным интегратором второго порядка, где зашумленный сигнал действует только по входу в виде аргументов сигмоидальных функций. В такой системе шум на входе слабо влияет на выход вследствие естественной фильтрации интегрирующими звеньями. Следует ожидать, что в сигналах $x_1(t)$, $x_2(t)$ системы (9), которые восстанавливают задающий сигнал и его первую производную, паразитные составляющие будут достаточно малы без установки дополнительных фильтров.

Первая гипотеза заключается в том, что в системе объекта управления (1), замкнутой обратной связью, без дополнительных фильтров обеспечивается инвариантность выхода $y_1(t)$ по отношению к шуму в задающем воздействии.

На входе системы (9) паразитные шумы присутствуют в виде аргументов сигмоидальных функций с большим коэффициентом $k_1(x_1 - \bar{\chi}_1)$. Поэтому вторая гипотеза заключается в том, что для лучшей фильтрации следует снизить значение большого коэффициента k_1 , при этом ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - \chi_1(t)$, следовательно, $\xi_1 = y_1 - x_1$, увеличатся по модулю в установив-

шемся режиме. Это аналог известной проблемы фильтра Калмана, для разрешения которой устанавливают компромисс между быстродействием и фильтрующими свойствами.

4. Численное моделирование

Для численного моделирования разработанных алгоритмов (которые проводились в среде MATLAB-Simulink с методом интегрирования Эйлера с фиксированным шагом 0,001 с) рассматривался микро-БПЛА. Такие беспилотные летательные аппараты выполняют разведывательные функции и предоставляют информацию о текущей обстановке. Для этой установки был построен динамический генератор (9) с начальными значениями $x_1(0) = \chi_1(0) = (0, 100, 0)^T$, $x_2(0) = (0,01, 0,01, 0,01)^T$ и с параметрами, принятыми на основе неравенств (8) с учетом ограничений данного БПЛА по скорости и перегрузке в виде:

$$(10) \quad m_1 = 4, k_1 = 4, m_2 = 22, k_2 = 10.$$

Поступающий на вход генератора опорный сигнал определяет желаемую траекторию движения БПЛА в первом приближении. Он задается в виде непрерывной, но негладкой пространственной ломаной линии:

$$\begin{aligned} & \chi_{11} = 0, \chi_{12} = 2t + 100, \chi_{13} = 2t, \quad t \in [0; 5); \\ & \chi_{11} = 2t - 10, \chi_{12} = 115 - t, \chi_{13} = 10, \quad t \in [5; 10); \\ (11) \quad & \chi_{11} = 10, \chi_{12} = 125 - 2t, \chi_{13} = 30 - 2t, \quad t \in [10; 15); \\ & \chi_{11} = 40 - 2t, \chi_{12} = t + 80, \chi_{13} = 0, \quad t \in [15; 20); \\ & \chi_{11} = 0, \chi_{12} = 2t + 60, \chi_{13} = 2t - 40, \quad t \geq 20, \chi_{1j} [\text{м}], t [\text{с}]. \end{aligned}$$

В данном подразделе представляются результаты моделирования замкнутой системы (9) в следующих конфигурациях:

1. Эксперимент 1: без дополнительных фильтров.
2. Эксперимент 2: с дополнительными низкочастотными фильтрами на задающий сигнал $\bar{\chi}_1(t)$ перед его подачей в генератор (9).
3. Эксперимент 3: с дополнительными низкочастотными фильтрами на вторую производную генератора $\dot{x}_2(t)$ перед ее подачей на объект управления.

4. Эксперимент 4: с дополнительными низкочастотными фильтрами и на задающий сигнал $\bar{\chi}_1(t)$, и на вторую производную генератора $\dot{x}_2(t)$.

На рис. 1–2 представлены графики эксперимента 1а: результаты моделирования системы (9) без дополнительных фильтров.

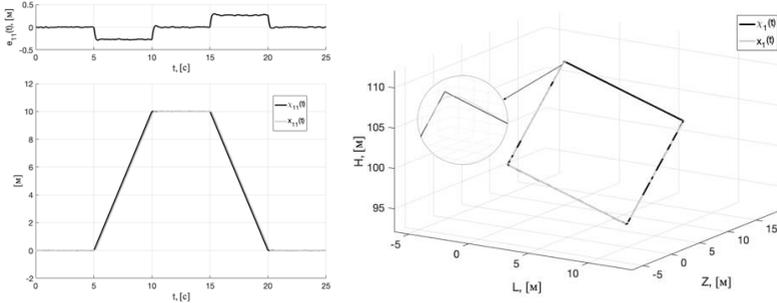


Рис. 1. Эксперимент 1а. Слева – графики опорного сигнала $\chi_{11}(t)$ (11), его обработки $x_{11}(t)$ и ошибки слежения $e_{11}(t)$. Справа – пространственные графики опорной траектории и точки в фазовом пространстве динамического генератора (9)

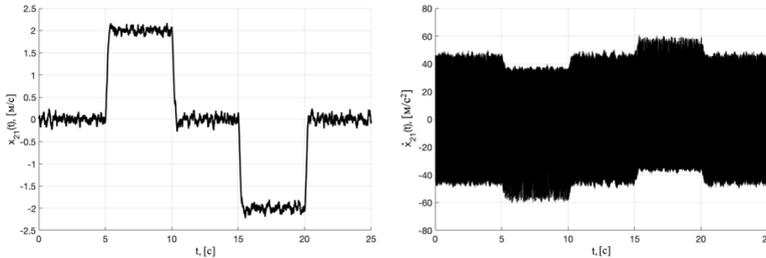


Рис. 2. Эксперимент 1а. Графики $x_{21}(t)$ и $\dot{x}_{21}(t)$ генератора (9)

На рис. 3–4 представлены графики эксперимента 1б: результаты моделирования системы (9) без дополнительных фильтров с параметрами генератора (12) $m_1 = 4, k_1 = 1,5, m_2 = 8, k_2 = 10,$

где большой коэффициент k_1 в 2,6 раз меньше, чем в эксперименте 1а.

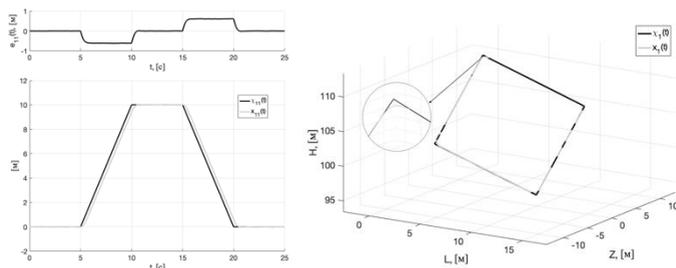


Рис. 3. Эксперимент 1б. Слева – графики опорного сигнала $\chi_{11}(t)$ (11), его обработки $x_{11}(t)$ и ошибки слежения $e_{11}(t)$. Справа – пространственные графики опорной траектории и точки в фазовом пространстве динамического генератора (9)

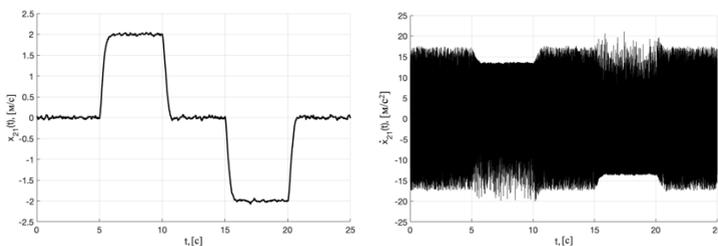


Рис. 4. Эксперимент 1б. Графики $x_{21}(t)$ и $\dot{x}_{21}(t)$ генератора (9)

Первая и вторая гипотезы подтверждаются. В сигналах $x_{21}(t) \approx \dot{x}_{21}(t)$ (рис. 2, 4) и особенно в $x_1(t) \approx \chi_1(t)$ (рис. 1, 3) паразитная составляющая достаточно мала. Эффекты сглаживания углов и ограниченности всех переменных сохраняются. За счет уменьшения большого коэффициента k_1 в 2,6 раз в эксперименте 1б (рис. 3–4) по сравнению с экспериментом 1а (рис. 1–2) зашумленность сигналов меньше, однако ошибки слежения увеличились (рис. 1, 3). При этом в обоих случаях сигналы $\dot{x}_{21}(t)$ (рис. 2, 4), на которые непосредственно действуют помехи, сильно зашумлены. В следующих экспериментах, направленных

на улучшение фильтрации векторного сигнала $\dot{x}_2(t)$ с помощью дополнительных низкочастотных фильтров, будет использоваться динамический генератор с параметрами (12).

В эксперименте 2 вводится дополнительный блочный фильтр на опорный сигнал $\bar{\chi}_1(t)$ перед подачей в генератор (9):

$$(13) \mu_1 \dot{\tau}_1 = -\tau_1 + \bar{\chi}_1 = -\tau_1 + \chi_1 + \eta(t), \tau_1 = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})^T, \tau_1(0) = \bar{0},$$

где $\mu_1 = \text{const} > 0$ – постоянная времени фильтра. Ее выбирают так, чтобы сохранить полезный сигнал $\chi_1(t)$ и при этом подавить паразитные высокочастотные составляющие $\eta(t)$.

Обычно при настройке фильтра используют следующие соотношения [6]:

$$\mu_1 = 1/\omega_c, \omega_c > \omega,$$

где ω_c – желаемая частота среза, при которой мощность сигнала после фильтрации уменьшается в два раза, а его амплитуда – в $\sqrt{2}$ раз; ω – предполагаемая частота сигнала, подлежащего фильтрации. Чем ближе принятое значение ω_c к ω , тем больше искажается полезный сигнал в окрестности ω , но при этом сильнее подавляются паразитные составляющие. Наоборот, с ростом ω_c полезный сигнал искажается меньше, но при этом ухудшается фильтрация. На практике ищут компромисс, исходя из априорных знаний о паразитной составляющей $\eta(t)$. При моделировании в нижеследующих экспериментах было принято $\mu_1 = 10$.

На рис. 5–6 представлены графики эксперимента 2: результаты моделирования с предварительным фильтром (13) генератора (9) с параметрами (12).

Как видно из рис. 6, паразитная составляющая во входных сигналах $\dot{x}_{21}(t)$ заметно уменьшилась по сравнению с экспериментом 1, а выходные сигналы и ошибки слежения (рис. 5) значительно не изменились. Эффекты сглаживания углов, ограниченности всех переменных и управлений сохраняются.

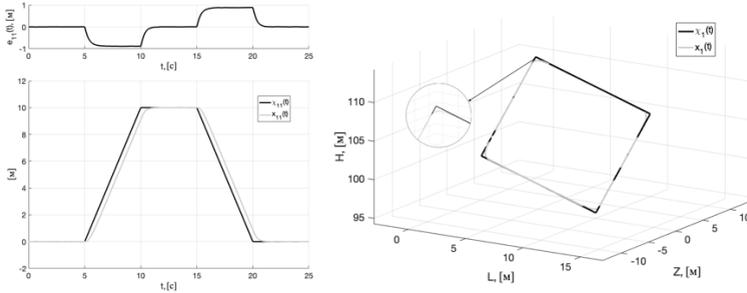


Рис. 5. Эксперимент 2. Слева – графики опорного сигнала $\chi_{11}(t)$ (11), его обработки $x_{11}(t)$ и ошибки слежения $e_{11}(t)$. Справа – пространственные графики опорной траектории и точки в фазовом пространстве динамического генератора (9)

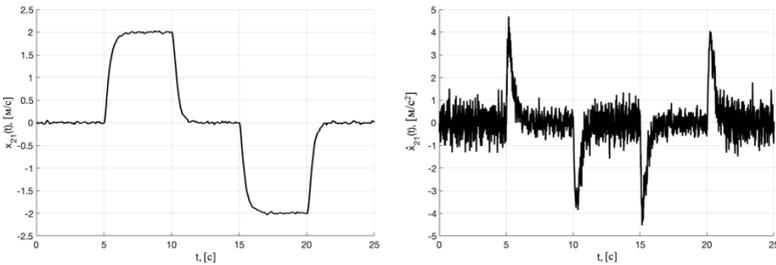


Рис. 6. Эксперимент 2. Графики $x_{21}(t)$ и $\dot{x}_{21}(t)$ генератора (9)

В эксперименте 3 в генератор (9) по-прежнему поступает зашумленный сигнал $\bar{\chi}_1(t)$, а дополнительный блочный фильтр вводится только на вторую производную генератора $\dot{x}_2(t)$ перед ее подачей в закон управления (2):

$$\mu_2 \dot{\tau}_2 = -\tau_2 + \dot{x}_2 = -\tau_2 - m_2 \sigma(k_2(x_2 + m_1 \sigma(k_1(x_1 - \bar{\chi}_1)))) -$$

$$(14) -0,5m_1 k_1 \text{diag}\{1 - \sigma^2(k_1(x_{1j} - \bar{\chi}_{1j}))\} x_2,$$

$$\tau_2 = (\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23})^T, \tau_2(0) = \vec{0},$$

где $\mu_2 = \text{const} > 0$ – постоянная времени фильтра. В фильтре (14) паразитные сигналы находятся в аргументах сигмоидальных функций, поэтому область изменения подлежащего фильтрации

сигнала заведомо ограничена. При моделировании в нижеследующих экспериментах было принято $\mu_2 = 20$.

На рис. 7–8 представлены графики эксперимента 3: результаты моделирования с предварительным фильтром (14) генератора (9) с параметрами (12).

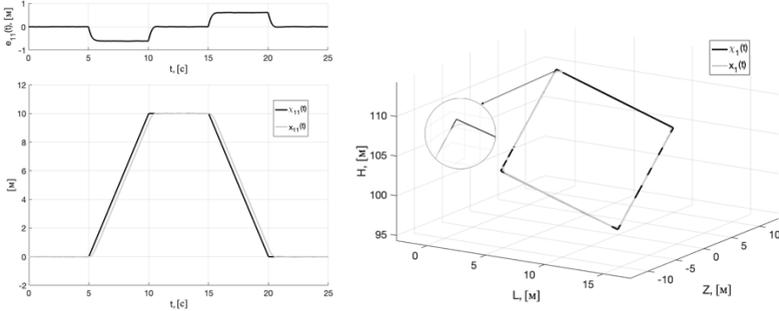


Рис. 7. Эксперимент 3. Слева – графики опорного сигнала $\chi_{11}(t)$ (11), его обработки $x_{11}(t)$ и ошибки слежения $e_{11}(t)$. Справа – пространственные графики опорной траектории и точки в фазовом пространстве динамического генератора (9)

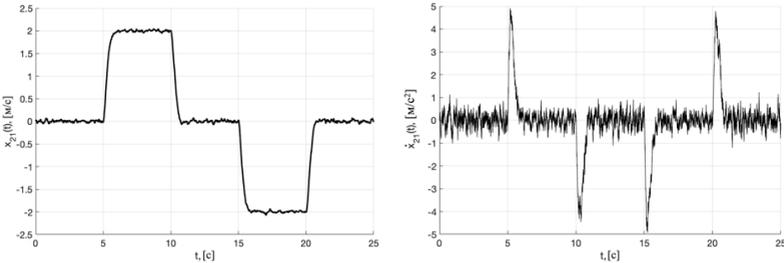


Рис. 8. Эксперимент 3. Графики $x_{21}(t)$ и $\dot{x}_{21}(t)$ генератора (9)

Как было отмечено, переменные генератора поступают в систему управления БПЛА в качестве задающих воздействий, их первой и второй производных. В законе управления (2) приняты следующие параметры обратной связи:

$$C_1 = \text{diag}\{14, 15,5, 14,5\}, C_2 = \text{diag}\{167, 166, 165\}.$$

На рис. 9 показаны графики управляющих воздействий $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ (2) для экспериментов 2 и 3 для корректного сравнения полученных в них результатов. Они ограничены, их величины соответствуют допустимым перегрузкам.

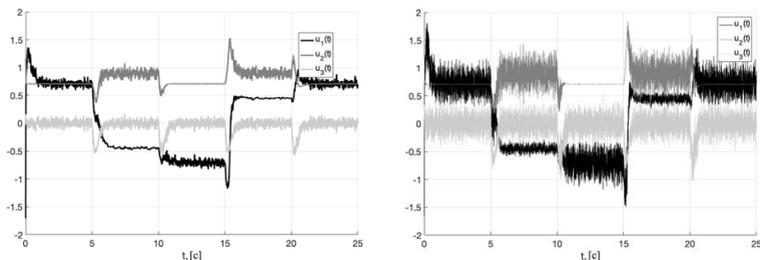


Рис. 9. Графики $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ (2) для экспериментов 2 и 3

Эффекты фильтрации, сглаживания и ограниченности сигналов сохраняются, как и в эксперименте 2. Однако видно, что по сравнению с экспериментом 2 с фильтром на сигнал $\bar{\chi}_1(t)$ в эксперименте 3 ошибка слежения $e_{11}(t) = x_{11}(t) - \chi_{11}(t)$ оказалась меньше, но при этом качество фильтрации управления $u(t)$ ухудшилось.

И, наконец, на рис. 10–11 представлены графики эксперимента 4: результаты моделирования с двумя фильтрами (13), (14), генератора (9) с параметрами (12).

В таблице 1 приведены показатели качества замкнутых систем и обработки сигналов в экспериментах 1б, 2, 3 и 4. Рассчитывались выборочное среднее значение (Mean), исправленное выборочное среднеквадратическое отклонение (Std) и максимальное значение (Max) модуля: ошибки слежения переменной генератора за опорным сигналом $e_{11}(t) = x_{11}(t) - \chi_{11}(t)$, ошибки слежения выходной переменной объекта за переменной генератора $\zeta_{11}(t) = y_{11}(t) - x_{11}(t)$, управления $u_1(t)$ (для остальных сигналов векторов $e_1(t)$, $\zeta_1(t)$, $u(t)$ показатели аналогичные). Для расчета использовались значения выборок с временных интервалов, указанных в таблице 1: для $\zeta_{11}(t)$ и $u_1(t)$ – первый переходный процесс и установившийся режим, для $e_{11}(t)$ – второй.

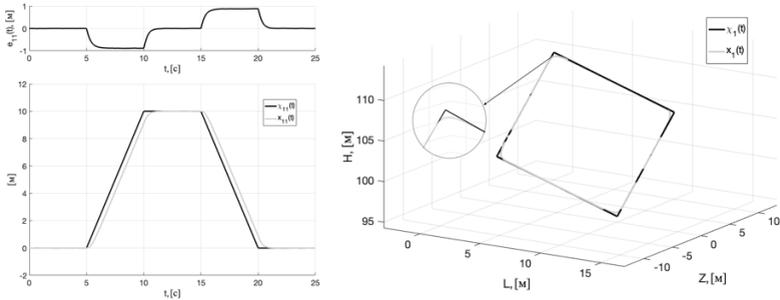


Рис. 10. Эксперимент 4. Слева – графики опорного сигнала $\chi_{11}(t)$ (11), его обработки $x_{11}(t)$ и ошибки слежения $e_{11}(t)$. Справа – пространственные графики опорной траектории и точки в фазовом пространстве динамического генератора (9)

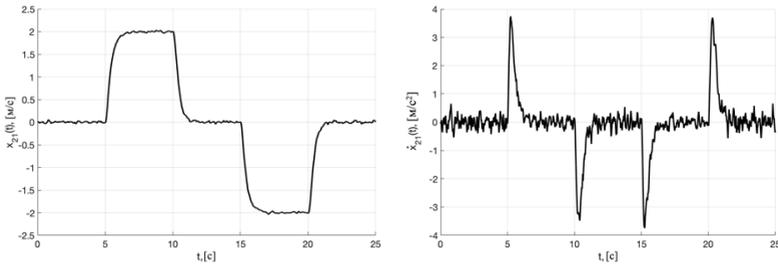


Рис. 11. Эксперимент 4. Графики $x_{21}(t)$ и $\dot{x}_{21}(t)$ генератора (9)

Таблица 1. Показатели качества замкнутых систем и обработки сигналов

Переменная	Временной интервал	Показатель	Номер эксперимента			
			16	2	3	4
$e_{11}(t)$, м	$t \in (7; 10)$	Mean	0,58	0,81	0,58	0,81
	$t \in (7; 10)$	Std	0,30	0,31	0,30	0,31
	$t \in (5; 10)$	Max	1,91	2,11	1,91	2,11
$\zeta_{11}(t)$, м	$t \in (2; 5)$	Mean	$1,14 \times 10^{-14}$	$4,04 \times 10^{-16}$	$7,54 \times 10^{-8}$	$3,47 \times 10^{-7}$
	$t \in (2; 5)$	Std	$8,55 \times 10^{-16}$	$4,68 \times 10^{-17}$	$5,30 \times 10^{-5}$	$3,16 \times 10^{-5}$
	$t \in (0; 5)$	Max	$4,30 \times 10^{-4}$	$4,30 \times 10^{-4}$	$3,97 \times 10^{-4}$	$4,34 \times 10^{-4}$
$u_1(t)$	$t \in (2; 5)$	Mean	0,71	0,71	0,71	0,71
	$t \in (2; 5)$	Std	0,99	0,02	0,10	0,02
	$t \in (0; 5)$	Max	3,12	1,36	1,71	1,35

Из таблицы 1 видно, что цель управления БПЛА была достигнута во всех экспериментах: среднее значение ошибки слежения $\xi_{11}(t) = y_{11}(t) - x_{11}(t)$ при отслеживании объектом сглаженного сигнала генератора составило порядка $10^{-16} \div 10^{-7}$ м (что обусловлено наличием шума и погрешностями численного интегрирования). Применение фильтров нижних частот в экспериментах 2–4 уменьшает среднеквадратическое отклонение (СКО) управляющего воздействия $u_1(t)$ в $9,9 \div 49,5$ раз по сравнению с экспериментом 1, где фильтры не используются. Значения показателей качества для $e_{11}(t)$ и $u_1(t)$ сопоставимы для экспериментов 2 и 4. Следовательно, дополнительная фильтрация второй производной генератора $\dot{x}_2(t)$ избыточна (эксперимент 4), достаточно установки одного фильтра на опорный сигнал $\bar{\chi}_1(t)$ (эксперимент 2). Результаты экспериментов 2 и 3 показывают, что фильтрация опорного сигнала $\bar{\chi}_1(t)$ (эксперимент 2) позволяет уменьшить СКО управления в 5 раз по сравнению с фильтрацией второй производной генератора (эксперимент 3). Однако фильтр на опорный сигнал сильнее искажает полезную составляющую, что приводит к большей ошибке $e_{11}(t)$ в эксперименте 2 ($0,81$ [м]) по сравнению с экспериментом 3 ($0,58$ [м]). Таким образом, эксперименты 2 и 3 являются наиболее перспективными для практической реализации.

5. Заключение

Цель исследования состояла в разработке динамического генератора с сигмоидальными корректирующими воздействиями как единого метода дифференцирования, фильтрации и сглаживания опорных сигналов для их дальнейшего использования в системе управления БПЛА. В динамическом генераторе оценочные сигналы задающего воздействия формируются не со входа, а с выхода интегрирующего блочного звена, что обеспечивает естественную фильтрацию и заметно снижает влияние на оценки паразитного шума. При этом генератор позволяет сглаживать сигналы, а при его настройке также учитывались ограничения на скорость и ускорение БПЛА. Для обеспечения филь-

трации оценки второй производной, получаемой со входа интегратора, и, следовательно, обратной связи, формируемой для решения задачи слежения, без увеличения порядка генератора, а именно ввода дополнительного интегрирующего звена, были введены дополнительные низкочастотные фильтры на задающий сигнал перед его подачей в генератор или на самую вторую производную генератора перед ее подачей в закон управления. Выбор конкретного варианта реализации зависит от рабочей области, в которой функционирует объект, требований к гладкости управления и возможностей вычислительных ресурсов.

Литература

1. АНТИПОВ А.С., КРАСНОВА С.А., УТКИН В.А. *Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения* // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №1. – С. 40–66.
2. ДЫЛЕВСКИЙ А.В., ЛОЗГАЧЕВ Г.И. *Применение метода пространства состояний для синтеза дифференциаторов* // Автоматика и телемеханика. – 1999. – №9. – С. 13–20.
3. ЕМЕЛЬЯНОВ С.В., АФАНАСЬЕВ А.П. *Дифференцирование сигнала в системах автоматического регулирования* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №12. – С. 27–42.
4. КОКУНЬКО Ю.Г., КРАСНОВА С.А. *Два подхода к синтезу инвариантной системы слежения для беспилотного летательного аппарата* // Управление большими системами. – 2020. – Вып. 85. – С. 113–142.
5. КРАСНОВ Д.В., УТКИН А.В. *Наблюдатель пониженного порядка для оценивания смешанных переменных в системах слежения при действии внешних несогласованных возмущений* // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, №12. – С. 1681–1694.
6. ALSANOUSI A.A. *Design and Optimization of Low Pass Filter*. Lap Lambert Academic Publishing. – Sunnyvale, CA, USA, 2017.
7. ANTIPOV A.S., KRASNOVA S.A., UTKIN V.A. *Methods of Ensuring Invariance with Respect to External Disturbances: Overview and New Advances* // *Mathematics*. – 2021. – Vol. 9(23). – P. 3140.
8. ASTOFI D., ZACCARIAN L., JUNGERS M. *On the use of low-pass filters in high-gain observers* // *Systems and Control Letters*. – 2021. – Vol. 148. – P.104856.

9. BUZIKOV M., GALYAEV A. *Minimum-time lateral interception of a moving target by a Dubins car* // Automatica. – 2021. – Vol. 135. – Art. No. 109968.
10. DESSEN F. *Optimizing Order to Minimize Low-Pass Filter Lag* // Circuits, Systems, and Signal Processing. – 2019. – Vol. 38. – P. 481–497.
11. GUO B.-Z., ZHAO Z.-L. *On convergence of tracking differentiator and application to frequency estimation of sinusoidal signals* // Proc. 8th Asian Control Conference (ASCC). – 2011. – P. 1470–1475.
12. KANATNIKOV A.N., KRISHCHENKO A.P. *Terminal control of spatial motion of flying vehicles* // Journal of Computer and System Sciences International. – 2008. – Vol. 47(5). – P. 718–731.
13. KIKUWE R., PASARIBU R., BYUN G. *A First-Order Differentiator with First-Order Sliding Mode Filtering* // IFAC-PapersOnLine. – 2019. – Vol. 52(16). – P. 771–776.
14. KOKUNKO Y.G., KRASNOVA S.A., UTKIN V.A. *Cascade Synthesis of Differentiators with Piecewise Linear Correction Signals* // Autom. Remote Control. – 2021. – Vol. 82(7). – P. 1144–1168.
15. KRASNOVA S.A. *Estimating the Derivatives of External Perturbations Based on Virtual Dynamic Models* // Autom. Remote Control. – 2020. – Vol. 81(5). – P. 897–910.
16. LAMBERT E., ROMANO R., WALTING D. *Optimal Path Planning with Clothoid Curves for Passenger Comfort* // Proc. of the 5th Int. Conf. on Vehicle Technology and Intelligent Transport Systems, May 3–5, 2019, Heraklion, Greece. – P. 609–615.
17. LEVANT A. *Robust exact differentiation via sliding mode technique* // Automatica. – 1998. – Vol. 34(3). – P. 379–384.
18. LEVANT A., LIVNE M., YU X. *Sliding-Mode-Based Differentiation and Its Application* // IFAC-PapersOnLine. – 2017. – Vol. 50(1). – P. 1699–1704.
19. RICHARD L., BURDEN J., DOUGLAS F. *Numerical Analysis*. – Brooks, Cole, 2000.
20. ROSU H.C., MANCAS S.C., HSIEH C.-C. *Generalized Cornu-type spirals and their Darboux parametric deformations* // Phys. Lett. A. – 2019. – Vol. 383. – P. 2692–2697.
21. SHANMUGAVEL M., TSOURDOS A., WHITE B.A., ZBIKOWSKI R. *Differential Geometric Path Planning of Multiple UAVs* // Trans. ASME. J. Dyn. Syst. Meas. Control. – 2005. – Vol. 129(5). – P. 620–632.

DYNAMIC DIFFERENTIATION AND SMOOTHING OF NOISY SIGNALS SPECIFYING THE TRAJECTORY OF AN UNMANNED AERIAL VEHICLE

Julia Kokunko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
of RAS, Moscow (juliakokunko@gmail.com).

Abstract: The problem of developing a complex approach to filtering and smoothing of reference trajectories, which are signal reference actions, and to recovery of their derivatives is considered on the example of an unmanned aircraft of the airplane type. To solve this problem, methods of design and algorithms for setting up a dynamic generator of acceptable trajectories are developed. The system of differential equations, which describes the generator of tasks, corresponds to the canonical model of the control plant "input - output". The output variables of the generator track the reference noisy and non-smooth vector signal of the reference actions. Thus, the generator is a tracking differentiator. To design its local links and corrective actions, smooth and bounded sigmoidal functions with bounded derivatives are used. This approach allows considering the restrictions on the speed and acceleration of a particular aircraft, so the output variables of the tracking differentiator generate a naturally smoothed spatial curve and its derivatives, which are used in the plant control system as a realizable reference trajectory. Numerical simulation results demonstrated the efficiency of the developed approach to dynamic differentiation and smoothing of vector signals both in the deterministic case and in the presence of noise. A comparative analysis of dynamic generators with different variants of additional low-pass filters is performed. The application of the developed approach is possible for processing the reference actions of various control plants, it is only necessary that their dynamic model be reduced to the canonical form.

Keywords: trajectory planning, tracking differentiator, design constraints, signal filtering and differentiation, sigmoid function, realizable trajectories.

УДК 62.50

ББК 32.817

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.8

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.И. Алчиновым.*

Поступила в редакцию 05.10.2023.

Опубликована 31.01.2024.

КОМПЕНСАЦИЯ НАВЕДЕННОЙ ПОМЕХИ И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ДВУХ ДИПОЛЕЙ

Третьякова Е. А.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Решение задачи относительного позиционирования источника и приёмника переменного магнитного поля заключается в определении радиус-вектора между рассматриваемыми объектами и их взаимной ориентации. Рассмотрены алгоритмы относительного позиционирования в электромагнитном поле двух диполей в трёхмерной и двумерной постановках. Проведено сравнение результатов, полученных при обработке экспериментальных данных аэроэлектроразведочной системы ЕМ4Н. Также проведена компенсация наведенной помехи по измерениям поля двух диполей для аэроэлектроразведочных систем ЭКВАТОР и ЕМ4Н в нескольких модификациях: с креплением петли передатчика на фюзеляже вертолета Ми-8, с креплением петли передатчика на фюзеляже самолета Ан-3, с буксируемой петлей передатчика за вертолетом Eurocopter AS350В3. Выполнено сравнение с традиционным методом компенсации по измерениям поля трёх диполей. Анализировались остаточные после компенсации помех сигналы. Показано, что качество компенсации в поле двух диполей не уступает традиционному.

Ключевые слова: относительное позиционирование, переменное электромагнитное поле, источник, приёмник, компенсация, магнитный диполь.

1. Введение

Аэроэлектроразведка – метод аэрогеофизической съёмки, в котором исследуется распределение удельной электропроводности с помощью установленного на летательном аппарате оборудования [6, 10, 17, 21]. Применяется для поиска алмазов [14, 19], воды [9, 20], золота [8, 18] и других рудных полезных ископаемых. Генерируемое источником *первичное* переменное магнитное поле рассматривается как поле диполя, характеристикой которого является вектор дипольного магнитного момента \mathbf{M} .

¹ Екатерина Алексеевна Третьякова, инженер (ekaterina_tretikova@mail.ru).

В среде, проводящей электрический ток, переменное магнитное поле приводит к возникновению вихревых токов, порождающих *вторичное* магнитное поле – отклик среды. Измерителем поля в случае рассматриваемых в работе систем служит трехкомпонентный векторный индукционный приемник, который находится в буксируемой гондоле. Источник и приемник соединяет кабель-трос. Их взаимное расположение определяется радиус-вектором \mathbf{R} .

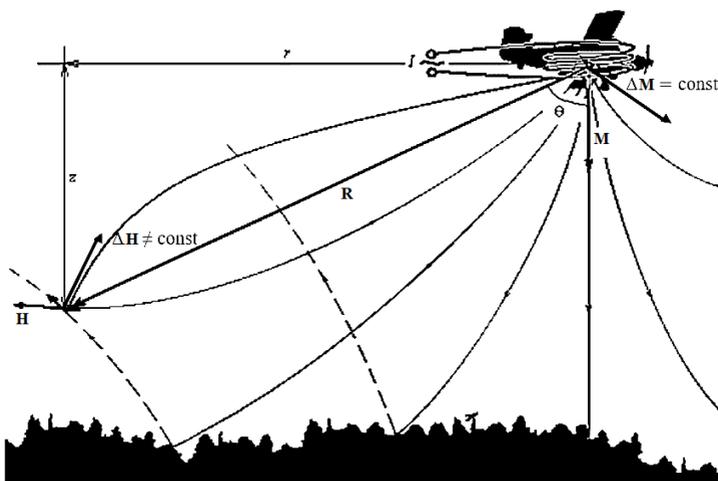


Рис. 1. Аэроэлектроразведка. \mathbf{R} – радиус-вектор источник-приемник; \mathbf{M} – вектор магнитного момента возбуждающего диполя; $\Delta\mathbf{M}$ – вектор магнитного момента наведенного поля; \mathbf{H} – вектор напряженности поля возбуждающего диполя; $\Delta\mathbf{H}$ – вектор напряженности наведенного поля

В процессе работы аэроэлектроразведочной системы появляются помехи, которые представляют собой вектор напряженности *наведенного* поля $\Delta\mathbf{H}$. Основным источником этого поля являются неконтролируемые вихревые токи, возникающие в проводящих элементах несущей конструкции и летательного аппарата (рис. 1). Дипольный момент, создаваемый этими токами, – $\Delta\mathbf{M}$. Для того чтобы учесть влияние помех, проводится

этап компенсации. Его суть заключается в перемещении системы на большую высоту (500–700 м), где можно пренебречь откликами от Земли. Далее определяются параметры наведённого поля и поправки вводятся в измерения поля на высоте съёмки. Есть различные подходы к методу компенсации. Если приемник совершает незначительные перемещения относительно передатчика, можно считать, что вектор напряжённости наведённого поля – постоянный в системе координат приемника. В этом предположении можно просто вычесть из измерений на рабочей высоте среднее значение на высоте компенсации (nulling) [16]. Другой подход – учитывать непостоянство вектора $\Delta\mathbf{H}$, анализируя взаимное пространственное и угловое расположение передатчика и приёмника [2]. В данной работе рассмотрены алгоритмы решения задачи относительного позиционирования источника и приемника несколькими способами: в поле двух диполей в плоскости [11] и в поле двух диполей в трехмерном пространстве [15].

2. Компенсация с учётом изменяющегося взаимного расположения источника и приёмника

2.1. КОМПЕНСАЦИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ТРЕХ ДИПОЛЕЙ

В работе рассматриваются электромагнитные системы, для которых справедлива зависимость для поля точечного диполя [4, 5]. В работах [11, 13] оно записано в матричной форме:

$$(1) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{R}|^3} \left(3 \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}^T}{|\mathbf{R}|^2} - I \right) \mathbf{M} = \Omega(\mathbf{R})\mathbf{M},$$

где \mathbf{R} – радиус-вектор точки относительно передатчика; \mathbf{H} – вектор напряжённости магнитного поля; \mathbf{M} – вектор магнитного момента диполя; I – единичная матрица 3×3 .

В работе [2] получена взаимосвязь измеряемого поля, генерируемого момента и положения передатчика относительно приёмника в матричном виде, которая является абсолютно такой же и для зависимости $\Delta\mathbf{H}$ от $\Delta\mathbf{M}$:

$$(2) \quad \Delta\mathbf{H} = \Omega(\mathbf{R})\Delta\mathbf{M}.$$

Предлагается ввести два дополнительных диполя с линейно независимыми векторами моментов \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 . С их помощью вектор магнитного момента наведённого поля $\Delta\mathbf{M}$ можно разложить в базисе известных моментов:

$$(3) \quad \Delta\mathbf{M} = k_0\mathbf{M} + k_1\mathbf{M}_1 + k_2\mathbf{M}_2, \quad k_j \in \mathbf{R}.$$

Применяя (2), вектор напряжённости наведённого поля:

$$(4) \quad \Delta\mathbf{H} = k_0\mathbf{H} + k_1\mathbf{H}_1 + k_2\mathbf{H}_2.$$

Этап компенсации позволяет определить коэффициенты k_0 , k_1 , k_2 методом наименьших квадратов.

2.2. КОМПЕНСАЦИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ ДИПОЛЕЙ

Пусть известны моменты возбуждающих диполей как постоянные величины: \mathbf{M} – основной и \mathbf{M}_1 – вспомогательный. Измерены векторы \mathbf{H} и \mathbf{H}_1 . Опираясь на работу [16]:

$$(5) \quad \Omega(\mathbf{R}) = F(\mathbf{H}, \mathbf{H}_1, \mathbf{M}, \mathbf{M}_1).$$

При рассмотрении какого-либо другого диполя с моментом μ_2 , которому отвечает вектор напряженности \mathbf{h}_2

$$(6) \quad \mathbf{h}_2 = \Omega(\mathbf{R}) \cdot \mu_2 = F(\mathbf{H}, \mathbf{H}_1, \mathbf{M}, \mathbf{M}_1) \cdot \mu_2.$$

Третий вектор напряженности может быть выражен через зависимость от двух других диполей:

$$(7) \quad \mathbf{H}'_2 = F_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}_1).$$

Можно перейти к рассмотренной ранее линейной комбинации вектора наведенного поля (4) путем подстановки полученной зависимости (7):

$$(8) \quad \Delta\mathbf{H} = k_0\mathbf{H} + k_1\mathbf{H}_1 + k_2F_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}_1).$$

Как правило, величина относительного пространственного смещения приемника и источника не превышает 10 м [7]. Данное наблюдение дает возможность предполагать, что зависимость (8) можно линеаризовать вблизи среднего значения расстояния, которому соответствует среднее значение величины вектора напряженности. Точности линейного приближения будет достаточно для решения задачи компенсации.

Гипотеза. Ввиду небольших пространственных перемещений приемника относительно источника выражение (8) принимает вид:

$$(9) \quad \Delta \mathbf{H} = p_{01} \mathbf{H} + p_1 \mathbf{H}_1.$$

Далее данная гипотеза проверяется на серии экспериментальных данных системы ЭКВАТОР [1] с буксируемой петлей источника за вертолетом Eurocopter AS350B3 и различных модификаций системы ЕМ4Н [3]: с креплением петли источника на фюзеляже вертолета Ми-8, с креплением петли источника на фюзеляже самолета Ан-3, с буксируемой петлей источника за вертолетом Eurocopter AS350B3, полученных при съёмочных полетах ООО «Геотехнологии», НФ ВСЕГЕИ и АО «ГНПП Аэрогеофизика».

Адекватность результата компенсации проще всего оценивать по остаточной квадратурной компоненте поля, которая отличается на 90° по фазе от первичного поля. Оценивание происходит для определённых частот отдельно. В идеальных условиях отсутствия помех квадратурная составляющая должна быть равна нулю [12]. Анализировались остаточные после компенсации сигналы: среднеквадратичное отклонение и разброс между минимальным и максимальным значением (величина поля порядка 10^4 условных единиц).

Результаты сравнения остаточных после компенсации помех на различных частотах для электроразведочных систем ЭКВАТОР и модификаций системы ЕМ4Н показаны в таблицах (таблица 1, таблица 2). Один из столбцов таблиц – коэффициент улучшения, полученный как отношение соответствующих значений при простом вычитании среднего значения и компенсации с использованием одного (первого) диполя.

На рисунке (рис. 2) показаны значения после компенсации в случае определения геометрических параметров с использованием одного, второго или двух одновременно дополнительных диполей и в случае вычитания среднего значения (nulling).

Таблица 1. Остаточные после компенсации сигналы на высоких частотах (8 кГц – ЕМ4Н, 6кГц – ЭКВАТОР)

	Nulling	Первый и второй диполи	Первый диполь	Второй диполь	Коэф. улучшения	
Самолет	4,53		2,17		2,1	СКО
	41,92		15,04		2,8	max-min
Вертолет фикс.	2,37	1,91	1,92	1,92	1,2	СКО
	14,97	13,01	12,76	13,16	1,2	max-min
Вертолет буксир.	20,27	1,16	1,28	1,37	15,8	СКО
	92,88	8,14	8,10	9,34	11,5	max-min
Экватор	11,04	1,15	1,17	1,42	9,44	СКО
	53,47	9,59	10,08	10,75	5,30	max-min

Таблица 2. Остаточные после компенсации сигналы на низких частотах (130 Гц – ЕМ4Н, 77 Гц – ЭКВАТОР)

	Nulling	Первый и второй диполи	Первый диполь	Второй диполь	Коэф. улучшения	
Самолет	12,61		2,52		5,0	СКО
	121,53		21,42		5,7	max-min
Вертолет фикс	2,82	1,42	1,46	1,4	1,9	СКО
	14,18	8,42	8,29	8,62	1,7	max-min
Вертолет буксир	1,73	1,44	1,46	1,46	1,2	СКО
	10,70	10,09	9,65	9,16	1,1	max-min
Экватор	0,29	0,22	0,22	0,23	1,3	СКО
	1,84	1,56	1,59	1,71	1,1	max-min

Теоретически показано и подтверждено на практике, что при имеющемся диапазоне изменений взаимного расположения источника и приемника задача компенсации наведенного поля может быть успешно решена с использованием лишь одного дополнительного диполя. Более того, неважно какого именно из дополнительных. Также показано преимущество метода компенсации, учитывающего относительное позиционирование.

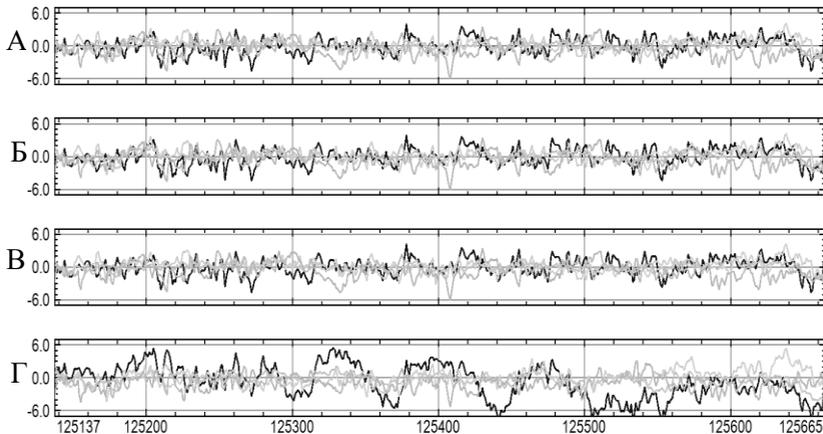


Рис. 2. Квадратурная компонента для вертолета Ми-8 на четырёх частотах: А – после компенсации с учетом измерений параметров двух дополнительных диполей; Б – с использованием 1-го диполя, В – с использованием 2-го диполя, Г – nulling

3. Калибровка магнитного момента возбуждающего диполя

Для решения задачи относительного позиционирования необходимо определить величину магнитных моментов, которые генерируются диполями: основным и вспомогательным. Из выражения (1) при помощи обратной матрицы перехода можно получить зависимость магнитного момента от напряженности:

$$(10) \mathbf{M} = \Theta(\mathbf{R})\mathbf{H},$$

$$(11) |\mathbf{M}| = 2\pi \cdot R^3 \left[\left(3\mathbf{e}_R \mathbf{e}_R^T - 2I \right) \cdot \mathbf{H} \right].$$

Необходимая информация может быть получена от дополнительных источников, например, от спутниковой навигационной системы. Результатом калибровки принимается среднее значение полученной оценки величины магнитного момента (рис. 3).

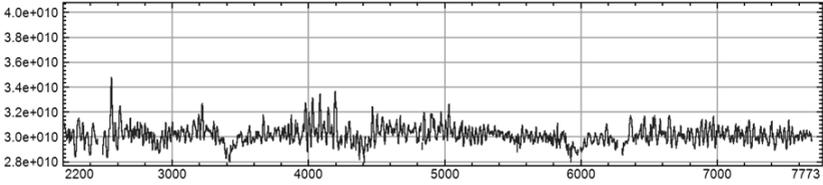


Рис. 3. Калибровка магнитного момента

4. Решение задачи относительного позиционирования в поле двух диполей

4.1. ЗАДАЧА ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ В ТРЕХМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

В работе [15] предложен алгоритм решения задачи электромагнитного позиционирования по полю двух диполей в трехмерной постановке. Работу можно разделить на два этапа.

Первый этап позволяет определить модуль радиус-вектора. Из исходного уравнения (1) авторами получена система:

$$\begin{aligned} 3(M_1^T e)^2 &= p^2 H_1^2 - M_1^2, \\ (12) \quad 3(M_2^T e)^2 &= p^2 H_2^2 - M_2^2, \\ 3(M_1^T e)(M_2^T e) &= p^2 H_1^T H_2 - M_1^T M_2. \end{aligned}$$

Если выразить из первых двух уравнений компоненты $M_i^T e$ и подставить в третье, то будет получено квадратное уравнение относительно p^2 . Опираясь на доказанные авторами теоремы, можно определить p^2 как наибольший из двух корней квадратного уравнения:

$$(13) \quad p(x) = \sqrt{q_{max}},$$

$$(14) \quad r(x) = (4\pi)^{\frac{1}{3}} q_{max}^{\frac{1}{6}}.$$

Второй этап включает определение матрицы ориентации. Авторы опираются на теорему Эйлера, согласно которой любое смещение твердого тела в трехмерном пространстве можно представить через один поворот вокруг определенной оси, про-

ходящей через единственную неподвижную точку этого твердого тела:

$$(15) R = \cos \varphi I + \sin \varphi \Lambda_w + (1 - \cos \varphi) w w^T,$$

где w – единичный направляющий вектор оси вращения:

$$\varphi - \text{угол поворота}; \Lambda_w = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из (15) путем умножения на $m^T m$ получаем

$$(16) \cos \varphi = \frac{m^T R m - (m^T w)^2}{m^2 - (m^T w)^2} \quad \forall m \in R^3.$$

Значение угла предполагается положительным из соображений ограниченных перемещений установки.

Авторами рассматриваются всевозможные случаи взаимного расположения источника и приемника. Оцениваются эти случаи по взаиморасположению векторов m_i и h_i (рис. 4).

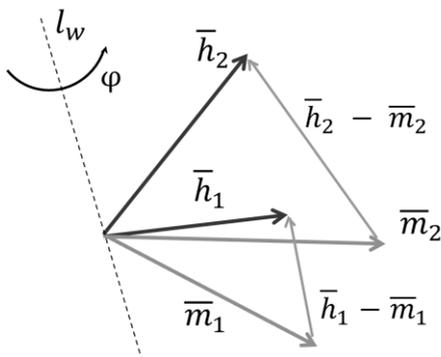


Рис. 4. Определение ориентации

1. $(h_1 - m_1) \times (h_2 - m_2) \neq \bar{0}$ – стандартное положение:

$$(17) w = \frac{(h_1 - m_1) \times (h_2 - m_2)}{|(h_1 - m_1) \times (h_2 - m_2)|}.$$

$$2. (h_1 - m_1) \times (h_2 - m_2) = \bar{0}, (m_1 \times m_2) \times (h_1 \times h_2) \neq \bar{0} :$$

$$(18) w = \frac{(m_1 \times m_2) \times (h_1 \times h_2)}{|(m_1 \times m_2) \times (h_1 \times h_2)|}.$$

$$3. (h_1 - m_1) \times (h_2 - m_2) = \bar{0}, (m_1 \times m_2) \times (h_1 \times h_2) = \bar{0},$$

$$|m_1 - h_1| + |m_2 - h_2| \neq \bar{0} :$$

$$(19) w = \frac{m_2 + h_2 - m_1 - h_1}{|m_2 + h_2 - m_1 - h_1|}, \quad \varphi = \pi .$$

$$4. (h_1 - m_1) \times (h_2 - m_2) = \bar{0}, (m_1 \times m_2) \times (h_1 \times h_2) = \bar{0},$$

$$|m_1 - h_1| + |m_2 - h_2| = \bar{0} : \varphi = 0, R = I.$$

На практике определение оси вращения не выходит за рамки первого случая в рамках стандартного расположения источника и приемника во время полета.

4.2. ЗАДАЧА ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Из имеющегося набора данных за последние 20 лет можно сделать вывод о том, что гондола с установленным в ней приемником переменного магнитного поля делает небольшие боковые отклонения от вертикальной плоскости вдоль направления полета ЛА. Поэтому имеет смысл рассмотреть задачу в двумерной постановке (рис. 5).

Аэроразведочная установка включает в себя источник и трехкомпонентный приемник переменного магнитного поля. Источником первичного поля служит система петлевых дипольных излучателей, подпитываемых переменным током на разных частотах. Плоскости петель расположены взаимно перпендикулярно. Вектор момента для каждой из них лежит перпендикулярно плоскости. Получившиеся дипольные магнитные моменты и их общее начало задают условную систему координат источника XOY . Измерителем поля в случае рассматриваемых в работе систем служит трехкомпонентный векторный индукционный приемник, который находится в буксируемой гондоле. Напряженность переменного магнитного поля измеряется

покомпонентно в системе координат приемника $X^R O^R Y^R$. Источник и приёмник поля соединяет радиус-вектор \mathbf{R} с единичным направляющим вектором \mathbf{e}_R (рис. 5).

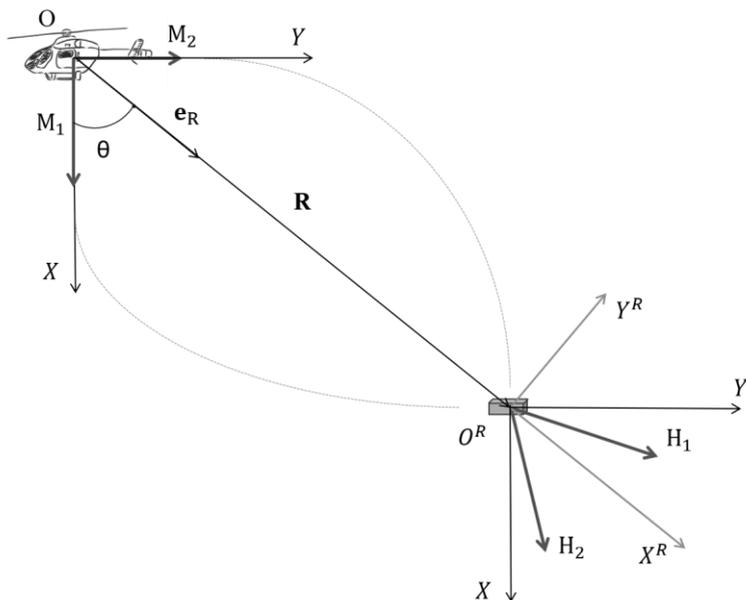


Рис. 5. Системы координат источника и приемника

Вводятся углы: α – угол между векторами напряженности магнитного поля в точке расположения приемника; θ – угол между главным диполем \mathbf{M}_1 и вектором \mathbf{e}_R . Векторы магнитных моментов возбуждающих диполей \mathbf{M}_1 и \mathbf{M}_2 считаем известными после этапа калибровки: $\mathbf{M}_1 = (\mathbf{M}_1^X, 0)^T$, $\mathbf{M}_2 = (0, \mathbf{M}_2^X)^T$. Задача позиционирования рассматривается в плоскости, задаваемой этими векторами. Векторы напряженности магнитного поля считаем измеренными: $\mathbf{H}_1 = (\mathbf{H}_1^X, \mathbf{H}_1^Y)^T$, $\mathbf{H}_2 = (\mathbf{H}_2^X, \mathbf{H}_2^Y)^T$. Согласно гипотезе, предполагаем, что плоскость векторов магнитных моментов совпадает с плоскостью векторов напряженности магнитного поля, поэтому плоский угол φ находится как угол поворота системы координат $X^R O^R Y^R$ относительно XOY .

Углы α и θ связаны выражением, которое можно получить из (1) в предположении единичной амплитуды магнитного момента и единичного радиус-вектора:

$$(20) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4} \sin 2\theta.$$

Определив угол направления «на гондолу», можно перейти к нахождению расстояния:

$$(21) |\mathbf{R}| = \sqrt[3]{\frac{|\mathbf{M}_i|}{\|(3\mathbf{e}_R \mathbf{e}_R^T - 2I) \cdot 2\pi \cdot \mathbf{H}_i\|}},$$

$$\text{где } (3\mathbf{e}_R \mathbf{e}_R^T - 2I) = \begin{pmatrix} 3\cos^2 \theta - 2 & 3\cos \theta \sin \theta \\ 3\cos \theta \sin \theta & 3\sin^2 \theta - 2 \end{pmatrix}.$$

Поворот системы координат $X^R O^R Y^R$ относительно XOY :

$$(22) X^R O^R Y^R \xrightarrow{\varphi} XOY,$$

$$(23) A_{OOR} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Из соотношения $XOY = A_{OOR} \cdot X^R O^R Y^R$ можно определить плоский угол поворота φ .

4.3. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ РАССМОТРЕННЫХ АЛГОРИТМОВ

Решение задачи относительного позиционирования в двумерной и трехмерной постановках близко, что подтверждает адекватность линеаризации соотношения (8) в окрестности среднего положения гондолы (рис. 6).

Небольшие пики серого графика показывают моменты, когда гондола выходила из плоскости диполей. Оценка полученных результатов (таблица 3): среднеквадратичное отклонение (СКО) и среднее значение разности полученных результатов.

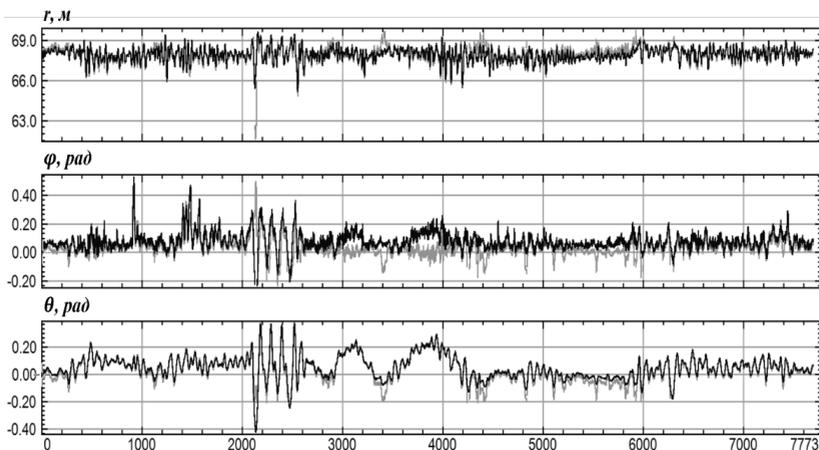


Рис. 6. Сравнение полученных результатов: модуля радиус-вектора, угла поворота системы и угла на гондолу. (серый – объемная постановка, чёрный – плоская постановка задачи)

Таблица 3. Сравнение трехмерного и двумерного подходов

	СКО	Среднее значение
$\Delta r = r(2D) - r(3D)$, м	0,30 (0,4%)	0,02
$\Delta \varphi = \varphi(2D) - \varphi(3D)$, рад	0,045 (4,5%)	-0,048
$\Delta \theta = \theta(2D) - \theta(3D)$, рад	0,025 (2,5%)	-0,011

Можно заметить, что среднее значение разности полученных результатов близко к нулю, а СКО не превышает 5% от среднего значения исследуемой величины. Для решения геофизических задач такой точности вполне достаточно, поэтому можно ограничиться двумерным решением задачи позиционирования.

Важно отметить, что чувствительность приемника является величиной порядка $10^{-4} \div 10^{-5}$ поэтому при соблюдении точной установки (исключая возможные систематические ошибки) можно говорить о шумах измерения расстояния между источником и приемником от 1 см до 1 мм, что как минимум не хуже, чем для спутниковой навигационной системы. Таким образом,

решение задачи позиционирования в трехмерной постановке может оказаться полезным в условиях отсутствия сигналов навигационных спутников.

5. Заключение

В данной работе теоретически показано и подтверждено на практике, что при имеющемся диапазоне изменений взаимного расположения источника и приемника переменного магнитного поля задача компенсации наведенной составляющей может быть успешно решена с применением только двух диполей.

Для всех вариантов применения системы ЕМ4Н и для системы ЭКВАТОР во время компенсации необходимо учитывать перемещение приемника относительно источника поля. Вследствие были реализованы алгоритмы относительного позиционирования. Решение в двумерной постановке отличается от трехмерной на величину порядка 1 метра в координатах и порядка 1 градуса – в углах ориентации. Такой точности достаточно для решения геофизических задач. Относительное позиционирование в трехмерной постановке может обеспечить точность, не уступающую решению спутниковой навигационной системы.

Практически важным является этап калибровки магнитных моментов, который позволил определить их величины для дальнейшего использования в алгоритмах относительного позиционирования.

Литература

1. ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В., МОЙЛАНЕН Е.В. *Новая вертолетная электроразведочная система «Экватор» для метода АМПП // Приборы и системы разведочной геофизики. – 2010. – №2(32). – С. 27–29.*
2. ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В., ПОПОВИЧ В.В. *Компенсация влияния наведенных токов в низкочастотной индуктивной аэроэлектроразведочной системе ЕМ-4Н // Международная конференция, посвященная 50-летию Института геофизики УрО РАН. Екатеринбург, 2008. – С. 40–43.*

3. ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В., ПОПОВИЧ В.В. *Низкочастотная индуктивная аэроэлектроразведочная система EM-4H* // Записки Горного института. – 2009. – Т. 183. – С. 224–227.
4. ЖДАНОВ М.С. *Электроразведка: Учебник для вузов.* – М.: Недра, 1986. – 316 с.
5. ЖЕЛАМСКИЙ М.В. *Первая отечественная система магнитного позиционирования* // Датчики и системы. – 2009. – №1. – С. 2–7.
6. *Инструкция по электроразведке: наземная электроразведка, скважинная электроразведка, шахто-рудничная электроразведка, аэроэлектроразведка, морская электроразведка* // Под ред. Л.А. Рейхерта. – Л.: Недра, 1984. – 352 с.
7. КАРШАКОВ Е.В. *Структура и алгоритмы обработки бортовых измерений в аэромагнитных и аэроэлектромагнитных системах.* Дисс. докт. техн. наук. – 2018. – 286 с.
8. КЕРЦМАН В.М., МОЙЛАНЕН Е.В., ПОДМОГОВ Ю.Г. *Применение аэрогеофизики в зоне Центрально-Африканского разлома, на золоторудных месторождениях в Иркутской области (Сухой Лог, Урях) и в Якутии* // Золото и технологии. – 2020. – №4. – С. 74–80.
9. КОЗАК С.З., АГЕЕВ В.В., МОЙЛАНЕН Е.В., КАРШАКОВ Е.В., ТХОРЕНКО М.Ю. *Комплексирование наземной и вертолетной электроразведки методом переходных процессов при выделении участков, перспективных для бурения на воду (на 228 примере Якутии)* // Инженерные изыскания. – 2015. – №10–11. – С. 42–45.
10. МОЙЛАНЕН Е.В. *Современные методы аэроэлектроразведки* // Физика Земли. – 2022. – Т. 68, №5. – С. 171–180.
11. ПАВЛОВ Б.В., ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В. *Низкочастотная электромагнитная система относительной навигации и ориентации* // Гироскопия и навигация. – 2010. – С. 3–15.
12. СВЕТОВ Б.С. *Основы геоэлектрики.* – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 656 с.
13. ТХОРЕНКО М.Ю., КАРШАКОВ Е.В., ПАВЛОВ Б.В., КОЗЛОВ А.В. *Алгоритм позиционирования подвижного*

- объекта в низкочастотном электромагнитном поле // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №11. – С. 160–173.
14. ФЕЛИКС Ж.Т., КАРШАКОВ Е.В., МЕЛЬНИКОВ П.В., ВАНЧУГОВ В.А. *Результаты сопоставления данных аэро- и наземных электроразведочных систем, используемых при поисках кимберлитов в республике Ангола* // Геофизика. – 2014. – №4. – С. 17–22.
 15. BARABANOVA L.P., BARABANOV O.O. *Effective solution of the problem of electromagnetic positioning based on two-axial radiator* // Journal of Mathematical Sciences. – 2021. – Vol. 255, No. 5. – P. 551–560.
 16. BRODIE R., SAMBRIDGE M. *A holistic approach to inversion of frequency-domain airborne EM data* // Geophysics. – 2006. – Vol. 71, No. 6.
 17. LEGAULT J.M. *Airborne Electromagnetic Systems – State of the Art and Future Directions* // CSEG Recorder. – 2015. – Vol. 40, No. 6. – P. 38-49.
 18. LEGAULT J.M., KWAN K., GREIG J., WEBSTER E., HANKI M. *Targeting epithermal Au-Ag using helicopter TDEM, magnetic, and radiometric data at Lawyers Project, North-Central BC, Canada* // Proc. of the 8th Int. Airborne Electromagnetics Workshop, 2023. (AEM-2023)
 19. PERSOVA M.G., SOLOVEICHIK Y.G., TRIGUBOVICH G.M., VAGIN D. V. et al. *Geometric 3-D inversion of airborne time-domain electromagnetic data with applications to kimberlite pipes prospecting in a complex medium* // Journal of Applied Geophysics. – 2022. – Vol. 200.
 20. RUTHERFORD J., IBRAHIMI T., MUNDAY T., MARKEY A. et al. *An Assessment of Water Sources for Heritage Listed Organic Mound Springs in NW Australia Using Airborne Geophysical (Electromagnetics and Magnetics) and Satellite Remote Sensing Methods* // Journal of Remote Sensing. – 2023. – Vol. 13(7). – P. 1288.
 21. TELFORD W.M., GELDART L.R., SHERIF R.E. *Applied Geophysics*. Cambridge University Press, 2004. – 744 p

COMPENSATION OF INTERFERENCE IN AIRBORNE ELECTROMAGNETIC SYSTEMS AND SOLUTION OF THE PROBLEM OF RELATIVE POSITIONING IN THE ELECTROMAGNETIC TWO-DIPOLES FIELD

Ekaterina Tretyakova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, student (ekaterina_tretikova@mail.ru).

Abstract: The solution of the problem of relative positioning of the alternating magnetic field transmitter and the receiver is to determine the radius vector between the objects under consideration and their mutual orientation. In this paper, algorithms for the relative positioning of two dipoles in an electromagnetic field in three-dimensional and two-dimensional formulations are considered. The results obtained during the processing of real data from the airborne electromagnetic system EM4H are compared. Compensation has been carried out by measuring of two dipoles for the EQUATOR and "EM4H" airborne electromagnetic systems in several modifications: with a transmitter loop attached to the fuselage of a Mi-8 helicopter, with a loop attached to the fuselage of an An-3 aircraft, and with a loop towed by a Eurocopter AS350B3. A comparison with the traditional method of compensation based on measurements of the field of three dipoles has been carried out. The signals remaining after interference compensation have been analyzed. It has been shown that the quality of compensation in the field of two dipoles is equatable to the traditional one.

Keywords: relative positioning, alternating magnetic field, transmitter, receiver, compensation, magnetic dipole.

УДК 527.62+ 519.24

ББК 30в6

DOI: 10.25728/ubs.2024.107.9

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.Г. Кушнером.*

Поступила в редакцию 17.10.2023.

Опубликована 31.01.2024.