

**Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

***Выпуск 116
Июль 2025***

**СБОРНИК
ТРУДОВ**

ISSN 1819-2467

Регистрационный номер Эл №ФС77-44158 от 09 марта 2011 г.

Москва – 2025

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Институт проблем управления

им. В.А. Трапезникова

УПРАВЛЕНИЕ БОЛЬШИМИ СИСТЕМАМИ

СБОРНИК ТРУДОВ

Выпуск 116

Москва – 2025

КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ

Академики: Васильев С.Н., Желтов С.Ю., Каляев И.А., Куржанский А.Б., Попков Ю.С., Черноусько Ф.Л.; члены-корреспонденты РАН: Галяев А.А., Савватеев А.В.; д-ра техн. наук: Кузнецов О.П. (ИПУ РАН), Павлов Б.В. (ИПУ РАН), Рутковский В.Ю. (ИПУ РАН).

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: академик Новиков Д.А. **Зам. главного редактора:** д-р физ.-мат. наук Губко М.В. **Отв. секретарь:** канд. физ.-мат. наук Горбунова А.В. **Редактор:** канд. техн. наук Квинто Я.И.

Д-ра техн. наук: проф. Алескеров Ф.Т. (ГУ ВШЭ), проф. Алчинов А.И. (ИПУ РАН), проф. Андриевский Б.Р. (ИТМО), проф. Афанасьев В.Н. (МИЭМ, ГУ ВШЭ), проф. Бахтадзе Н.Н. (ИПУ РАН), проф. Бурков В.Н. (ИПУ РАН), проф. Вишневский В.М. (ИПУ РАН), д-р физ.-мат. наук проф. Ерешко Ф.И. (ВЦ РАН), д-ра техн. наук: проф. Калянов Г.Н. (ИПУ РАН), проф. Каравай М.Ф. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Клочков В.В. (ИПУ РАН); д-р техн. наук доцент Коргин Н.А. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Кушнер А.Г., проф. Лазарев А.А. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Лебедев В.Г. (ИПУ РАН), проф. Мандель А.С. (ИПУ РАН); д-р биол. наук проф. Михальский А.И. (ИПУ РАН); д-р экон. наук, проф. Нижегородцев Р.М. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Райгородский А.М. (МФТИ), проф. Рапопорт Л.Б. (ИПУ РАН); д-ра техн. наук: проф. Самуйлов К.Е. (РУДН), проф. Сидельников Ю.В. (МАИ), проф. Совлуков А.С. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Соловьев С.Ю. (МГУ), проф. Угольницкий Г.А. (ЮФУ); д-ра техн. наук: проф. Уткин В.А. (ИПУ РАН), проф. Хоботов Е.Н. (ИПУ РАН); д-ра физ.-мат. наук: проф. Чхартишвили А.Г. (ИПУ РАН), проф. Щербаков П.С. (ИПУ РАН).

РЕГИОНАЛЬНЫЕ РЕДАКЦИОННЫЕ СОВЕТЫ

Арзамас – д-р физ.-мат. наук проф. Пакшин П.В. (АПИ НГТУ); **Волгоград** – д-ра физ.-мат. наук: проф. Воронин А.А., проф. Лосев А.Г. (ВолГУ); **Воронеж** – д-р техн. наук, проф. Баркалов С.А., д-р физ.-мат. наук, проф. Головинский П.А. (ВГУ), д-р техн. наук, проф. Подвальный С.Л. (ВГТУ); **Иркутск** – д-р техн. наук проф. Зоркальцев В.И. (ЛИН СО РАН), д-р физ.-мат. наук, проф. Лакеев А.В. (ИДСТУ СО РАН); **Казань** – д-р физ.-мат. наук, проф. Маликов А.И., д-р техн. наук, проф. Сиразетдинов Р.Т. (КГТУ-КАИ); **Липецк** – д-ра техн. наук: проф. Погодаев А.К., проф. Сараев П.В. (ЛГТУ); **Самара** – д-ра экон. наук: проф. Богатырев В.Д., проф. Гераськин М.И.; **Петрозаводск** – д-р физ.-мат. наук, проф. Мазалов В.В., д-р техн. наук, доц. Печников А.А. (ИПМИ КарНЦ РАН); **Санкт-Петербург** – д-р физ.-мат. наук: проф. Петросян Л.А. (СПбГУ), д-р техн. наук проф. Фургат И.Б. (ИПМ РАН).

Адрес редакции: 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 65.

Адрес в интернете: ubs.mtas.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Системный анализ

Цвиркун А.Д., Дранко О.И., Резчиков А.Ф., Степановская И.А., Богомолов А.С., Кушников В.А. <i>Задача повышения производительности труда на производстве</i>	6
Калачев В.Ю., Угольницкий Г.А., Усов А.Б. <i>Задача перераспределения квот на обучение между структурными подразделениями высшего учебного заведения</i>	31
Егоркин А.А. <i>Кластеризация текстов финансовых сообщений</i>	47

Математическая теория управления

Кутяков Е.Ю. <i>Декомпозиция спектральных разложений квадратичной функции Ляпунова по элементам пространства состояний</i>	68
--	----

Анализ и синтез систем управления

Иванова М.В. <i>Эмпирический анализ взаимодействий игроков олигополии банковского рынка РФ на основе предположительных вариаций</i>	90
---	----

Сетевые модели в управлении

Черевичная Н.В., Козицин И.В. <i>Роль локальных структурных паттернов в процессах формирования мнений в социальных сетях.....</i>	116
---	-----

Управление в социально-экономических системах

Новиков Д.А. <i>Эффекты научения в моделях Осипова – Ланчестера</i>	135
Акинфиев В.К. <i>Моделирование влияния экспортных ограничений на цены внутреннего рынка</i>	154

Цветков В.В.

*Системная динамическая модель промышленности:
факторы роста и анализ оптимальных стратегий ...* 181

Буслова К.В.

*Асимптотическое представление в моделях
стохастической волатильности.....* 203

***Управление техническими системами
и технологическими процессами***

Касаткин А.А., Рахманина В.Е.

*Математические модели организационных
механизмов внедрения технологий индивидуального
мониторинга состояния изделий авиационной
техники* 232

Управление подвижными объектами и навигация

Лившиц А.Б., Темкин И.О., Фадеев А.Ю.

*Подходы к планированию скорости для наземных
беспилотных транспортных средств.....* 271

Соляков О.В., Уварова Л.А.

*Моделирование плоскопараллельного движения
судна на основе нелинейной динамической системы
с изменяющимися параметрами с использованием
метода возмущений и его экспериментальная
проверка* 298

***Программы и системы моделирования объектов,
средств и систем управления***

Прокуровский А.А., Тутова Н.В., Андреев И.А.

*Модели и методы маршрутизации информационных
ресурсов в сетях доставки контента на основе
отечественного программного обеспечения* 321

**Власов Л.Н., Каплун Д.В., Третьякова Е.А.,
Хлюстов Д.К.**

*Анализ способов компенсации наведенной помехи
и моделирования геологической среды методом
инверсии при обработке данных
аэроэлектроразведки* 342

ЗАДАЧА ПОВЫШЕНИЯ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ТРУДА НА ПРОИЗВОДСТВЕ

**Цвиркун А. Д.¹, Дранко О. И.²,
Резчиков А. Ф.³, Степановская И. А.⁴**
(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Богомолов А. С.⁵, Кушников В. А.⁶
(Саратовский НЦ РАН, СФГБОУ ВО «Саратовский
национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского», Саратов)

Представлены результаты разработок по решению задачи повышения производительности труда на средних и крупных предприятиях базовых отраслей экономики России. Дается формальная и содержательная постановка задачи, излагается подход к решению на основе определения коэффициента эффективности. Проводится анализ известных подходов к цифровому управлению и оптимизации производственных процессов. На основании проведенного анализа обосновывается вывод, что повышение производительности труда, как правило, не рассматривается как самоцель. Данный целевой процесс используется для формирования индикаторов интенсивности производства. Глобализация стратегического планирования меняет ситуацию и делает востребованным планирование устойчивого роста производительности труда для системообразующих предприятий. В процессе решения задачи разработана информационно-логическая схема формирования комплексов мероприятий по повышению производительности труда. В этой схеме в отдельные типы выделяются мероприятия, касающиеся ручного и автоматизированного труда, администрирования и документооборота. Мероприятия этих типов соотносятся с различными подзадачами основной задачи. При этом подзадачи выделяются следующие: развитие персонала, повышение мотивации, совершенствование орудий труда, развитие обеспечения ресурсами. На основе рассматриваемой схемы формируются и сравниваются два комплекса мероприятий по основным направлениям достижения цели.

Ключевые слова: бизнес-моделирование, стратегия, повышение производительности труда.

¹ Анатолий Данилович Цвиркун, д.т.н., профессор (tsvirkun@ipu.ru).

² Олег Иванович Дранко, д.т.н., доцент (drankooi@ipu.ru).

³ Александр Федорович Резчиков, д.т.н., профессор, чл.-корр. РАН (rw4cy@mail.ru).

⁴ Ираида Александровна Степановская, к.т.н., с.н.с. (irstepan@ipu.ru).

⁵ Алексей Сергеевич Богомолов, д.т.н., доцент (bogomolov@iptmuran.ru).

⁶ Вадим Алексеевич Кушников, д.т.н., профессор (kushnikoff@yandex.ru).

1. Введение

Задача повышения к 2030 году производительности труда (ПТ) средних и крупных предприятий базовых и сырьевых отраслей экономики, а также учреждений социальной сферы не менее чем на 40 % поставлена в Национальном проекте России «Производительность труда». Это позволит сократить отставание от стран-лидеров, отмечаемое в различных исследованиях. В частности, в [2] приводится сравнение стран по средней выработке одного занятого, долл. в час (рис. 1).

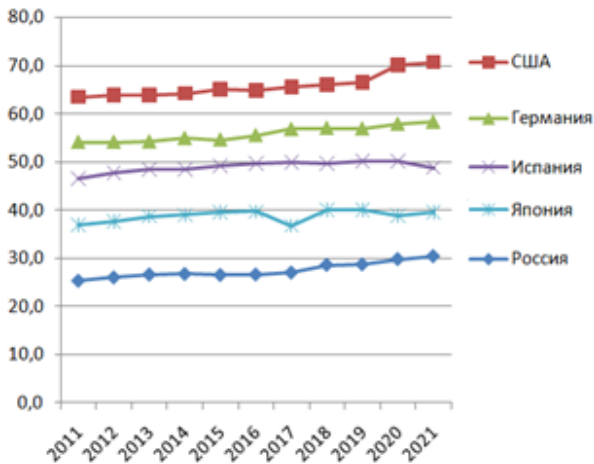


Рис. 1. Средняя выработка одного занятого, долл. в час

При оценке ПТ следует учитывать, что Россия является страной с достаточно большим количеством населения и вслед за этим – большим количеством занятых, которое входит в знаменатель средней ПТ. Однако из данных CompaniesMarketCap.com видно, что ряд стран с достаточно большим количеством занятых (выше медианы – 508 995 чел.) имеет среднюю ПТ выше медианы – 397 тыс. долл. в год: США, Китай, Япония и др. Среди них в Китае и США население больше, чем в России. В Японии население на 19% меньше, чем в России, но преимущество ПТ Японии составляет порядка 30%.

Каждый новый технологический уклад привносит инновационные принципы организации производства, приводящие к кратному увеличению ПТ. Современная эпоха развития экономики знаний порождает цифровые технологии моделирования и оптимизации производственных процессов, способствующие повышению ПТ [1, 6].

Иллюстративными примером может служить динамическая оптимизация производственного процесса по критериям, формулируемым в контексте управления по принципу Just-In-Time [4], применимому как к классическому управлению запасами, так и к регулированию вовлеченности работников в деловой процесс, а также управлению поставками продукции.

Альтернативным подходом к цифровому регулированию ПТ служит организация производства низкозатратной продукции для массового потребительского рынка при высокой покупательной способности населения [5].

Еще один вариант оптимизации производственного процесса представляет макроэкономический подход, предполагающий сбалансированное решение трех проблем: внедрение прогрессивных технологий за счет основного капитала; подготовку кадров (квалификация, образование и др.) на основе социально-экономических механизмов; организационное управление персоналом и производством [5].

Приведенные методы цифровой оптимизации производственных процессов раскрывают механизмы воздействия на ПТ в цифровой экономике, оценивают ее динамику, но не рассматривают ее рост как целевую функцию оптимизации. Отсутствие четкой системы управления производительностью предприятия существенно ограничивает процессы стратегического планирования развития цифровой экономики на уровне отраслей, регионов и страны в целом. Актуальность этой проблемы подтверждается Национальным проектом «Производительность труда», федеральным проектом «Системные меры по повышению производительности труда», федеральным проектом «Адресная поддержка повышения производительности труда», Президентской программой подготовки кадров «Лидеры производительности».

На этом пути предполагается замена рутинного ручного труда роботизированными технологиями [27], существенное усиление роли «цифрового труда» человека по математическому моделированию и оптимизации производственных процессов, а также развитие «цифровых платформ занятости» [3], сопровождающих стационарную и мобильную пространственно распределенную рабочую среду обслуживания исполнителями услуг с клиентами-потребителями услуг.

Обозначенные аспекты приводят постановке задачи повышения ПТ, излагаемой ниже.

2. Формальная постановка и принцип решения задачи

Повышение производительности труда (ПТ) – сложная, многофакторная (человеческий и технологический факторы, внешние условия) задача со сложно формализуемыми динамическими связями, также множественными ограничениями и рисками. При поиске практически значимого решения такой задачи мы не можем ограничиваться исключительно формальными аналитическими методами. Требуется гибкий, комбинированный подход, объединяющий лучшие практики из различных методологий. Учитывая сказанное и имеющиеся наработки, описанные выше, мы предлагаем следующее понимание и принцип решения данной задачи.

Содержательно требуется наиболее эффективно (в смысле коэффициента эффективности, «Эффект/Затраты») повысить на заданном отрезке времени рассматриваемый показатель функционирования предприятия, избегая при этом нежелательных (экстремальных) отклонений множества других его показателей от рекомендуемых или ожидаемых значений.

Пусть $X_1(t), \dots, X_n(t)$ – выбранные ЛПР характеристики функционирования предприятия на отрезке времени $[t_n, t_k]$, $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$ – влияющие на них параметры, принимающие значения на множествах $Y_1, \dots, Y_m$.

Рассматривается множество комплексов мероприятий $\{P_1, \dots, P_k\}$, влияющих на $X_1(t), \dots, X_n(t)$. Требуется определить такой из этих комплексов, при котором произойдет повышение значений $Z_1(X_1(t), \dots, X_n(t), Y_1(t), \dots, Y_m(t)), \dots, Z_k(X_1(t), \dots, X_n(t),$

$Y_1(t), \dots, Y_m(t)$) и сохранение их на определенном уровне $Z'_1, \dots, Z'_k$. Таким образом, требуется достижение условия

$$(1) \quad Z_i(t) \geq Z'_i,$$

$i = 1, \dots, k$, при всех $t \in [t_0, t_k]$ и некотором $t_0 \geq t_n$, при всех рассматриваемых $Y_i(t) \in Y_i$, при условии сохранения допустимых значений переменных

$$(2) \quad F(X_1(t), \dots, X_n(t), Y_1(t), \dots, Y_m(t)) \leq 0$$

на отрезке $[t_n, t_k]$, где $F(X_1(t), \dots, X_n(t), Y_1(t), \dots, Y_m(t))$ – заданная вектор-функция при условии сохранения желаемого ЛПП значения коэффициента эффективности $k(P) = R(P)/C(P)$, где $R(P)$ и $C(P)$ – эффект от реализации комплекса P в процентах повышения ПТ и затраты, связанные с реализацией P .

3. Современные подходы к повышению производительности труда на производственных предприятиях

Современные методологические подходы к повышению производительности труда на производстве включают цифровизацию, автоматизацию, бережливое производство, устойчивые практики и развитие персонала. Эти стратегии основаны на интеграции технологий Industry 4.0 и гибких методологий управления [11].

Систематический обзор современных международных публикаций позволяет выделить следующие основные тренды в методах повышения ПТ на промышленных предприятиях.

1. Цифровизация и внедрение Industry 4.0, Industry 5.0. Цифровизация производства с использованием технологий Industry 4.0 [34] включает использование интернета вещей, больших данных, искусственного интеллекта и роботов, что позволяет снизить время простоев и повысить эффективность работы производственных линий. Наряду с вопросами автоматизацией сборочных линий с помощью роботов [38] исследуются задачи нахождения целесообразного баланса при их взаимодействии с человеком [32, 33].

Другое важное направление – использование датчиков IoT для мониторинга расположения и состояния инструментов [14] и оборудования [19] в реальном времени. Прогнозное обслужи-

вание промышленного оборудования [36] основывается на результатах машинного обучения [21]. Эти направления получают развитие при переходе к индустрии 5.0 [26, 30].

2. Методологии бережливого производства (Lean Manufacturing) [28]. Бережливое производство направлено на повышение эффективности процессов за счет устранения потерь времени, материалов и энергии. Фундаментальной основой является Кайджен – японская философия и методология непрерывного улучшения [17]. Метод Кайджен направлен на постепенные, но постоянные улучшения с вовлечением сотрудников всех уровней организации в процесс выявления и устранения проблем. Кайджен широко используется в производственных системах, таких как Toyota Production System (TPS) [23]. Система 5S (5С – сортировка, систематизация, содержание в чистоте, стандартизация, совершенствование (самодисциплина) [29] также основана на принципах бережливого производства. Наиболее эффективно методологии Кайджен и 5S работают в своей синергии: 5S обеспечивает дисциплину и порядок, которые необходимы для успешной реализации Кайджен: без организованного рабочего места улучшения могут быть менее эффективными; Кайджен поддерживает 5S, предотвращая возврат к хаосу: если рабочее место начинает загромождаться, Кайджен предлагает решения для устранения этой проблемы. Для выявления улучшений, осуществляемых с Кайджен и 5S, используются карты потока создания ценностей, Value Stream Mapping [8, 31]. В настоящее время технологии бережливого производства продолжают свое развитие при использовании искусственного интеллекта [22].

3. Адаптивное управление персоналом. Исследователи бережливого производства систематически всегда отмечали важную роль управления персоналом [12, 23]. Современные подходы к управлению персоналом включают гибкие графики работы, обучение сотрудников новым технологиям [24] и создание мотивационных программ. Принцип постоянного обучения сотрудников можно рассматривать как сплав методологии бережливого производства и адаптивного управления персоналом.

4. Гибкие производственные системы (Flexible Manufacturing Systems, FMS). Гибкие производственные системы позволяют

оперативно адаптироваться к изменениям в спросе или спецификациях продукции [10]. Они дают такие преимущества, как снижение времени на переналадку оборудования [37] и возможность выпуска небольших партий продукции без потери эффективности [23].

5. Автоматизация и роботизация производства. Роботы выполняют многие стандартные и повторяющиеся функции быстрее и точнее людей. Различные исследования [15] в странах – лидерах по производительности труда [40, 42] подтверждают существенное увеличение производительности труда за счет роботизации [40]. Дополнительная актуальность здесь возникает в условиях опасных, трудоемких и тяжелых работ [13]. При этом в индустрии 4.0, и тем более – в индустрии 5.0 речь идет не о максимальном исключении людей из процесса производства, а об их сбалансированной коллаборации с роботами [35].

6. Анализ данных и прогнозирование. В эту сферу входит использование современных технологий для аналитики данных [16] при решении большого количества различных задач, связанных с машиностроительным производством. Среди них прогнозирование спроса [39], отказов оборудования [21], оптимизация запасов [30], планирование [18, 20] и техническое обслуживание производства [9].

Основу решения задачи повышения ПТ предприятия или отрасли составляет комбинирование воздействия мероприятий по перечисленным направлениям, с учетом сопутствующих им затрат и планируемого в каждом конкретном случае эффекта. В России нам представляется целесообразным акцентировать внимание на реализации концепций бережливого производства и программ стимулирования мотивации сотрудников различных уровней, их непосредственной заинтересованности в повышении производительности труда.

4. Базовая структура комплексов мероприятий по повышению производительности труда

Анализ комплексов мероприятий по повышению ПТ в современных условиях дает возможность декомпозировать эти мероприятия по отношению к условному роду трудовой дея-

тельности (ручной и автоматизированный труд, администрирование и документообеспечение) и виду самих мероприятий в информационно-логической схеме, один из вариантов которой представлен ниже в таблицах 1–6.

Таблица 1. Повышение ПТ в части анализа и планирования

Ручной труд	Автоматизированный труд	Администрация	Документы
Планирование, хронометрирование операций.	Научная организация труда.	Анализ, выявление узких мест, оптимизация бизнес-процессов.	Планирование подготовки документов.
Управление изменениями и оптимизация взаимодействия между департаментом проектирования и производством: – спецификация продукции; – синхронизация продаж и производства в номенклатуре.			
Согласование условий оптимизации на различных этапах производства. Проблема: следующий этап уменьшает или не использует в полной мере результаты оптимизации на предыдущем этапе. Наоборот: на следующем этапе нет возможности применить разработанные для него процедуры оптимизации, так как на предыдущем этапе не созданы условия для этого.			
Применение ИИ для генерирования и обоснования принимаемых решений.			

Таблица 2. Повышение ПТ в части развития организации труда

Ручной труд	Автоматизированный труд	Администрация	Документы
Организация внутрисменной работы.		Оптимизация пропорций между основным и неосновным (вспомогательный, коммерческий и административный) производственным персоналом.	Анализ исполнения хода документов и устранение повторных переделок, совершенствование логистики документов.
Снижение расходов за счет аутсорсинга.			
Оптимизация производственного планирования и контроля за выполнением заказов. Внедрение автоматизированных систем управления производством (MES-систем). Применение систем управления качеством.			

Таблица 3. Повышение ПТ в части развития персонала

Ручной труд	Автоматизированный труд	Администрация	Документы
Использование опыта, лучших практик, наставничество, дифференцированное обучение, обучение работе на новых оснащенных рабочих местах.	Повышение квалификации в средствах программирования, обучение работе на новых оснащенных рабочих местах.	Курсы, семинары, обмен опытом с лидерами, набор персонала под дефицитные квалификации, аутстафing.	
Программы непрерывного проф. обучения и повышения квалификации.		Использование системы КРП и регулярной оценки результатов работы для выявления потребностей в обучении.	

Таблица 4. Повышение ПТ в части развития мотивации

Ручной труд	Автоматизированный труд	Администрация	Документы
Ориентирование на лидеров.		Обратная связь с персоналом.	Создание стимулов к повышению личной ПТ и ПТ предприятия.
Создание личных стимулов к повышению своей ПТ и повышению ПТ на предприятии в целом.			

Таблица 5. Повышение ПТ в части развития орудий труда

Ручной труд	Автоматизированный труд
Бережливое производство (оптимизация расстановки инструмента и оборудования), эргономика, оснащение и автоматизация рабочих мест. Применение превентивного и предиктивного технического обслуживания. Использование диагностических и мониторинговых систем для выявления и предотвращения поломок. Внедрение эффективного управления запасами запчастей.	Разработка и дополнительная параметризация моделей программирования, выбор целесообразных технологических параметров обработки деталей. Применение превентивного и предиктивного технического обслуживания. Использование диагностических и мониторинговых систем для выявления и предотвращения поломок. Внедрение эффективного управления запасами запчастей.
Автоматизация проектирования (CAD-системы) и расчетов (CAE). Применение Agile и Lean методологий в разработке продуктов.	

Таблица 6. Повышение ПТ в части обеспечения ресурсами

Ручной труд	Автоматизированный труд	Администрация	Документы
Планирование обеспечения ресурсами.			Шаблонизация документов.
Оптимизация использования ресурсов и энергоэффективные технологии. Утилизация и переработка отходов. Внедрение экологически безопасных технологий и процедур.			
Оптимизация цепочек поставок и управление запасами. Автоматизация процессов закупок и снабжения. Внедрение систем мониторинга логистики и транспорта.			

Практические решения, приводящие к повышению ПТ, по нашему мнению, должны базироваться на комбинациях перечисленных в схеме воздействий. В эти комбинации будут входить мероприятия, которые направлены в соответствии с точками возможного роста системы в части повышения ПТ и при этом обеспечиваются выделяемыми ресурсами рассматриваемого предприятия. Общий план внедрения мероприятия по повышению ПТ задается информационно-логической схемой на рис. 2. Варианты результатов проверки условий в этой схеме объединены с действиями, которые сопоставляются этим вариантам, а ниже в блоках указаны ответственные за эти действия подсистемы.

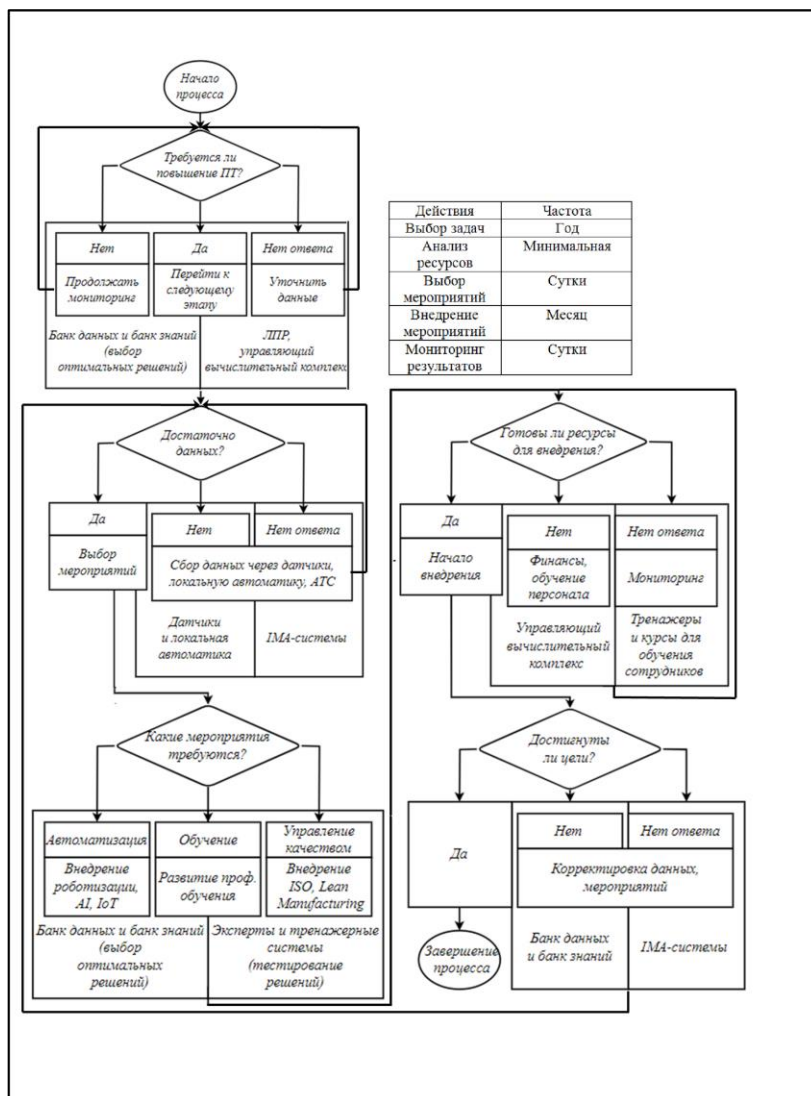


Рис. 2. Информационно-логическая схема принятия решений

5. Модельный пример комплексов мероприятий по повышению производительности труда

Пусть требуется повысить ПТ производственного предприятия численностью сотрудников 100–1000 человек на 10 и более процентов в течении 1 года.

В соответствии с формальной постановки рассматриваемой задачи, в качестве выбранных ЛПР характеристик функционирования предприятия $X_1(t), \dots, X_n(t)$ и внешних факторов $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$, преимущественно определяющих ПТ $Z(X_1(t), \dots, X_n(t), Y_1(t), \dots, Y_m(t))$, рассмотрим следующие (берутся средние значения, характеризующие переменную или фактор):

$X_1(t)$ – выработка на 1 работника (ед. продукции/чел. или руб./чел.);

$X_2(t)$ – коэффициент использования оборудования;

$X_3(t)$ – трудоёмкость единицы продукции (часы/ед.);

$X_4(t)$ – уровень брака (% от общего выпуска);

$X_5(t)$ – время выполнения заказа (от сырья до готовой продукции);

$Y_1(t)$ – надёжность поставщиков (экспертная оценка);

$Y_2(t)$ – спрос на продукцию (рост к предыдущему периоду);

$Y_3(t)$ – тарифы на энергоносители (рост к предыдущему периоду);

$Y_4(t)$ – изменения в законодательстве (экспертная оценка);

$Y_5(t)$ – квалификация новых сотрудников (экспертная оценка).

Требуется выбрать комплекс мероприятий, влияющих на перечисленные переменные $X_1(t), \dots, X_n(t)$ и, таким образом, наряду со значениями внешних факторов $Y_1(t), \dots, Y_m(t)$, преимущественно определяющих значение ПТ $Z(X_1(t), \dots, X_n(t), Y_1(t), \dots, Y_m(t))$.

Рассмотрим два модельных комплекса мероприятий P_1 и P_2 , который были предложены ЛПР с этой целью. Комплекс мероприятий P_1 предполагает достижение цели за счет внедрения современных технологий, комплекс мероприятий P_2 – за счет уменьшения потерь и повышение вовлечённости сотрудников. Эти комплексы отражают основные направления решения проблемы и на практике могут использоваться в виде композиции.

Комплекс мероприятий P_1 : автоматизация и цифровизация процессов. Повышение производительности труда за счёт внедрения современных технологий.

1. Диагностика и анализ текущих процессов:

- Провести аудит бизнес-процессов с использованием методов хронометрирования.
- Выявить участки производства с наибольшими потерями времени и ресурсов.

Ориентировочный результат: повышение ПТ на 10%.

2. Внедрение MES-систем (Manufacturing Execution Systems):
Автоматизировать управление производственными процессами для мониторинга и оптимизации в реальном времени.

Интегрировать MES с системами управления качеством и учёта сырья.

Ориентировочный результат: снижение простоев на 10–30%.

3. Автоматизация проектирования и подготовки производства:

Внедрить системы CAD/CAE для ускорения проектирования деталей и узлов.

Установить программное обеспечение для автоматизации расчёта технологических процессов.

Ориентировочный результат: сокращение времени проектирования на 15–30%.

4. Мониторинг оборудования:

Установить системы IoT для диагностики оборудования в режиме реального времени.

Внедрить профилактическое обслуживание на основе данных.

Ориентировочный результат: повышение времени работы оборудования за счёт профилактики на 10–20%

5. Обучение сотрудников:

Провести тренинги по использованию новых систем и технологий.

Обучить персонал основам работы с большими данными для анализа производственных метрик.

Обучение по совмещению профессий.

Ориентировочный результат: улучшение взаимодействия и работы с системами, прирост эффективности на 20–30%.

Предполагаемый результат использования этого комплекса мероприятия включает следующие основные опции:

Увеличение объёмов выпуска (в стоимостном и количественном выражении) продукции без увеличения численности персонала, при наличии возможности реализации произведенной продукции.

Улучшение качества продукции за счёт оперативного выявления дефектов.

Снижение простоев оборудования.

Ключевые улучшения

- Устранение простоев оборудования за счёт IoT-мониторинга.

- Повышение скорости проектирования и производства благодаря внедрению CAD/CAE и MES-систем.

- Минимизация брака за счёт автоматизированного контроля.

Ожидаемое реалистичное повышение ПТ при внедрении комплекса мероприятий 1 равно 10–20% при условии успешного внедрения технологий.

Комплекс мероприятий P_2 : бережливое производство и развитие персонала. Уменьшение потерь и повышение вовлеченности сотрудников.

1. Оптимизация производственных процессов:

- Провести анализ рабочего времени с выявлением неэффективных операций.

- Реорганизовать производственные линии с учётом принципов бережливого производства (Lean).

Ориентировочный результат: сокращение времени операций на 7%.

2. Совершенствование рабочего пространства:

- Реализовать систему 5S (сортировка, соблюдение порядка, содержание в чистоте, стандартизация, совершенствование).

- Переработать логистику рабочего пространства для сокращения лишних движений сотрудников.

Оrientировочный результат: улучшение рабочего пространства и снижение временных потерь на 3%.

3. Стимулирование мотивации:

- Внедрить систему оценки КРІ с премированием за достижение производственных целей.
- Организовать программы наставничества для обмена опытом между работниками.

Оrientировочный результат: повышение ПТ на 5–20%.

4. Обучение и развитие:

- Запустить регулярные тренинги по эргономике и безопасности труда.
- Проводить внутренние соревнования и хакатоны для поиска идей по улучшению производственных процессов.

Оrientировочный результат: добавочный прирост на 5–20%.

Предполагаемый результат при использовании этого комплекса мероприятий включает:

- Снижение времени на выполнение операций.
- Увеличение вовлеченности сотрудников и улучшение корпоративной культуры.
- Экономия ресурсов и уменьшение экологической нагрузки.

Ключевые улучшения:

- Оптимизация рабочего пространства (5S) и сокращение потерь времени.
- Повышение мотивации и квалификации персонала.
- Уменьшение отходов и неэффективных операций.

Ожидаемое реалистичное ПТ: 5–10%, упор делается на постепенные изменения и вовлеченность сотрудников.

Для анализа рассматриваемых комплексов мероприятий необходимо оценить время их реализации и требуемые финансовые вложения. Оценка всех этих затрат в рассматриваемом модельном примере является условной и основана на общем представлении о типичных расходах на мероприятия, связанные с автоматизацией, внедрением Lean-подходов, обучением персонала и приобретением оборудования. Использовались отчёты и исследования по внедрению MES-систем и Lean-подходов

[17, 25, 30], включая дополнительные расходы на оборудование, обучение персонала и поддержку системы, внедрении автоматизации и Lean, статистические данные об обучении персонала и внедрении IT и публикации в специализированных изданиях (Automation World, Industry Week и др.).

Затраты на внедрение CAD/CAE-систем включают стоимость лицензий, обучение сотрудников для интеграции с существующими процессами. Внедрение IoT-решений [41] для мониторинга оборудования требует инвестиций в датчики, программное обеспечение и инфраструктуру для сбора и анализа данных. Затраты на обучение зависят от количества сотрудников, продолжительности и формы обучения (внутреннее или с привлечением внешних специалистов). Кроме того, эти затраты включают оплату обучения сотрудников вне их рабочего времени.

Затраты при реализации комплекса мероприятий 1 (автоматизация и цифровизация процессов с оценкой затрат).

1. Диагностика и анализ текущих процессов. Проведение аудита бизнес-процессов, включая хронометрирование и выявление узких мест: 1–2 мес., 1000–5000 у.е. (приглашение экспертов и использование аналитических инструментов).

2. Внедрение MES-систем. Установка системы управления производственными процессами и её интеграция с другими системами: 4–6 мес., 10000 у.е. (лицензия, внедрение, обучение персонала).

3. Автоматизация проектирования и подготовки производства. Внедрение CAD/CAE-систем для ускорения проектирования и оптимизации технологических процессов: 3–4 мес., 6000 у.е. на одно рабочее место (покупка лицензий и интеграция с производственными линиями).

4. Мониторинг оборудования. Установка IoT-датчиков для отслеживания состояния оборудования и профилактического обслуживания: 2–3 мес., 7000 у.е. (закупка оборудования и настройка).

5. Обучение сотрудников. Проведение тренингов по использованию новых технологий и систем: 1–2 мес., 2000 у.е. (услуги тренеров, методические материалы).

Общие затраты по комплексу мероприятий 1: 10–15 мес., 25000–30 000 у.е.

Этот комплекс мероприятий требует значительных временных затрат на внедрение технологий, интеграцию систем, настройку оборудования и обучение персонала.

Комплекс мероприятий 2 (бережливое производство и развитие персонала с оценкой затрат).

1. Оптимизация производственных процессов. Анализ рабочих процессов, их реорганизация с использованием принципов Lean: 3–4 мес., 4000 у.е. (работа консультантов и внутренний анализ).

2. Совершенствование рабочего пространства. Реализация системы 5S для улучшения порядка и эргономики: 2–3 мес., 2000 у.е. (организация рабочего пространства, обучение сотрудников).

3. Мероприятия по стимулированию и мотивации. Внедрение системы оценки KPI и программы премирования: 1–2 мес., 4000 у.е. (разработка системы и финансирование премий).

4. Обучение и развитие персонала. Проведение регулярных тренингов и организация внутренних мероприятий для сотрудников: 2–3 мес., 4000 у.е. (оплата тренеров и организация мероприятий).

Общие затраты по комплексу мероприятий 2: 6–9 мес., 12 000–16 000 у.е.

Этот комплекс мероприятий ориентирован на внедрение более простых решений, связанных с организацией труда и развитием сотрудников, и реализуется быстрее за счёт меньшей технической сложности мероприятий.

Сравнение рассматриваемых комплексов мероприятий по итоговым показателям приводится в таблице 7.

Таблица 7. Сравнение планов повышения ПТ

Комплекс мероприятий, P	P_1	P_2
Общие затраты, $C(P)$, тыс. у.е.	25–30	25–30
Время реализации, мес.	10–15	10–15
Эффект, $R(P)$ (прирост ПТ, %)	10–20	5–10
Коэффициент эффективности, $k(P)$	0,55	0,58

Интервальное вычисление [7] диапазона возможных значений коэффициента эффективности $k(P_1)$ для первого комплекса мероприятий дает в результате интервал $[0,33; 0,8]$ со средним значением 0,55, а $k(P_2)$ для второго комплекса – интервал $[0,31; 0,83]$ со средним 0,58. Поэтому в среднем более эффективным можно считать P_2 . При этом для конкретных предприятий сравнение P_1 и P_2 может иметь другой результат.

На рис. 3 величина коэффициентов $k(P_1)$ и $k(P_2)$ для рассматриваемых комплексов мероприятий отражена в виде градиента цвета, который направлен от большего значения коэффициента (темный) к меньшему его значению (светлый).

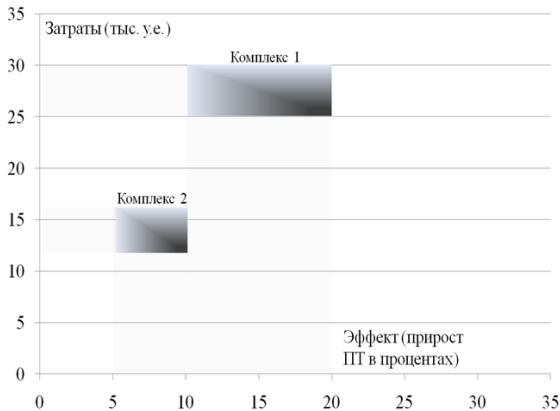


Рис. 3. Затраты и эффект комплексов мероприятий 1 и 2

В целом мероприятия из обоих комплексов не противоречат между собой и могут использоваться совместно. Но при этом может возникать необходимость разделения ресурсов между ними. Например, человеческого ресурса, когда на рассматриваемом временном горизонте имеющийся коллектив сотрудников не сможет качественно провести рассматриваемые мероприятия различных направлений.

6. Заключение

В работе предлагаются концептуальные положения по созданию цифровой платформы моделирования и многоцелевой оптимизации проектов повышения производительности труда, включая подход к выбору мероприятий по повышению производительности труда. Формально ставится задача повышения производительности труда. Предлагается метод нахождения рекомендаций по целесообразным воздействиям при решении данной задачи на основе использования комбинаций блоков проверенных международной практикой мероприятий. При этом вводятся базовая структура комплексов мероприятий и информационно-логическая схема действий по повышению производительности труда в зависимости от рода задач и видов деятельности. Множество рекомендуемых комплексов мероприятий по повышению производительности труда рассматривается как подмножество комбинаций мероприятий из базовой структуры. Приводится модельный пример двух таких комплексов мероприятия и сравнение их с использованием метода «Эффект – затраты».

Литература

1. АЛИЕВ И.М. *Влияние цифровой экономики на производительность труда* // Экономика труда. – 2021. – Т. 8, №9. – С. 917–930.
2. ВИКТОРОВА В.А., СИЛАКОВА Л.В. *Выявление актуальных компетенций для повышения производительности труда населения в условиях цифровизации России* // Экономика труда. – 2023. – Т. 10, №7. – С. 999–1018.
3. ГНЕВАШЕВА В.А. *Цифровые платформы занятости* // РППЭ. – 2022. – №9(143). – С. 81–85.
4. МЕЛКОЗЕРОВА Д.О., РУДЬ Н.Ю. *Особенности применения инструментов "JUST IN TIME" в современной российской экономике* // E-Management. – 2021. – №1. – С. 85–94.
5. МИРОНОВА О.А., БОГДАНОВА Р.М. *Анализ зарубежного опыта использования факторов повышения производитель-*

- ности труда на предприятии // Вестник РГЭУ РИНХ. – 2021. – №2(74). – С. 122–128.
6. СТУКЕН Т.Ю., ЛАПИНА Т.А., КОРЖОВА О.С. *Оценка влияния цифровизации на производительность труда в организации (на примере промышленных предприятий)* // Вестник ОмГУ. Серия: Экономика. – 2023. – №2. – С. 74–79.
 7. ШАРЫЙ С.П. Конечномерный интервальный анализ. – Новосибирск: XYZ, 2019. – 635 с.
 8. BATWARA A., SHARMA V., MAKKAR M. et al. *Towards smart sustainable development through value stream mapping – a systematic literature review* // Heliyon. – 2023. – Vol. 9, No. 5. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e15852>.
 9. BOUSDEKIS A., LEPENIOTI K. et al. *A Review of Data-Driven Decision-Making Methods for Industry 4.0 Maintenance Applications* // Electronics. – 2021. – Vol. 10, No. 7. – DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics10070828>.
 10. CELIK A.K., OZCELIK F. *Assembly line rebalancing problem with human-robot collaboration and a hyper-matheuristic solution approach* // Computers & Industrial Engineering. – 2025. – Vol. 200. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.110795>.
 11. CHANG Q., WASEEM M. *From Nash Q-learning to Nash-MADDPG: Advancements in multiagent control for multiproduct flexible manufacturing systems* // Journal of Manufacturing Systems. – 2024. – Vol. 74. – P. 129–140. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2024.03.004>.
 12. DATTA D., GUTHRIE J. *Human Resource Management and Labor Productivity: Does Industry Matter?* // Academy of Management Journal. – 2005. – Vol. 48, No. 1. – DOI: <https://doi.org/10.5465/AMJ.2005.15993158>.
 13. DMYTRIYEV Y., CARNEVALE M., GIBERTI H. *Enhancing flexibility and safety: collaborative robotics for material handling in end-of-line industrial operations* // Procedia Computer Science. – 2024. – Vol. 232. – P. 2588–2597. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2024.02.077>.
 14. DOAN H., TRAN M., VU V. et al. *Machine learning and IoT-based approach for tool condition monitoring: A review and future prospects* // Measurement. – 2023. – Vol. 207. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.112351>.

15. DUAN D., CHEN S., FENG Z. et al. *Industrial Robots and Firm Productivity* // *Structural Change and Economic Dynamics*. – 2023. – Vol. 67. – P. 388–406.
16. FRANKE F., FRANKE S., RIEDEL R. *AI-based Improvement of Decision-makers' Knowledge in Production Planning and Control* // *IFAC-PapersOnLine*. – 2022. – Vol. 55, No. 10. – P. 2240–2245. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2022.10.041>.
17. IMAI M. *Kaizen: The Key To Japan's Competitive Success*. – New York: McGraw-Hill Education, 1986. – 260 p.
18. IANG Y., DAI P., FANG P. et al. *A2-LSTM for predictive maintenance of industrial equipment based on machine learning* // *Computers & Industrial Engineering*. – 2022. – Vol. 172, Part A. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108560>.
19. JUSTUS V., KANAGACHIDAMBARESAN G.R. *Intelligent Single-Board Computer for Industry 4.0: Efficient Real-Time Monitoring System for Anomaly Detection in CNC Machines* // *Microprocessors and Microsystems*. – 2022. – Vol. 93, No. 2. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.micpro.2022.104629>.
20. KRISHNAN T., KHAN A., ALQURNI J. *Aggregate Production Planning and Scheduling in the Industry 4.0 Environment* // *Procedia Computer Science*. – 2022. – Vol. 204, No. 2 – P. 784–793. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2022.08.095>.
21. KHAN M., SINGH K., KHAN W. *A critical study on the implementation of operation, control and maintenance techniques for flexible manufacturing systems in small scale industries* // *Materials Today: Proceedings*. – 2023. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2023.05.225>.
22. KUMAR P. *Failure prediction using artificial intelligence for heavy duty equipment* // *Materials Today: Proceedings*. – 2022. – Vol. 66, No. 5. – P. 3154–3161. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.08.026>.
23. KUMAR S., NATHAN V., ASHIQUE S. et al. *Productivity enhancement and cycle time reduction in Toyota production system through jishuken activity – Case study* // *Materials Today: Proceedings*. – 2021. – Vol. 37, No. 2. – P. 964–966. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.06.181>

24. LEON R. *Employees' reskilling and upskilling for industry 5.0: Selecting the best professional development programmes* // Technology in Society. – 2023. – Vol. 75, No. 6. – P. 102393. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.techsoc.2023.102393>.
25. MAYNEZ-GUADERRAMA A., LÓPEZ V., URÍAS A. *La importancia de la gestión de recursos humanos para la manufactura esbelta* // Estudios Gerenciales. – 2024. – Vol. 40, No. 171. – P. 193–203. – DOI: <https://doi.org/10.18046/j.estger.2024.171.6450>
26. MURTAZA A., SAHER A., ZAFAR M. et al. *Paradigm shift for predictive maintenance and condition monitoring from Industry 4.0 to Industry 5.0: A systematic review, challenges and case study* // Results in Engineering. – 2024. – Vol. 24. – P. 102935. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2024.102935>.
27. PENG J., WANG D., ZHAO J. et al. *Meta-learning enhanced adaptive robot control strategy for automated PCB assembly* // Journal of Manufacturing Systems. – 2025. – Vol. 78. – P. 46–57. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2024.11.009>.
28. POPOV A. *Modern Approaches to the Implementation and Use of Lean Production Model* // BIO Web of Conferences. – 2023. – Vol. 76. – DOI: <https://doi.org/10.1051/bioconf/20237602002>.
29. RANDHAWA J., AHUJA I. *5S implementation methodologies: Literature review and directions* // Int. Journal of Productivity and Quality Management (IJPQM). – 2017. – Vol. 20, No. 1. – P. 48–74. – DOI: <https://doi.org/10.1504/IJPQM.2017.080692>.
30. RIZQI Z., CHOU S. *Neuroevolution reinforcement learning for multi-echelon inventory optimization with delivery options and uncertain discount* // Engineering Applications of Artificial Intelligence. – 2024. – Vol. 134, No. 9. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engappai.2024.108670>
31. ROMERO L., CONTRERAS A. *Applying Value Stream Mapping in Manufacturing: A Systematic Literature Review* // IFAC-PapersOnLine. – 2017. – Vol. 50. – Issue 1. – P. 1075–1086. – <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.385>
32. SAGAR D. WAGH, SUMEDH N. CHIWANDE *Implementation of Manufacturing Execution System (MES) to Increase Productivity and Competitiveness in the Manufacturing Sector* // Int. Journal for Research in Applied Science and Engineering

- Technology. – 2024. – Vol. 12, Iss. IV. – P. 3703–3714. – DOI: <https://doi.org/10.22214/ijraset.2024.60682>.
33. SHAHIN M., MAGHANAKI M., HOSSEINZADEH A. et al. *Improving operations through a lean AI paradigm: a view to an AI-aided lean manufacturing via versatile convolutional neural network* // Int J Adv Manuf Technol. – 2024. – Vol. 133. – P. 5343–5419. – DOI: <https://doi.org/10.1007/s00170-024-13874-4>.
 34. SHAO G., KIBIRA D., FRECHETTE S. *Digital Twins for Advanced Manufacturing: The Standardized Approach* // In: Grieves M., Hua E.Y. (eds) Digital Twins, Simulation, and the Metaverse. Simulation Foundations, Methods and Applications. – Springer, Cham, 2024. – P. 145–169. – DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-69107-2_7.
 35. SILVA A., SIMÕES A., BLANC R. *Supporting decision-making of collaborative robot (cobot) adoption: The development of a framework* // Technological Forecasting and Social Change. – Elsevier, 2024. – Vol. 204(C). – P. 123406. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.techfore.2024.123406>.
 36. SILVESTRI L., FORCINA A., INTRONA V. et al. *Maintenance transformation through Industry 4.0 technologies: a systematic literature review* // Computers in Industry. – 2020. – Vol. 123. – <https://doi.org/10.1016/j.compind.2020.103335>.
 37. SUBRAMANIYAN C., PRAKASH S., BHUVANESH N. et al. *Study based on the reduction of lot time by implementing set production and FMS in the traditional batch production system* // Materials Today: Proceedings. – 2021. – Vol. 45, Part 2. – P. 502–506. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.02.102>.
 38. TRANAB M., ZHANG S., DOANC H. et al. *Machine learning and IoT-based approach for tool condition monitoring: A review and future prospects* // Measurement. – 2023. – Vol. 207. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2022.112351>.
 39. WANG Y., WANG X., CHEN S. et al. *Integrated optimization of multi-station multi-robot assembly welding line: Application for automotive industry* // Expert Systems with Applications. – 2025. – Vol. 267. – P. 126116. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2024.126116>.

40. XU G., QIU Y., JINGYU Q. *Artificial intelligence and labor demand: An empirical analysis of Chinese small and micro enterprises* // Heliyon. – 2024. – Vol. 10, No. 3. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e33893>.
41. YAN N., WU T., WANG J. et al. *Industry spillover effects of robot applications on labor productivity: Evidence from China* // Economic Analysis and Policy. – 2025. – Vol. 229, No. 1. – P. 1272–1286. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jebo.2024.106858>.
42. ZHAO Y., SAID R., ISMAIL N. *Impact of industrial robot on labour productivity: Empirical study based on industry panel data* // Innovation and Green Development. – 2024. – Vol. 3, No. 2. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.igd.2024.100148>.

THE TASK OF INCREASING LABOR PRODUCTIVITY IN MACHINERY PRODUCTION

Anatoly Tsvirkun, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Professor (tsvirkun@ipu.ru).

Oleg Dranko, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Assistant Professor (olegdranko@gmail.com).

Aleksandr Rezchikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Corresponding Member Russian Academy of Sciences (rw4cy@mail.ru).

Iraida Stepanovskaya, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Cand.Sc., Senior Researcher (irstepan@ipu.ru).

Aleksey Bogomolov, Federal Research Center “Saratov Research Center of the RAS”, Saratov State University, Saratov, Doctor of Science, Assistant Professor (alexbogomolov@yandex.ru).

Vadim Kushnikov, Federal Research Center “Saratov Research Center of the RAS”, Saratov State University, Saratov, Doctor of Science, Professor (kushnikoff@yandex.ru).

Abstract: The results of developments to solve the problem of increasing labor productivity in medium and large enterprises in the basic sectors of the Russian economy are presented. A formal and substantive formulation of the problem is given, and an approach to solution based on determining the efficiency coefficient is outlined. An analysis of known approaches to digital control and optimization

of production processes is carried out. Based on the analysis, the conclusion is substantiated that increasing labor productivity, as a rule, is not considered an end in itself. This target process is used to generate indicators of production intensity. The globalization of strategic planning is changing the situation and making planning for sustainable growth in labor productivity for systemically important enterprises in demand. In the process of solving the problem, an information and logical scheme for the formation of complexes of measures to increase labor productivity was developed. In this scheme, activities related to manual labor, automated labor, administration and document flow are distinguished into separate types. In this scheme, activities related to manual and automated work, administration and document flow are distinguished into separate types. Activities of these types correspond to various subtasks of the main task. In this case, the following subtasks are identified: personnel development, increasing motivation, improving tools, developing the provision of resources. Based on the scheme under consideration, two sets of measures are formed and compared in the main directions of achieving the goal.

Key words: business modeling, strategy, increasing labor productivity.

УДК 004.942

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Ф.И. Ерешко*

Поступила в редакцию 17.02.2025.

Опубликована 31.07.2025.

ЗАДАЧА ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ КВОТ НА ОБУЧЕНИЕ МЕЖДУ СТРУКТУРНЫМИ ПОДРАЗДЕЛЕНИЯМИ ВЫСШЕГО УЧЕБНОГО ЗАВЕДЕНИЯ¹

Калачев В. Ю.², Угольников Г. А.³ Усов А. Б.⁴
(Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону)

Рассмотрена задача перераспределения квот на обучение среди структурных подразделений ВУЗа. Задача перераспределения квот имеет широкую область приложений, в частности при предотвращении загрязнения окружающей среды. В статье предполагается, что в ВУЗе имеется несколько структурных подразделений. Руководство ВУЗа выделяет структурным подразделениям (СП) некоторые квоты на обучение. Руководитель каждого СП может отдавать часть квоты своего СП другому подразделению, получая взамен некоторую компенсацию. При этом если квота не отдана, то она должна быть полностью использована в том СП, которому была выделена. Руководитель каждого СП стремится к максимизации своего выигрыша, выражаемого его целевой функцией. Для простоты можно считать, что цель руководителя каждого СП состоит в максимизации количества средств, аккумулируемых в централизованном фонде данного СП. При этом руководитель СП может управлять долей выделенной ему квоты, которую он хочет отдать или получить от другого СП. Показано, в каких случаях всем структурным подразделениям в результате перераспределения удастся получить оптимальные для них квоты. Рассмотрено три случая: когда суммарная величина квоты, которую хотят отдать подразделения, больше, меньше или равна суммарной величине квоты, которую хотят приобрести другие структурные подразделения. Предложены алгоритмы перераспределения квот в каждом из этих случаев. Исследование проводится аналитически для частного вида входных функций, в качестве которых берутся степенные функции. Приведены числовые примеры и дан анализ полученных результатов. Сделан ряд содержательных выводов.

Ключевые слова: перераспределение квот, оптимальная квота, структурное подразделение, управление высшими учебными заведениями, целевая функция.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект №25-11-00094.

² Василий Юрьевич Калачев, к.э.н., доцент (vkalachev@sfedu.ru).

³ Геннадий Анатольевич Угольников, д.ф.-м.н., профессор (gaugolnickiy@sfedu.ru).

⁴ Анатолий Борисович Усов, д.т.н., доцент (abusov@sfedu.ru).

1. Введение

Задача распределения и перераспределения квот на некоторый ресурс весьма актуальна и возникает в проблемах охраны окружающей среды от загрязнения, рыбном хозяйстве, электроэнергетике, политике, управлении учебным процессом в ВУЗах и многих других областях. Её смысл состоит в оптимальном распределении ограниченных ресурсов между агентами при компромиссном учёте их интересов.

С другой стороны, вопросам оптимального распределения квот с использованием инструментов математического моделирования посвящено не так много работ. В [3, 5] в математической постановке исследована задача распределения квот выбросов вредных веществ между их источниками с целью минимизации вредного воздействия на атмосферу. Приводится алгоритм оптимального распределения квот, основанный на пропорциональности внутри однородной группы источников и минимизации квадратичного функционала. В [9, 11] рассмотрена задача распределения абитуриентов по ВУЗам. В [11] при этом применяются коалиционные игровые модели, а в [9] доказано, что при определённых условиях равновесное распределение абитуриентов по ВУЗам единственно. Особое значение задача распределения и перераспределения квот имеет для рыбного хозяйства. В [2] изучена задача распределения квот вылова чёрного палтуса. Исследование основано на теории биматричных и кооперативных игр.

В настоящей статье рассмотрена задача перераспределения квот внутри некоторого ВУЗа между его структурными подразделениями. Некоторые предварительные результаты в этой области получены в работе [4].

Задача рассмотрена в бескоалиционном случае с учетом иерархической структуры современных систем управления. Определены субъекты управления в задаче, выписаны их целевые функции, рассмотрены разные варианты соотношения входных параметров модели, характеризующих спрос на квоты и их предложение. В результате задача перераспределения квот между структурными подразделениями одного ВУЗа рассмат-

ривается в трёх вариантах. В первом суммарный размер квоты, который хотят отдать структурные подразделения ВУЗа, больше суммарного размера квоты, который хотят приобрести другие подразделения этого ВУЗа (предложение больше спроса), во втором случае – наоборот, предложение меньше спроса, а в третьем случае спрос равен предложению. Задача перераспределения поставлена как иерархическая игра при нескольких ведущих и ведомых. Предложены алгоритмы решения задачи во всех случаях, приведены числовые примеры для квадратичной аппроксимации целевой функции.

2. Постановка задачи

В ВУЗе имеется несколько структурных подразделений. Руководство ВУЗа выделяет структурным подразделениям (СП) некоторые квоты на обучение, например, количество бюджетных мест в бакалавриат или магистратуру. Руководитель каждого СП может отдавать часть квоты своего СП другому подразделению, получая взамен некоторую компенсацию. При этом если квота не отдана, то она должна быть полностью использована в том СП, которому была выделена. Руководитель каждого СП стремится к максимизации своего выигрыша, выражаемого его целевой функцией. Для простоты можно считать, что цель руководителя каждого СП состоит в максимизации количества средств, аккумулируемых в централизованном фонде данного СП. При этом управлять руководитель СП может долей выделенной ему квоты, которую он хочет отдать или получить от другого СП.

Для определения величины квоты, которую выгодно отдать или получить, сначала необходимо определить оптимальную квоту для каждого СП. Для решения этой задачи формально модель можно записать в следующем виде:

– целевая функция i -го СП

$$(1) \quad J_i = F_i(T_{ii}) \rightarrow \max; \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

– имеющиеся ограничения на управления i -го СП

$$(2) \quad 0 \leq T_{ii} \leq Q_i.$$

Здесь $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество всех СП; Q_i – исходная квота i -го СП; T_{ii} – управление руководителя СП (величина имеющегося в его распоряжении ресурса); $F_i(T_{ii})$ – выигрыш СП при наличии ресурса в размере T_{ii} ; $i = 1, 2, \dots, n$.

Первоначально решается n задач безусловной оптимизации (1). Найденные оптимальные квоты СП обозначим через T_{ii}^* ; $i = 1, 2, \dots, n$.

Если $T_{ii}^* > Q_i$, то i -е СП заинтересовано приобрести дополнительно часть квоты у другого СП, а именно величину квоты $T_{ii}^* - Q_i$. Обозначим множество таких СП через N^+ .

Если $T_{ii}^* < Q_i$, то i -е СП заинтересовано отдать часть предложенной ему квоты другому СП, а именно величину квоты $Q_i - T_{ii}^*$. Обозначим множество таких СП через N^- .

Если $T_{ii}^* = Q_i$, то i -е СП уже имеет оптимальную квоту и в дальнейшем перераспределении квот не участвует. Обозначим множество таких СП через N^0 . Очевидно, что

$$N^+ \cup N^- \cup N^0 = N; N^+ \cap N^- = \emptyset$$

Возможны три случая.

$$(3) \quad \sum_{i \in N^-} (T_{ii}^* - Q_i) = \sum_{i \in N^+} (Q_i - T_{ii}^*),$$

$$(4) \quad \sum_{i \in N^-} (T_{ii}^* - Q_i) > \sum_{i \in N^+} (Q_i - T_{ii}^*),$$

$$(5) \quad \sum_{i \in N^-} (T_{ii}^* - Q_i) < \sum_{i \in N^+} (Q_i - T_{ii}^*).$$

В случае (3) путём перераспределения квот все СП получают оптимальную квоту. В случае (4) предложение превышает спрос. Часть квоты, которую СП хотят передать другим СП, превышает ту часть квоты, которую СП хотят получить от других СП. В случае (5), наоборот, спрос на квоту превышает предложение.

СП, входящие в N^0 , имеют оптимальную квоту и в перераспределении квот не участвуют. Остальные СП во всех трёх случаях стремятся к максимизации своих целевых функций в результате перераспределения квот. Их целевые функции принимают следующий вид:

– для СП, которые хотят приобрести дополнительную квоту

$$(6) \quad J_i = F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p(\Delta T_{ii})^\alpha \rightarrow \max; \quad i \in N^-;$$

с ограничениями на управления

$$(7) \quad 0 \leq \Delta T_{ii} \leq T_{ii}^* - Q_i;$$

– для СП, которые хотят отдать лишние квоты

$$(8) \quad J_i = F_i(Q_i - \Delta T_{ii}) + \beta p(\Delta T_{ii})^\alpha \rightarrow \max; \quad i \in N^+;$$

с ограничениями на управления

$$(9) \quad 0 \leq p \leq p_{\max}.$$

Здесь p – величина платы за единицу отдаваемой квоты; $p_{\max}$ – максимальная величина платы за единицу отдаваемой квоты; ΔT_{ii} – величина квоты, которую дополнительно хочет приобрести или отдать i -е СП; $\alpha = \text{const}$ – параметр, характеризующий стоимость одной единицы квоты; $\beta = \text{const}$ – параметр, обеспечивающий совпадение размерностей в (8).

Отметим, что параметры указанного типа широко используются в математическом моделировании. Например, распространена гравитационная модель $I = kN_1N_2/R^\alpha$, где I – количественная мера взаимодействия; N_1, N_2 – численности населения взаимодействующих экономических субъектов; R – расстояние между ними; k, α – «подгоночные» эмпирические параметры [6].

3. Метод решения

СП, которые хотят приобрести часть квоты $i \in N^-$, максимизируют свой выигрыш, управляя величиной квоты, которую они хотят приобрести. СП, которые хотят отдать часть квоты $i \in N^+$, управляют платой за единицу отдаваемой ими квоты.

Далее рассмотрим отдельно все три возможных случая.

В случае (3) возможно такое перераспределение квот, при котором каждое СП получит оптимальную для него квоту, равную T_{ii} . Для i -го СП, которое хочет передать часть своей квоты j -му СП ($i \in N^-$; $j \in N^+$), необходимо определить оптимальную величину платы за передачу единицы квоты (p^*) – решение оптимизационной задачи (8), (9). При этом величина p^* , с одной стороны, должна быть максимальной, а с другой – всем СП

из N^- , которые хотят приобрести дополнительную квоту, должно быть выгодно это сделать. Поэтому в случае (3), когда спрос на дополнительную часть квоты равен предложению частей квоты, и в случае (4), когда предложение превышает спрос, получаем

$$(10) \quad p^* = \min_{i \in N^-} \max_{0 \leq p \leq p_{\max}} \left[T_{ii}^* - Q_i = \arg \max_{0 \leq \Delta T_{ii} \leq T_{ii}^* - Q_i} \left(F_i(Q_i - \Delta T_{ii}) + \beta p (\Delta T_{ii})^\alpha \right) \right].$$

Определённая по формуле (10) величина платы за передачу единицы квоты делает для всех СП из N^- выгодным приобретение дополнительной части квоты до оптимальной величины.

Тогда в случае (3) в результате перераспределения квот получим

$$J_i = F_i(T_{ii}^*) - \beta p^* (Q_i - T_{ii}^*)^\alpha; \quad i \in N^-;$$

$$J_i = F_i(T_{ii}^*) + \beta p^* (T_{ii}^* - Q_i)^\alpha; \quad i \in N^+;$$

$$J_i = F_i(T_{ii}^*); \quad i \in N^0.$$

В случае (4) СП из N^+ смогут отдать только часть «лишней» квоты, так как суммарное количество «лишней» квоты превышает суммарное количество квоты, которое необходимо для СП из N^- . Все СП из N^- получают дополнительные квоты до оптимальных. А СП из N^+ отдают только часть своей «лишней» квоты, пропорциональную «лишней» квоте, которая у них есть. В результате в случае (4) выигрыши СП имеют вид

$$J_i = F_i(T_{ii}^*) - \beta p^* (Q_i - T_{ii}^*)^\alpha; \quad i \in N^-;$$

$$J_i = F_i\left(T_{ii}^* - \frac{R^-}{R^+} (T_{ii}^* - Q_i)\right) + \beta p^* \left(\frac{R^-}{R^+} (T_{ii}^* - Q_i)\right)^\alpha; \quad i \in N^+;$$

$$J_i = F_i(T_{ii}^*); \quad i \in N^0.$$

$$\text{Здесь } R^+ = \sum_{i \in N^-} (Q_i - T_{ii}^*); \quad R^- = \sum_{i \in N^+} (T_{ii}^* - Q_i).$$

В случае (5) спрос на дополнительные квоты больше их предложения. В этом случае дополнительную квоту получают только те СП, которые готовы за неё заплатить большую цену.

Возникает иерархическая игра при наличии ведущих и ведомых. При этом ведущие (СП из N^+) делают свой ход первыми. Они назначают стоимость единицы имеющейся у них 18 «лиш-

ней» квоты и делают выгодным для ведомых (СП из N^+) покупку всей имеющейся у них квоты. Предполагается, что ведущие образуют коалицию между собой и ведомые также вступают в свою коалицию. В результате возникает игра между одним обобщённым ведущим и одним обобщённым ведомым, которая ведётся в соответствии с информационным регламентом игры Гермейера Γ_1 [7, 8, 10].

Вначале для каждого СП из N^- определяется оптимальное для него количество приобретаемой квоты путём решения задач (6), (7) ($i \in N^-$), т.е. величины $\Delta T_{ii}^* - \Delta T_{ii}^*(p)$, $i \in N^-$.

Решается задача определения максимальной стоимости единицы квоты

$$(11) \quad p \rightarrow \max$$

при условии, что вся имеющаяся у СП из N^+ «лишняя» квота будет продана:

$$(12) \quad \sum_{i \in N^-} \Delta T_{ii}^*(p) = \sum_{i \in N^+} (Q_i - T_{ii}^*).$$

При этом должны выполняться неравенства

$$(13) \quad \Delta T_{ii}^*(p) \geq 0; \quad i \in N^-.$$

Из решения задачи (11)–(13) определяется оптимальная цена единицы квоты – величина p^* . При этом в правой части равенства (12) участвуют только те СП из N^- , для которых выполнено условие (13) при $p = p^*$. Тем СП из N^- , для которых это условие не выполнено, будет невыгодно платить цену p^* за единицу квоты, которую назначат Ведущие (СП из N^+) и в перераспределении квот они далее не участвуют. Для таких СП из N^- считаем, что $\Delta T_{ii}^*(p) = 0$.

В результате будет определена максимальная цена за единицу квоты, при которой вся имеющаяся у СП из N^+ «лишняя» квота будет продана. Приобрести её смогут только СП из множества N^- , которые готовы заплатить за нее цену p^* . В случае (5) выигрыш СП определяется формулами

$$J_i = F_i(T_{ii}^* + \Delta T_{ii}^*(p^*)) - \beta p^* (\Delta T_{ii}^*(p^*))^\alpha; \quad i \in N^-;$$

$$J_i = F_i(T_{ii}^*) + \beta p^* (Q_i - \Delta T_{ii}^*(p^*))^\alpha; \quad i \in N^+;$$

$$J_i = F_i(T_{ii}^*); \quad i \in N^0.$$

В качестве функции выигрыша СП возьмём квадратичную функцию, потому что она отвечает свойствам реальных систем управления и допускает аналитическое исследование модели. Действительно, учитывая свойства реальных систем управления необходимо, чтобы целевые функции СП были возрастающими выпуклыми вниз функциями, которые достигают максимума при некотором промежуточном значении. Если выделенная квота мала – плохо, если чересчур велика и всю её надо использовать – тоже плохо. Максимум квадратичной функции (параболы, ветви которой направлены вниз), достигается в её вершине, т.е. при некотором промежуточном значении. Поэтому функции выигрыша СП взяты в виде

$$F_i(T_{ii}) = a_i T_{ii} - \frac{b_i}{2} T_{ii}^2; \quad i \in N; \quad a_i, b_i = \text{const.}$$

Тогда, решив задачу безусловной оптимизации (1), получим

$$T_{ii}^* = \frac{a_i}{b_i}; \quad i \in N.$$

Напомним, что если $T_{ii}^* > Q_i$, то игрок i должен покупать квоты ($i \in N$), а если $T_{ii}^* < Q_i$, то отдавать ($i \in N^+$).

4. Примеры

Для простоты приводимых ниже выкладок в примерах предполагается, что квота является непрерывной величиной и целевые функции СП могут быть продифференцированы.

Пример 1. Предложение равно спросу на квоты, т.е. выполняется условие (3).

Пусть входные данные модели

$$\begin{aligned} N = 5; \quad \alpha = \beta = 1; \quad Q_1 = 10; \quad Q_2 = 20; \quad Q_3 = Q_4 = 30; \quad Q_5 = 15; \\ a_1 = 10; \quad a_2 = 20; \quad a_3 = 200; \quad a_4 = 100; \quad a_5 = 66; \quad b_1 = 1; \quad b_2 = 10; \\ b_3 = b_4 = 5; \quad b_5 = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } T_{11}^* = 10; \quad T_{22}^* = 2; \quad T_{33}^* = 40; \quad T_{44}^* = 20; \quad T_{55}^* = 33.$$

Значения глобальных максимумов целевых функций СП имеют вид

$$\begin{aligned} (14) \quad J_1^* = F_1(T_{11}^*) = 50; \quad J_2^* = F_2(T_{22}^*) = 20; \quad J_3^* = F_3(T_{33}^*) = 4000; \\ J_4^* = F_4(T_{44}^*) = 1000; \quad J_5^* = F_5(T_{55}^*) = 1089. \end{aligned}$$

Для их достижения второе СП должно отдать 18 единиц квоты, четвёртое – 10 единиц. Первое СП уже имеет оптимальную квоту и в перераспределении квот не участвует. Третье СП должно приобрести 10 единиц квоты, а пятое СП – 18 единиц.

В результате выполняется условие (3) и в ходе перераспределения квот все СП могут получить оптимальные квоты. Определим оптимальную цену единицы квоты для СП, которые отдают часть своей квоты – величину p^* . Для этого используем формулу (10) и решим задачу оптимизации:

$$p^* = \min_{i \in N^-} \max_{0 \leq p \leq p_{\max}} \left(T_{ii}^* - Q_i = \arg \max_{0 \leq \Delta T_{ii} \leq T_{ii}^* - Q_i} (F_i(Q_i - \Delta T_{ii}) + p \Delta T_{ii}) \right).$$

Вначале для каждого СП из N^- определим величины

$$p_i^* = \max_{0 \leq p \leq p_{\max}} \left(T_{ii}^* - Q_i = \arg \max_{0 \leq \Delta T_{ii} \leq T_{ii}^* - Q_i} (F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p \Delta T_{ii}) \right).$$

Для этого найдём

$$\max_{0 \leq \Delta T_{ii} \leq T_{ii}^* - Q_i} (F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p \Delta T_{ii}).$$

Вычислим первую производную и приравняем её к нулю. Получим, что

$$a_i - b_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p = 0.$$

Вторая производная отрицательна, следовательно, формула

$$(\Delta T_{ii})^* = \frac{a_i - p}{b_i} - Q_i \text{ определяет точку максимума.}$$

СП из N^+ необходимо отдать всю «лишнюю» квоту, поэтому потребуем, чтобы максимум достигался при $\Delta T_{ii} = T_{ii}^* - Q_i$. Отсюда $p_i^* = a_i - b_i T_{ii}^*$. Следовательно, величина $p^* = \min_{i \in N^+} p_i^* = 0$

и квоты перераспределяются между СП бесплатно.

До перераспределения квот выигрыши СП выражались формулами

$$J_1 = 50; J_2 = -1600; J_3 = 3750; J_4 = 750; J_5 = 765.$$

В результате перераспределения все СП будут иметь оптимальную для них квоту и их выигрыши задаются формулами (14).

Таким образом, имеем «идеальное» решение (равновесие в доминантных стратегиях). Выигрыши СП в результате пере-

распределения квот значительно выросли.

Пример 2. Предложение больше спроса.

В случае входных данных примера 1 и $b_4 = 10$ получим, что $T_{11}^* = 10$; $T_{22}^* = 2$; $T_{33}^* = 40$; $T_{44}^* = 10$; $T_{55}^* = 33$.

Второе СП опять хочет отдать 18 единиц квоты, четвёртое – 20 единиц. Первое СП имеет оптимальную квоту, третье готово приобрести 10 единиц, а пятое – 18 единиц. В результате выполняется условие (4), предложение квоты превышает спрос на неё.

Определение оптимальной цены единицы квоты проводится так же, как и в случае (3). Получим, что $p_i^* = 0$. Квоты и в этом случае перераспределяются между СП бесплатно.

В результате перераспределения квот все СП из N^- получают дополнительные квоты до оптимальных. А СП из N^+ отдают только часть своей «лишней» квоты, ей пропорциональную. До перераспределения квот имеем

$$J_1 = 50; J_2 = -1600; J_3 = 3750; J_4 = -1500; J_5 = 765.$$

В результате перераспределения второе СП отдаёт 13,26 единиц квоты (хотело отдать 18 единиц), четвёртое – 14,74 (хотело отдать 20 единиц).

Выигрыши СП значительно меняются и принимают вид

$$J_1 = 50; J_2 = 101; J_3 = 4000; J_4 = 361; J_5 = 1089.$$

Пример 3. Предложение меньше спроса.

В случае входных данных примера 1 и $b_4 = 1$ получим, что

$$T_{11}^* = 10; T_{22}^* = 2; T_{33}^* = 40; T_{44}^* = 100; T_{55}^* = 33.$$

При наличии оптимальной квоты выигрыши СП имеют вид (14).

Для достижения оптимальной квоты второе СП опять хочет отдать 18 единиц квоты. Первое СП имеет оптимальную квоту, третье СП хотело бы приобрести 10 единиц квоты, четвёртое – 70 единиц, пятое – 18 единиц. В результате выполняется условие (5), предложение квоты меньше, чем спрос на нее.

Для третьего, четвёртого и пятого СП определим, при какой максимально высокой цене за единицу квоты эти СП будут её покупать. Для этого решаются задачи (6), (7) ($i \in N^-$). Определяются величины

$$\Delta T_{ii}^* = \Delta T_{ii}^*(p^*) = \frac{a_i - p}{b_i} - Q_i; \quad i \in N^-.$$

Для определения максимальной стоимости единицы квоты решается задача (11)–(13). Условия (12), (13) принимают вид

$$\sum_{i \in N^-} \left(\frac{a_i - p}{b_i} - Q_i \right) = \sum_{i \in N^+} \left(Q_i - \frac{a_i}{b_i} \right)$$

и

$$(15) \quad \Delta T_{ii}^*(p^*) = \frac{a_i - p}{b_i} - Q_i \geq 0; \quad i \in N^-.$$

Тогда получим, что оптимальная цена единицы квоты имеет вид

$$p^* = \left(\sum_{i \in N^-} \left(\frac{a_i}{b_i} - Q_i \right) - \sum_{i \in N^+} \left(Q_i - \frac{a_i}{b_i} \right) \right) / \sum_{i \in N^-} \left(-\frac{1}{b_i} \right).$$

При этом для всех входящих в (15) СП из N^- должно выполняться условие (15). Распишем условие (15) для каждого СП из N^- :

– для третьего СП получим

$$\Delta T_{33}^*(p^*) \geq 0 \rightarrow p^* \leq 50;$$

– для четвёртого СП

$$\Delta T_{44}^*(p^*) \geq 0 \rightarrow p^* \leq 70;$$

– для пятого СП

$$\Delta T_{55}^*(p^*) \geq 0 \rightarrow p^* \leq 36.$$

Следовательно, вся «лишняя» для СП из N^+ квота будет отдана четвёртому СП по максимально возможной цене, которая определяется как решение уравнения

$$\Delta T_{44}^*(p^*) = 18 = 100 - p^* - 30, \text{ т.е. } p^* = 52.$$

В результате получим, что

$$\Delta T_{33}^*(52) = 0; \quad \Delta T_{44}^*(52) = 18; \quad \Delta T_{55}^*(52) = 0.$$

Таким образом, второе СП назначит максимально возможную цену за единицу квоты в размере 52 условных единиц и отдаст всю свою «лишнюю» квоту (18 единиц) четвёртому СП.

До перераспределения квот выигрыши СП определяются формулами

(16) $J_1 = 50$; $J_2 = -1600$; $J_3 = 3750$; $J_4 = 2550$; $J_5 = 765$.

После перераспределения квот выигрыши изменятся и примут вид $J_1 = 50$; $J_2 = 956,5$; $J_3 = 3750$; $J_4 = 2712$; $J_5 = 765$.

Пример 4. Для входных данных примера 1 и $\alpha = 2$ предложение опять равно спросу на квоты и выполняется условие (3). Справедливы формулы (14). Вновь для их достижения второе СП должно отдать 18 единиц квоты, четвёртое – 10 единиц. Первое СП уже имеет оптимальную квоту и в перераспределении квот не участвует. Третье СП должно приобрести 10 единиц квоты, а пятое СП – 18 единиц. Для определения оптимальной цены за единицу квоты (p^*) необходимо решить задачу оптимизации:

$$p^* = \min_{i \in N^-} \max_{0 \leq p \leq p_{\max}} \left(T_{ii}^* - Q_i = \arg \max_{0 \leq \Delta T_{ii} \leq T_{ii}^* - Q_i} (F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p(\Delta T_{ii})^2) \right).$$

Вначале, как и в примере 1, для каждого СП из N^- определим величины

$$p_i^* = \max_{0 \leq p \leq p_{\max}} \left(T_{ii}^* - Q_i = \arg \max_{0 \leq \Delta T_{ii} \leq T_{ii}^* - Q_i} (F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p(\Delta T_{ii})^2) \right).$$

Для этого найдём

$$\max_{0 \leq \Delta T_{ii} \leq T_{ii}^* - Q_i} (F_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - p(\Delta T_{ii})^2).$$

Вычислим первую производную и приравняем её к нулю. Получим, что

$$a_i - b_i(Q_i + \Delta T_{ii}) - 2p\Delta T_{ii} = 0.$$

Вторая производная отрицательна, следовательно, найдена точка максимума

$$(\Delta T_{ii}(p))^* = \frac{a_i - b_i Q_i}{2p + b_i}.$$

СП из N^+ , как и в примере 1, необходимо отдать всю «лишнюю» квоту, поэтому потребуем, чтобы максимум достигался при $\Delta T_{ii} = T_{ii}^* - Q_i$.

Получим уравнение

$$\frac{a_i}{b_i} - Q_i = \frac{a_i - b_i Q_i}{2p + b_i}.$$

Решая его, получим $p^* = 0$. Квоты в случае $\alpha = 2$, когда спрос равен предложению, перераспределяются между СП бесплатно. В результате перераспределения все СП будут и в этом случае иметь оптимальную квоту.

При $\alpha = 2$ для входных данных примера 2 предложение больше спроса. Тогда, как и в примере 1, оптимальная цена за единицу квоты равна нулю и сохраняются все приведённые в примере 2 результаты.

В случае входных данных примера 3 и $\alpha = 2$ предложение меньше спроса. Поступим аналогично примеру 3. Для третьего, четвёртого и пятого СП определим, при какой максимальной цене за единицу квоты они будут ее покупать. Определяются величины

$$(\Delta T_{ii}(p))^* = \frac{a_i - b_i Q_i}{2p + b_i}; i \in N^-.$$

Для определения максимальной стоимости единицы квоты решается задача (11) с условием

$$(17) \sum_{i \in N^-} \frac{a_i - b_i Q_i}{2p + b_i} = \sum_{i \in N^+} \left(Q_i - \frac{a_i}{b_i} \right).$$

Тогда оптимальная стоимость единицы квоты определяется как решение уравнения (17), которое принимает вид

$$(18) \frac{50}{2p + 5} + \frac{70}{2p + 1} + \frac{36}{2p + 2} = 18.$$

Уравнение (18) решается численно методом Ньютона [1]. В результате решения было найдено значение $p^* = 3,23$. Тогда

- для третьего СП: $\Delta T_{33}^*(3,23) = 4,36$;
- для четвёртого СП: $\Delta T_{44}^*(3,23) = 9,38$;
- для пятого СП: $\Delta T_{55}^*(3,23) = 4,26$.

Таким образом, «лишняя» квота будет отдана вторым СП по цене $p^* = 3,23$ за единицу всем трем СП (третьему, четвёртому и пятому).

До перераспределения квот выигрыши СП задаются формулами (16), после перераспределения видим, что выигрыши разных СП выросли и равны

$$J_1 = 50; J_2 = 1066,5; J_3 = 3858; J_4 = 2878; J_5 = 1212.$$

5. Заключение

Разработаны алгоритмы перераспределения квот, выделяемых СП некоторого ВУЗа в случае, когда суммарное количество квоты, которую хотели бы отдать одни СП, совпадает (больше или меньше) с суммарным количеством квот, которое хотят приобрести другие СП. Показано, что в случае, если суммарное количество квоты, которую хотели бы отдать одни СП, совпадает или больше суммарного количества квот, которое хотят приобрести другие СП, квоты между СП перераспределяются бесплатно. Если суммарное количество квоты, которую хотели бы отдать одни СП, меньше суммарного количества квот, которое хотят приобрести другие СП, то возможна продажа «лишней» квоты. Приведён алгоритм определения оптимальной цены за единицу квоты в этом случае. Во всех случаях в результате перераспределения квот выигрыши СП ожидаемо возрастают.

В дальнейшем планируется провести исследование входных функций другого вида и рассмотреть задачу в динамической постановке.

Литература

1. БАХВАЛОВ Н.С., ЖИДКОВ Н.П., КОБЕЛЬКОВ Г.М. *Численные методы*. – М.: Наука, 1975. – 632 с.
2. БОГАТОВ Е.М., БОГАТОВА Н.Е. *Исследование задачи о справедливом распределении квот на вылов рыбы методами теории игр* // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2023. – Т. 69, №2. – С. 224–236.
3. ГАЛЬКОВА Е.А., МАЕРГОЙЗ Л.С. *Оптимизационная математическая модель двухуровневого распределения ограниченного ресурса между группами людей* // Экономика и математические методы. – 2015. – Т. 51, №3. – С. 109–116.
4. КАЛАЧЁВ В.Ю., УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., ХАРИТОНОВ И.А. *Применение теории расписаний для решения задачи обучения персонала* // Инженерный вестник Дона. – 2022. – №3. – С. 33–55.

5. МАЕРГОЙЗ Л. С. *Математический способ распределения квот вредных выбросов между их источниками в мегаполисе* // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2021. – Т. 24, №2. – С. 109–115.
6. СЛОВОХОТОВ Ю.Л. *Физика общества. Применение физических моделей в описании общественных явлений.* – М.: ЛЕНАНД, 2024. – 880 с.
7. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия экономических агентов в моделях дуополии Курно с учетом экологических условий* // Автоматика и телемеханика. – 2022. – №2. – С. 150–162.
8. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учетом требований устойчивого развития* // Автоматика и телемеханика. – 2014. – №6. – С. 86–102.
9. BALINSKI M., SÖNMEZ T. *A tale of two mechanisms: student placement* // J. of Economic Theory. – 1999. – Vol. 84. – P. 73–94.
10. BASAR T., OLSDER G.J. *Dynamic Non-Cooperative Game Theory.* SIAM, 1999. – 519p.
11. GALE G., SHAPLEY L.S. *College admissions and the stability of marriage* // American Mathematical Monthly. – 1962. – Vol. 69. – P. 9–15.

THE PROBLEM OF REDISTRIBUTING QUOTAS FOR TRAINING BETWEEN STRUCTURAL DIVISIONS OF A HIGHER EDUCATIONAL INSTITUTION

Vasiliy Kalachev, Southern Federal University, Rostov-on-Don, candidate of Sc., Associate Professor (vkalachev@sfnedu.ru).

Guennady Ougolnitsky, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Sc., Professor (gaugolnickiy@sfnedu.ru).

Anatoly Usov, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Doctor of Sc., Professor (abusov@sfnedu.ru).

Abstract: The problem of redistributing quotas for training among structural divisions of a higher education institution is considered. The problem of redistributing quotas has a wide range of applications, in particular, in preventing environmental

pollution. The article assumes that a higher education institution has several structural divisions. The management of the higher education institution allocates some quotas for training to structural divisions (SD). The head of each SD can give part of the quota of his SD to another division, receiving some compensation in return. In this case, if the quota is not given, it must be fully used in the joint venture to which it was allocated. The head of each joint venture strives to maximize his gain, expressed by his objective function. For simplicity, it can be considered that the goal of the head of each joint venture is to maximize the amount of funds accumulated in the centralized fund of this joint venture. In this case, the head of the joint venture can manage the share of the quota allocated to him, which he wants to give or receive from another joint venture. It is shown in which cases all structural divisions manage to receive optimal quotas for them as a result of redistribution. Three cases are considered: when the total value of the quota that the divisions want to give is greater than, less than or equal to the total value of the quota that other structural divisions want to acquire. Algorithms for redistributing quotas in each of these cases are proposed. The study is conducted analytically for a particular type of input functions, which are taken as power functions. Numerical examples are given and an analysis of the results obtained is given. A number of meaningful conclusions are made.

Keywords: redistribution of quotas, optimal quota, structural division, management of higher education institutions, target function.

УДК 519.83

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.В. Горбуновой.*

Поступила в редакцию 20.05.2025.

Опубликована 31.07.2025.

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ТЕКСТОВ ФИНАНСОВЫХ СООБЩЕНИЙ

Егоркин А. А.¹

(ФГБОУ ВО Российский государственный социальный
университет, Москва)

Работа посвящена задаче кластеризации текстов финансовых сообщений алгоритмами машинного обучения. С помощью алгоритмов кластеризации можно выделить группы похожих финансовых сообщений, выделить среди них однотипные или подозрительные, а также использовать в дальнейшем анализе найденные кластеры, а не сами тексты сообщений. В работе используются такие алгоритмы кластеризации как K-means, DBSCAN и иерархический метод кластеризации. В качестве текстов финансовых сообщений в работе используется информация о банковских транзакциях. Ввиду того, что банковские проводки подчинены строгим правилам бухгалтерского учета, устанавливаемым Банком России, представляется возможным ввести метрику оценки качества кластеризации. Данная метрика позволяет ранжировать между собой качество кластеризации с помощью алгоритмов машинного обучения, а также подобрать параметры, используемые при обучении данных моделей. Отдельное внимание в статье уделено особенностям используемых данных и тому, каким образом эти особенности могут быть учтены в практической части. В практической части работы приводятся результаты применения моделей кластеризации с указанием оптимальных параметров данных алгоритмов. В заключении делается вывод о лучших алгоритмах кластеризации применительно к финансовым текстам.

Ключевые слова: метод k-средних, DBSCAN, иерархический метод кластеризации, кластеризация финансовых сообщений.

1. Введение

Кластеризация текстов финансовых сообщений является важной задачей в области обработки естественного языка и анализа данных. Она включает в себя группировку схожих текстов, что дает возможность выделять ключевые темы, паттерны и закономерности в большом объеме данных.

Кластеризация позволяет выявить основные тренды в финансовых новостях и сообщениях. Финансовые сообщения могут быть очень разнообразными и касаться различных аспектов,

¹ Антон Александрович Егоркин, аспирант (2-5@bk.ru).

таких как новости о компаниях, изменения в экономической политике, финансовая отчетность и др. Кластеризация помогает сегментировать информацию на более управляемые группы, что облегчает анализ и извлечение необходимой информации [11].

С помощью кластеризации можно оценивать общее настроение по определенным темам или компаниям. Например, если кластер содержит множество негативных сообщений о компании, это может указывать на снижение доверия к ней на рынке. Такой анализ настроений имеет значение для принятия инвестиционных решений [12].

При анализе финансовых сообщений кластеризация может помочь выявить необычные или аномальные тексты, которые могут указывать на мошенническую деятельность или другие риски [8]. Аномалии в кластерах могут стать индикаторами необходимости более глубокого анализа или расследования.

При кластеризации текстов финансовых сообщений, представляющих собой банковские проводки, в настоящей статье предлагается использовать правила бухгалтерского учета, которым подчинены указанные транзакции. Это позволяет учесть типизацию банковских операций при обучении моделей кластеризации, оптимизировать выбор параметров данных моделей и по-новому взглянуть на метрики качества кластеризации.

С учетом постоянно растущего потока финансовой информации обработка и анализ больших объемов данных становятся сложными задачами. Кластеризация помогает структурировать и упростить данные, что делает их более доступными для аналитиков и аналитиков.

Таким образом, кластеризация текстов финансовых сообщений представляет собой мощный инструмент для анализа данных, который может существенно повысить эффективность работы инвесторов, аналитиков и исследователей. С ее помощью возможно более глубокое понимание рыночных тенденций, уменьшение рисков и повышение качества принимаемых решений. В условиях быстроменяющегося финансового рынка умение извлекать смысл из объемных массивов информации становится ключевым фактором успеха.

1.1. АЛГОРИТМЫ КЛАСТЕРИЗАЦИИ

В числовых методах кластеризации каждое текстовое сообщение представляется в виде точки в пространстве $\mathbb{R}^n$ с помощью отображения $\varphi: T \rightarrow \mathbb{R}^n$, которое каждому объекту данных $t \in T$ сопоставляет его векторное представление $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$. Числовые методы кластеризации могут быть разделены на методы разбиения, иерархические, плотностные, сетевые и модельные [2].

В настоящей работе используются следующие алгоритмы: K-means (k -средних) [17], относящийся к методам разбиения, алгоритм DBSCAN (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise) [18], относящийся к плотностным методам, и иерархический алгоритм кластеризации [10].

Алгоритм K-means оптимизирует расстояния точек кластеров от центров этих кластеров, в случае использования евклидова расстояния оптимизируемая функция выглядит следующим образом [20]:

$$(1) \arg \min \sum_{i=1}^k \sum_{x \in S_i} (\bar{x}_i - x)^2,$$

где k – количество кластеров; S_i – состав i -го кластера; $\bar{x}_i$ – центр i -го кластера.

Алгоритм DBSCAN основан на плотности данных. Он группирует в один кластер точки, которые расположены близко к друг-другу, иными словами, находятся в ε -окрестности. В случае, если в ε -окрестности точки нет ни одного другого элемента, данная точка классифицируется как шум [13].

Иерархическая кластеризация – способы упорядочивания данных, направленные на создание иерархии (дерева) вложенных кластеров. Различают агломеративные и дивизионные методы: в первом случае кластеры создаются путем объединения наиболее близких между собой мелких кластеров, во втором – путем разделения крупных кластеров на более мелкие. Мерой близости элементов в данном случае могут выступать различные метрики, например, среднее расстояние, максимальное или минимальное расстояние между кластерами, расстояние Уорда(Ward) и другие [19].

Ключевые (гипер)параметры перечисленных выше алгоритмов представлены в таблице 1.

Таблица 1. Основные параметры алгоритмов кластеризации

Алгоритм кластеризации	Параметры алгоритма
K-means	Количество кластеров
DBSCAN	• Минимальное количество элементов в одном кластере; • ε-окрестность.
Иерархический метод	• Вид расстояния между кластерами; • Количество кластеров.

Каждый из приведенных алгоритмов имеет свои достоинства и недостатки, в дальнейшем они будут рассмотрены через призму решаемой задачи.

2. Особенности используемых в работе данных

Текстовые финансовые сообщения, используемые в настоящей работе, представляют собой банковские проводки, в атрибутах которых есть текстовое поле – назначение платежа. Здесь и далее под термином финансовый текст/сообщение будет пониматься поле «назначение платежа» из атрибутов банковской проводки. Другими атрибутами банковских проводок являются:

- наименование плательщика и получателя;
- сумма и валюта операции;
- номера счетов и банки-корреспонденты плательщика и получателя;
- дата и время осуществления платежа;
- иные атрибуты.

Ниже приведены примеры банковских проводок (таблица 2).

В качестве характерных особенностей рассматриваемых текстовых сообщений можно выделить следующее:

- короткое содержание сообщений: более 99% текстов имеют длину менее 200 символов;
- наличие большого количества сокращений: дог., сч., опл., тов.;
- наличие большого количества служебных слов/аббревиатур и их сокращений: млн, млрд, рубль, руб, НДС, ооо;

Таблица 2. Примеры банковских проводок

Назначение платежа	Сумма платежа, руб.	Номер счета отправителя	Номер счета получателя	Отправитель	Получатель
Погашение основного долга по договору п 0-0-0-1 от 01.01.11 согласно распоряжению 0002 от 01.01.23	1000	4070281090 0010000002	4520581090 0010000001	Клиент	Банк
Оплата за услуги по договору п 0/0/0/3 от 02.02.2023г. сумма 2000-00 руб. НДС не облагается	2000	3010281090 0010000004	4080281090 0010000005	Банк-контрагент	Клиент
Перевод денежных средств по договору № 004 –аб/вг от 03.03.23 г. НДС не облагается	3000	4070281090 0010000005	3010281090 0010000012	Клиент	Банк-контрагент

- наличие в тексте непосредственного указания времени и даты проводки или договора: дата, число, год, январь, февраль и т.п.;

- специфические синонимы: вклад – депозит, а не вклад в общее дело;

- орфографические ошибки и опечатки;

- повторяющиеся *n*-граммы¹ в одном сообщении.

После предварительного анализа 20 тыс. финансовых текстов автором был сделан ряд выводов. Используемый словарь в финансовых сообщениях довольно скуден. Частота употребления лемм² крайне неравномерна, первые по частоте употребления пять лемм встречаются в 31% сообщений, а первые 62 (5 + 57) леммы употребляются в 58% (30,6% + 27,2%) сообщений, см рис. 1 и 2. Смысл сообщений не зависит от порядка слов и может быть понят по двум-трем ключевым словам в сообщении.

¹ *n*-грамма – последовательность, состоящая из *n* элементов, которые в рамках настоящей статьи могут быть словами или буквами, разделенные знаком пробел.

² Лемма – начальная форма слова, в русском языке для существительных и прилагательных это форма именительного падежа единственного числа, для глаголов – форма инфинитива.

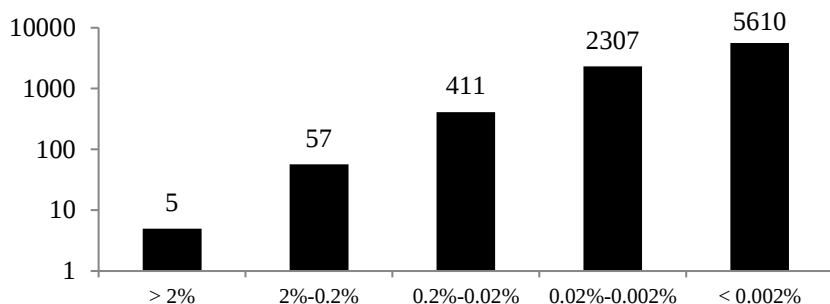


Рис. 1. Количество лемм, сгруппированных по частоте их употребления, логарифмическая шкала

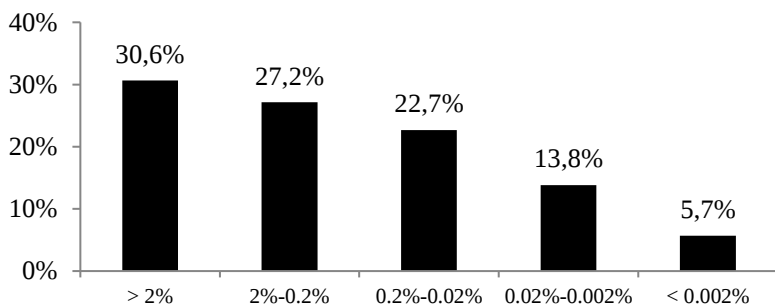


Рис. 2. Частота употребления лемм, сгруппированная по частоте их употребления

2.1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНАЯ ОБРАБОТКА ДАННЫХ

Как уже отмечалось выше, исходные данные содержат достаточный объем «шума», дубликатов и других служебных символов, которые не несут в себе смысловой нагрузки, но могут ухудшать качество итоговой кластеризации. Для того чтобы отчистить исходные данные, а также сократить количество переменных проводится предварительная обработка данных.

В настоящей работе предварительная обработка данных была разделена на следующие этапы (таблица 3).

Таблица 3. Этапы предварительной обработки данных

№	Название этапа	Описание этапа
1	Лемматизация ¹ и токенизация ² с длиной токена ≥ 2 символов	Предварительное создание лемм токенов для дальнейшей обработки.
2	Замена сокращений и синонимов	Этап 2 идет перед этапом удаления стоп-слов ³ , так как часть стоп-слов может использоваться в первоначальных данных в виде сокращений (пн, дек).
3	Удаление стоп-слов и пунктуации	В стандартный перечень стоп-слов добавляются служебные слова и аббревиатуры (тыс, руб, млн, ооо) и слова, описывающих дату и время (январь, понедельник, год ...).
4	Токенизация с длиной токена ≥ 3 символов;	Токенизация с длиной токена, равной 3 и более символа, так как все токены с меньшей длиной были изменены или удалены на предыдущих этапах.
5	Создание массива <i>n</i> -грамм, состоящего из 1 токена	Промежуточная операция для дальнейшего использования. Массив упорядочивается по частоте употребления токена во всех сообщениях.
6	Упорядочивание токенов внутри сообщения, по частоте употребления токенов	На основании массива токенов, полученного на предыдущем этапе, осуществляется сортировка токенов внутри каждого сообщения. Так как смысл сообщения не зависит от порядка слов, то сортировка осуществляется по частоте употребления токена, так чтобы на первом месте всегда шли наиболее часто используемые токены.

¹ Лемматизация — это процесс приведения всех встречающихся форм слова к одной, начальной форме слова- лемме.

² Токенизация — это процесс разбиения текста на минимальные значимые единицы, называемые токенами. Здесь токенами являются слова (леммы), предлоги, сокращения.

³ Стоп-слова — это общеупотребительные слова в языке, которые, как правило, несут мало смысловой нагрузки (предлоги, частицы и т.п.). Также к ним могут относиться знаки препинания и числа. Удаление стоп-слов позволяет сократить объем данных для анализа.

Таблица 4 (продолжение)

7	Перевод текста в векторное представление	Перевод всех текстовых сообщений в вектора. Элементы вектора представляют n -грамму из двух или трех токенов. При этом отсеваются n -граммы, частота появления которых в тексте ниже заданной границы. В дальнейшем эта граница будет являться одной из переменных при обучении моделей кластеризации.
8	Замена похожих между собой n -грамм	Замена в массиве векторов, полученном на предыдущем шаге, n -грамм, имеющих высокую схожесть между собой. При этом в итоговом массиве останутся наиболее часто употребляемые n -граммы. В качестве методов сравнения n -грамм между собой используются алгоритмы нечеткого сравнения строк: редакционное расстояние Левенштейна, расстояние Jaro, методы ratio [5].

По итогам предварительной обработки данных каждому текстовому сообщению ставится в соответствие вектор, состоящий из n -грамм. При этом используются n -граммы, состоящие из двух или трех токенов, которые наиболее часто употребляются во всех текстовых сообщениях.

Пример перевода текста в векторное представление, в соответствии с описанным выше алгоритмом (этапы 1–7), приведен ниже в таблице 4.

Первоначальное векторное представление данного текста будет иметь следующий вид:

$$\varphi_0 = \begin{bmatrix} \text{"договор облагаться"} \\ \text{"облагаться средство"} \\ \text{"средство денежный"} \\ \text{"денежный перевод"} \\ \text{"договор облагаться средство"} \\ \text{"облагаться средство денежный"} \\ \text{"средство денежный перевод"} \end{bmatrix}.$$

На этапе 8 из вектора φ_0 удаляются наиболее похожие между собой элементы. Для этого n -граммы сравниваются между собой, и среди схожих элементов отдаётся предпочтение наиболее часто встречающимся n -граммам. В качестве метрики

сходства используется максимальное значение из расстояния Jaro и метода set_ratio [5].

Таблица 5. Пример перевода текста в векторное представление

Исходный текст	перевод денежных средств по дог. № 004 от 03.03.13 г. НДС не облагается				
Стоп-слова и знаки препинания	по от НДС не № . 0 1 3 4				
Леммы токенов с длиной ≥ 2 символов без стоп-слов	перевод	денежный	средство	дог	облагаться
Замена синонимов и сокращений				договор	
Частота появления токена (порядковый номер)	41	11	9	1	5
Токены, упорядоченные по частоте	договор	облагаться	средство	денежный	перевод
Создание массива 2/3 грамм					
2 n-грамм	договор об-лагаться				
		облагаться средство			
			средство денежный		
					денежный перевод
3 n-грамм	договор об-лагаться средство				
		облагаться средство денежный			
				средство денежный перевод	

Частота употребления n -граммы (df) – это доля финансовых сообщений, в которых встречалась соответствующая n -грамма во всем используемом наборе данных. В таблице 5 n -граммы упорядочены по частоте их употребления.

Таблица 6. Описание алгоритма удаления схожих n -грамм

df	$max(Jaro; Set_ratio)$	средство денежный	договор облагаться	облагаться средство	облагаться ередетво денежный	денежный перевод	договор облагаться ередетво	ередетво денежный перевод
5,3%	средство денежный		0,17	0,64	1	0,79	0,64	1
4,8%	договор облагаться	0,17		0,76	0,71	0,18	1	0,23
1,2%	облагаться средство	0,64	0,76		1	0,29	1	0,59
0,7%	облагаться ередетво денежный	1	0,71	1		0,67	0,83	0,81
0,7%	денежный перевод	0,79	0,18	0,29	0,67		0,28	1
0,6%	договор облагаться ередетво	0,64	1	1	0,83	0,28		0,48
0,6%	ередетво денежный перевод	1	0,23	0,59	0,81	1	0,48	

В рассматриваемом примере на первой итерации рассматривается n -грамма «средство денежный», наиболее близкие ей n -граммы: «облагаться средство денежный» и «средство денежный перевод». Так как последние две n -граммы реже употребляются, то они исключаются из дальнейшего анализа. На втором шаге рассматривается n -грамма «договор облагаться», наиболее близкая ей n -грамма – это «договор облагаться средство», последняя также исключается из итогового векторного представления. После того как были рассмотрены все n -граммы (с учетом удаления на предыдущих итерациях), итоговое векторное представление принимает следующий вид:

$$\varphi = \begin{bmatrix} \text{"средство денежный"} \\ \text{"договор облагаться"} \\ \text{"облагаться средство"} \\ \text{"денежный перевод"} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, результатом работы алгоритма предварительной подготовки данных, описанного выше, является представление финансового сообщения «перевод денежных средств

по дог. № 004 от 03.03.13 г. НДС не облагается» виде вектора φ , компонентами которого являются следующие n -граммы: «средство денежный», «договор облагаться», «облагаться средство», «денежный перевод».

3. Требования к кластеризации финансовых сообщений

Задачи кластеризации относятся к задачам обучения без учителя [7]. Обычно неизвестно правильное разделение выборки на кластеры. За счет этого метрики качества кластеризации стремятся минимизировать расстояние между элементами одного кластера и максимизировать расстояние между кластерами. К описанной выше метрике можно отнести коэффициент силуэта [4].

В случае финансовых текстов некоторая информация о возможной классификации сообщения содержится в номерах банковских счетов.

Банковский счет, приведенный в таблице 2 и состоящий, из 20 цифр, имеет определённую структуру [9]:

- первые три цифры обозначают счет первого порядка;
- первые пять цифр – счет второго порядка;
- цифры с шестой по восьмую – код валюты (810 – российский рубль, 840 – доллар США и др.);
- девятая цифра – это контрольная сумма;
- цифры с десятой по тринадцатую обозначают код подразделения банка;
- последние семь цифр – это внутренний номер клиента в банке.

В соответствии с порядком бухгалтерского учета номер счета второго порядка характеризует вид клиента, который совершает операцию, а также и тип отношений между клиентом и банком. Например, счет второго порядка 45205 указывает на то, что клиент-юридическое лицо имеет кредит в банке, а счет 40702 – то, что клиент-юридическое лицо открыл текущий счет в банке. Таким образом, перевод денежных средств со счета 40702 на счет 45202 означает погашение юридическим лицом кредита, ранее полученного в банке. Связка счетов второго по-

рядка отправителя и получателя называется корреспонденцией счетов, в данном случае «40702-45202».

Логично предположить, что проводки с одинаковой корреспонденцией счетов второго порядка должны относиться к одному кластеру. Данное условие можно формализовать минимумом энтропии Шеннона [21] внутри одной корреспонденции счетов

$$(2) \quad H_{micro} = \frac{-\sum_j^M \sum_{i=1}^N C_j p_{ji} \log_N p_{ji}}{\sum_j^M C_j}, \quad H \in [0, 1],$$

где p_{ij} – доля проводок, относящихся к кластеру i , в j -й корреспонденции счетов; N – количество кластеров; M – количество корреспонденций счетов; C_j – количество транзакций в j - корреспонденции счетов.

В то же время необходимо, чтобы между кластерами были максимальные отличия и при этом не было доминирующего кластера, в который были бы классифицированы большинство сообщений. Данное условие можно формализовать максимизацией энтропии Шеннона между кластерами:

$$(3) \quad H_{macro} = -\sum_{i=1}^N p_i \log_N p_i,$$

p_i – доля проводок, относящихся к кластеру i .

Итоговые требования к кластеризации финансовых текстов выглядят следующим образом:

$$(4) \quad \begin{cases} H_{micro} \rightarrow \min, \\ H_{macro} \rightarrow \max; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} H_{micro} \rightarrow \min, \\ 1 - H_{macro} \rightarrow \min. \end{cases}$$

Исходя из поставленного условия, необходимо соблюсти баланс между энтропией на микроуровне и на макроуровне. Эмпирически было получено, что наиболее простой функцией, которая позволяет обеспечить необходимый баланс является полином:

$$(5) \quad f(H_{micro}, H_{macro}) = [(H_{micro}^n + (1 - H_{macro})^n)/2]^{\frac{1}{n}}.$$

При степени $n = 1$ целевой функции безразлично, что будет достигнуто минимум H_{micro} или максимум H_{macro} .

При $n < 1$ устойчивое равновесие будет находиться в крайних точках: либо при минимуме H_{micro} , либо при максимуме H_{macro} .

Устойчивое равновесие между H_{micro} и H_{macro} достигается при $n > 1$. Аналогичная функция при $n = 2$ используется

в [14, 15] для оценки стабильности работы алгоритма нахождения центральности в многослойных сетях.

Нормируем целевую функцию таким образом, чтобы она могла принимать значения в диапазоне [0, 1].

4. Результаты кластеризации на реальных данных

В качестве информации о транзакциях используются данные, используемые в статье [3]. Для анализа использовалось 20 тыс. штук финансовых транзакций.

Оптимальные переменные моделей кластеризации определялись посредством метода перебора параметров grid search [15].

В качестве глобального параметра для всех алгоритмов кластеризации использовалась минимальная частота употребления n -граммы – df_{min} , упомянутая в разделе 2.1 (таблица 6).

Таблица 7. Количество n -грамм, используемых в анализе

df_{min} (частота употребления n -граммы)	Первоначальное количество n -грамм	Количество n -грамм после сокращения	% сокращения n -грамм	Доля сообщений без n -грамм
0,002	435	244	–44%	6,7%
0,003	263	149	–43%	9,2%
0,004	206	117	–43%	11,2%
0,005	168	92	–45%	11,8%
0,006	135	74	–45%	13,1%
0,007	116	63	–46%	13,8%
0,008	101	55	–46%	14,5%
0,009	88	47	–47%	15,8%

Указанная величина показывает, какая минимальная частота употребления n -граммы в общем количестве сообщений необходима для того, чтобы включить данную n -грамму в качестве переменной алгоритма кластеризации. При этом чем будет выше данный показатель, тем меньше будет переменных для анализа и тем быстрее и устойчивей будет осуществляться расчет. Однако одновременно будет расти доля сообщений (редких

по контексту), у которых не будет выделено ни одной n -граммы, что будет приводить к ухудшению качества кластеризации.

Благодаря описанному выше алгоритму предварительной обработки данных удастся сократить количество переменных почти в два раза.

На примере алгоритма K-means в таблице 7 иллюстрируется выбор оптимальных параметров кластеризации.

Таблица 8. Определение оптимальных параметров кластеризации при¹ $n = 2$

df_{min}	Количество кластеров						
	4	5	6	7	8	9	10
0,002	0,457	0,420	0,469	0,467	0,455	0,432	0,424
0,003	0,457	0,430	0,422	0,385	0,429	0,431	0,407
0,004	0,445	0,422	0,438	0,432	0,439	0,431	0,418
0,005	0,472	0,422	0,403	0,436	0,452	0,437	0,425
0,006	0,459	0,420	0,459	0,463	0,432	0,444	0,418
0,007	0,459	0,436	0,470	0,466	0,432	0,436	0,416
0,008	0,460	0,413	0,413	0,398	0,437	0,442	0,434
0,009	0,461	0,426	0,398	0,432	0,430	0,429	0,432

В данном случае оптимальными представляются следующие параметры: $df_{min} = 0,003$, количество кластеров – 7.

Итоговые результаты работы алгоритмов кластеризации приведены в таблице 8.

Таблица 9. Результаты кластеризации при¹ $n = 2$

Модель	K-means	Hierarchy	DBSCAN
Минимум целевой функции	0,385	0,392	0,506
$1 - H_{macro}$	0,321	0,259	0,147
H_{micro}	0,44	0,491	0,704
df_{min}	0,003	0,004	0,009
Количество кластеров	7	6	29
Вид расстояния	–	Ward	–
ε -окрестность	–	–	0,6
Минимальное количество элементов в кластере	–	–	145

¹ Переменная n задается в формуле (5).

5. Анализ результатов

Для наилучшей интерпретации полученных результатов с помощью алгоритма понижения размерности (T-distributed Stochastic Neighbor Embedding) представим результаты кластеризации методом K-means в двумерном пространстве (рис. 3).

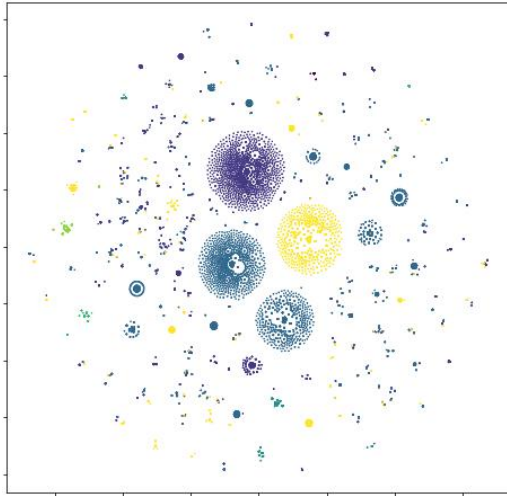


Рис. 3. Результаты кластеризации

Кластеры имеют сферическую форму. Это обуславливает хорошие результаты иерархического алгоритма и K-means. Алгоритм DBSCAN показал наихудший результат по причине того, что кластеры имеют различную плотность [6].

Отдельно необходимо отметить, что результаты, показанные иерархическим алгоритмом и K-means, близки между собой. Пересечение между кластерами составило около 92%. Учитывая, что согласно некоторым исследованиям, алгоритм K-means наилучшим образом подходит для работы с русским языком [1], далее ограничимся анализом результатов алгоритма K-means.

В таблице 9 приведены n -граммы – центры, вокруг которых формируются кластеры алгоритмом K-means.

Таблица 10. Центры кластеров алгоритма K-means

№	n-грамма	Номер кластера						
		1	2	3	4	5	6	7
1	налог платёж	0	0	0,01	0	1	0	0
2	соглашение факторинговый	0	0	0,01	0	1	0	0
3	платёж соглашение	0	0	0	0	1	0	0
4	факторинговый финансирование	0	0	0	0	0,97	0	0
5	средство денежный	0,01	0,1	0,08	0	0	0	1
6	денежный перечисление	0	0,01	0,02	0	0	0	1
7	валюта конвертация	0	0	0,03	0	0	0	1
8	денежный перечисление поручение	0	0	0	0	0	0	1
9	перечисление поручение	0	0	0	0	0	0	1
10	перечисление поручение валюта	0	0	0	0	0	0	1
11	распоряжение погашение	0	0	0	1	0	0,71	0
12	договор согласно	0	0	0,02	1	0	0	0
13	согласно распоряжение	0	0	0	1	0	0	0
14	погашение ксв	0	0	0,01	0,97	0	0	0
15	долг основной	0	0	0,01	0,77	0	0	0
16	договор облагаться	0,04	0	0,12	0	0	1	0
17	кредит кредитный	0	0	0	0	0	1	0
18	облагаться распоряжение	0	0	0	0	0	1	0
19	предоставление кредит	0	0	0	0	0	1	0
20	кредитный заёмщик	0	0	0	0	0	0,87	0
21	договор оплата	1	0	0	0	0	0	0
22	оплата счёт	0,38	1	0	0	0	0	0
23–149	прочие n-граммы							
	Количество кластеров	8880	3990	5602	677	319	297	156
	Доля	44,6%	20,0%	28,1%	3,4%	1,6%	1,5%	0,8%

Анализ полученных кластеров позволяет группировать их по экономическому содержанию операций. Так, кластеры №1–3 описывают платежные операции клиентов (переводы, обслуживание счетов, оплата по договорам), кластер №4 описывает опе-

рации по погашению ранее выданных банком кредитов, кластер №5 – факторинговые операции, кластер №6 – операции по выдаче кредитов, кластер №7 – конверсионные операции.

Также необходимо отметить, что несмотря на проделанную работу по предобработке данных, не удалось полностью отчистить n -граммы от технических сокращений и аббревиатур. Так, один из токенов n -граммы №14 представляет собой техническое обозначение кредитного договора – «кскв».

Основной объем финансовых операций классифицируется в первые три кластера. Это обусловлено тем, что данный вид операций наиболее часто встречается в банках. Среди первых десяти наиболее частых корреспонденций счетов все относятся к платежным операциям. Доля первых десяти корреспонденций операций составляет около 80% от всех рассматриваемых транзакций. Таким образом, неудивительно, что именно кластеры, описывающие данные операции, имеют наибольшее количество элементов.

6. Заключение

В работе были изучены особенности финансовых сообщений. Исходные текстовые данные содержат много шума и неточностей. Перед анализом необходимо провести большую работу по подготовке данных, так как использование данных в «сыром» виде приведет к неудовлетворительным результатам работы алгоритмов кластеризации. Дальнейшее сокращение количества переменных позволяет улучшить вычисления, не потеряв при этом в качестве.

В настоящем исследовании был предложен вариант целевой функции, базирующейся на энтропии внутри одной корреспонденции счетов и межкластерной энтропии. Использование целевой функции, основанной на корреспонденции банковский счетов, позволяет обучить модель кластеризации финансовых сообщений, определив лучшие параметры моделей кластеризации.

Во многих практических задачах для типизации банковских операций достаточно сгруппировать сделки по их корреспонденции счетов. В данном подходе этот принцип усовершенствуется, что позволяет методами машинного обучения определять

кластеры, учитывая бухгалтерские особенности данных операций, и одновременно позволяя определить экономический смысл сделок исходя из содержания текстовых сообщений.

Наилучший результат в кластеризации финансовых сообщений показали иерархический метод и *K-means*, наихудший – DBSCAN. Такие результаты определяются структурой данных: кластеры имеют сферическую форму и разную плотность.

Результаты иерархического метода и *K-means* совпадают более чем на 90%. Оптимальным количеством кластеров является 7 шт. Большую долю операций занимают кластеры, описывающие платежи и денежные переводы, – это связано со структурой исходных данных.

Литература

1. АЛЬ ДАУД Д. *Применение алгоритма кластеризации k-means для анализа вариативности языковой картины мира носителей арабского и русского языков: корпусный подход* // Успехи гуманитарных наук. – 2024. – №4. – С. 84–90.
2. ВИШНЯКОВ И.Э. *Выявление и кластеризация шаблонных текстов в больших массивах сообщений* // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Приборостроение. – 2022. – №4(141). – С. 20–35.
3. ЕГОРКИН А.А. *Определение центральности графа алгоритмом PageRank с учетом весов связей* // Управление большими системами. – 2024. – Вып. 111. – С. 81–96.
4. ЕГОРКИН А.А. *Особенности использования алгоритма классификации k-means для данных, подчиненных степенному закону распределения* // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. – 2023. – №9. – С. 65–69.
5. ЕФРЕМОВА А.Н. *Сравнительный анализ алгоритмов нечеткого сравнения строк* // Труды Братского государственного университета. Серия: Естественные и инженерные науки. – 2023. – Т. 1. – С. 45–50.

6. ЖИЛОВ Р.А. *Интеллектуальные методы кластеризации данных* // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2023. – №6(116). – С. 152–159.
7. КУРОЧКИН С.В., ПАВЛОВ Н.А., ТКАЧЕНКО М.В. и др. *Методы машинного обучения в риск-профилировании инвестора* // AlterEconomics. – 2024. – Т. 21, №3. – С. 527–552.
8. ПИМЕНОВ В.И. *Использование искусственного интеллекта в противодействии экстремистской деятельности* // Интеллектуальные информационные системы: теория и практика: Сборник научных статей по материалам V Международной конференции. – 2024. – С. 114–118.
9. *Положение Банка России от 24.11.2022 N 809-П. О плане счетов бухгалтерского учета для кредитных организаций и порядке его применения.*
10. ПОНОМАРЕВ Д.С. *Иерархическая кластеризация на языке R для производственно-экономических показателей пенитенциарной системы* // Экономика. Информатика. – 2023. – Т.50, №3. – С. 655–668.
11. САВЕЛЬЕВА М.Ю. *Выявление направления искажения финансовых результатов в бухгалтерской отчетности компаний в регионах Сибирского федерального округа* // Вестник Самарского государственного экономического университета. – 2020. – №4(186). – С. 109–123.
12. ФЕДОРОВА Е.А., АФАНАСЬЕВ Д.О., ДЕМИН И.С. *Разработка тонально-тематического словаря EcSentiThemeLex для анализа экономических текстов на русском языке* // Прикладная информатика. – 2020. – Т. 15, №6(90). – С. 58–77.
13. ACTKINSON B., GRIFFIN R.J. *Detecting plumes in mobile air quality monitoring time series with density-based spatial clustering of applications with noise* // Atmos. Meas. Tech. – 2023 – Vol. 16 – P. 3547–3559,
14. BAPTISTA A., BRIÈRE G., BAUDOT A. *Random walk with restart on multilayer networks: from node prioritisation to supervised link prediction and beyond* // BMC Bioinformatics. – 2024. – 19 p.
15. BAPTISTA A., GONZALEZ A., BAUDOT A. *Universal Multi-layer Network Exploration by Random Walk with Restart* // Commun Phys. – 2022. – Vol. 5. – 10 p.

16. BUDIMAN F. *Parameters Testing Optimization Using Cross Validation and Grid Search to Improve Multiclass Classification* // Scientific Visualization. – 2019. – P. 80–90
17. IKOTUN A.M., EZUGWU A.E., ABUALIGAH L. et al. *K-means clustering algorithms: A comprehensive review, variants analysis, and advances in the era of big data* // Kean Publications. – 2023 – P. 178–210.
18. TAN P.N., STEINBACH M.M., KUMAR V. *Introduction to data mining* // Pearson Education. – 2023. – 175 p.
19. WARD J.H. *Hierarchical grouping to optimize an objective function* // American Statistical Association. – 1963 – 236 p.
20. YUBO ZHUANG, XIAOHUI CHEN, YUN YANG et al. *Statistically Optimal K-means Clustering via Nonnegative Low-rank Semidefinite Programming* // Published as a conference paper at ICLR. – 2024 – 14 p.
21. WENTAO YE1, JIAJU ZHANG *Shannon entropy in quasiparticle states of quantum chains* // Journal of Physics A Mathematical General. – 2024 – 41 p.

CLUSTERING OF FINANCIAL MESSAGE TEXTS

Anton Egorkin, Russian State Social University, Moscow, Post-graduate Student (2-5@bk.ru).

Abstract: The paper is devoted to the problem of clustering financial message texts by machine learning algorithms. Clustering algorithms can be used to identify groups of similar financial messages, identify the same type or suspicious ones, and use the clusters found rather than the message texts themselves in further analysis. Clustering algorithms such as K-means, DBSCAN and the Hierarchical Clustering method are used in the work. Information about bank transactions is used as texts of financial messages in the work. Due to the fact that bank transactions are subject to strict accounting rules established by the Bank of Russia, it is possible to introduce a metric for assessing the quality of clusterization. This metric allows you to rank the quality of clustering using machine learning algorithms, as well as select the parameters used in training these models. Special attention in the article is paid to the specifics of the data used, and how these features can be taken into account in the practical part. In the practical part of the paper, the results of using clustering models are presented, indicating the optimal parameters of these algorithms. In conclusion, it is concluded that the best clustering algorithms are applied to financial texts.

Keywords: K-means, DBSCAN, Hierarchical clustering method, clustering of financial messages.

УДК 519.8

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии П.В. Сараевым.*

*Поступила в редакцию 14.02.2025.
Опубликована 31.07.2025.*

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ПО ЭЛЕМЕНТАМ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Кутяков Е. Ю.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Разложение квадратичной функции Ляпунова по элементам спектра матрицы динамики уже известно. Основными его компонентами являются модальный вклад и модальное взаимодействие, которые образуют базу модального анализа по Ляпунову. В представленной работе изложены результаты дальнейшей декомпозиции этих спектральных разложений по отдельным переменным состояния и по их парным комбинациям. Полученный результат можно также рассматривать как разложение квадратичной функции Ляпунова не только по элементам спектра динамической системы (по модам), но и по элементам пространства состояний, в котором записана модель этой системы. На основе предложенного способа декомпозиции сформулированы новые показатели модального анализа по Ляпунову, которые позволяют оценивать вклад отдельных собственных значений или их парное взаимодействие, но в связи только с той частью внешнего возмущения, которая ассоциирована с конкретной переменной состояния или парой таких переменных. Это, в частности, даёт возможность комплексно оценить совместное влияние как моды, так и связанной с ней переменной состояния на энергию выходного сигнала системы. Предполагается, что основная область применения новых разложений будет связана с задачами уменьшения размерности моделей крупных динамических систем.

Ключевые слова: уравнение Ляпунова, квадратичная функция Ляпунова, грамиан, субграмиан, пространство состояний, модальный анализ.

1. Введение

Функции Ляпунова имеют крайне важное значение в системном анализе и теории автоматического управления. Несмотря на то, что эти функции были предложены в конце XIX века, сегодня они продолжают активно использоваться во многих сферах, в частности, при исследовании хаоса [24], сетевых систем [18], в биологии [5] эпидемиологии [8, 16, 23], экологии [7], а также

¹ Евгений Юрьевич Кутяков, н.с. (evgeniykutyakov@gmail.com).

в традиционной для них области системного анализа и управления [15, 17, 19, 21, 22].

В данной работе рассматривается квадратичная функция Ляпунова, которая, как известно, представляет собой квадратичную форму, матрица которой является решением алгебраического уравнения Ляпунова и называется грамианом.

В работах [1, 2] предложен способ декомпозиции конечных и бесконечных грамианов по собственным значениям матрицы динамики линейной непрерывной динамической системы в пространстве состояний. Отдельные компоненты этого разложения получили название субграмианов.

В работе [12] на основе субграмианов предложен новый спектральный метод – модальный анализ по Ляпунову, суть которого заключается в представлении значений квадратичной функции Ляпунова линейной непрерывной динамической системы в виде суммы, каждое слагаемое которой соответствует либо отдельному собственному значению матрицы динамики, либо их паре. В первом случае слагаемое называется модальным вкладом собственного значения (моды) в энергию выходного сигнала системы, а во втором случае – модальным взаимодействием двух собственных значений. Эти показатели эффективно применялись в задачах исследования структуры и положения межрайонных колебаний [10], селективного управления [11], а также для поиска источника вынужденных колебаний [9] в электроэнергетических системах.

В данной работе предлагается ряд модификаций модального вклада и модального взаимодействия с целью получения оценки вклада не только для мод, но и для состояний. Ожидается, что это позволит расширить область применения модального анализа по Ляпунову на задачу уменьшения размерности моделей динамических систем.

Дальнейшее изложение результатов работы организовано следующим образом: во втором разделе представлены краткие сведения об исследуемой модели, о спектральных разложениях грамианов и о модальном анализе по Ляпунову; третий раздел

посвящён связи компонентов спектрального разложения грамианов с модальными компонентами невозмущённого решения динамической системы; в четвёртом разделе представлена декомпозиция спектральных разложений квадратичной функции Ляпунова по элементам пространства состояний, а также сформулированы определения для новых, модифицированных показателей модального анализа по Ляпунову; в пятом разделе обсуждаются возможные области использования предложенных модификаций; шестой раздел содержит основные выводы проведённого исследования.

2. Предварительные сведения

В этом разделе изложены общие сведения об исследуемой модели динамической системы, допускаемые предположения, а также краткий обзор основных, уже известных результатов, связанных со спектральными разложениями решений уравнений Ляпунова [3], а также с концепцией модального анализа по Ляпунову [12].

2.1. СВЕДЕНИЯ И ДОПУЩЕНИЯ О МОДЕЛИ

В работе рассматривается линейная непрерывная стационарная устойчивая динамическая система в пространстве состояний:

$$(1) \quad \dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0,$$

где $x \in R^n$ – вектор переменных состояния; $A \in R^{n \times n}$ – матрица динамики; $B \in R^{n \times m}$ – матрица входов; $u \in R^m$ – вектор внешних возмущений. Предполагается, что все собственные значения λ_i матрицы динамики различны, при этом $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$ для $\forall i \neq j \in Q = \{1, 2, \dots, n\}$, а сама система диагонализирована, то есть матрица A допускает представление

$$A = U\Lambda V^T,$$

где U, V – квадратные матрицы, столбцы которых представляют собой соответственно правые и левые нормированные собственные векторы матрицы динамики; Λ – диагональная матрица собственных значений матрицы динамики.

В силу устойчивости системы (1), для неё существует функция Ляпунова, которую в силу линейности (1) можно выбрать

в виде квадратичной формы:

$$W(x) = x^T P x,$$

где $\{\cdot\}^T$ обозначает транспонирование, а P – решение уравнения Ляпунова вида

$$(2) \quad A^T P + P A = -Q, \quad Q > 0.$$

2.2. СУБГРАМИАНЫ И МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПО ЛЯПУНОВУ

В соответствии с [3], матрицу P можно разложить по отдельным собственным значениям матрицы динамики:

$$(3) \quad P = \sum_{i=1}^n P_i = - \sum_{i=1}^n R_i^* Q (\lambda_i^* I + A)^{-1},$$

или по паре собственных значений:

$$(4) \quad P = \sum_{i,j=1}^n P_{ij} = - \sum_{i,j=1}^n \frac{R_i^* Q R_j}{\lambda_i^* + \lambda_j},$$

где $\{\cdot\}^*$ – эрмитово сопряжение; R_i – вычет резольвенты матрицы A , взятый в её собственном значении λ_i , [12]:

$$(5) \quad R_i = u_i v_i^T.$$

Определение 1. Действительная часть матрицы P_i в (3) называется субграмианом.

Определение 2. Действительная часть матрицы P_{ij} в (4) называется парным субграмианом.

Пусть e_k – k -й столбец единичной матрицы размерностью n . Рассмотрим частный случай уравнения (2) при $Q = e_k e_k^T$:

$$(6) \quad A^T P_{x_k} + P_{x_k} A = -e_k e_k^T,$$

Его положительно определённое решение P_{x_k} называется грамианом наблюдаемости, спектральные разложения которого задаются выражениями (3)–(4) и с учётом (5) примут вид

$$P_{x_k} = \sum_{i=1}^n P_{x_k i} = - \sum_{i=1}^n (v_i^T)^* (u_i^k)^* e_k^T (\lambda_i^* I + A)^{-1},$$

$$P_{x_k} = \sum_{i,j=1}^n P_{x_k ij} = - \sum_{i,j=1}^n \frac{(v_i^T)^* (u_i^k)^* u_j^k v_j^T}{\lambda_i^* + \lambda_j}.$$

С использованием приведённых выше выражений можно определить следующие основные показатели модального анализа по Ляпунову [12].

Определение 3. Энергией k -го состояния по Ляпунову называется величина вида

$$(7) \quad E_{x_k} = W(x)|_{x=x_0} = x_0^\top P_{x_k} x_0.$$

Определение 4. Модальным вкладом i -й моды в энергию Ляпунова k -го состояния называется величина, определяемая выражением

$$(8) \quad E_{x_{ki}} = x_0^\top P_{x_{ki}} x_0, \\ P_{x_{ki}} = -\operatorname{Re} \left\{ (v_i^\top)^* (u_i^k)^* e_k^\top (\lambda_i^* I + A)^{-1} \right\}.$$

Определение 5. Модальным взаимодействием пары мод i, j в энергии Ляпунова k -го состояния называется величина, определяемая выражением:

$$(9) \quad E_{x_{kij}} = x_0^\top P_{x_{kij}} x_0, \\ P_{x_{kij}} = -\operatorname{Re} \left\{ \frac{(v_i^\top)^* (u_i^k)^* u_j^k v_j^\top}{\lambda_i^* + \lambda_j} \right\}.$$

Таким образом, концепция модального анализа по Ляпунову заключается в рассмотрении квадратичных функций Ляпунова при специальном выборе правой части алгебраического уравнения Ляпунова, а также спектральных разложений этих функций и соотношений между ними.

3. Интерпретация спектральных разложений квадратичной функции Ляпунова для систем с простым спектром

Определение 6. Функцию вида:

$$(10) \quad M_i(k, t, x_0) = v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t},$$

где $t \geq 0$ – непрерывное время, будем называть i -й модальной компонентой k -й переменной состояния невозмущённого решения системы (1) при начальном условии x_0 .

Всюду далее вместо $M_i(k, t, x_0)$ для краткости будем использовать обозначение M_i , подразумевая, что модальная компонента зависит от номера состояния, времени и вектора начального условия.

Как известно, значение квадратичной функции Ляпунова в точке x_0 вида (7) является квадратом L_2 -нормы сигнала переходного процесса k -й переменной состояния системы (1) при $x(0) = x_0 \neq 0$ и $u(t) \equiv 0$ (т.е. квадратом L_2 -нормы невозмущённого решения k -й переменной состояния системы (1)):

$$(11) \quad E_{x_k} = \int_0^\infty x_k^2(t) dt.$$

Невозмущённое решение системы (1) для k -й переменной состояния в случае простого спектра матрицы A можно представить в виде суммы модальных компонент:

$$(12) \quad x_k(t) = \sum_{i=1}^n M_i = \sum_{i=1}^n v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} E_{x_k} &= \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^n \left(v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t} \right)^* \cdot \sum_{i=1}^n v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t} \right] dt = \\ &= \int_0^\infty \left[\sum_{i,j=1}^n \left(v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t} \right)^* \cdot v_j^\top x_0 u_j^k e^{\lambda_j t} \right] dt. \end{aligned}$$

Таким образом, доказан следующий результат.

Теорема 1. Энергия k -го состояния по Ляпунову равна интегралу суммы из попарных произведений модальных компонент M_i^* , M_j невозмущённого решения k -й переменной состояния системы (1) при всевозможных комбинациях номеров $i, j \in Q = \{1, 2, \dots, n\}$.

Следствие 1. Модальное взаимодействие пары мод i, j в энергии Ляпунова k -го состояния равно действительной части интеграла от произведения i -й и j -й модальных компонент невозмущённого решения k -й переменной состояния системы (1), причём i -я компонента берётся комплексно-сопряжённой:

$$E_{x_k i j} = \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty M_i^* M_j dt \right).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty M_i^* M_j dt \right) &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty \left[\left(v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t} \right)^* v_j^\top x_0 u_j^k e^{\lambda_j t} \right] dt \right) \\
 &= \operatorname{Re} \left(x_0^\top \left(v_i^\top \right)^* \left(u_i^k \right)^* u_j^k v_j^\top x_0 \int_0^\infty e^{(\lambda_i^* + \lambda_j)t} dt \right) = \\
 &= -x_0^\top \left(\operatorname{Re} \left\{ \frac{\left(v_i^\top \right)^* \left(u_i^k \right)^* u_j^k v_j^\top}{\lambda_i^* + \lambda_j} \right\} \right) x_0 = E_{x_k i j}.
 \end{aligned}$$

Следствие 2. Модальный вклад i -й моды в энергию Ляпунова k -го состояния равен действительной части интеграла от произведения невозмущённого решения k -й переменной состояния системы (1) и его i -й модальной компоненты, причём последняя берётся комплексно-сопряжённой:

$$E_{x_k i} = \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty M_i^* x_k(t) dt \right).$$

Доказательство. Вычет R_i можно определить как коэффициенты в разложении резольвенты матрицы A :

$$(13) \quad (sI - A)^{-1} = \frac{R_1}{s - \lambda_1} + \frac{R_2}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{R_n}{s - \lambda_n}.$$

Далее, последовательно используя (10), (12), (5), (13) и (8), получим:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty M_i^* x_k(t) dt \right) &= \\
 &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty \left[\left(v_i^\top x_0 u_i^k e^{\lambda_i t} \right)^* \cdot \sum_{j=1}^n v_j^\top x_0 u_j^k e^{\lambda_j t} \right] dt \right) = \\
 &= x_0^\top \left(\operatorname{Re} \left\{ \left(v_i^\top u_i^k \right)^* \sum_{j=1}^n v_j^\top u_j^k \int_0^\infty e^{(\lambda_i^* + \lambda_j)t} dt \right\} \right) x_0 = \\
 &= -x_0^\top \left(\operatorname{Re} \left\{ \left(v_i^\top u_i^k \right)^* \sum_{j=1}^n \frac{v_j^\top u_j^k}{\lambda_i^* + \lambda_j} \right\} \right) x_0 = \\
 &= -x_0^\top \left(\operatorname{Re} \left\{ \left(v_i^\top u_i^k \right)^* e_k^\top (\lambda_i^* I + A)^{-1} \right\} \right) x_0 = E_{x_k i}.
 \end{aligned}$$

Замечание 1. Если рассматривать модальные компоненты как процессы, то величина

$$(14) \quad \int_0^{\infty} M_i^* M_j dt$$

является кросс-корреляцией модальных компонент M_i^* , M_j с нулевым запаздыванием. Тогда фактор участия i -й моды в k -м состоянии по Ляпунову [12]

$$\tilde{e}_{ki} = \frac{E_{x_k i}}{E_{x_k}} = \frac{x_0^{\top} P_{x_k i} x_0}{x_0^{\top} P_{x_k} x_0}$$

будет пропорционален кросс-корреляции модальной компоненты M_i^* и переходного процесса $x_k(t)$, а парный фактор участия мод i, j в k -м состоянии по Ляпунову [12]

$$\tilde{e}_{kij} = \frac{E_{x_k ij}}{E_{x_k}} = \frac{x_0^{\top} P_{x_k ij} x_0}{x_0^{\top} P_{x_k} x_0}$$

будет пропорционален кросс-корреляции модальных компонент M_i^* и M_j [12].

4. Декомпозиция спектральных разложений по элементам пространства состояний

4.1. ВЫВОД РАЗЛОЖЕНИЙ И НОВЫХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ МОДАЛЬНОГО АНАЛИЗА ПО ЛЯПУНОВУ

Новая форма декомпозиции квадратичных функций Ляпунова основана на идее разложения модальной компоненты (10) по элементам скалярного произведения $v_i^{\top} x_0$. В этом случае невозмущённое решение k -й переменной состояния системы (1) можно записать в виде следующей двойной суммы:

$$(15) \quad x_k(t) = \sum_{i,p=1}^n M_i^p = \sum_{i,p=1}^n v_i^p x_0^p u_i^k e^{\lambda_i t},$$

где M_i^p – i -я модальная компонента невозмущённого решения k -й переменной состояния системы (1), обусловленная возмущением p -го состояния; v_i^p – p -я компонента i -го нормированного левого собственного вектора матрицы динамики системы (1); x_0^p – p -я компонента вектора начальных условий.

Используя (15) в (11), получим:

$$\begin{aligned}
 (16) \quad E_{x_k} &= \sum_{i,j,p,q=1}^n \int_0^\infty (M_i^p)^* M_j^q dt = \\
 &= - \sum_{i,j,p,q=1}^n \frac{x_0^p (v_i^p u_i^k)^* u_j^k v_j^q x_0^q}{\lambda_i^* + \lambda_j}.
 \end{aligned}$$

Выражение (16) задаёт разложение энергии Ляпунова k -й переменной состояния по собственным значениям матрицы динамики и по элементам пространства состояний. Рассматривая его отдельные составляющие, можно ввести ряд новых показателей модального анализа по Ляпунову.

Определение 7. Взаимодействием i -й моды и p -го состояния с j -й модой и q -м состоянием в энергии Ляпунова k -го состояния (межмодальное взаимодействие состояний) называется величина, определяемая выражением:

$$\begin{aligned}
 (17) \quad E_{x_k ij|\{x_p, x_q\}} &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty (M_i^p)^* M_j^q dt \right) = \\
 &= -\operatorname{Re} \left(\frac{x_0^p (v_i^p u_i^k)^* u_j^k v_j^q x_0^q}{\lambda_i^* + \lambda_j} \right).
 \end{aligned}$$

Определение 8. Действием p -го состояния через пару мод i, j на энергию Ляпунова k -го состояния (межмодальное действие состояния) называется величина, определяемая выражением:

$$\begin{aligned}
 (18) \quad E_{x_k ij|x_p} &= \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty (M_i^p)^* M_j dt \right) = \\
 &= -\operatorname{Re} \left(\frac{x_0^p (v_i^p u_i^k)^* u_j^k v_j^\top x_0}{\lambda_i^* + \lambda_j} \right).
 \end{aligned}$$

Определение 9. Взаимодействие пары состояний x_p, x_q в модальном вкладе i -й моды в энергию Ляпунова состояния x_k (модальное взаимодействие состояний) называется величина,

определяемая выражением

$$(19) \quad E_{x_k i | \{x_p, x_q\}} = \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty (M_i^p)^* \sum_{j=1}^n M_j^q dt \right) = \\ = -\operatorname{Re} \left(x_0^p \left(v_i^p u_i^k \right)^* e_k^\top (\lambda_i^* I + A)^{-1} e_q x_0^q \right).$$

Определение 10. Действием состояния x_p через моду i на энергию Ляпунова состояния x_k (модальное действие состояния) называется величина, определяемая выражением

$$(20) \quad E_{x_k i | x_p} = \operatorname{Re} \left(\int_0^\infty (M_i^p)^* x_k(t) dt \right) = \\ = -\operatorname{Re} \left(x_0^p \left(v_i^p u_i^k \right)^* e_k^\top (\lambda_i^* I + A)^{-1} x_0 \right).$$

Сформулированные выше величины представляют собой модифицированные версии модального взаимодействия и модального вклада, позволяющие проводить более глубокий анализ внутренней структуры и взаимосвязей различных элементов динамической системы. Новые показатели отличаются тем, что дают оценку вклада отдельной моды или пары мод в связи с возмущением конкретного состояния либо в связи с взаимным действием возмущений двух состояний. Показатели $E_{x_k i | x_p}$ и $E_{x_k i j | x_p}$ можно рассматривать как элементы разложения соответственно модального вклада и модального взаимодействия по отдельным переменным пространства состояний, а показатели $E_{x_k i | \{x_p, x_q\}}$ и $E_{x_k i j | \{x_p, x_q\}}$ – как элементы аналогичного разложения по паре переменных. При этом выполняются следующие соотношения:

$$E_{x_k i} = \sum_{p=1}^n E_{x_k i | x_p} = \sum_{p,q=1}^n E_{x_k i | \{x_p, x_q\}}, \\ E_{x_k i j} = \sum_{p=1}^n E_{x_k i j | x_p} = \sum_{p,q=1}^n E_{x_k i j | \{x_p, x_q\}}.$$

В то же время на основании разложения вида (16) можно сформулировать ряд принципиально новых показателей, позволяющих оценивать вклад и взаимодействие не мод, а состояний в энергии возмущения наблюдаемого состояния. Приведём их определения.

Определение 11. Вкладом p -го состояния в энергию Ляпунова k -го состояния называется величина, определяемая выражением

$$(21) \quad E_{x_k|x_p} = \sum_{q,i,j=1}^n E_{x_k i j|\{x_p, x_q\}}.$$

Определение 12. Взаимодействием пары состояний p и q в энергии Ляпунова k -го состояния называется величина, определяемая выражением

$$(22) \quad E_{x_k|\{x_p, x_q\}} = \sum_{i,j=1}^n E_{x_k i j|\{x_p, x_q\}}.$$

Наконец, с использованием (8), (20) и (21) можно сформулировать показатели, оценивающие степень совместного участия моды и состояния в энергии возмущения.

Определение 13. Вкладом m -й моды и s -го состояния в энергию Ляпунова k -го состояния называется величина, определяемая выражением

$$(23) \quad E_{x_k\{m, x_s\}} = E_{x_k m} + E_{x_k|x_s} - E_{x_k m|x_s}.$$

Определение 14. Фактором участия моды m и состояния s в энергии Ляпунова состояния k называется величина

$$(24) \quad \tilde{e}_{k\{m, x_s\}} = \frac{E_{x_k\{m, x_s\}}}{E_{x_k}}.$$

4.2. ОБОБЩЕНИЕ НА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛЯПУНОВА И СУБГРАМИАНЫ

Можно заметить, что вычисление взаимодействия мод i, j в связи с состояниями p, q , определяемое выражением (17), эквивалентно «вырезанию» из парного субграмиана $P_{x_k i j}$ элемента, стоящего на пересечении p -й строки и q -го столбца с последующим его умножением на коэффициент $x_0^p x_0^q$. Следовательно, разложение парного субграмиана по элементам пространства состояний можно представить в виде

$$(25) \quad P_{x_k i j} = -\operatorname{Re} \left(\frac{(u_i^k)^* u_j^k}{\lambda_i^* + \lambda_j} \sum_{p,q=1}^n \left(v_i^\top \right)^* v_j^\top \odot \mathbf{1}_{pq} \right),$$

где $\odot$ – произведение Адамара; $\mathbf{1}_{pq}$ – матрица размером $n \times n$ из нулей с единицей на пересечении p -й строки и q -го столбца.

Пользуясь аналогичными соображениями при рассмотрении показателя (19), получим следующую форму разложения субграмиана $P_{x_k i}$ по элементам пространства состояний:

$$P_{x_k i} = -\operatorname{Re} \left((u_i^k)^* \sum_{p,q=1}^n (v_i^\top)^* e_k^\top (\lambda_i^* I + A)^{-1} \odot \mathbf{1}_{pq} \right).$$

Наконец, используя (25) и свойство $P_{x_k} = \sum_{ij} P_{x_k ij}$, можно формализовать разложение решения P_{x_k} уравнения Ляпунова (6) по спектру матрицы динамики и элементам пространства состояний:

$$P_{x_k} = - \sum_{i,j,p,q=1}^n \frac{(v_i^\top u_i^k)^* u_j^k v_j^\top}{\lambda_i^* + \lambda_j} \odot \mathbf{1}_{pq}.$$

Несмотря на некоторую тривиальность приведённых разложений, они позволяют прийти к следующему важному результату.

Теорема 2. *Элемент матрицы $P_{x_k ij}$ парного субграмиана, стоящий на пересечении p -й строки и q -го столбца, численно равен действительной части кросс-корреляции (14) для модальных компонент M_i^p, M_j^q невозмущённого решения k -й переменной состояния системы (1) при начальных условиях, определяемых векторами x_0 с элементами*

$$(26) \quad x_0^m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = q, \\ 0 & \text{при остальных } m \end{cases}$$

для модальной компоненты M_j^q , и с элементами

$$(27) \quad x_0^m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = p, \\ 0 & \text{при остальных } m \end{cases}$$

– для модальной компоненты M_i^p , причём последняя берётся комплексно-сопряжённой. Аналогичный элемент матрицы $P_{x_k i}$ субграмиана численно равен действительной части кросс-корреляции невозмущённого решения k -й переменной состояния системы (1) при начальном условии (26) и его i -й модальной компоненты при начальном условии (27), причём последняя берётся комплексно-сопряжённой.

Изложенный результат можно рассматривать как следствие теоремы 1, а его доказательство аналогично доказательствам для следствий 1, 2.

Заметим, что теорему 2 можно обобщить и на элементы матрицы P_{x_k} грамиана. Так, можно утверждать, что $\{p, q\}$ -й элемент матрицы P_{x_k} численно равен кросс-корреляции невозмущённого решения k -й переменной состояния системы (1) при начальном условии (27) и такого же решения при начальном условии (26), т.е.

$$P_{x_k}(p, q) = \int_0^\infty \sum_{i=1}^n M_i^p(t) \sum_{j=1}^n M_j^q(t) dt.$$

Но, вероятно, этот результат известен, поскольку грамианы используются для исследования линейной зависимости двух функций [4, 6], что напрямую связано с определением интегралов, аналогичных (14).

5. Практическое значение предложенного способа декомпозиции и новых показателей

Введённые в предыдущем разделе новые показатели «действия» состояний можно рассматривать в двух равноценных аспектах. С одной стороны, эти показатели дают оценку степени влияния возмущения одной переменной состояния (или пары состояний) на энергию возмущения другой переменной состояния через конкретную моду или пару мод. С другой стороны, мы можем их воспринимать как оценку вклада конкретной моды или пары мод в энергию Ляпунова состояния (или в энергию выходного сигнала), но в связи только с той частью возмущения, которая ассоциирована с конкретной переменной состояния (или парой состояний).

В соответствии с этими двумя аспектами можно указать две наиболее вероятные области применения представленных в данной работе разложений. Первый аспект разложений определяет сферу их использования, связанную с задачами структурного анализа динамических систем. В частности, представляется перспективным использовать их для определения пути (через какие мо-

80

ды) и степени влияния «виртуальных» состояний на физические состояния нелинейных аппроксимаций динамических систем, построенных с помощью метода линеаризации Карлемана. Это может быть полезно для анализа природы и механизмов проявления нелинейных процессов в таких системах.

Второй аспект разложений связан с уточнением определения модального вклада за счёт учёта вклада состояния – см. показатель (23). Это может использоваться в задачах понижения размерности моделей крупных динамических систем, где оценка значимости состояний и связанных с ними мод является первоочередной проблемой.

Применение предложенных разложений в каждой из указанных областей требует отдельных исследований. В данной работе ограничимся лишь кратким примером, демонстрирующим одно из преимуществ предложенных показателей. В нём сравнивается модальный вклад (8) и новый показатель – вклад моды и состояния (23).

Пример 1. Рассмотрим линейную стационарную динамическую систему в пространстве состояний со скалярным выходом

$$(28) \quad \begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = cx \end{cases}, \quad x(0) = x_0 = \mathbf{1},$$

с матрицей динамики (на основе [13, с. 789])

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0,121 & -0,073 & -0,079 & -0,004 & -0,024 \\ 376,991 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,114 & -0,857 & 0,673 & 5 \cdot 10^{-5} & 3 \cdot 10^{-4} \\ 0 & -5,143 & 27,885 & -36,196 & 0,002 & 0,014 \\ 0 & -0,062 & -5 \cdot 10^{-4} & -5 \cdot 10^{-4} & -2,894 & 2,378 \\ 0 & -1,472 & -0,012 & -0,013 & 8,840 & -21,144 \end{bmatrix}$$

и вектором выхода

$$c = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Это модель простейшей электроэнергетической системы с одним синхронным генератором, работающим на шину бесконечной мощности. Модель генератора учитывает электромеханические уравнения движения ротора, а также действие автоматического регулятора напряжения и трёх демпферных обмоток. Дина-

мика такой системы хорошо изучена (см., например, [13, с. 727–789]) и может быть описана следующим набором нелинейных дифференциальных уравнений [14]:

$$(29) \quad \begin{cases} \Delta\dot{\omega}_r = -\frac{K_D \cdot \Delta\omega_r}{2H} - \frac{\psi_{ad} \cdot i_q - \psi_{aq} \cdot i_d}{2H} + \frac{T_m}{2H}, \\ \dot{\delta} = \omega_0 \cdot \Delta\omega_r, \\ \dot{\psi}_{fd} = -\frac{\omega_0 \cdot R_{fd}}{L_{fd}} (\psi_{fd} - \psi_{ad}) + \frac{\omega_0 \cdot R_{fd}}{L_{adu}} \cdot E_{fd}, \\ \dot{\psi}_{1d} = -\frac{\omega_0 \cdot R_{1d}}{L_{1d}} (\psi_{1d} - \psi_{ad}), \\ \dot{\psi}_{1q} = -\frac{\omega_0 \cdot R_{1q}}{L_{1q}} (\psi_{1q} - \psi_{aq}), \\ \dot{\psi}_{2q} = -\frac{\omega_0 \cdot R_{2q}}{L_{2q}} (\psi_{2q} - \psi_{aq}); \end{cases}$$

где $\Delta\omega_r$ – отклонение угловой скорости ротора; K_D – коэффициент демпфирования; H – момент инерции ротора; ψ_{ad} , ψ_{aq} – взаимные потокосцепления; i_d , i_q – токи статора; T_m – входной механический момент на роторе генератора; δ – угол поворота ротора; ω_0 – номинальная частота энергосети; ψ_{fd} , R_{fd} , L_{fd} , E_{fd} – соответственно потокосцепление, сопротивление, индуктивность и ЭДС обмотки возбуждения; L_{adu} – ненасыщенное значение взаимной индуктивности между обмоткой статора и обмоткой ротора на d -оси; ψ_{1d} , ψ_{1q} , ψ_{2q} – потокосцепления демпферных обмоток d - и q -оси ротора; R_{1d} , R_{1q} , R_{2q} – сопротивления демпферных обмоток; L_{1d} , L_{1q} , L_{2q} – индуктивности демпферных обмоток.

Линеаризация уравнений (29) с параметрами из таблицы 1 в равновесной рабочей точке $\Delta\omega_{r0} = 0$ о.е., $\delta_0 = 1,3811$ рад, $\psi_{fd0} = 1,0867$ о.е., $\psi_{1d0} = \psi_{ad0} = 0,8647$ о.е., $\psi_{1q0} = \psi_{2q0} = \psi_{aq0} = -0,6138$ о.е., $T_{m0} = 0,9027$ о.е., $E_{fd0} = 2,3947$ о.е. даёт векторно-матричное дифференциальное уравнение системы (28) с соответствующей матрицей A .

Собственные значения (моды) матрицы A представлены во второй колонке таблицы 2, а переменные состояния, с которыми связаны эти моды, указаны в третьей колонке.

Итак, рассматривается устойчивая динамическая система 6-го порядка, с четырьмя апериодическими модами и одной комплексно-сопряжённой парой. Скалярный выход системы представлен переменной состояния x_2 .

Таблица 1. Параметры системы (в относительных единицах, если не указано иное)

Параметр	Значение	Параметр	Значение
H	3,5000	R_{1d}	0,0248
K_D	0	L_{1d}	0,1400
ω_0 , рад/с	376,9911	R_{1q}	0,0061
R_{fd}	0,0006	L_{1q}	0,7063
L_{fd}	0,1530	R_{2q}	0,0227
L_{adu}	1,6500	L_{2q}	0,1103

Таблица 2. Собственные значения и их связь с состояниями

Мода	Значение	Состояние
m_1	-36,6142	$x_4 (\psi_{1d})$
m_2	-22,2082	$x_6 (\psi_{2q})$
m_3, m_4	$-0,2063 \pm 6,4186i$	$x_1, x_2 (\Delta\omega_r, \delta)$
m_5	-0,0744	$x_3 (\psi_{fd})$
m_6	-1,7816	$x_5 (\psi_{1q})$

Задача состоит в определении степени участия каждого состояния в L_2 -норме выходного сигнала при единичном начальном условии (все элементы вектора x_0 равны единице). Для этого будем удалять из исходной системы по одному состоянию (и, соответственно, по одной моде) и вычислять изменение L_2 -нормы выходного сигнала новой системы с пониженной на один порядок размерностью (обозначим это изменение через Δ). Заметим, что из перечня удаляемых переменных состояния исключается x_2 , поскольку она является выходом системы, и x_1 , поскольку она связана с той же комплексно-сопряжённой парой мод, что и x_2 . Таким образом, удалению подлежат поочерёдно переменные состояния с 3-й по 6-ю; при этом вместе с переменной состояния удаляется и связанная с ней мода (согласно таблице 2).

Результаты проведённых вычислений, представленные на рис. 1а, показывают, что наиболее значимым, с точки зрения сохранения энергии выходного сигнала, является состояние x_4 ,

поскольку при его удалении наблюдается наибольшее изменение L_2 -нормы выхода (наибольшее значение Δ). Наименее значимым по тем же соображениям является состояние x_5 .

Далее, по (8) вычислим модальный вклад мод m_1, m_2, m_5 и m_6 , а по (23) определим вклад этих же мод и связанных с ними состояний. Результаты представлены на рис. 1бв.

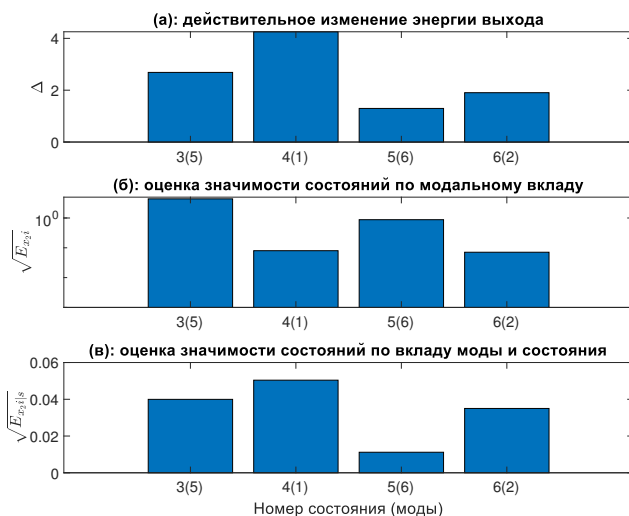


Рис. 1. Действительная значимость состояний (а), и их оценка на основе модального вклада (б) и вклада моды и состояния (в)

Как следует из рис. 1б, мода m_1 имеет наименьший модальный вклад в энергию Ляпунова выходного сигнала (состояния x_2), что указывает на малую значимость этой моды с точки зрения формирования энергии выхода. Но, как было указано выше и как видно из рис. 1а, при удалении из системы состояния x_4 , связанного с модой m_1 , наблюдается наибольшее изменение энергии выходного сигнала. Таким образом, модальный вклад (8) характеризует лишь участие моды в энергии наблюдаемого сигнала, но не может использоваться для оценки изменения этой энергии при удалении из системы соответствующей моды.

Вместе с тем, новый показатель (23) учитывает как модальный вклад, так и вклад состояния в энергию выхода и даёт приемлемую оценку степени значимости состояний. В частности, как следует из рис. 1в, состояние x_5 имеет наименьшую значимость, а состояния x_4 – наибольшую, что хорошо согласуется с действительным изменением энергии выхода, отображённым на рис. 1а.●

6. Заключение

В работе проведено исследование спектральных разложений квадратичной функции Ляпунова на предмет их дальнейшей декомпозиции по состояниям линейной динамической системы. Была показана связь спектральных разложений с модальными компонентами невозмущённого решения системы, после чего формализован предлагаемый метод декомпозиции и введены четыре модифицированных показателя модального анализа по Ляпунову, такие как межмодальное взаимодействие состояний, межмодальное действие состояний, а также их модальные аналогии. Кроме этого, на основании полученных разложений и модификаций определены принципиально новые показатели, оценивающие вклад состояний и вклад пары «мода – состояние» в энергию выходного сигнала системы. Хотя при предложенном способе декомпозиции теряется инвариантность относительно начальных условий, одновременно с этим возникает возможность более глубокого исследования внутренней структуры динамической системы и взаимосвязей между её элементами, в частности, за счёт комплексной оценки влияния на энергию выходного сигнала не только мод, но и переменных состояния. Некоторые из указанных преимуществ продемонстрированы на простом вычислительном примере. Более строгое обоснование этих преимуществ и детальная разработка методов применения предложенной модификации модального анализа по Ляпунову к задаче понижения размерности моделей динамических систем является предметом дальнейшей работы автора.

Литература

1. ЯДЫКИН И.Б. *О свойствах грамианов непрерывных систем управления* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – №6. – С. 39–50.
2. ЯДЫКИН И.Б., ГАЛЯЕВ А.А. *О методах вычисления грамианов и их использовании в анализе линейных динамических систем* // Автоматика и телемеханика. – 2013. – №2. – С. 53–74.
3. ЯДЫКИН И.Б., ИСКАКОВ А.Б. *Спектральные разложения для решений уравнений Сильвестра - Ляпунова - Крейна* // Доклады академии наук. – 2017. – Т. 472, №4. – С. 388–392.
4. AHMAD A.M., DE ABREU-GARCIA J.A. *Continuous time and discrete time Lyapunov equations: review and new directions* // Control and Dynamic Systems – 1996. – Vol. 74. – P. 253–307.
5. BOUKHOUMA A., HATTAF K., LOTFI E.M. et al. *Lyapunov functions for fractional-order systems in biology: Methods and applications* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2020. – Vol. 140. – P. 110224.
6. BROCKETT R.W. *Finite Dimensional Linear Systems* – New York:Wiley, 1970. – 244 p.
7. CHEN C., WANG X.W., LIU Y.Y. *Stability of ecological systems: A theoretical review* // Physics Reports. – 2024. – Vol. 1088. – P. 1–41.
8. TANECO-HERNANDEZ M.A., VARGAS-DE-LEON C. *Stability and Lyapunov functions for systems with Atangana–Baleanu Caputo derivative: An HIV/AIDS epidemic model* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2020. – Vol. 132. – P. 109586.
9. ISKAKOV A.B., KUTYAKOV E.Y., KATAEV D.E. *Locating the source of forced oscillations on the basis of Lyapunov modal analysis* // IFAC-PapersOnLine. – 2024. – Vol. 58, No. 13. – P. 685–690.

10. ISKAKOV A.B., KUTYAKOV E.Y., TOMIN N.V. et al. *Estimation of the location of inter-area oscillations and their interactions in electrical power systems using Lyapunov modal analysis* // Int. J. of Electrical Power & Energy Systems. – 2023. – Vol. 153. – P. 109374.
11. ISKAKOV A.B., TOMIN N.V., YADYKIN I.B. et al. *Selective LQ wide area damping of power networks based on the spectral decomposition of Gramians* // IFAC-PapersOnLine. – 2022. – Vol. 55, No. 9. – P. 152–157.
12. ISKAKOV A.B., YADYKIN I.B. *Lyapunov modal analysis and participation factors applied to small-signal stability of power systems* // Automatica. – 2021. – Vol. 132. – P. 109814.
13. KUNDUR P. *Power system stability and control* – New York: McGraw-Hill, 1994. – 1200 p.
14. KUTYAKOV E.Y., DUSHIN S.V., ABRAMENKOV A.N. et al. *Quadratic approximation of nonlinear models of the synchronous machine using the bilinear representation* // Proc. of the 13th Int. Conf. «Management of Large-Scale System Development» (MLSD). – 2020.
15. LI F., ZHENG W.X., XU S. et al. *A novel e-dependent Lyapunov function and its application to singularly perturbed systems* // Automatica. – 2021. – Vol. 133. – P. 109749.
16. LI J., CHEN Y., XI X. et al. *An analytical approach to applying the Lyapunov direct method to an epidemic model with age and stage structures* // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2025. – Vol. 84. – P. 104312.
17. LIU L., LIU Y.J., LI D. et al. *Barrier Lyapunov Function-Based Adaptive Fuzzy FTC for Switched Systems and Its Applications to Resistance–Inductance–Capacitance Circuit System* // IEEE Trans. on Cybernetics. – 2020. – Vol. 50, No. 8. – P. 3491–3502.
18. MAGHENEM M., POSTOYAN R., LORIA A. et al. *Lyapunov-based synchronization of networked systems: From continuous-time to hybrid dynamics* // Annual Reviews in Control. – 2020. – Vol. 50. – P. 335–342.

19. MASON P., CHITOUR Y., SIGALOTTI M. *On universal classes of Lyapunov functions for linear switched systems* // Automatica. – 2023. – Vol. 155. – P. 111155.
20. PEREZ-ARRIAGA I.J., VERGHESE G.C., SCHWEPPE F.C. *Selective modal analysis with applications to electric power systems, part I: heuristic introduction* // IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems. – 1982. – Vol. PAS-101, No. 9. – P. 3117–3125.
21. RUEDA-ESCOBEDO J.G., MORENO J.A. *Strong Lyapunov functions for two classical problems in adaptive control* // Automatica. – 2021. – Vol. 124. – P. 109250.
22. SUN W., SU S.F., WU Y. et al. *Adaptive Fuzzy Control With High-Order Barrier Lyapunov Functions for High-Order Uncertain Nonlinear Systems With Full-State Constraints* // IEEE Trans. on Cybernetics. – 2020. – Vol. 50, No. 8. – P. 3424–3432.
23. ZHANG R., REN X. *Lyapunov functions for some epidemic model with high risk and vaccinated class* // Applied Mathematics Letters. – 2025. – Vol. 163. – P. 109437.
24. ZHOU P., HU X., ZHU Z. et al. *What is the most suitable Lyapunov function?* // Chaos, Solitons & Fractals. – 2021. – Vol. 150. – P. 111154.

DECOMPOSITION OF SPECTRAL EXPANSIONS OF THE QUADRATIC LYAPUNOV FUNCTION ON STATE-SPACE VARIABLES

Evgeniy Kutyaikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences
of RAS, Moscow, Research Associate
(evgeniykutyaikov@gmail.com).

Abstract: Spectral decomposition of the quadratic Lyapunov function is already known. The modal contribution and modal interaction are the main components of this decomposition, which form the basis of Lyapunov modal analysis. This paper presents the results of a further expansion of these spectral components into individual state variables and into their pairwise combinations. The obtained result can also be considered as a decomposition of the quadratic Lyapunov function not only by elements of the spectrum of the dynamical system (by modes), but also by elements of the state space. On the basis of the proposed decomposition method, new Lyapunov modal analysis indices are formulated, which allow one to evaluate the contribution of individual eigenvalues or their pairwise interaction, but in connection only with the part of the external perturbation that is associated with a particular state variable or a pair of such variables. This, in particular, makes it possible to comprehensively evaluate the joint influence of both the mode and the associated state variable on the energy of the system output signal. It is assumed that the main area of application of the new decompositions will be related to the problems of the model order reduction of the large dynamical systems.

Keywords: Lyapunov equation, quadratic Lyapunov function, Gramian, sub-Gramian, state-space, modal analysis.

УДК 519.715

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Я.И. Квинто.*

Поступила в редакцию 10.02.2025.

Дата опубликования 31.07.2025.

ЭМПИРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ ИГРОКОВ ОЛИГОПОЛИИ БАНКОВСКОГО РЫНКА РФ НА ОСНОВЕ ПРЕДПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ

Иванова М. В.¹

(Самарский национальный исследовательский
университет имени академика С.П. Королева, Самара)

Рассматривается олигополистический российский рынок банковского кредитования физических лиц с точки зрения взаимодействия игроков. Рассчитывается показатель Герфиндаля – Хиришмана, доказывающий, что российский банковский рынок является олигополистическим. Взаимодействие крупных банков описывается при помощи объемных предположительных вариаций, т.е. предположений игроков о влиянии их действий на поведение конкурентов относительно объемов выдачи кредитов физическим лицам. Объемные предположительные вариации в работе рассчитаны на основе эмпирических данных. Статистические данные для расчетов взяты из официальных отчетностей банков. При этом рассмотрено два случая. В первом случае рассмотрены предположительные вариации крупнейшего олигополиста на рынке по отношению к конкурентному окружению, т.е. к другим игрокам рынка или к другим банкам. Во втором случае рассмотрены предположительные вариации крупнейшего олигополиста по отношению к каждому отдельному конкуренту, т.е. банку. Для обоих случаев представлены зависимости объемных предположительных вариаций игроков от долей объемов кредитования банков. Основной полученный результат заключается в том, что объемные предположительные вариации крупнейшего банка положительные, то есть на расширение объемов кредитования банка конкуренты будут реагировать расширением объема собственного кредитования и наоборот.

Ключевые слова: банки, кредитование физических лиц, предположительные вариации, олигополия.

1. Введение

Кредитование является важным инструментом для развития экономики России. Оно позволяет компаниям и индивидуальным предпринимателям получать необходимые средства для расширения бизнеса, инвестиций в недвижимость, оборудование и другие цели.

¹ Мария Владимировна Иванова, ассистент (ivanova.mv@ssau.ru).

Кредитование также стимулирует потребление, поскольку физические лица могут получать кредиты на покупку домов, автомобилей и других товаров. Это в свою очередь обеспечивает рост производства, продаж и доходов населения.

Одним из необходимых условий эффективности экономики страны является наличие конкуренции на банковском рынке. Тем не менее на российском банковском рынке прослеживается тенденция государственного вмешательства в банковскую политику, что приводит к изменению структуры рынка в сторону олигополии.

На олигополистическом рынке фирмы, выступающие в роли игроков, выдвигают предположения о действиях или стратегиях других игроков, т.е. контрагентов или окружения, на основе чего формируют свои оптимальные стратегии. В случае конкуренции по объемному показателю предположения фирм представляют собой объемные предположительные вариации [9]. Конкуренция по объемному показателю зачастую бывает предпочтительнее ценовой конкуренции, так как в итоге приводят к большим прибылям для фирм [39], поэтому именно объемную конкуренцию рассматривают многие исследователи [1–4].

Объемная предположительная вариация, рассматриваемая в рамках данного исследования, представляет собой предполагаемое фирмой-игроком изменение объема предложения контрагента в ответ на единичное изменение объема предложения данной фирмы.

Выбор стратегии фирмой в игре олигополии с наличием более двух игроков зависит от суммы предположительных вариаций этого игрока в отношении всех его контрагентов. Если сумма предположительных вариаций игрока отрицательна, то он выбирает оптимальную стратегию, увеличивающую его объем предложения, и наоборот.

В работах авторов, исследующих олигополистические игры, зачастую применяются линейные [5–8, 11, 12, 35, 37, 38,] и степенные [10, 13, 36, 35, 40] функции спроса. Это обусловлено простотой применения и легкостью вычисления предположительных вариаций из функций наилучших ответов (функций реакций), которые представимы в явном виде.

Таким образом, анализ характера предположительных вариаций представляет актуальную задачу оценивания поведения фирм в игре олигополии.

2. Описание структуры российского банковского рынка

Для изучения структуры российского банковского рынка была взята информация об объемах кредитования физических лиц 9 крупнейших банков России за период с 2010 по 2022 годы (Сбербанк, ПАО ВТБ, Альфа-Банк, Газпромбанк, Тинькофф Банк, Россельхозбанк, ФК Открытие, Росбанк, Промсвязьбанк), на основе которых был рассчитан индекс Герфиндаля – Хиршмана по формуле

$$HHI = \sum_{i=1}^n S_i^2,$$

где S_i^2 – выраженные в процентах доли различных показателей деятельности фирм; n – количество фирм в отрасли.

На рис. 1 изображены значения индекса Герфиндаля – Хиршмана на рынке банковских услуг [15, 17–34].

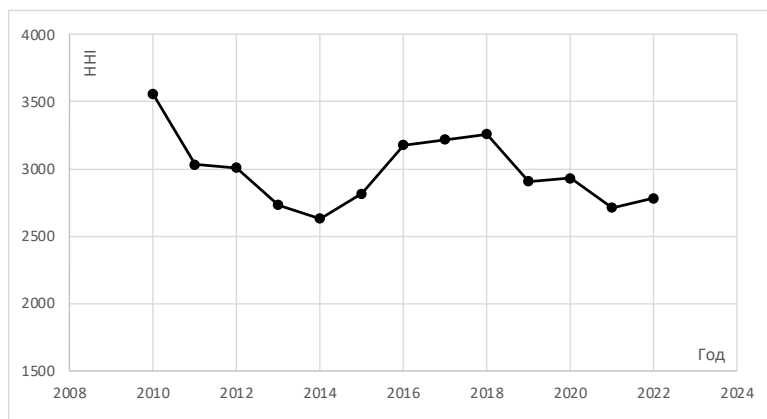


Рис. 1. Индекс Герфиндаля – Хиршмана на банковском рынке по показателю объемов кредитования банков

Рассчитанный индекс Герфиндаля – Хиршмана превышает 1600 и указывает на высокую концентрацию рынка [14]. Можно сделать вывод о том, что банковский рынок является олигополистическим. При этом крупнейшим олигополистом является Сбербанк.

Логично предположить, что так как Сбербанк является доминирующим банком на рынке, то именно он занимает роль лидера и принимает решения по объемам выдачи кредитов. Наша модель имеет некоторые признаки модели Штакельберга. Во-первых, как уже было определено, на рынке существует фирмалидер, который устанавливает объемы выдачи кредитов, на которого ориентируются прочие игроки. Во-вторых, в отрасли предлагается однородная услуга, а именно услуга кредитования, которая для потребителя отличается только по уровню процентной ставки, другими словами, по уровню цены.

3. Постановка задачи анализа игры олигополии

Рассмотрим объемную конкуренцию на олигополистическом банковском рынке с участием более двух игроков.

Функция спроса на кредиты является убывающей, т.е. чем больший объем кредитования предлагается на рынке, тем ниже ставка кредитования, и наоборот. Обратная функция спроса на кредиты задается следующим образом:

$$x = f(Q), \frac{\partial x}{\partial Q} < 0,$$

где x – ставка кредитования; $Q = \sum_{i=1}^n q_i$ – объем кредитования, предлагаемый всеми банками; q_i – объем кредитования i -го банка.

В представленном анализе параметрами управления являются объемы кредитования, но не ставки по кредитам, согласно неоклассической и кейнсианской теориям.

Функция прибыли i -го банка примет вид

$$\pi_i = xq_i - C_i,$$

где C_i – издержки i -го банка, $\frac{\partial C_i}{\partial Q} > 0$.

То есть функция издержек является возрастающей.

Предположим, что поведение или оптимальные рыночные стратегии игроков зависят от их целевой функции. Основной целью любой коммерческой организации является максимизация прибыли, т.е. целевая функция имеет вид

$$\max \pi_i = \max \{xq_i - C_i\}.$$

Для нахождения условия максимизации прибыли необходимо продифференцировать функции прибыли игроков. Тогда получим систему необходимых условий равновесия Нэша. Иными словами, из условий максимизации прибыли можно получить функцию реакции фирмы [1, 2]:

$$x + (1 + \omega_i)q_i \frac{\partial x}{\partial Q} - MC_i = 0, i = 1..n,$$

где $\omega_i = \sum_{j \neq i}^n \frac{\partial q_j}{\partial q_i}$ – сумма предположительных вариаций i -го иг-

рока, каждый компонент которой $\frac{\partial q_j}{\partial q_i}$ есть предположительная

вариация i -го игрока, т.е. предполагаемое им изменение выпуска j -го игрока в ответ на единичный прирост выпуска i -го игрока; MC_i – предельные издержки i -го игрока, которые выражают изменение затрат, обусловленное изменением выдачи кредитов на 1 рубль.

Для описания взаимодействия игроков на Российском банковском рынке необходимо найти предположительные вариации банков.

4. Методы

В работе исследователей [40] было введено допущение, что взаимодействие между банками зависит исключительно от их долей рынка и выражается равенством

$$E_{ji} = a_{ji} + b_{ji} S_j,$$

где E_{ji} – эластичность объемов кредитования j -го банка по объему кредитования i -го банка, которая показывает, как изменится

объем кредитования j -го банка при изменении доли i -го банка на 1%; S_j – доля рынка j -го банка; a_{ji} , b_{ji} – коэффициенты линейной регрессии.

Эластичность представляет собой функцию от рыночной доли j -го банка. В результате работы авторы сформулировали модели, которые позволили им сделать выводы о виде равновесий на китайском рынке банковских услуг.

В нашей работе мы предлагаем модернизировать это допущение, выразив с помощью функции предположительные вариации, которые напрямую отражают предположения одного банка относительно возможной реакции конкурента или конкурентов на выбранную им политику, и введя помимо линейной зависимости также и степенную зависимость.

Такое расширение поможет нам охватить больше случаев и более точно описать реальные экономические процессы, так как какой-то из видов функций может лучше отразить фактическую ситуацию.

Предположительную вариацию можно рассчитать численным методом приближенного конечно-разностного аналога производной:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} \approx \frac{\Delta q_j}{\Delta q_i} = \frac{q_j'' - q_j'}{q_i'' - q_i'},$$

где q_i – объем кредитования i -го банка; q_j – объем кредитования j -го банка.

Если значение предположительной вариации больше нуля ($\frac{\partial q_j}{\partial q_i} > 0$), то ожидается, что на рост объема кредитования конкуренты будут реагировать также ростом объема кредитования.

Если значение предположительной вариации меньше нуля ($\frac{\partial q_j}{\partial q_i} < 0$), то ожидается, что на рост объема кредитования конкуренты будут реагировать снижением объема кредитования.

В нашей работе предлагаем рассмотреть два случая.

1. В первом случае рассмотрим зависимость суммы объема кредитования банков, составляющих конкурентное окружение, от доли кредитования Сбербанка как крупнейшего игрока на рынке.

В данном случае предположительная вариация будет показывать ожидания Сбербанка относительно объемов кредитования конкурентного окружения. Будем считать, что такая предположительная вариация зависит от суммы долей банков, составляющих конкурентное окружение:

$$\frac{\partial \sum_{j \in N \setminus i} q_j}{\partial q_i} = \begin{cases} a_j + b_j \sum_{j \in N \setminus i} S_j, \\ A_j \sum_{j \in N \setminus i} S_j^{\alpha_j}, \end{cases}$$

где A_j , α_j – коэффициенты степенной регрессии; q_i – объем кредитования Сбербанка; $\sum_{j \in N \setminus i} q_j$ – объем кредитования окружения.

2. Во втором случае рассмотрим зависимости объемов кредитования каждого банка из конкурентного окружения от объема кредитования Сбербанка на рынке.

В данном случае предположительная вариация будет показывать ожидания Сбербанка относительно объемов кредитования каждого банка из конкурентного окружения. Будем считать, что такая предположительная вариация зависит от суммы отношений доли Сбербанка и банка из конкурентного окружения:

$$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = \begin{cases} a_j + b_j \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right), \\ A_j \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right)^{\alpha_j}, \end{cases}$$

где A_j , α_j – коэффициенты степенной регрессии; q_i – объем кредитования Сбербанка; q_j – объем кредитования банка из конкурентного окружения.

Также существует метод поиска предположительных вариаций с помощью функции реакции фирмы путем выражения

суммы предположительных вариаций или способом равновесного решения:

$$\omega_i = \frac{-x + MC_i}{q_i \frac{\partial x}{\partial Q}} - l, \quad l = 1, \dots, n.$$

При помощи этого метода можно проверить корректность нахождения предположительных вариаций.

5. Результаты

Для проведения расчетов необходимо представить объемы кредитования банков и найти рыночные доли этих банков.

В таблице 1 представлены статистические данные об объемах кредитования пяти крупнейших банков России.

Необходимо обратить внимание на то, что на периоды 31.12.2022–31.03.2024 Альфа Банк не выложил в открытый доступ официальную отчетность, поэтому данные за эти периоды были получены на основе прогностической модели на 6 периодов.

Из таблицы можно сделать вывод о том, что с каждым годом банки наращивают объемы кредитования. Так, темп роста объемов кредитования Сбербанка за период с 2016 по 2024 годы составляет 227%, Банка ВТБ 229%, Альфа-Банка 825%, темп роста Т- Банка составил 957%, Россельхозбанка – 72%. Такие результаты могут быть связаны с общим развитием экономики в стране, а также с проведением эффективных банковских стратегий.

На основании данных таблицы рассчитаем значения эластичностей и долей банков и построим графики.

В таблице 2 представлены значения рыночных долей банков Российского банковского рынка по кварталам за 2017–2024 гг.

В таблице 3 приведем значения показателей, необходимых для расчета предположительных вариаций способом равновесного решения, а именно средневзвешенные рыночные процент-

ные ставки (x) [16], издержки i -го банка, а именно Сбербанка (C_i) и предельные издержки i -го банка, Сбербанка, (MC_i).

Представленные в таблице 3 данные используются для расчета предположительных вариаций способом равновесного решения. Рассчитав предположительные вариации двумя способами – при помощи приближенного конечно-разностного аналога производной и способом равновесного решения, – можно получить некоторые выводы.

Таблица 1. Объемы кредитования физических лиц крупнейших банков России (млрд руб.)

Период	Сбербанк	Банк ВТБ	Альфа-Банк	Т-Банк	Россельхозбанк
31.12.2016	5032	2176	176	103	327
30.06.2017	5203	2322	196	121	336
31.12.2017	5717	2486	248	167	363
31.03.2018	5954	2599	266	176	388
30.06.2018	6009	2749	310	190	411
30.09.2018	6420	2663	370	205	430
31.12.2018	6751	2989	405	231	434
31.03.2019	6985	3166	441	284	436
30.06.2019	7277	3300	495	338	449
30.09.2019	7638	3421	549	371	460
31.12.2019	7884	3365	627	377	473
31.03.2020	8194	3493	681	397	478
30.06.2020	8270	3600	689	391	481
30.09.2020	8882	3748	733	407	518
31.12.2020	9102	3867	837	430	563
31.03.2021	9675	4027	884	484	583
30.06.2021	10354	4275	1051	563	608
30.09.2021	11032	4771	1162	604	622
31.12.2021	11078	4765	1032	606	616
31.12.2022	12430	5601	1207	607	590
31.03.2023	12980	5830	1286	683	573
30.06.2023	13928	6123	1368	784	564
30.09.2023	15179	6689	1453	888	562
31.12.2023	16075	6980	1540	972	567
31.03.2024	16478	7163	1630	1089	564

Таблица 2. Доли банков Российского банковского рынка

Период	Рыночные доли Сбербанка	Рыночные доли Банка ВТБ	Рыночные доли Альфа-Банка	Рыночные доли Т-Банка	Рыночные доли Россельхозбанка
31.12.2016	0,64	0,28	0,02	0,01	0,04
30.06.2017	0,64	0,28	0,02	0,01	0,04
31.12.2017	0,64	0,28	0,03	0,02	0,04
31.03.2018	0,63	0,28	0,03	0,02	0,04
30.06.2018	0,62	0,28	0,03	0,02	0,04
30.09.2018	0,64	0,26	0,04	0,02	0,04
31.12.2018	0,62	0,28	0,04	0,02	0,04
31.03.2019	0,62	0,28	0,04	0,03	0,04
30.06.2019	0,61	0,28	0,04	0,03	0,04
30.09.2019	0,61	0,28	0,04	0,03	0,04
31.12.2019	0,62	0,26	0,05	0,03	0,04
31.03.2020	0,62	0,26	0,05	0,03	0,04
30.06.2020	0,62	0,27	0,05	0,03	0,04
30.09.2020	0,62	0,26	0,05	0,03	0,04
31.12.2020	0,62	0,26	0,06	0,03	0,04
31.03.2021	0,62	0,26	0,06	0,03	0,04
30.06.2021	0,61	0,25	0,06	0,03	0,04
30.09.2021	0,61	0,26	0,06	0,03	0,03
31.12.2021	0,61	0,26	0,06	0,03	0,03
31.12.2022	0,65	0,29	0,06	0,03	0,03
31.03.2023	0,65	0,29	0,06	0,03	0,03
30.06.2023	0,65	0,29	0,06	0,04	0,03
30.09.2023	0,65	0,29	0,06	0,04	0,02
31.12.2023	0,65	0,28	0,06	0,04	0,02
31.03.2024	0,65	0,28	0,06	0,04	0,02

Таблица 3. Значения средневзвешенных рыночных процентных ставок, издержек и предельных издержек Сбербанка

Период	Средневзвешенная ставка, x (в долях)	Издержки, C_i (млрд руб.)	Предельные издержки, MC_i (руб./1 руб. кредита)
31.12.2016	0,19	189,85	0,03
30.06.2017	0,18	165,32	0,03
31.12.2017	0,16	140,91	0,03
31.03.2018	0,16	146,88	0,03
30.06.2018	0,16	145,65	0,03
30.09.2018	0,15	158,06	0,03
31.12.2018	0,15	176,22	0,04
31.03.2019	0,15	195,46	0,04
30.06.2019	0,15	205,28	0,04
30.09.2019	0,15	201,76	0,04
31.12.2019	0,14	189,64	0,04
31.03.2020	0,14	164,37	0,04
30.06.2020	0,14	155,47	0,04
30.09.2020	0,13	145,10	0,04
31.12.2020	0,13	131,17	0,05
31.03.2021	0,13	135,16	0,05
30.06.2021	0,13	152,73	0,05
30.09.2021	0,14	173,87	0,05
31.12.2021	0,15	134,37	0,05
31.12.2022	0,17	314,46	0,06
31.03.2023	0,19	243,05	0,06
30.06.2023	0,18	270,28	0,06
30.09.2023	0,19	350,20	0,07
31.12.2023	0,20	526,22	0,07
31.03.2024	0,24	688,89	0,07

Важно отметить, что средневзвешенная ставка кредитования изменяется незначительно, размах равен 0,11 или 11%.

Обратим внимание на первый случай.

Случай 1. Рассчитаем предположительные вариации

$\frac{\partial \sum_{j \in N^i} q_j}{\partial q_i}$ и суммы предположительных вариаций ω_i и внесем результаты в таблицу 4.

Таблица 4. Предположительные вариации Сбербанка об объемах кредитования конкурентного окружения

Период	Объем кредитования Сбербанка (млрд руб.)	Объем кредитования конкурентного окружения (млрд руб.)	Доля кредитования конкурентного окружения	Предположительная вариация, $\frac{\partial \sum_{j \in N \setminus i} q_j}{\partial q_i}$	Суммы предположительных вариаций, ω_i
31.12.2016	5032	2782	0,36	1,11	-
30.06.2017	5203	2975	0,36	0,56	-0,98
31.12.2017	5717	3264	0,36	0,69	-0,98
31.03.2018	5954	3429	0,37	4,08	-0,99
30.06.2018	6009	3660	0,38	0,02	-0,99
30.09.2018	6420	3668	0,36	1,15	-0,99
31.12.2018	6751	4059	0,38	1,13	-0,99
31.03.2019	6985	4327	0,38	0,87	-0,99
30.06.2019	7277	4582	0,39	0,61	-0,99
30.09.2019	7638	4801	0,39	0,17	-0,99
31.12.2019	7884	4842	0,38	0,67	-0,99
31.03.2020	8194	5049	0,38	1,46	-0,99
30.06.2020	8270	5161	0,38	0,41	-0,99
30.09.2020	8882	5406	0,38	1,30	-0,99
31.12.2020	9102	5697	0,38	0,49	-0,99
31.03.2021	9675	5978	0,38	0,76	-0,99
30.06.2021	10354	6497	0,39	0,96	-0,99
30.09.2021	11032	7159	0,39	-3,07	-0,99
31.12.2021	11078	7019	0,39	0,72	-0,99
31.12.2022	12430	8005	0,39	0,67	-0,99
31.03.2023	12980	8372	0,39	0,50	-0,98
30.06.2023	13928	8839	0,39	0,60	-0,98
30.09.2023	15179	9592	0,39	0,52	-0,98
31.12.2023	16075	10059	0,38	0,95	-0,98
31.03.2024	16478	10446	0,39	0,64	-0,98
Коэффициент корреляции между долей кредитования конкурентного окружения и предположительной вариацией			-0,86		

Важно отметить, что практически все предположительные вариации, рассчитанные методом приближенного конечно-

разностного аналога производной, больше нуля, т.е. предполагается, что на снижение объема кредитования Сбербанка банки из числа конкурентного окружения будут реагировать снижением объема кредитования и наоборот.

В то же время предположительные вариации, рассчитанные способом равновесного решения, меньше нуля, т.е. согласно этим расчетам, на снижение объемов кредитования Сбербанка конкурентное окружение должно реагировать ростом объема кредитования и наоборот.

Такое различие может быть связано с тем, что предположительные вариации ω_i получены, исходя из предположения

о равновесии на рынке, а предположительные вариации $\frac{\partial \sum_{j \in N \setminus i} q_j}{\partial q_i}$

отражают фактическую ситуацию на банковском рынке, который в действительности находится в неравновесии.

Коэффициент корреляции между значениями доли кредитования конкурентного окружения и предположительной вариации, рассчитанной методом приближенного конечно-разностного аналога производной, достаточны для построения графиков, поэтому на рис. 2 представим график и проведем линии тренда, характеризующие зависимости.

На графике представлено несколько точек выброса, не характеризующих общую зависимость и не учитываемых при построении регрессионных моделей. Для нахождения коэффициентов регрессионных моделей использовался метод наименьших квадратов. Регрессионные модели предположительных вариаций и коэффициенты детерминации представлены в таблице 5.

Из таблицы можно сделать вывод о том, что степенная регрессионная модель хуже отображает реальную ситуацию на банковском рынке и не может считаться достоверной, так как коэффициент детерминации не превышает 0,7, а расчетный критерий Фишера недостаточно превышает табличное.

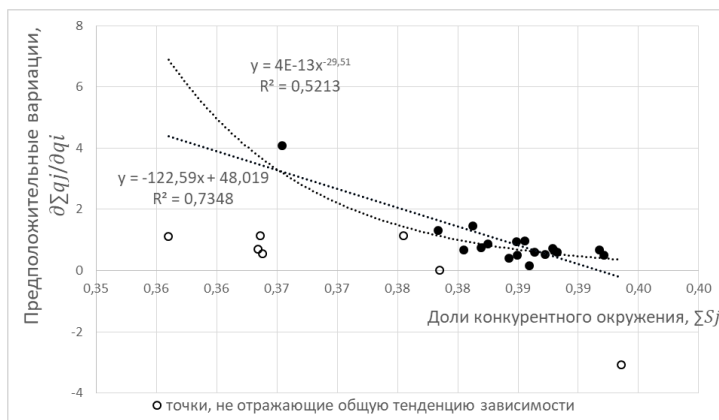


Рис. 2. Предположительные вариации Сбербанка об объемах кредитования конкурентного окружения

Таблица 5. Регрессионные модели предположительных

вариаций $\frac{\partial \sum_{j \in N \setminus i} q_j}{\partial q_i}$

Регрессионная модель	Коэффициент детерминации	Критерий Фишера (расчетный)	Табличное значение критерия Фишера (при уровне значимости 0,05)
$\frac{\partial \sum_{j \in N \setminus i} q_j}{\partial q_i} = -122,59 \sum_{j \in N \setminus i} S_j + 48$	$\frac{R^2 = 0,73}{S_j}$	$F = 44,42$	$F = 2,3$
$\frac{\partial \sum_{j \in N \setminus i} q_j}{\partial q_i} = 4 \cdot 10^{-13} \sum_{j \in N \setminus i} S_j^{-29,54}$	$R^2 = 0,52$	$F = 17,48$	$F = 2,3$

Тем не менее достоверной и адекватной является линейная регрессионная модель, которая показывает, как изменяется предположительная вариация Сбербанка относительно объемов кредитования конкурентного окружения в зависимости от суммы долей банков из конкурентного окружения.

Случай 2. Рассчитаем суммы отношения долей Сбербанка и банков из конкурентного окружения $\left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j}\right)$ и предположительные вариации $\frac{\partial q_j}{\partial q_i}$ для каждого банка и внесем результаты в таблицу 6.

Таблица 6. Суммы отношения долей Сбербанка и банков из конкурентного окружения $\left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j}\right)$ и предположительные вариации Сбербанка $\frac{\partial q_j}{\partial q_i}$

Период	Сумма отношения долей Сбербанка и Банка ВТБ	Предположительная вариация для ВТБ	Сумма отношения долей Сбербанка и Альфа-Банка	Предположительная вариация для Альфа-Банка	Сумма отношения долей Сбербанка и Т-Банка	Предположительная вариация для Т-Банка	Сумма отношения долей Сбербанка и Россельхозбанка	Предположительная вариация для Россельхозбанка
31.12.2016	2,74	0,84	28,63	0,11	48,87	4,81	15,5	0,81
30.06.2017	2,69	0,32	26,58	0,09	43,02	3,39	15,6	0,82
31.12.2017	2,73	0,48	23,10	0,07	34,26	1,29	15,8	1,64
31.03.2018	2,73	2,66	22,43	0,74	33,86	8,32	15,4	6,26
30.06.2018	2,64	-0,22	19,44	0,14	31,66	1,15	14,7	0,68
30.09.2018	2,83	0,95	17,41	0,10	31,35	2,37	15,0	0,18
31.12.2018	2,70	0,75	16,73	0,15	29,26	6,04	15,6	0,14
31.03.2019	2,66	0,46	15,90	0,18	24,64	4,24	16,1	0,72
30.06.2019	2,66	0,34	14,77	0,15	21,58	1,92	16,3	0,50
30.09.2019	2,68	-0,23	13,98	0,30	20,64	0,51	16,7	0,88
31.12.2019	2,77	0,41	12,65	0,17	20,96	1,34	16,7	0,27
31.03.2020	2,77	1,39	12,12	0,11	20,69	-1,65	17,2	0,68
30.06.2020	2,73	0,25	12,09	0,07	21,20	0,56	17,3	1,04
Коэффициенты корреляции	—		-0,88		—		0,7	
30.09.2020	2,79	0,54	12,20	0,45	21,87	2,25	17,2	3,40
31.12.2020	2,78	0,28	10,97	0,08	21,21	1,94	16,2	0,57
31.03.2021	2,82	0,37	11,04	0,23	20,04	2,23	16,7	0,62
30.06.2021	2,83	0,71	9,95	0,16	18,45	1,11	17,1	0,36

Таблица 6 (продолжение)

31.12.2021	2,74	−0,13	9,60	−2,99	18,32	0,79	17,8	−2,33
31.12.2022	2,76	0,60	10,82	0,13	18,34	0,00	18,0	−0,38
31.03.2023	2,67	0,42	10,40	0,14	20,53	2,76	21,1	−0,68
30.06.2023	2,68	0,31	10,19	0,09	19,06	1,95	22,7	−0,23
30.09.2023	2,71	0,45	10,28	0,07	17,82	1,45	24,7	−0,04
31.12.2023	2,71	0,33	10,54	0,10	17,15	1,58	27,1	0,15
31.03.2024	2,74	0,45	10,53	0,22	16,60	4,59	28,4	−0,21
Коэффициенты корреляции	0,85		0,86		0,85		0,83	

Важно отметить, что с отдельными банками складывается такая же ситуация, как и при совокупном рассмотрении банков, составляющих конкурентное окружение. Практически все предположительные вариации больше нуля, т.е. предполагается, что на снижение объема кредитования Сбербанка банки из числа конкурентного окружения будут реагировать снижением объема кредитования и наоборот. При этом примерно половина предположительных вариаций Россельхозбанка за последний период (сентябрь 2020 – март 2024) являются отрицательными, т.е. в половине периодов на рост объема кредитования Сбербанка Россельхозбанк реагировал снижением, т.е. вел себя, как последователь в игре Штакельберга.

Коэффициенты корреляции между значениями достаточны для построения графиков, поэтому на рис. 3–8 представим графики и проведем линии тренда, характеризующие зависимости.

На всех графиках также представлены точки выброса, не характеризующие общую зависимость и не учитываемые при построении регрессионных моделей.

Для Альфа-банка было выявлено два периода, имеющих собственные зависимости: соответственно декабрь 2016 г. – март 2020 г. и июнь 2020 г. – март 2024 г.

Для Россельхозбанка было выявлено два периода, имеющих собственные зависимости: соответственно декабрь 2016 г. – март 2021 г. и июнь 2021 г. – март 2024 г. Более поздний период интересен тем, что большинство предположительных вариаций принимают отрицательное значение.

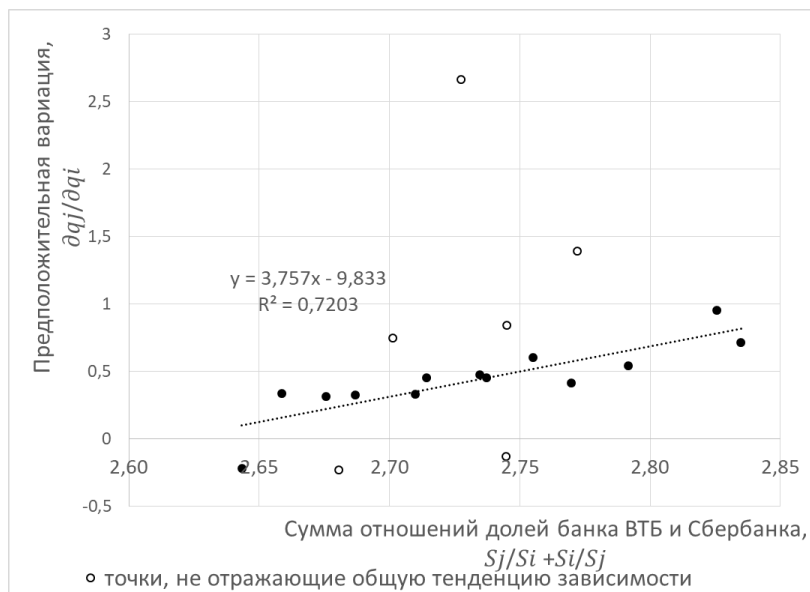


Рис. 3. Предположительные вариации Сбербанка об объемах кредитования банка ВТБ

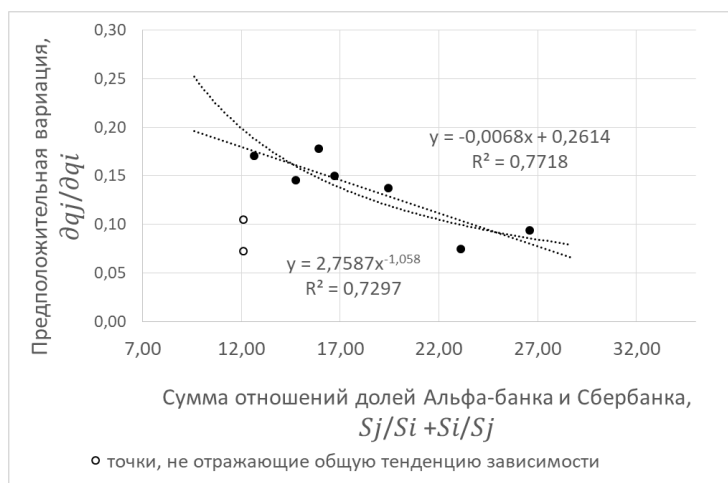


Рис. 4. Предположительные вариации Сбербанка об объемах кредитования Альфа-банка за период 12.2016 – 03.2020

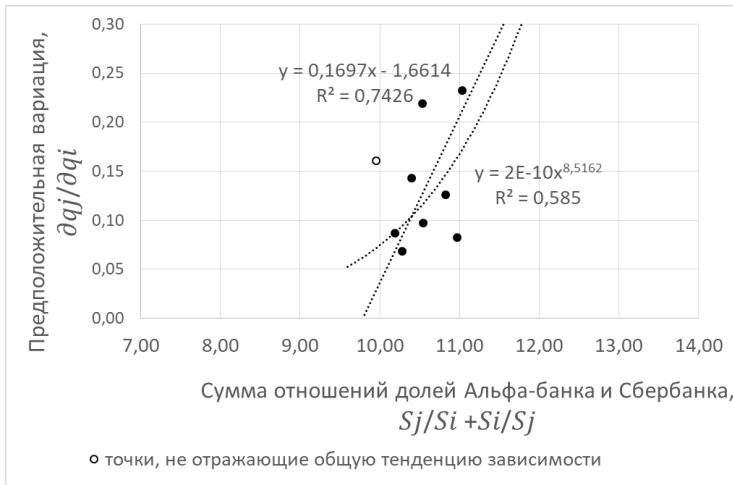


Рис. 5. Предположительные вариации Сбербанка об объемах кредитования Альфа-банка за период 06.2020 – 03.2024

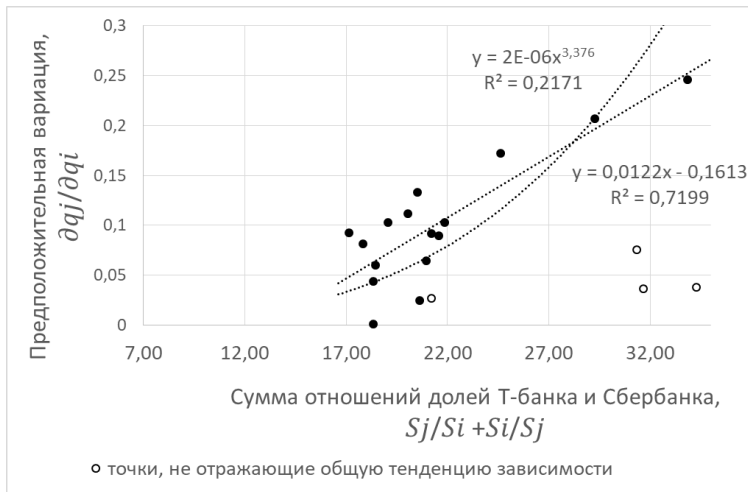


Рис. 6. Предположительные вариации Сбербанка об объемах кредитования Т-банка

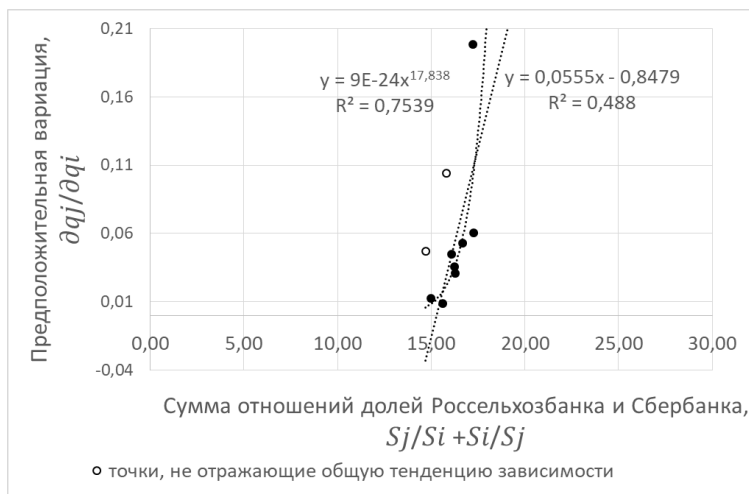


Рис. 7. Предположительные вариации Сбербанка об объемах кредитования Россельхозбанка за период 12.2016 – 03.2021

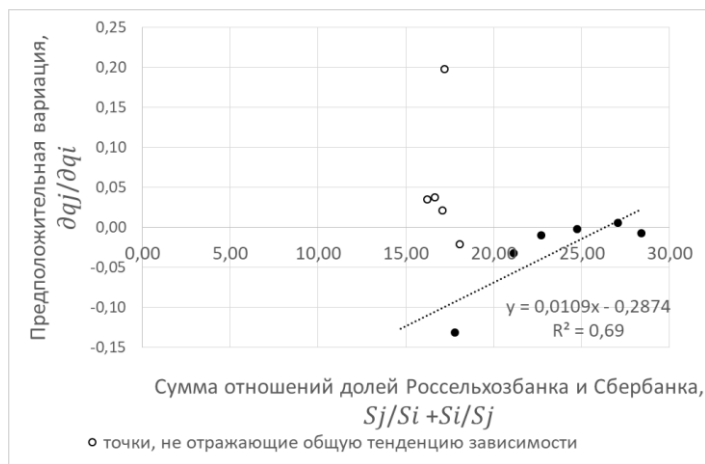


Рис. 8. Предположительные вариации Сбербанка об объемах кредитования Россельхозбанка за период 06.2021 – 03.2024

Регрессионные модели предположительных вариаций и коэффициенты детерминации представлены в таблице 7. Из-за то-

го, что некоторые предположительные вариации приняли отрицательное значение, не для всех банков оказалось возможным построить степенные функции зависимости.

Таблица 7. Рессионные модели предположительных вариаций $\frac{\partial q_j}{\partial q_i}$

Банк	Период	Регрессионная модель	Коэффициент детерминации	Критерий Фишера (расчетный)	Табличное значение критерия Фишера (при уровне значимости 0,05)
ВТБ	12.2016 – 03.2024	$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 3,76 \cdot \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right) - 9,83$	$R^2 = 0,72$	$F = 28,3$	$F = 2,77$
Альфа-Банк	12.2016 – 03.2020	$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = -0,007 \cdot \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right) + 0,2614$	$R^2 = 0,77$	$F = 16,9$	$F = 4,88$
		$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 2,76 \cdot \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right)^{-1,06}$	$R^2 = 0,73$	$F = 13,5$	$F = 4,88$
	06.2020 – 03.2024	$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = -0,17 \cdot \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right) - 1,66$	$R^2 = 0,74$	$F = 20,2$	$F = 3,7$
		$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 2 \cdot 10^{-10} \cdot \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right)^{8,52}$	$R^2 = 0,59$	$F = 9,87$	$F = 3,7$
Т-Банк	12.2016 – 03.2024	$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 0,01 \cdot \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right) - 0,16$	$R^2 = 0,72$	$F = 36$	$F = 2,4$
		$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 2 \cdot 10^{-10} \cdot \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right)^{3,38}$	$R^2 = 0,28$	$F = 3,88$	$F = 2,4$
Рос-сельхоз банк	12.2016 – 03.2021	$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 0,06 \cdot \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right) - 0,85$	$R^2 = 0,49$	$F = 5,72$	$F = 4,15$
		$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 9 \cdot 10^{-24} \cdot \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right)^{17,8}$	$R^2 = 0,75$	$F = 18,3$	$F = 4,15$
	06.2021 – 03.2024	$\frac{\partial q_j}{\partial q_i} = 0,01 \cdot \left(\frac{S_j}{S_i} + \frac{S_i}{S_j} \right) - 0,29$	$R^2 = 0,69$	$F = 8,9$	$F = 6,16$

Из таблицы можно сделать вывод о том, что степенные регрессионные модели не могут считаться достоверными, так как коэффициенты детерминации не превышает 0,7, а расчетные критерии Фишера недостаточно превышают табличное. Тем не менее достоверными и адекватными являются линейные регрессионные модели.

Таким образом, были определены механизмы реагирования агентов рынка на кредитном банковском рынке России, другими словами, были исследованы предполагаемые агентом изменения действий контрагентов. Сформулированы регрессионные модели, позволяющие выявить влияние объемов выдачи кредитов банками на поведение лидирующего банка России.

6. Заключение

Таким образом, был описан олигополистический рынок с точки зрения действий игроков на этом рынке. Были рассмотрены работы авторов, изучающих олигополистический рынки и применяющих в своих исследованиях метод предположительных вариаций. Был представлен расчет индекса Герфиндаля – Хиршмана, который показал, что кредитный банковский рынок РФ является олигополистическим.

Тем не менее после рассмотрения и определения механизмов реагирования агентов рынка на кредитном банковском рынке России и расчета предположительных вариаций двумя способами невозможно сделать однозначный вывод о том, что кредитный банковский рынок является олигополистическим.

Во-первых, рассчитанные разными способами предположительные вариации крупнейшего банка на рынке о поведении конкурентного окружения имеют разные знаки. В случае расчета способом приближенного конечно-разностного аналога производной предположительные вариации положительные, что означает, что на снижение объема кредитования Сбербанка банки из числа конкурентного окружения реагируют снижением объема кредитования и наоборот. А в случае расчета способом равновесного решения предположительные вариации меньше нуля, т.е. на снижение объемов кредитования Сбербанка конку-

рентное окружение реагирует ростом объема кредитования и наоборот.

Во-вторых, размах ставок кредитования мал, что может давать малый наклон функции спроса, не соответствующий олигополистическому рынку, что также может приводить к полученным результатам значений предположительных вариаций.

Также в работе были сформулированы регрессионные модели, позволяющие выявить зависимости предположительных вариаций Сбербанка от фактических показателей рынка. В первом случае была обнаружена зависимость предположительных вариаций Сбербанка о действиях конкурентного окружения от суммы долей банков из конкурентного окружения. Во втором случае были обнаружены зависимости предположительных вариаций Сбербанка о действиях каждого банка из конкурентного окружения от суммы отношения долей Сбербанка и банков из конкурентного окружения.

Литература

1. ГЕРАСЬКИН М.И. *Влияние функций спроса и издержек на предположительные вариации в игре олигополии* // Математические методы в технологиях и технике. – 2024. – №2. – С. 45–48.
2. ГЕРАСЬКИН М.И. *Обзор новейших достижений в теории игр олигополии* // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №6. – С. 3–25.
3. ГЕРАСЬКИН М.И. *Объемные предположительные вариации в играх олигополии при различных функциях спроса и издержек и многоуровневом лидерстве* // Автоматика и телемеханика. – 2024. – №7. – С. 73–90.
4. ДЖЕЙЛИ ДЖ.А., РЕНИ Ф.ДЖ. *Микроэкономика. Продвинутый уровень*. – М.: ИД ГУ ВШЭ, 2011.
5. ФИЛАТОВ А.Ю. *Неоднородность поведения фирм на олигопольном рынке: стратегические фирмы и ценополучатели* // Изв. Иркутского гос. универ. – 2015. – Т. 13. – С. 72–83.
6. УГОЛЬНИЦКИЙ Г.А., УСОВ А.Б. *Сравнительный анализ эффективности способов организации взаимодействия*

- экономических агентов в моделях дуополии Курно с учётом экологических условий // Автоматика и телемеханика. – 2023. – №2. – С. 150–168.
7. AIZENBERG N.I., ZORKAL'TSEV V.I., MOKRYI I.V. *Study of unsteady oligopoly markets* // J. Appl. Industr. Math. – 2017. – Vol. 11, No. 1. – P. 8–16.
 8. ALGAZIN G.I., ALGAZINA Y.G. *To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models* // Autom. Remote Control. – 2022. – Vol. 83, No. 3. – P. 367–388.
 9. BOWLEY A.L. *The Mathematical Groundwork of Economics*. OXFORD: Oxford Univers. Press, 1924.
 10. CORNES R., FIORINI L.C., MALDONADO W.L. *Expectational stability in aggregative games* // Journal of Evolutionary Economics. – 2021. – Vol. 31, No. 1. – P. 235–249.
 11. FEDYANIN D.N. *Monotonicity of equilibriums in Cournot competition with mixed interactions of agents and epistemic models of uncertain market* // Proc. Comp. Sci. – 2021. – No. 186. – P. 411–417.
 12. GERASKIN M.I. *The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model* // Autom. Remote Control. – 2020. – Vol. 81, No. 6. – P. 1051–1072.
 13. GERAS'KIN M.I., CHKHARTISHVILI A.G. *Structural modeling of oligopoly market under the nonlinear functions of demand and agents' costs* // Autom. Remote Control. – 2017. – Vol. 78, No. 2. – P. 332–348.
 14. HIRSCHMAN A. *National Power and the Structure of Foreign Trade*. – University of California press, 1945. – P. 175.
 15. https://alfabank.ru/about/annual_report/reporting/ (дата обращения 03.04.2025).
 16. https://cbr.ru/statistics/bank_sector/int_rat/ (дата обращения 03.04.2025).
 17. <https://www.gazprombank.ru/about/disclosure/> (дата обращения 03.04.2025).
 18. https://ir.open.ru/reports?from=main_footer (дата обращения 03.04.2025).

19. <https://www.psbank.ru/bank/investors/ras> (дата обращения 03.04.2025).
20. <https://www.rosbank.ru/o-banke/raskrytie-informacii/otchetnost/> (дата обращения 03.04.2025).
21. <https://www.rshb.ru/about/reports-conclusion/msfo> (дата обращения 03.04.2025).
22. <https://rspp.ru/upload/uf/230/yr-sber-ar20-rus.pdf> (дата обращения 03.04.2025).
23. https://rspp.ru/upload/uf/742/sberbank_co_2015.pdf (дата обращения 03.04.2025).
24. https://www.sberbank.com/common/img/uploaded/files/info/fi_01-01-2011_jsd0an2w.pdf (дата обращения 03.04.2025).
25. https://www.sberbank.com/common/img/uploaded/files/info/sberbank_ral_2012.pdf (дата обращения 03.04.2025).
26. https://www.sberbank.com/common/img/uploaded/files/info/sberbank_ral_2013.pdf (дата обращения 03.04.2025).
27. <https://www.sberbank.com/common/img/uploaded/files/info/img-130160455-0001.pdf> (дата обращения 03.04.2025).
28. https://www.sberbank.com/common/img/uploaded/files/info/noarchive-ru/word_rus_ye2016_y.pdf (дата обращения 03.04.2025).
29. https://www.sberbank.com/common/img/uploaded/files/info/word_rus_ye17-04fteet.pdf (дата обращения 03.04.2025).
30. https://www.sberbank.com/common/img/uploaded/files/info/ifrs2018/_sberbank_ifrs-ye2018-rus_.pdf (дата обращения 03.04.2025).
31. <https://www.sberbank.com/common/img/uploaded/redirected/com/ghosa2020/docs/sberbank-ar19-rus.pdf> (дата обращения 03.04.2025).
32. https://www.sberbank.com/common/img/uploaded/files/info/2022_ifrs_reporting.pdf (дата обращения 03.04.2025).
33. <https://www.tinkoff.ru/about/investors/11/> (дата обращения 03.04.2025).
34. <https://www.vtb.ru/ir/statements/results/> (дата обращения 03.04.2025).

35. JULIEN L.A. *On noncooperative oligopoly equilibrium in the multiple leader–follower game* // *Europ. J. Operat. Res.* – 2017. – Vol. 256, No. 2. – P. 650–662.
36. KANIESKI DA SILVA B., TANGER S., MARUFUZZAMAN M. et al. *Perfect assumptions in an imperfect world: Managing timberland in an oligopoly market* // *Forest Policy Econ.* – 2022. – No. 137. – P. 102691.
37. LO C.F., YEUNG C.F. *Quantum Stackelberg oligopoly* // *Quantum Inform. Proc.* – 2022. – Vol. 21, No. 3. – P. 85.
38. OUGOLNITSKY G., GORBANEVA O. *Sustainability of Inter-twined Supply Networks: A Game-Theoretic Approach* // *Games.* – 2022. – Vol. 13, No. 3. – P. 35.
39. SINGH N., VIVES X. *Price and Quantity Competition in a Differential Duopoly* // *Rand J. Econom.* – 1984. – Vol. 15. – P. 546–554.
40. ZHOU X., PEI Z., QIN B. *Assessing Market Competition in the Chinese Banking Industry Based on a Conjectural Variation Model* // *China and World Economy.* – 2021. – Vol. 29, No. 2. – P. 73–98.

EMPIRICAL ANALYSIS OF INTERACTIONS OF PLAYERS OF THE RUSSIAN OLIGOPOLY BANKING MARKET BASED ON CONJECTURAL VARIATIONS

Maria Ivanova, Samara University, Samara, Postgraduate Student (ivanova.mv@ssau.ru).

Abstract: The oligopolistic Russian market of bank lending to individuals is considered from the point of view of interaction of players. The Herfindahl-Hirschman index is calculated, proving that the Russian banking market is oligopolistic. The interaction of large banks is described using volumetric hypothetical variations, that is, players' assumptions about the influence of their actions on the behavior of competitors regarding the volumes of loans issued to individuals. Volumetric hypothetical variations in the work are calculated on the basis of empirical data. Statistical data for calculations are taken from official reports of banks. In this case, two cases are considered. In the first case, hypothetical variations of the largest oligopolist in the market in relation to the competitive environment, that is, to other market players or to other banks, are considered. In the second case, hypothetical variations of the largest oligopolist in relation to each individual competitor, that is,

a bank, are considered. For both cases, the dependences of the players' volumetric hypothetical variations on the shares of banks' lending volumes are presented. The main result obtained is that the largest bank's volumetric hypothetical variations are positive, i.e., competitors will respond to the bank's expansion of lending volumes by expanding their own lending volumes and vice versa.

Keywords: banks, personal lending, conjectural variations, oligopoly.

УДК 330.4
ББК 65.053

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии М.И. Гераськиным.*

*Поступила в редакцию 05.04.2025.
Опубликована 31.07.2025.*

РОЛЬ ЛОКАЛЬНЫХ СТРУКТУРНЫХ ПАТТЕРНОВ В ПРОЦЕССАХ ФОРМИРОВАНИЯ МНЕНИЙ В СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЯХ

Черевичная Н.В.¹

(Московский физико-технический институт, Москва)

Козицин И.В.²

(ФГБУН Институт проблем управления

им. В.А. Трапезникова РАН, Москва,

Московский физико-технический институт, Москва)

Существенный пласт агент-ориентированных моделей социального влияния, начиная с моделей Френча – Харари – ДеГроота и Избирателя, описывает процессы изменения мнений как последовательность локальных взаимодействий агентов, при которых мнение фокального агента – объекта влияния – изменяется в зависимости от его текущего мнения и мнений его окружения, взятых с некоторыми весами. Эти веса отражают влияние агентов и могут зависеть от их социального положения, демографических характеристик, а также от силы связей между агентами. Вместе с тем в конструирующих социологических теориях (теория социальных эпидемий, теория структурной близости, теория структурного разнообразия) постулируется, что сила влияния может варьироваться в зависимости от состава окружения агента, а также структуры связей внутри него. В настоящей работе проводится проверка данных теорий на примере лонгитюдных данных из социальной сети ВКонтакте, описывающих динамику мнений крупномасштабной выборки пользователей (~ 6 500 000) относительно политической повестки. Мы изучаем влияние со стороны пользователей, имеющих радикальные политические (консервативные или либеральные) взгляды на людей с умеренными взглядами. Показано, что рост числа друзей с радикальными взглядами способствует увеличению силы влияния. При этом рост плотности связей в большинстве случаев либо не имеет эффекта на силу влияния, либо стабильно приводит к снижению силы влияния, что согласуется с результатами теории структурного разнообразия.

Ключевые слова: модели формирования мнений, социальные сети, модель ДеГроота, теория социальных эпидемий, структурное разнообразие.

¹ Наталья Владимировна Черевичная, студент (cherevichnaia.nv@phystech.edu).

² Иван Владимирович Козицин, к.ф.-м.н., с.н.с. (kozisin.ivan@mail.ru).

1. Введение

Понимание механизмов формирования мнений и того, как информация, поступающая из нашего социального окружения, в том числе онлайн, меняет эти мнения, необходимо для разработки эффективных стратегий управления социальными системами. Области приложения являются политические кампании, государственное управление, маркетинг и противодействие социо-культурным угрозам.

Уже более полувека подобными вопросами занимаются ученые из различных областей, в том числе политологи, социологи, психологи, а также специалисты в области математического моделирования. На пересечении их сфер деятельности возникло отдельное направление, занимающееся разработкой моделей социального влияния. В таких моделях, как правило, рассматриваются агенты¹, имитирующие людей или группы людей, которые взаимодействуют друг с другом и меняют свои мнения на основании наперед заданных правил. В результате таких микро-взаимодействий макро-свойства социальной системы могут претерпевать существенные изменения, а сама система может переходить к консенсусу, поляризации или фрагментации [6].

Существенный пласт агент-ориентированных моделей социального влияния, начиная с классических моделей Френча – Харари – ДеГроота [5, 7, 10] (далее в целях экономии будем использовать наименование «модель ДеГроота» как наиболее часто встречающееся в литературе) и Избирателя [4], описывает процессы изменения мнений как последовательность локальных взаимодействий агентов, при которых мнение фокального агента – объекта влияния – изменяется в зависимости от его текущего мнения и мнений его окружения, взятых с некоторыми весами. К примеру, в модели ДеГроота мнения агентов меняются в дискретном времени согласно протоколу

¹ Необходимо упомянуть также модели, в которых описание системы происходит только на макро-уровне, в терминах макро-показателей общественного мнения. К ним, в частности, относятся эпидемиологические модели [23], а также модели протестной активности [19].

$$x(t+1) = Wx(t),$$

где $x(t)$ – вектор мнений агентов в момент времени t (его i -я компонента $x_i(t) \in [-1, 1]$ ¹ описывает отношение агента i к некоторой сущности, например, законопроекту, и принадлежит отрезку $[-1, 1]$, где полюса -1 и 1 выражают отрицательное и положительное отношение соответственно, а 0 – нейтральное), а W – квадратная матрица, компоненты которой – так называемые веса влияний – формализуют то, с какой силой агенты влияют друг на друга. Эти веса отражают влияние агентов и могут зависеть от их социального положения, демографических характеристик, а также от силы социальных связей между агентами. Однако явная зависимость между значениями весов влияний и структурой социальных связей в такого рода моделях не прописывается. Тем не менее эмпирические исследования указывают на то, что структурная близость, измеряемая, например, числом общих друзей, способствует росту уровня доверия [1, 8].

Вместе с тем в теории социальных эпидемий было показано, что вероятность совершить некоторое действие (к примеру, зарегистрировать аккаунт в социальной медиа-платформе) растет (с убывающей отдачей) с ростом числа друзей, уже совершивших это действие [11]. Более поздние исследования показали, что ключевым фактором является не столько число “инфицированных” вершин в окружении, сколько количество изолированных связных «инфицированных» групп вершин (одна вершина также считается группой) – так называемое структурное разнообразие [22].

¹ В случае одномерного скалярного мнения сам промежуток не имеет значения, поскольку модель инвариантна относительно линейного преобразования промежутка мнений на вещественной оси. При этом в рамках рассматриваемой динамики мнения агентов не выходят за пределы начального промежутка. Отметим также, что постановка, связанная со скалярными мнениями, рассматривалась Френчем [7], в то время как ДеГроот изучал мнения, описываемые векторами-распределениями, выражающими оценку агентом некоторой неизвестной (дискретной) величины.

В связи с этим возникает следующий вопрос: каким образом структурные паттерны окружения человека и, в частности, структурное разнообразие влияют на то, как люди воспринимают мнения своего окружения?

В данной работе для ответа на поставленный вопрос проводится анализ лонгитюдных данных (данных, полученных путем повторяющихся во времени измерений одной и той же выборки объектов) высокой гранулированности о динамике политических взглядов и социальных связей пользователей сети ВКонтакте, характеризующейся высокой популярностью в Российской Федерации. Систематически исследуется, каким образом структурные паттерны окружения пользователя влияют на динамику его взглядов.

2. Постановка задачи и теоретические основания

Поясним постановку задачи, а также конкурирующие социологические теории, при помощи иллюстративных примеров. Далее для обозначения окружения агента в социальном графе будем использовать термин «эго-граф». Отметим, что под эго-графом понимается не только множество соседей вершины в социальной сети, но также и связи между этими вершинами. В онлайн-овых социальных сетях эго-графом можно считать аккаунты, на которые подписан пользователь, а также связи между этими аккаунтами.

Пусть некоторый агент с умеренными взглядами (в терминах модели ДеГроота это означает, что $x_i \approx 0$) находится под влиянием своего окружения, состоящего из приверженцев одних и тех же, пусть радикальных взглядов (к примеру, $x_j \approx 1$). В первом случае пусть его окружение состоит только из одного агента (рис. 1а), во втором – из двух (рис. 1б), не связанных друг с другом, в третьем – из трех, не связанных друг с другом (рис. 1в), а в четвертом – из трех, двое из которых являются друзьями (рис. 1г). С точки зрения «наивного» агрегирования мнений, которое применяется в моделях типа ДеГроота [2, 18, 20], все эти четыре конфигурации идентичны, так как во всех четырех

случаях среднее мнение эго-графа фокального агента составляет ≈ 1 . С точки зрения классических положений теории социальных эпидемий сила влияния должна расти с ростом числа носителей радикальных взглядов в окружении (максимум достигается для конфигураций, представленных на рис. 1в,г) [11, 3]. Если же в расчет брать фактор структурной близости [1, 8], то тогда наибольшее влияние фокальный агент испытывает в четвертом случае (рис. 1г), так как с двумя из трех агентов своего эго-графа у него есть по одному общему знакомому. Однако с точки зрения теории структурного разнообразия влияние в третьем случае (рис. 1в) выражено сильнее, чем в четвертом, так как окружение агента состоит из трех структурных групп (каждая группа есть одна вершина) [22].

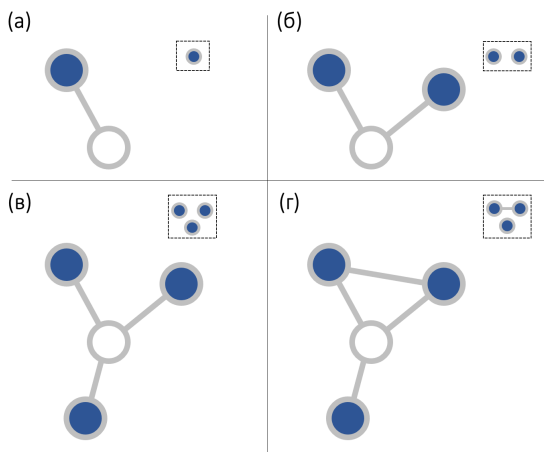


Рис. 1. Примеры, иллюстрирующие различные эго-графы агента с умеренными взглядами (белые вершины), состоящего из агентов с радикальными взглядами (синие вершины). В пунктирных рамках схематично изображены соответствующие конфигурации эго-графов

3. Данные и методы

Рассматривается блок данных из социальной сети ВКонтакте, датируемый 2019 годом. В марте (t_1) и сентябре (t_2) этого года было сделано два снимка выборки V из $N = 6\,553\,120$ аккаунтов активных пользователей данной социальной медиа-платформы. Под активными понимаются те пользователи, которые посещали ВКонтакте хотя бы раз в неделю в течение рассматриваемого промежутка времени. Помимо этого для построения выборки применялись следующие фильтры:

- Аккаунт не закрыт настройками приватности.
- Локация аккаунта – Россия.
- Указан возраст не менее 18 лет.
- Число подписок на информационные источники (публичные страницы, аккаунты блогеров¹) лежит в промежутке от 10 до 200.
- Аккаунт не является блогером.

Данные фильтры позволили сфокусироваться на совершеннолетних пользователях из России (если верить информации, указанной на их страницах), которые достаточно регулярно посещают социальную сеть, не являются производителями информации и имеют умеренное количество подписок на информационные источники. Четвертый фильтр был выявлен эмпирическим путем в результате наладки алгоритма оценивания политических взглядов пользователей ВКонтакте на основании данных из их профилей. Данный алгоритм искусственного интеллекта, предложенный в работе [13], оценивает мнения в непрерывной политической шкале от 0 (поддержка действующей власти) до 1 (поддержка оппозиции) на основании информационных источников, на которые подписан пользователь, путем их свертки с некоторыми весами, определенными на стадии обучения алгоритма. В основе алгоритма лежит модель логистической регрессии.

¹ Блогерами являются пользователи, имеющие не менее 1000 подписчиков. В ВКонтакте связь «подписка» является односторонней, связь «дружба» – двусторонней. Наличие связи позволяет видеть в новостной ленте информацию, которую публикует другой пользователь.

Изначально данный алгоритм был настроен на более детальную шкалу – контекст выборов Президента РФ 2018 года (см. работу [13]). Тем не менее в рамках дальнейшего анализа в той же работе было обнаружено, что точность оценки мнений (с учетом размерности задачи) существенно повышается, если рассматривать только два полюса мнений – «либералы» (сторонники А.А. Навального¹) и «консерваторы» (сторонники действующего Президента Российской Федерации В.В. Путина и лидеров так называемой системной оппозиции).

Пятый фильтр был использован для того, чтобы гарантировать независимость графа дружеских связей (см. далее) от оценок мнений пользователей, поскольку блогеры могут выступать не только в качестве маркеров мнений пользователей, но и в качестве друзей.

Отметим, что используемая технология формирования выборки пользователей может привести к систематическим искажениям, влияющим на результаты исследования. К примеру, потенциальная корреляция между радикальностью взглядов пользователей и желанием скрыть свой профиль при помощи настроек приватности или иными способами [12] может способствовать появлению «необъяснимых» с точки зрения стороннего наблюдателя изменений мнений у видимых наблюдателю пользователей (на самом деле, спровоцированных влиянием со стороны «скрытых» пользователей с радикальными взглядами).

Для более подробного ознакомления с блоком данных см. работы [15, 16].

Необходимо сказать, что точность данного алгоритма снижается в случае работы с профилями пользователей, у которых мало или, наоборот, много подписок на информационные источники. Данный результат допускает содержательную интерпретацию. Аномальное число подписок свойственно ботам, которые в социальных сетях преследуют цели, отличные от естественно-го потребления информации. В случае аккаунтов реальных людей

¹ Лицо, внесенное Росфинмониторингом в перечень террористов и экстремистов.

небольшое число подписок может свидетельствовать об отсутствии как такового интереса к потреблению информации.

Помимо оценок политических взглядов (далее будем обозначать их символом x) для каждого пользователя $i \in V$ были сделаны два снимка его друзей в ВКонтакте: V_{i,t_1} и V_{i,t_2} . На основе этих снимков были построены два графа дружеских связей. Их анализ показал, что эти графы не являются связными и включают группы пользователей и одиночных пользователей, изолированные от остальной выборки. Вместе с тем в графах было выявлено наличие гигантской компоненты связности – связного подграфа, включающего в себя подавляющую долю пользователей (в данном случае $\approx 96\%$ вершин). В рамках дальнейшего анализа рассматривалась именно эта выборка, включающая $N = 6\,288\,083$ вершин. Для удобства при работе с ней будем использовать те же обозначения, что и ранее для основной выборки.

Выделение гигантской компоненты связности, помимо отсеивания вершин, не имеющих друзей, для которых дальнейший анализ паттернов социального влияния не имел бы смысла, отчасти позволило сократить количество ботов в выборке, поскольку, согласно работе [9], боты имеют тенденцию занимать периферию социальных графов.

Для каждого пользователя $i \in V$ в каждый из двух рассматриваемых моментов времени t_1 и t_2 на основе непрерывных оценок мнений $x_{i,t_1}, x_{i,t_2} \in [0, 1]$ были построены также дискретные оценки согласно следующему дискретизирующему правилу:

$$z_{i,t} = \begin{cases} C, & x_{i,t} < 0,33, \\ M, & 0,33 \leq x_{i,t} < 0,66, \\ L, & 0,66 \leq x_{i,t}. \end{cases}$$

Таким образом, были выделены три «политические» группы: консерваторы (C), умеренные (M) и либералы (L). Эти названия являются условными и не претендуют на политологическую строгость.

Далее для каждого пользователя $i \in V$ были определены чис-

ленности групп среди его друзей, имеющих мнения C, M и L :

$$\begin{aligned} n_{i,t}^C &= \#V_{i,t}^C, \quad \text{где } V_{i,t}^C = \{j \in V_{i,t} \mid z_{j,t} = C\}, \\ n_{i,t}^M &= \#V_{i,t}^M, \quad \text{где } V_{i,t}^M = \{j \in V_{i,t} \mid z_{j,t} = M\}, \\ n_{i,t}^L &= \#V_{i,t}^L, \quad \text{где } V_{i,t}^L = \{j \in V_{i,t} \mid z_{j,t} = L\}. \end{aligned}$$

При этом для каждой из групп $V_{i,t}^C, V_{i,t}^M, V_{i,t}^L$ было рассчитано количество дружеских связей внутри подграфа, индуцированного данной группой: $d_{i,t}^C, d_{i,t}^M, d_{i,t}^L$ (т.е. число связей внутри группы) соответственно. К примеру, если в окружении пользователя три вершины с умеренными взглядами, при этом две из них соединены ребром, то тогда рассматриваемый показатель равен единице (при максимальном значении $\frac{3(3-1)}{2} = 3$):

$$n_{i,t}^C = 3, \quad d_{i,t}^C = 1.$$

Данные метрики позволяют однозначно определить конфигурацию связей внутри рассматриваемых групп вершин при условии, что группа состоит не более чем из трех вершин. Для большего числа вершин в группе это уже не так. Пусть, к примеру, группа консерваторов состоит из четырех вершин и между этими вершинами расположены два ребра ($n_{i,t}^C = 4, d_{i,t}^C = 2$). Таким показателям может соответствовать сразу две конфигурации: одна состоит из двух пар друзей, не связанных друг с другом, а во второй присутствует вершина, не знакомая с тремя остальными. При дальнейшем анализе рассматривались группы вершин, состоящие из не более чем трех элементов.

В качестве зависимой переменной было назначено изменение мнения пользователя $x_{i,t_2} - x_{i,t_1} \in [-1, 1]$ (в непрерывном спектре), а объясняющей переменной выступала конфигурация социального окружения с дополнительным контролем его структуры, а также текущего мнения пользователя.

4. Результаты

В качестве отправной точки анализа выступило построенное зависимости медианного значения распределения переменной $x_{i,t_2} - x_{i,t_1}$ от количества друзей с либеральными взглядами и числа связей между ними. При этом рассматривались только

пользователи с умеренным мнением ($z_{i,t_1} = M$), в чьем окружении нет носителей консервативных взглядов (число носителей умеренных взглядов и структура их связей при этом не контролировались). Также из рассмотрения были вычеркнуты те пользователи, у которых среднее мнение друзей (в непрерывном спектре) изменилось более чем на 0,05 за рассматриваемый промежуток времени. Это позволило контролировать эффект влияния со стороны третьих лиц [21].

Для попавших в фокус пользователей, в соответствии с результатами, представленными в работах [14, 16], следовало ожидать положительных значений зависимого переменного. Иными словами, умеренные мнения под действием социального влияния со стороны носителей либеральных взглядов должны сдвигаться в правую часть непрерывного спектра мнений, также становясь более либеральными. Однако сами значения $x_{i,t_2} - x_{i,t_1}$ должны быть при этом невелики по модулю (в указанных работах было обнаружено, что люди относительно медленно меняют свои взгляды). Саму магнитуду изменения мнения можно считать количественной оценкой эффекта конформизма или силы влияния, направленного на пользователя: чем больше значение $x_{i,t_2} - x_{i,t_1}$, тем сильнее выражен данный эффект.

На рис. 2 приведены соответствующие зависимости. Статистически различающиеся «соседние» распределения зависимой переменной обозначены «*» ($P < 0,05$), для сравнения распределений применялся U -критерий Манна – Уитни, поскольку критерий Шапиро – Уилка показал, что данные распределения не являются нормальными ($P < 0,05$). Распределение для $n_{i,t_1}^L = 0$ меньше, чем для $n_{i,t_1}^L = 1$. Для остальных распределений визуально определяемая разница медианных значений распределения зависимого переменного однозначно определяет, какое из распределений больше. Цветовая кодировка (серый или бордовый цвет стрелок) будет прокомментирована далее.

Из рис. 2 можно сделать вывод, что увеличение числа друзей с мнением L стабильно способствует росту зависимого переменного, а значит, силе эффекта конформизма. Эффект числа связей

наблюдается лишь для случая, когда в окружении пользователя три вершины имеют либеральные взгляды и выглядит противоречиво: можно отметить как рост зависимого переменного (при переходе от $d_{i,t_1}^L = 0$ к $d_{i,t_1}^L = 1$), так и его уменьшение (переход от $d_{i,t_1}^L = 2$ к $d_{i,t_1}^L = 3$).

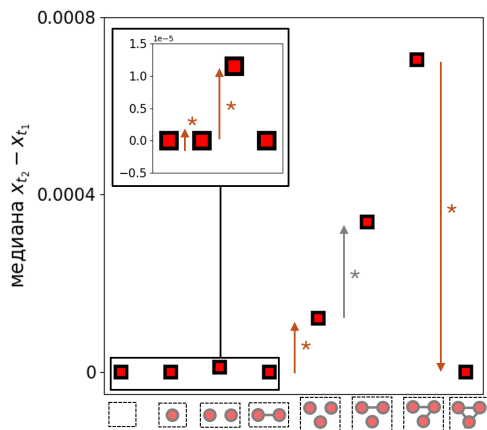


Рис. 2. Зависимость медианного значения распределения $x_{i,t_2} - x_{i,t_1}$ для пользователей с умеренными взглядами от структуры связей окружения с либеральными взглядами при условии, что в окружении нет пользователей с консервативными взглядами

Аналогичная зависимость при $n_{t_1}^L = 0$ и варьируемых $n_{t_1}^C$ и d_{i,t_1}^C приведена на рис. 3. Отметим, что данный случай зеркален рассмотренному ранее на рис. 2 в том смысле, что уже снижение значения зависимого переменного $x_{i,t_2} - x_{i,t_1}$ может быть проинтерпретировано как увеличение силы социального влияния со стороны мнения R . U -критерий Манна – Уитни показал, что все соседние распределения на этом рисунке статистически различны ($P < 0,05$). При этом обозначение «***» подразумевает $P < 0,001$. Из рис. 3 следует, что и рост числа друзей с консервативными взглядами, и рост количества связей между ними способствуют снижению значения зависимого переменного и,

тем самым, росту влияния со стороны данной группы. Исключения: переход от $n_{t_1}^C = 2, d_{i,t_1}^C = 1$ к $n_{t_1}^C = 3, d_{i,t_1}^C = 0$ (увеличение числа друзей, имеющих консервативные взгляды, с двух до трех, с одновременным уменьшением внутренней связности) и от $n_{t_1}^C = 3, d_{i,t_1}^C = 2$ к $n_{t_1}^C = 3, d_{i,t_1}^C = 3$ (рост числа внутренних связей с 2 до 3 среди трех друзей с консервативными взглядами). Отдельно был проведен тест для распределений при $n_{t_1}^C = 2, d_{i,t_1}^C = 0$ и $n_{t_1}^C = 3, d_{i,t_1}^C = 0$, который не выявил статистически значимой разницы ($P = 0,31$).

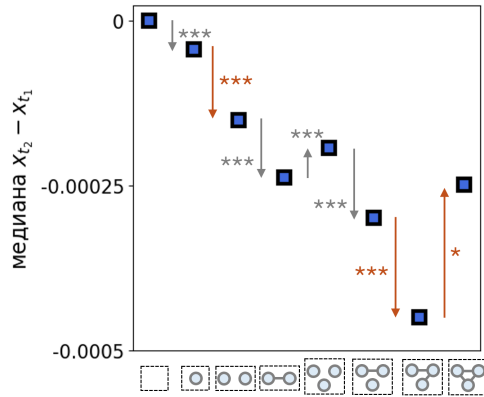


Рис. 3. Зависимость медианного значения распределения $x_{i,t_2} - x_{i,t_1}$ для пользователей с умеренными взглядами от структуры связей консервативного окружения при условии, что в окружении нет пользователей с либеральными взглядами

Рассмотренные зависимости не учитывают эффект влияния со стороны друзей с нейтральными взглядами, которые могут выступать в качестве «якоря» для пользователя с такими же взглядами и тем самым препятствовать трансформации его мнения. Также при построении представленных на рис. 2 и 3 результатов не учитывался тот факт, что при дискретизации непрерывных мнений различия во мнениях между некоторыми пользователями могли быть «затерты», что потенциально могло повлиять на дальнейший анализ. К примеру, рост или уменьшение зависимо-

го переменного при увеличении того или иного показателя могут быть обусловлены статистически значимыми различиями в исходных, непрерывных, мнениях, которые затем исчезли при дискретизации. В связи с этим была проведена проверка робастности полученных результатов, в рамках которой для каждой пары «соседних» распределений на рис. 2 и 3 при помощи метода наименьших квадратов была обучена модель линейной регрессии. В качестве зависимой переменной выступало изменение мнения фокального пользователя $x_{i,t_2} - x_{i,t_1}$. В качестве объясняющих факторов рассматривались, во-первых, величины $n_{t_1}^L$ и d_{i,t_1}^L (при $n_{t_1}^C = 0$) или $n_{t_1}^C$ и d_{i,t_1}^C (при $n_{t_1}^L = 0$), формализованные при помощи dummy-кодирования, когда под каждую комбинацию кодируемых переменных создается дополнительная переменная, принимающая два значения: 0 или 1, и выступающая индикатором того, что кодируемые переменные принимают значения, соответствующие данной комбинации. В этом случае значение «резервной» переменной полагается равным единице. Также в качестве объясняющих переменных рассматривались:

- Текущее мнение фокального агента в непрерывном спектре x_{i,t_1} .
- Число его друзей с умеренным мнением n_{i,t_1}^M .
- Число связей между ними d_{i,t_1}^M .
- Среднее мнение друзей с либеральными (при $n_{t_1}^C = 0$) или консервативными (при $n_{t_1}^L = 0$) взглядами в непрерывном спектре.

На рис. 2 и 3 бордовым цветом выделены те «соседние» распределения, для которых dummy-фактор конфигурации окружения оказался статистически значимым ($P < 0,05$).

По результатам данного анализа можно сделать следующие выводы:

- Рисунок 2 с учетом проведенной проверки робастности свидетельствует о том, что, при прочих равных условиях, число не связанных друг с другом друзей с либеральными взглядами имеет ключевую роль в том, как эти друзья влияют на пользователя, способствуя росту уровня конформизма.

– При этом рост связности таких друзей, т.е. уменьшение структурного разнообразия негативно влияют на силу конформизма.

– Рисунок 3 свидетельствует о том, что число не связанных друг с другом друзей с консервативными взглядами имеет положительный эффект на силу конформизма, однако не такой выраженный, как в случае влияния со стороны друзей с либеральными взглядами.

– Рост связности может приводить как к увеличению, так и к снижению уровня конформизма.

Полученные результаты скорее свидетельствуют в пользу теории социальных эпидемий: рост числа друзей с данными взглядами усиливает их влияние. Не было выявлено устойчивого положительного эффекта плотности связей на силу влияния. Напротив, было обнаружено, что замыкание открытого триплета (когда граф из трех вершин, соединенных двумя ребрами, превращается в полный граф путем добавления недостающего ребра) стабильно приводит к снижению эффекта влияния, что согласуется с результатами работы [22].

Отметим, что в настоящей работе для оценки степени восприимчивости ко влиянию использовалась иная метрика, чем в [22]: изменение мнения, описываемое непрерывной величиной, а не вероятность совершить действие.

Также заметим, что не учитывались альтернативные механизмы влияния, распространенные в литературе по моделям социального влияния [20], например, механизм ограниченного доверия, при котором влияние со стороны «удаленных» мнений ослабевает [17]. Для рассмотрения такого типа влияния необходимо более атомизированное деление пространства мнений, чем то, что рассматривалось в настоящей работе.

5. Заключение

В данной работе проведен анализ влияния структурных паттернов эго-графов на процессы формирования мнений пользователей социальной медиа-платформы ВКонтакте. Мы изучали

влияние со стороны пользователей, имеющих радикальные политические (консервативные или либеральные) взгляды, на людей с умеренными взглядами. При этом мы не рассматривали ситуации, когда в окружении пользователя одновременно присутствуют носители противоположных взглядов. Также не были изучены случаи, когда число друзей с консервативными или либеральными взглядами больше чем 3.

Мы обнаружили, что рост числа друзей с радикальными взглядами способствует увеличению силы влияния. При этом рост плотности связей в большинстве случаев либо не имеет эффекта на силу влияния, либо – при замыкании открытого триплета (когда граф из трех вершин, соединенных двумя ребрами, превращается в полный граф путем добавления недостающего ребра) – стабильно приводит к снижению силы влияния, что согласуется с результатами теории структурного разнообразия.

В дальнейших исследованиях планируется рассмотреть конфигурации эго-графов пользователей с большим числом вершин (четыре или более) и включающие вершины с противоположными взглядами.

Литература

1. ARAL S., WALKER D. *Tie strength, embeddedness, and social influence: A large-scale networked experiment* // Management Science. – 2014. – Vol. 60, No. 6. – P. 1352–1370. – DOI: 10.1287/mnsc.2014.1936.
2. BURE V., PARILINA E., SEDAKOV A. *Consensus in social networks with heterogeneous agents and two centers of influence* // Int. Conf. Stability and Control Processes in Memory of V.I. Zubov (SCP–2015). – IEEE, 2015. – P. 233–236. – DOI: 10.1109/SCP.2015.7342113.
3. CENTOLA D. *The spread of behavior in an online social network experiment* // Science. – 2010. – Vol. 329. – No. 5996. – P. 1194–1197. – DOI: 10.1126/science.1185231.

4. CLIFFORD P., SUDBURY A. *A model for spatial conflict* // Biometrika. – 1973. – Vol. 60, No. 3. – P. 581–588. – DOI: 10.1093/biomet/60.3.581.
5. DEGROOT M.H. *Reaching a consensus* // Journal of the American Statistical Association. – 1974. – Vol. 69, No. 345. – P. 118–121. – DOI: 10.1080/01621459.1974.10480137.
6. FLACHE A. et al. *Models of social influence: Towards the next frontiers* // Jasss-The Journal of Artificial Societies and Social Simulation. – 2017. – Vol. 20, No. 4. – P. 2. – DOI: 10.18564/jasss.3521.
7. FRENCH JR J.R.P. *A formal theory of social power* // Psychological Review. – 1956. – Vol. 63, No. 3. – P. 181–194. – DOI: 10.1037/h0046123.
8. GEZHA V.N., KOZITSIN I.V. *The effects of individuals' opinion and non-opinion characteristics on the Organization of Influence Networks in the online domain* // Computers. – 2023. – Vol. 12, No. 6. – P. 116. – DOI: 10.3390/computers12060116.
9. GONZALEZ-BAILON S., DE DOMENICO M. *Bots are less central than verified accounts during contentious political events* // Proc. of the National Academy of Sciences. – 2021. – Vol. 118, No. 11. – P. e2013443118. – DOI: 10.1073/pnas.2013443118.
10. HARARY F. *A criterion for unanimity in French's theory of social power* // In: D. Cartwright (Ed.) *Studies in social power*. – 1959. – P. 168–192.
11. KAIRAM S.R., WANG D.J., LESKOVEC J. *The life and death of online groups: Predicting group growth and longevity* // Proc. of the fifth ACM Int. Conf. on Web Search and Data Mining. – 2012. – P. 673–682. – DOI: 10.1145/2124295.2124374.
12. KOEHLER D. *The radical online: Individual radicalization processes and the role of the Internet* // Journal for Deradicalization. – 2014. – No. 1. – P. 116–134.

13. KOZITSIN I.V. et al. *Modeling political preferences of russian users exemplified by the social network Vkontakte* // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2020. – Vol. 12. – P. 185–194. – DOI: 10.1134/S2070048220020088.
14. KOZITSIN I.V. *Formal models of opinion formation and their application to real data: evidence from online social networks* // The Journal of Mathematical Sociology. – 2022. – Vol. 46, No. 2. – P. 120–147. – DOI: 10.1080/0022250X.2020.1835894.
15. KOZITSIN I.V. *A general framework to link theory and empirics in opinion formation models* // Scientific Reports. – 2022. – Vol. 12, No. 1. – P. 5543. – DOI: 10.1038/s41598-022-09468-3.
16. KOZITSIN I.V. *Opinion dynamics of online social network users: a micro-level analysis* // The Journal of Mathematical Sociology. – 2023. – Vol. 47, No. 1. – P. 1–41. – DOI: 10.1080/0022250X.2021.1956917.
17. LIU S. et al. *Job Done? New Modeling Challenges After 20 Years of Work on Bounded-Confidence Models* // JASSS. – 2023. – Vol. 26, No. 4. – P. 8.
18. PARSEGOV S.E. et al. *Novel multidimensional models of opinion dynamics in social networks* // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2016. – Vol. 62, No. 5. – P. 2270–2285. – DOI: 10.1109/TAC.2016.2613905.
19. PETROV A., AKHREMENKO A., ZHEGLOV S. *Dual Identity in Repressive Contexts: An Agent-Based Model of Protest Dynamics* // Social Science Computer Review. – 2023. – Vol. 41, No. 6. – P. 2249–2273. – DOI: 10.1177/08944393231159953.
20. PROSKURNIKOV A.V., TEMPO R. *A tutorial on modeling and analysis of dynamic social networks. Part I* // Annual Reviews in Control. – 2017. – Vol. 43. – P. 65–79. – DOI: 10.1016/j.arcontrol.2017.03.002.
21. SNIJDERS T.A.B. *Stochastic actor-oriented models for network dynamics* // Annual Review of Statistics and its Application. – 2017. – Vol. 4, No. 1. – P. 343–363. – DOI:

- 10.1146/annurev-statistics-060116-054035.
22. UGANDER J. et al. *Structural diversity in social contagion* // Proc. of the National Academy of Sciences. – 2012. – Vol. 109, No. 16. – P. 5962–5966. – DOI: 10.1073/pnas.1116502109.
23. ZHU K., YING L. *Information source detection in the SIR model: A sample-path-based approach* // IEEE/ACM Trans. on Networking. – 2014. – Vol. 24, No. 1. – P. 408–421. – DOI: 10.1109/TNET.2014.2364972.

THE ROLE OF THE STRUCTURAL PROPERTIES OF LOCAL NETWORKS IN OPINION FORMATION

Natalya Cherevichanya, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Student (cherevichnaia.nv@phystech.edu).

Ivan Kozitsin, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, PhD, Senior Researcher, Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Assistant Professor (kozitsin.ivan@mail.ru).

Abstract: Many agent-based models of social influence, starting with the classical French – Harary – DeGroot and Voter models, describe the opinion formation processes as a sequence of local subsequent interactions between agents, in which the focal agent's opinion (influence object) updates subject to its current state and the opinions of the social surrounding, which are taken with certain weights. These weights reflect how influential agents are and may depend on their social status, demographic characteristics, and the strength of ties between agents. At the same time, parallel sociological theories (the theory of social epidemics, the theory of structural proximity, the theory of structural diversity) postulate that the strength of influence can vary depending on the composition of the agent's social environment, as well as the structure of connections herein. In this paper, we test these competing theories using longitudinal data from the social network VKontakte. These data describe the opinion dynamics of a large-scale sample of users (~ 6 500 000) on a political topic. We study how users with radical political (conservative or liberal) views influence people with moderate opinions. We show that an increase in the number of friends with radical views leads to an increase in influence strength. At the same time, an increase in the density of connections in most cases either has no effect influence strength or consistently leads to a decrease in influence strength, a result that supports the theory of structural diversity.

Keywords: opinion dynamics models, social networks, DeGroot model,

social contagion theory, structural diversity.

УДК 519.7

ББК 22.18

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.В. Мазаловым.*

Поступила в редакцию 27.01.2025.

Дата опубликования 31.07.2025.

ЭФФЕКТЫ НАУЧЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ОСИПОВА – ЛАНЧЕСТЕРА

Новиков Д. А.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Традиционно в моделях Осипова – Ланчестера, описывающих динамику численности сражающихся сторон в терминах дифференциальных уравнений, боевая эффективность сторон считается постоянной во времени. В настоящей работе рассматривается роль научения – модификации линейных и квадратичных моделей Осипова – Ланчестера, учитывающие два эффекта: однократный ввод первоначально проигрывающей стороной подготовленного резерва и приобретение сторонами боевого опыта, влияющего на коэффициенты боевой эффективности. Решены задачи определения оптимального момента ввода такого резерва, чтобы его величина была минимальна, но обеспечивала «ничью»; поиска минимальной скорости научения первоначально проигрывающей стороны, также обеспечивающей «ничью»; и определения оптимальной продолжительности подготовки резерва до его ввода.

Ключевые слова: математическое моделирование, модели Осипова – Ланчестера, боевая эффективность, ввод резервов, научение.

1. Введение

Ключевыми вехами математического моделирования военных действий XX века являются модели М.П. Осипова и Ф. Ланчестера, затем - количественные (в основном вероятностные) методы оценки боевой эффективности различных видов вооружения (см. краткий обзор в [4]), получившие активное развитие начиная с 1939 г. (т.е. с начала Второй Мировой войны) и приведшие к формированию такого самостоятельного научного направления как *исследование операций* (см., например, классические учебники [3, 4, 13, 17] и современные учебники [31, 38]). Современное состояние приложений исследования операций к военному делу отражено в [12].

Настоящая работа рассматривает модификации линейных и квадратичных моделей Осипова – Ланчестера, учитывающие два эффекта: однократный ввод резерва первоначально проиг-

¹ Дмитрий Александрович Новиков, академик РАН, директор (novikov@ipu.ru).

рывающей стороной и приобретение опыта, влияющего на коэффициенты боевой эффективности сторон. Ищутся ответы на вопросы: в какой момент следует вводить резерв, чтобы величина этого резерва была минимальна, но обеспечивала «ничью», и какова должна быть минимальная скорость научения первоначально проигрывающей стороны, также обеспечивающая «ничью».

Структура изложения такова: во втором разделе приводится краткий обзор и классификация моделей Осипова – Ланчестера и их модификаций. Третий раздел посвящен описанию эффектов приобретения опыта, четвертый раздел – задаче об оптимальном моменте ввода резерва, в том числе подготовленного.

2. Модели Осипова – Ланчестера

Общеизвестными и получившими широкое развитие являются так называемые модели Осипова – Ланчестера (с приоритетом нашего соотечественника [15, 19]), использующие аппарат дифференциальных уравнений для описания динамики численности сил участников военных конфликтов – см. модель Ланчестера [34] и ее развитие (см. обзоры в [13, 27, 40]). Приведем их описание и классификацию, актуализировав соответствующие разделы статьи [14].

Пусть имеются две противоборствующие стороны. Обозначим через $x(t)$ ($y(t)$) *численность войск* первой (второй) стороны в момент времени $t \geq 0$. Начальные условия (численности в нулевой момент времени) – x_0 и y_0 соответственно. Скорость изменения численности войск каждой из сторон определяется тремя факторами:

- операционными потерями (пропорциональными численности своих войск);
- боевыми потерями (пропорциональными численности войск противника или произведению численностей войск обеих сторон);
- вводом резервов (выводом в резерв).

Обычное сражение описывается следующей системой дифференциальных уравнений (слагаемые соответствуют вышеперечисленным факторам):

$$(1) \quad \dot{x}(t) = -a x(t) - b y(t) + u(t),$$

$$(2) \quad \dot{y}(t) = -c x(t) - d y(t) + v(t),$$

где a , b , c и d – положительные константы, $u(t)$ и $v(t)$ – темпы ввода резервов.

Аналогично описывается *партизанская война*:

$$(3) \quad \dot{x}(t) = -a x(t) - g x(t) y(t) + u(t),$$

$$(4) \quad \dot{y}(t) = -d y(t) - h x(t) y(t) + v(t),$$

где g и h – положительные константы, и *смешанная война*:

$$(5) \quad \dot{x}(t) = -a x(t) - g x(t) y(t) + u(t),$$

$$(6) \quad \dot{y}(t) = -c x(t) - d y(t) + v(t).$$

Модели отличаются учетом боевых потерь. Предполагается, что в обычном сражении каждая сторона в единицу времени поражает число противников, пропорциональное своей численности: коэффициенты b и c , называемые *коэффициентами боевой эффективности*, могут интерпретироваться как число выстрелов, производимое одним сражающимся в единицу времени, умноженное на вероятность поражения одним выстрелом одного противника (именно такую модель первоначально и предложил Ф. Ланчестер в [34]).

Другой тип сражения – «партизанский», или «стрельба по площадям», когда потери противника зависят как от интенсивности огня, так и от концентрации его войск, что отражается «смешанными» слагаемыми, пропорциональными произведению численностей войск обеих сторон $x(t) y(t)$. Существует и другая (так называемая *дуэльная*) интерпретация модели (3)–(4), в соответствии с которой сражение рассматривается как война в древнем мире – набор индивидуальных попарных поединков между воинами (в условиях невозможности локализации и концентрации поражающих факторов).

Можно говорить не о типах сражений, а о типах ведения огня:

- 1) прицельный огонь по рассредоточенным целям;
- 2) прицельный огонь по сосредоточенным целям;
- 3) стрельба по площадям [8].

Отметим, что возможно рассмотрение более общих моделей, т.е. таких, в которых скорости изменения численностей

пропорциональны произведению численностей, возведенных в определенные степени (эти степени могут быть и дробными – так называемые фрактальные модели Ланчестера [36]).

Следует подчеркнуть, что выше речь идет только о традиционном оружии (боевых единицах с низкой вероятностью поражения в отдельном выстреле): применение современного высокоточного оружия, робототехнических средств должно описываться другими моделями, развитие которых представляется чрезвычайно перспективным.

Самым простым (ставшим хрестоматийным) является случай отсутствия операционных потерь и резервов, когда (1)–(2) превращается в

$$(7) \quad \dot{x}(t) = -b y(t), \quad \dot{y}(t) = -c x(t).$$

Решением системы (7) является так называемая *квадратичная модель* динамики численности войск:

$$(8) \quad b (y^2(t) - y_0^2) = c (x^2(t) - x_0^2).$$

Траекториями (8) в координатах (x, y) будут гиперболы (прямая при $b y_0^2 = c x_0^2$ – так называемое *условие ничьей* или «равенства сил»). Проигравшей будет сторона, чья численность войск первая обратится в ноль (поэтому Ланчестеровские модели иногда называют *моделями истощения*). Если $b y_0^2 > c x_0^2$, то побеждает вторая сторона, при $b y_0^2 < c x_0^2$ побеждает первая. *Условие равенства сил* имеет вид

$$(9) \quad y_0 = \sqrt{\frac{c}{b}} x_0.$$

Следует отметить некоторую условность выражений типа (9), которые не учитывают известного факта, что существует определенный критический процент потерь, при которых сторона отказывается от продолжения боя (см. , например, [12]).

По аналогии, рассмотрев (3)–(4) в отсутствие операционных потерь и резервов, получим

$$(10) \quad \dot{x}(t) = -g x(t) y(t), \quad \dot{y}(t) = -h x(t) y(t).$$

Решением системы (10) является так называемая *линейная модель* динамики численности войск – прямая

$$g (y(t) - y_0) = h (x(t) - x_0),$$

а условием «равенства сил» –

$$(11) y_0 = \frac{h}{g} x_0.$$

Для линейной модели из условия (11) можно получить следующее выражение численности войск первой стороны, оставшейся после победы над противником:

$$(12) x(x_0, y_0) = x_0 - \delta y_0,$$

где $\delta = g/h$ – отношение коэффициентов боевой эффективности соответственно второй и первой сторон в модели (3)–(4) или (10). В силу линейности выражения (12) исход боя определяется только начальными количествами войск и отношением δ и не зависит от того, как стороны разделили свои войска на части, какие части сражаются с какими и в какой последовательности. В рамках модели (7) ситуация становится несколько более разнообразной [14].

Смешанная война (см. (5)–(6)) в отсутствие операционных потерь и резервов описывается

$$(13) \dot{x}(t) = -g x(t) y(t), \quad \dot{y}(t) = -c x(t).$$

Решением системы (13) является $g (y^2(t) - y_0^2) = 2 c (x(t) - x_0)$. Результаты идентификации модели (13) для действия регулярных войск против партизанских движений приведены в [26].

Модель Осипова – Ланчестера имеет массу вариаций и обобщений:

- оптимизация распределения (разделения на части) сил обороны и нападения [37];
- введение переменных (зависящих от времени) коэффициентов боевой эффективности [39] и других параметров [24];
- рассмотрение дискретных моделей залпового огня [32];
- учет неопределенности (стохастических факторов) [6, 18];
- многоуровневые модели [23], в которых на нижнем уровне методом Монте-Карло имитируется взаимодействие отдельных боевых единиц, на среднем уровне взаимодействие описывается марковскими моделями, а на верхнем (агрегированном, детерминированном) уровне используются дифференциальные уравнения [41]. Такой подход удобен для идентификации реальных

задач и более адекватного учета специфики конкретной моделируемой ситуации;

- рассмотрение дифференциальных игр, в которых управлениями игроков являются темпы ввода резервов $u(t)$ и $v(t)$, а критериями эффективности – разность между численностями войск в заданный момент времени [22];

- анализ моделей длительных (многостадийных) конфликтов с учетом ввода резервов [1, 16, 17, 33];

- модели агрегированного описания театра военных действий, состоящего из нескольких областей, сражения в каждой из которых описываются квадратичным законом Ланчестера [25] (учет и оптимизация распределения сил и средств в пространстве и во времени (см. обзор в [36], а также модели многостадийных конфликтов);

- модели военных конфликтов нескольких сторон [10, 21] с использованием нескольких видов вооружений [30] и оптимизацией их соотношений [9] и др.

Множество работ посвящено идентификации конфликтов (подбору параметров модели) [11, 20, 28, 29 и др.]. Модели Осипова – Ланчестера являются хрестоматийным содержимым многих учебников по исследованию операций и математическим моделям в военном деле [12, 42].

Добавление в уравнения типа Осипова – Ланчестера управляющих переменных (отражающих ввод резервов, распределение сил и средств и т.д. [5]) приводит уже к оптимизационным моделям, в том числе к соответствующим задачам оптимального управления. Перспективным представляется использование подобного «надстроечного» подхода для перехода к иерархиям моделей – теоретико-игровым «надстройкам» над Ланчестеровскими моделями [14].

Перейдем к постановкам новых задач. Предположим для определенности, что начальные численности и боевые эффективности сторон таковы, что побеждает первая сторона. Так как при заданных уравнениях динамики результат зависит только от начальных численностей и коэффициентов боевой эффективности, то у второй стороны есть лишь два способа обеспечить ничью или победить:

1) повысить свою боевую эффективность;

2) ввести в действие резерв (будем предполагать, что ввести резерв можно однократно).

Рассмотрим эти два способа сначала поодиночке, а затем совместно.

3. Роль опыта

В классических моделях Осипова – Ланчестера предполагается, что боевая эффективность сторон постоянна во времени. Однако если их взаимодействие имеет место достаточно продолжительное время, то участники приобретают *опыт*¹ (боевой и/или учебный, см. обзор и классификацию математических моделей формирования опыта в [1]), изменение которого может отражаться возрастающей зависимостью боевой эффективности от времени. Предположим, что вторая сторона приобретает боевой опыт в соответствии со следующим законом (соответственно для модели (7) или (10)):

$$(14) \quad b(t) = b_{\infty} - (b_{\infty} - b_0) e^{-\alpha t} \quad \text{или} \quad g(t) = g_{\infty} - (g_{\infty} - g_0) e^{-\alpha t},$$

где b_0 – начальное, b_{∞} – предельное ($b_{\infty} > b_0$) значения боевой эффективности второй стороны, $\alpha > 0$ – *скорость научения* [1].

Задача о минимальной скорости научения заключается в том, чтобы для заданного момента времени $\tau > 0$ найти минимальное значение скорости научения $\alpha \geq 0$ второй стороны², обеспечивающее совпадение численностей сторон в этот момент времени (и, в силу монотонности (14) по времени, приводящее к победе второй стороны). В каждом конкретном случае эта задача легко решается численно.

¹ Применительно к боевым действиям научение понимается в самом широком смысле: повышение эффективности боевых формирований за счет совершенствования их организационно-штатных структур, поставки новых образцов вооружения и военной техники, проведения учений и тренировок и т.д. и т.п.

² Ситуации, в которых опыт приобретают одновременно обе стороны, описываются и исследуются аналогично.

Рассмотрим два примера о роли приобретения второй стороной опыта, соответственно в линейной и квадратичной моделях.

Пример 1 (линейная модель). Пусть динамика численности войск описывается выражением (10) с постоянными боевыми эффективностями $g = 0,001$ и $h = 0,001$, а начальные значения численностей войск $x_0 = 130$, $y_0 = 100$. При одинаковых боевых эффективностях второй стороне «не хватает» сил для победы, и ее силы исчерпываются к моменту, когда первая сторона имеет еще 30 единиц (см. непрерывную кривую и точку A на рис. 1).

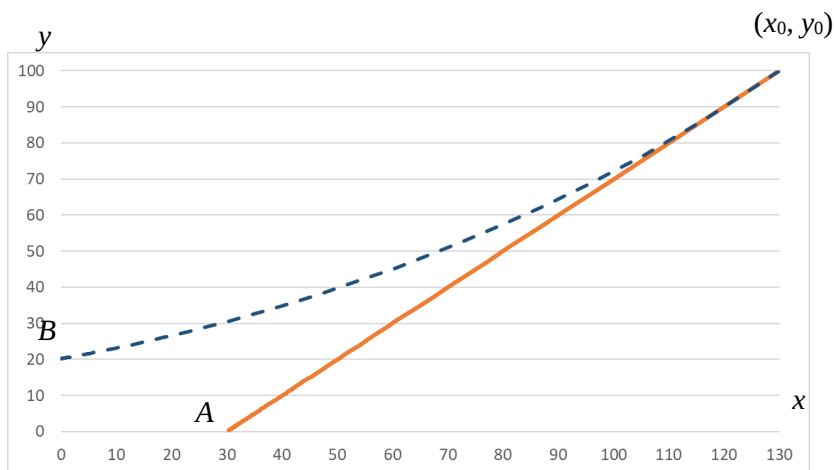


Рис. 1. Пример победы второй стороны (пунктирная кривая) за счет приобретения боевого опыта в модели (10)

Пусть в рассматриваемом примере боевая эффективность второй стороны $g(t)$ растет со временем в соответствии с выражением (14), где $g_0 = 0,001$, $g_\infty = 0,004$, $\alpha = 0,04$. Тогда побеждает вторая сторона: у нее остаются 20 единиц к моменту, когда силы первой стороны исчерпываются (см. пунктирную кривую и точку B на рис. 1).

Решение задачи о минимальной скорости научения при $\tau = 172$: $\alpha \approx 0,0013$.

Если условием завершения боя является достижение сторонами определенного процента потерь убитыми и ранеными

(а не нулевой численности), то решение принципиально не изменится.

Пример 2 (квадратичная модель). Пусть динамика численности войск описывается выражением (7) с постоянными боевыми эффективностями $b = 0,015$ и $c = 0,01$, а начальные значения численностей войск $x_0 = 130$, $y_0 = 100$. Несмотря на более высокую боевую эффективность, второй стороне «не хватает» сил для победы и ее силы исчерпываются к моменту (см. также выражение (23) ниже), когда первая сторона имеет еще 43 единицы (см. непрерывную кривую и точку A на рис. 2).

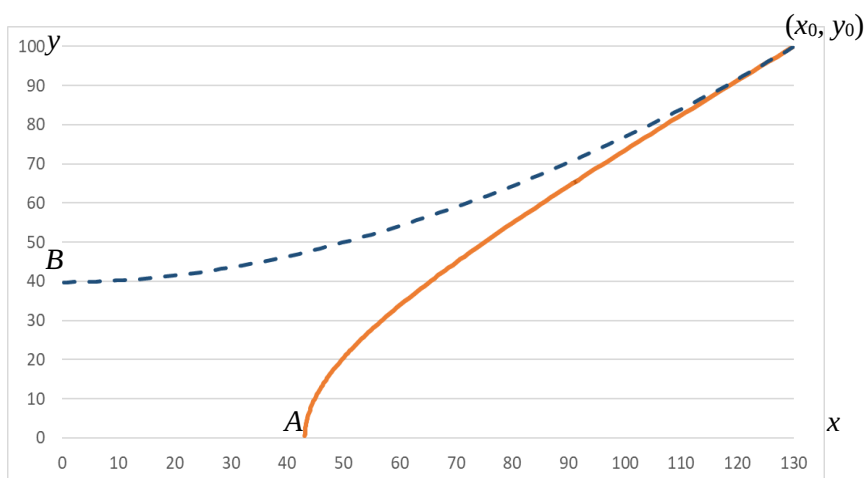


Рис. 2. Пример победы второй стороны (пунктирная кривая) за счет приобретения боевого опыта в модели (7)

Пусть в рассматриваемом примере боевая эффективность второй стороны $b(t)$ растет со временем в соответствии с выражением (14), где $b_0 = 0,015$, $b_\infty = 0,06$, $\alpha = 0,005$. Тогда побеждает вторая сторона: у нее остаются 40 единиц к моменту, когда силы первой стороны исчерпываются (см. пунктирную кривую и точку B на рис. 1).

Решение задачи о минимальной скорости научения при $\tau = 172$: $\alpha \approx 0,0093$.

Завершив рассмотрение примеров, отметим, что, во-первых, легко убедиться, что не всегда (не при всех соотношениях параметров) существует значение скорости научения второй стороны, обеспечивающее совпадение численностей сторон в заданный момент времени.

Во-вторых, рассматриваемые модели легко переформулировать для задачи о моменте оптимального (для той или иной стороны) момента начала сражения, до которого одна сторона при фиксированной своей численности повышает боевую эффективность (за счет учений, инженерных мероприятий и т.п.), а вторая имеет возможность увеличить численность за счет подхода резервов.

В настоящем разделе рассмотрен случай, когда опыт приобретают участвующие в сражении войска второй стороны. В следующем разделе анализируются модели, в которых боевые эффективности первоначально введенных в сражение войск не меняются со временем, а опыт, начиная с момента начала сражения, приобретает только резерв второй стороны.

4. Задача об оптимальном моменте ввода резерва

Задача об оптимальном моменте ввода резерва заключается в том, чтобы найти минимальный резерв $\Delta \geq 0$ второй стороны и момент его ввода (до момента полного истощения – обращения в ноль численности – этой стороны), обеспечивающие «ничью» (одновременное обращение в ноль численностей обеих сторон или достижение ими определенного процента потерь).

Линейная модель. Для модели (10) условие ничьей имеет вид $g(y_0 + \Delta) = h x_0$. В силу линейности условия равенства сил (см. выше) $g(y(t) - y_0) = h(x(t) - x_0)$ *минимальный размер резерва не зависит от момента его введения (!)* и равен

$$(15) \Delta_L = \frac{h}{g} x_0 - y_0.$$

Обозначив через $\rho = h x_0 - g y_0$, запишем решение системы (10) [40]:

$$(16) \quad x(t) = \frac{\rho x_0}{h x_0 - g y_0 \exp(-\rho t)},$$

$$(17) \quad y(t) = \frac{\rho y_0}{h x_0 \exp(\rho t) - g y_0}.$$

Если имеет место приобретение резервом второй стороны опыта (функция $g(t)$ для него является неубывающей, т.е. считаем, что резерв приобретает опыт за счет, например, учений, обобщения результатов сражающихся частей и т.д.), то из (15) следует, что *резерв ей следует вводить максимально подготовленным* – как можно позже, т.е. в момент t_L обращения в $\varepsilon > 0$ (неравенство строгое, так как численность проигрывающей стороны стремится к нулю асимптотически, оставаясь строго положительной – см. (17); величина $(y_0 - \varepsilon)/y_0$ может рассматриваться как максимально выдерживаемая второй стороной доля потерь) численности первоначально задействованных второй стороной сил, где, как следует из выражений (16)–(17):

$$t_L(\varepsilon) = \frac{1}{\rho} \ln \left[\frac{y_0 (\rho + \varepsilon g)}{\varepsilon h x_0} \right].$$

Сформулируем полученные результаты в виде утверждений.

Утверждение 1. В линейной модели (10) с постоянными боевыми эффективностями минимальный размер резерва (15) не зависит от момента его введения.

Утверждение 2. В линейной модели (10) с приобретением опыта минимальный размер резерва $\frac{h}{g(t_L(\varepsilon))} x_0 - y_0$ достигается при максимально возможно ε -позднем его введении.

Квадратичная модель. Обозначив через $a = \sqrt{bc}$ произведение боевых эффективностей сторон (и используя введенное выше обозначение $\gamma = b/c$), запишем решение системы (7) [4, 40]:

$$(18) \quad x(t) = x_0 \operatorname{ch}(a t) - y_0 \sqrt{\gamma} \operatorname{sh}(a t),$$

$$(19) y(t) = y_0 \operatorname{ch}(a t) - \frac{x_0}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{sh}(a t).$$

Ввод второй стороной резерва $\Delta_Q \geq 0$ в момент времени t в модели (7) приведет к ничьей, если

$$(20) y(t) + \Delta_Q = \frac{x(t)}{\sqrt{\gamma}}.$$

Подставляя в выражение (20) выражения (18) и (19), получим:

$$\begin{aligned} (21) \Delta_Q &= \frac{x_0}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{ch}(a t) - y_0 \operatorname{sh}(a t) - y_0 \operatorname{ch}(a t) + \frac{x_0}{\sqrt{\gamma}} \operatorname{sh}(a t) = \\ &= \left(\frac{x_0}{\sqrt{\gamma}} - y_0 \right) [\operatorname{ch}(a t) + \operatorname{sh}(a t)] = \left(\frac{x_0}{\sqrt{\gamma}} - y_0 \right) \exp(a t) = \\ &= \left(x_0 \sqrt{\frac{c}{b}} - y_0 \right) \exp(\sqrt{b c} t). \end{aligned}$$

Так как исходно предполагалось, что без ввода резервов побеждает первая сторона, то первое слагаемое положительно (см. условие равенства сил (9)). Значит, с ростом t величина Δ_Q возрастает, причем экспоненциально (!), следовательно, чем позднее осуществляется ввод резерва, тем больше он должен быть.

Утверждение 3. В квадратичной модели (7) с постоянными боевыми эффективностями минимальный размер резерва (21) достигается в начальный момент времени.

Найдем из выражения (19) момент времени, в который численность войск второй стороны обращается в ноль:

$$(22) t_Q = \frac{1}{\sqrt{b c}} \operatorname{arth} \left(\frac{y_0}{x_0} \sqrt{\frac{b}{c}} \right).$$

Если в момент времени $\tau \in [0; t_Q]$ вводится резерв Δ_0 с боевой эффективностью $b(\tau)$, а оставшиеся войска второй стороны имеют прежнюю (начальную) боевую эффективность b_0 , то уравнения динамики (7) для описания сражения после ввода резерва примут вид (см. [35, 37]):

$$(23) \quad \dot{x}(t) = -b_0 y(t) - b(\tau) \Delta(t), \quad \dot{y}(t) = -c x(t) \frac{y(t)}{y(t) + \Delta(t)},$$

$$\dot{\Delta}(t) = -c x(t) \frac{\Delta(t)}{y(t) + \Delta(t)}, \quad t \geq \tau,$$

с начальными условиями $x(\tau)$, $y(\tau)$ – см. (18) и (19) – и Δ_0 соответственно.

Условие равенства сил для системы (23):

$$(24) \quad c x^2(\tau) = (b_0 y(\tau) + b(\tau) \Delta_0) (y(\tau) + \Delta_0).$$

Из выражения (24), подставив (18) и (19), для каждого фиксированного $\tau \in [0; t_Q]$ можно численно найти соответствующий минимальный резерв $\Delta_0^*(\tau)$, а затем вычислить оптимальный момент его ввода (значение $\tau \in [0; t_Q]$), который может отличаться от нулевого и конечного (t_Q) моментов:

$$(25) \quad \Delta_0^*(\tau) \rightarrow \min_{\tau \in [0; t_Q]}.$$

Пример 3. Пусть имеют место начальные условия из примера 2 и $\alpha = 0,02$. Тогда $t_Q = 143$. Зависимость $\Delta_0^*(\tau)$ представлена на рис. 3. Решение задачи (25): $\tau^* = 22$, $\Delta_0^*(\tau^*) \approx 5,26$.

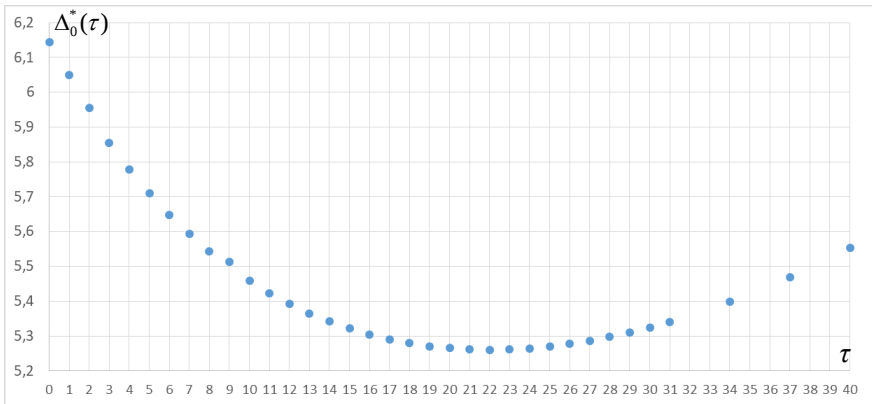


Рис. 3. Зависимость минимального размера резерва от момента его ввода в примере 3

Завершив рассмотрение примера 3, отметим, что аналитическое выражение для соответствующей оптимизационной задачи можно записать для достаточно «надуманной» модели, в которой опыт тех, кто воюет с самого начала, меняется скачкообразно с b_0 на $b(\tau)$ в момент τ ввода резерва. Тогда можно, воспользовавшись выражением (21), записать:

$$(26) \Delta_Q(\tau) = \left(x_0 \sqrt{\frac{c}{b(\tau)}} - y_0 \right) \exp(\sqrt{b(\tau) c \tau}).$$

Утверждение 4. В квадратичной модели (7) со скачкообразным приобретением опыта минимальный размер резерва $\Delta_0^*(\tau)$ достигается при его введении в момент времени

$$(27) \tau^* = \arg \min_{\tau \in [0; t_Q]} \left[\left(x_0 \sqrt{\frac{c}{b(\tau)}} - y_0 \right) \exp(\sqrt{b(\tau) c \tau}) \right].$$

Задача (27) является стандартной скалярной задачей условной оптимизации.

Пример 4. Пусть имеют место начальные условия из примера 2 и $\alpha = 0,002$. Тогда из (22) находим $t_Q \approx 143$, а из (27) и (26): $\tau^* = 29$, $\Delta_0^*(\tau^*) \approx 3$.

Динамика численностей сторон приведена на рис. 4.

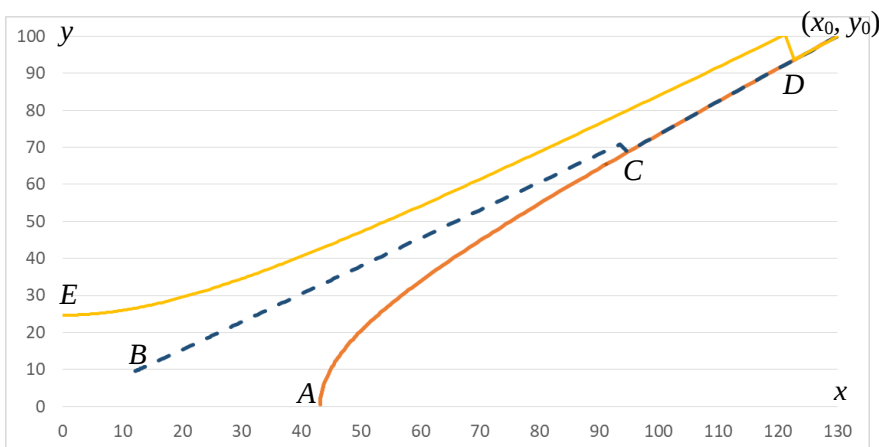


Рис. 4. Пример ничьей (пунктирная кривая) за счет введения резерва (26) в точке C

Без ввода резерва вторая стороны проигрывает (см. нижние непрерывные кривые и точку А на рис. 2 и рис. 4 – эти кривые одинаковы). За счет ввода резерва в 3 единицы в точке С обеспечивается ничья (см. точку В на рис. 4).

Если ввести резерв в 8 единиц в точке D ($t = 6$), то вторая сторона уверенно победит (см. точку Е на рис. 4).

5. Заключение

Качественно основные результаты заключаются в следующем:

- учет возможности научения сторон может качественно изменить результаты их боевого взаимодействия;

- в линейной модели Осипова – Ланчестера с постоянными боевыми эффективностями минимальный размер требуемого резерва не зависит от момента его введения (утверждение 1);

- в линейной модели Осипова – Ланчестера с приобретением опыта минимальный размер требуемого резерва достигается при как можно более позднем его введении (утверждение 2).

- в квадратичной модели Осипова – Ланчестера с постоянными боевыми эффективностями минимальный размер требуемого резерва достигается при как можно более раннем его введении (утверждение 3);

- задачи поиска минимальной скорости научения и/или нахождения минимального размера и оптимального момента ввода подготовленного резерва сводятся к типовым скалярным задачам условной оптимизации.

Рассмотренные модели являются достаточно простыми, но эта «простота» дает возможность получать аналитические выражения для решений соответствующих задач, что позволяет анализировать их зависимость от параметров моделей, начальных условий и т.д.

Литература

1. БЕЛОВ М.В., НОВИКОВ Д.А. *Модели опыта* // Проблемы управления. – 2021. – №1. – С. 43–60.

2. БИРШТЕЙН Б.И., БОРШЕВИЧ В.И. *Стратегемы рефлексивного управления в западной и восточных культурах* // Рефлексивные процессы и управление. – 2002. – Т. 2, №1. – С. 27–44.
3. ВАГНЕР Г. *Основы исследования операций*. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 335 с., Т. 2. – 488 с., Т. 3. – 501 с.
4. ВЕНТЦЕЛЬ Е.С. *Введение в исследование операций*. – М.: Советское радио, 1964. – 388 с.
5. ЖЕРЕБИН А.М., ЗУРАБЬЯН Н.И. *Модель боевых действий для оценки эффективности перспективного авиационного вооружения* // Вестник МАИ. – 2009. – С. 8–3.
6. ЗАДОРОЖНИЙ В.Г., ЧЕБОТАРЕВ А.С., ДИКАРЕВ Е.Е. *Стохастическая модель боевых действий Ланчестера* // Матем. моделирование. – 2021. – Т. 33, №5. – С. 57–77.
7. КОРЕПАНОВ В.О., ЧХАРТИШВИЛИ А.Г., ШУМОВ В.В. *Базовые модели боевых действий* // Управление большими системами. – 2023. – Вып. 103. – С. 40–77.
8. КРАСНОЩЕКОВ П.С., ПЕТРОВ А.А. *Принципы построения моделей*. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – 264 с.
9. ЛАРЮШИН И.Д., КОЛТОЧЕНКО Я.А. *Расширенная модель Ланчестера – Осипова для учета боевых единиц с однократным действием в стратегических компьютерных играх* // Автоматика и телемеханика. – 2024. – №10. – С. 144–154.
10. МАКАРЕНКО С.И., АФОНИН И.Е., КОПИЧЕВ О.А. и др. *Обобщенная модель Ланчестера, формализующая конфликт нескольких сторон* // Автоматизация процессов управления. – 2021. – №2(64). – С. 66–76.
11. МИТЮКОВ Н.В. *Определение жертв войн через Ланчестерские модели* // Историческая психология и социология истории. – 2009. – №2. – С. 122–140.
12. *Модели военных, боевых и специальных действий: монография* / Под ред. академика РАН Д.А. Новикова. – М.: Ленанд, 2025. – 528 с.
13. МОРЗ Ф., КИМБЕЛЛ Д. *Методы исследования операций*. – М.: Советское радио, 1956. – 307 с.
14. НОВИКОВ Д.А. *Иерархические модели военных действий* // Управление большими системами. – 2012. – №37. – С. 25–62.

15. ОСИПОВ М.П. *Влияние численности сражающихся сторон на их потери* // Военный сборник. – 1915. – №6. – С. 59–74; №7. – С. 25–36; №8. – С. 31–40; №9. – С. 25–37.
16. *Применение теории игр в военном деле* // Сборник переводов. – М.: Советское радио, 1961. – 360 с.
17. ЧУЕВ Ю.В., МЕЛЬНИКОВ П.М. и др. *Основы исследования операций в военной технике*. – М.: Советское радио, 1965. – 592 с.
18. УЛАНОВ А.С., ЗАВАДСКИЙ В.В., ЗАЙЧЕНКО Я.Б. *Эффекты неопределенности при оценке превосходства сторон в моделях Осипова – Ланчестера* // Вооружение и экономика. – 2024. – №4(70). – С. 43–51.
19. ЮСУПОВ Р.М., ИВАНОВ В.П. *Из истории математического моделирования боевых действий в России (1900–1917 гг.)* // Информатика и автоматизация. – 2023. – Вып. 22., Т. 5. – С. 947–967.
20. BRACKEN J. *Lanchester Models of the Ardennes Campaign* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42. – P. 559–577.
21. CANGIOTTI N., CAPOLLI M., SENSI M. *A Generalization of Unaimed Fire Lanchester's Model in Multi-battle Warfare* // Oper Res Int J. – 2023. – Vol. 23. – P. 38.
22. CHEN X., JIANG N., JING Y. et al. *Differential Game Model and Its Solutions for Force Resource Complementary via Lanchester Square Law Equation* // Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy), 2011. – P. 14229–14233.
23. CLARK G. *The Combat Analysis Model* (Ph.D. Thesis). - Columbus: Ohio State University, 1969.
24. COULSON S. *Lanchester Equations with Time Dependent Parameters for Modelling Intelligence Collection in Adversarial Situations* // IMA Journal of Management Mathematics. – 2025. – dpaf012.
25. DAVIS P. *Aggregation, Disaggregation and 3:1 Rule in Ground Combat* // RAND Research MR-638-AF/A/OSD, 1995. – 52 p.
26. DEITCHMAN S. *A Lanchester Model of Guerilla Warfare* // Operations Research. – 1962. – No. 10. – P. 818–827.
27. DUPUY T. *Understanding War. History and Theory of Combat*. – Nova Publishers, 1998. – 312 p.

28. ENGEL J. *A Verification of Lanchester's Law* // Operations Research. – 1954. – Vol. 2, No. 2. – P. 163–171.
29. HARTLEY D., HELMBOLD R. *Validating Lanchester's Square Law and Other Attrition Models* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42. – P. 609–33.
30. HILLESTAD R., OWEN J. *Experiments in Variable-Resolution Combat Modeling* // RAND Note № 3631-DARPA. – Santa Monica: RAND, 1993. – 46 p.
31. HILLIER F., LIEBERMAN G. *Introduction to Operations Research*. – Boston. McGraw-Hill, 2005. – 1061 p.
32. HUGHES W. *A Salvo Model of Warships in Missile Combat Used to Evaluate Their Staying Power* // Naval Research Logistics. – 1995. – Vol. 42, No. 2. – P. 267–289.
33. KOSTIĆ M., JOVANOVIĆ A. *Lanchester's Differential Equations as Operational Command Decision Making Tools* // Serbian Journal of Management. – 2023. – No. 18(1). – P. 71–92.
34. LANCHESTER F. *Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm*. – London: Constable and Co, 1916. – 243 p.
35. MACKAY N. *Lanchester Combat Models* // arXiv preprint. – arXiv:0606300v1. – 9 p.
36. PERRY N. *Fractal Effects in Lanchester Models of Combat* // Australian Joint Operations Division Defense Science and Technology Organization Report DSTO-TR-2331, 2008. – 23 p.
37. SCHEEBA P., GHOSE D. *Optimal Resource Partitioning in Conflicts based on Lanchester Attrition Model* // Proc. of the 44th IEEE Conf. on Decision and Control and the European Control Conf. – Seville, 2005. – P. 5859–5864.
38. TAHA H. *Operations Research: An Introduction*. – NY: Prentice Hall, 2011. – 813 p.
39. TAYLOR J., BROWN G. *Canonical Methods in the Solution of Variable-Coefficient Lanchester-Type Equations of Modern Warfare* // Operations research. – 1976. – Vol. 24. – P. 44–69.
40. TAYLOR J. *Lanchester Models of Warfare*. – Arlington: Operations Research Society of America. – 1983. – Vol. 1. – 570 p.; Vol. 2. – 815 p.
41. TAYLOR J., YILDIRIM U., MURPHY W. *Hierarchy-of-Models Approach for Aggregated-Force Attrition* // Proc. of the 2000 Winter Simulation Conf. - Orlando, 2000. P. 925 – 932.

42. ZHANG L. *Combat Modelling using Lanchester Equations* // Int. Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – 2023. – No. 55(2). – P. 224–234.

LEARNING IN OSIPOV – LANCHESTER MODELS

Dmitry Novikov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Academician RAS (novikov@mail.ru).

Abstract: Traditionally, in the Osipov – Lanchester models, which describe the dynamics of the number of combatants in terms of differential equations, the combat effectiveness of the parties is considered constant over time. In this paper, we consider the role of learning in modifying the linear and quadratic Osipov – Lanchester models, taking into account two effects: a one-shot introduction of a trained reserve by the initially losing party and the acquisition of combat experience by the parties, which affects the combat effectiveness coefficients. The problems of determining the optimal moment for introducing such a reserve so that its size is minimal, but ensures a "parity"; finding the minimum learning rate of the initially losing party, also ensuring a "parity"; and determining the optimal duration of reserve training before its input, are solved.

Keywords: mathematical modeling, Osipov – Lanchester models, combat effectiveness, reserves input, learning.

УДК 519.8
ББК 32.81

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.Г. Чхартишвили.*

*Поступила в редакцию 08.06.2025.
Опубликована 31.07.2025.*

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЭКСПОРТНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ НА ЦЕНЫ ВНУТРЕННЕГО РЫНКА

Акинфиев В. К.¹

(ФГБУН Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, Москва)

Рассматривается задача анализа и выбора управляющих воздействий правительства для регулирования деятельности компаний-экспортеров. Цель правительства заключается в сдерживании роста внутренних цен на критически важные виды продукции. Мы рассматриваем эту проблему на примере отрасли выращивания зерна, в частности, пшеницы. Заметим, что рынок зерна в РФ имеют характер олигополии. В исследуемой задаче рассматриваются два типа участников рынка: множество компаний-экспортеров и правительство, которое осуществляет функцию регулятора на рынке. Мы предлагаем для решения исследуемой задачи использовать подход к моделированию, который учитывает взаимодействия между участниками рынка и позволяет согласовать интересы независимых производителей и государства. Важной особенностью такого подхода является то, что каждый игрок выбирает стратегию своего поведения на рынке в рамках некоторой задачи оптимизации, которые взаимосвязаны между собой через общие переменные. Приведена математическая формулировка исследуемой задачи и предложены методы ее решения. Рассматриваются и анализируются существующие механизмы регулирования рынка зерна в РФ. Приведены результаты сценарного моделирования и анализа влияния параметров экспортных ограничений на внутренние цены на примере рынка пшеницы. Поведенный анализ позволяет донести параметры механизмов регулирования рынка пшеницы и сделать их более эффективными.

Ключевые слова: экспортные ограничения, волатильность внутреннего рынка, задачи математического программирования, сценарное моделирование.

1. Введение

Система стратегического планирования, сформированная в РФ на протяжении последних лет, позволяет государству определять в долгосрочной перспективе приоритетные направления развития, основные риски и конкурентные преимущества. Через систему стратегического планирования разрабатываются и реализуются ключевые проекты как на федеральном, так и на

¹ Валерий Константинович Акинфиев, д.т.н., в.н.с. (akinf@ipu.ru).

региональном уровне, позволяющие решать важнейшие социальные и экономические задачи развития страны [5, 7].

В сложившейся системе стратегического планирования РФ можно выделить несколько уровней. Верхний уровень – уровень целеполагания, на котором формулируются основные цели и приоритеты развития страны. Документы стратегического планирования – Указы Президента РФ.

Второй уровень – уровень федерального Правительства, на котором реализуется программные принципы стратегического управления (рис. 1).



Рис. 1 Уровни планирования экономикой РФ

Документы стратегического планирования – государственные программы, федеральные целевые программы, национальные и федеральные проекты. Документы стратегического пла-

нирования уровня федерального Правительства направлены на реализацию целей и приоритетов развития страны, сформулированных в Указах Президента РФ. Важное место в системе стратегического планирования РФ занимают также документы финансового планирования, разрабатываемые Правительством РФ ежегодно. Прогноз социально-экономического развития на трехлетний период и Бюджет РФ на тот же период.

Для достижения сформулированных целей развития страны Правительство осуществляет оперативное управление экономикой, используя разнообразные инструменты воздействия на процессы ее функционирования с учетом изменений внешних геополитических и экономических условий. Цель действий Правительства – создание необходимых условий и стимулов для устойчивого развития и функционирования компаний различной формы собственности и отраслей экономики. Правительство использует для реализации этих целей ряд механизмов управления, в том числе финансовую и налоговую политику, макроэкономическое регулирование, инструменты индикативного планирования, различные меры поддержки бизнеса, реализуемые через государственные программы, и многое другое.

В данной работе мы будем рассматривать одну из таких задач, связанную с регулированием деятельности компаний-экспортеров с целью сдерживания роста внутренних цен и темпа инфляции на критически важные виды продукции. Как известно, многие отрасли российской экономики являются экспортно-ориентированными. Это, прежде всего, металлургия, производство удобрений, производство зерна и многие другие.

Проблема состоит в том, что в условиях открытой рыночной экономики компании сами могут определять как объемы производства, так и рынки сбыта своей продукции. Если цены на мировом рынке за вычетом издержек выхода на этот рынок будут выше, чем цены на внутреннем рынке, то экономически рациональные агенты будут стараться продавать свою продукцию не на внутреннем рынке, а на мировом рынке, потому что это принесет им больше прибыли. В этом случае цены на внутреннем рынке будут стремиться к мировым за вычетом издержек выхода на международный рынок (закон одной цены) [12]. При этом существуют сложные динамические взаимосвязи

между параметрами внутреннего рынка страны и внешними рынками, которые нужно учитывать при управлении. Заметим, что на обоих рынках цена на продукцию формируется на основе соотношения спроса со стороны потребителей и предложения со стороны производителей.

Цель управления состоит в следующем. Во-первых, необходимо минимизировать риски переноса волатильности внешних рынков на внутренний, стабилизировать цены на внутреннем рынке и сдерживать их рост. И, во-вторых, внутренний уровень цен должен быть достаточным для поддержания рентабельности производства и развития отечественного производителя. Для этой цели правительство использует ряд методов управления экспортом продукции с территории РФ, одним из которых являются механизм взимания экспортных пошлин. Кроме этого, используются и другие методы экспортных ограничений, которые мы рассмотрим далее, в том числе, например, введение динамических квот на экспорт.

Мы будем рассматривать задачу анализа и выбора параметров механизмов экспортных ограничений (управляющих воздействий правительства) на динамику цен на внутреннем рынке. Мы рассмотрим эту проблему на примере отрасли выращивания зерна, в частности, пшеницы.

Проблема оценки влияние экспортных ограничений на мировые рынки – достаточно популярная область исследований [3, 4, 8, 10, 11, 13, 15–20]. Много работ посвящено исследованию волатильности мировых рынков в связи с продовольственной безопасностью регионов и отдельных стран.

Так, в [16] приведены оценки влияния экспортных ограничений на мировую экономику с использованием глобальной вычисляемой модели общего равновесия MIRAGE, разработанной французским центром перспективных исследований и международной информации (CEPII). На основании проведенных расчетов авторы делают вывод, что отмена экспортных налогов будет иметь глобальные последствия: средний экспортный налог на мировую торговлю товарами в 2007–2012 годах составил в среднем 0,48%, причем большая часть этих налогов была введена на энергетические и продовольственные продукты. Исследования показали, что их отмена может увеличить мировое бла-

госостояние на 0,25%. Авторы делают вывод, что как развитые, так и развивающиеся экономики, такие как Китай и Индия, выиграют от такой политики, даже если они в настоящее время вводят экспортные ограничения. Средние и малые страны – импортеры продовольствия без рыночной власти также выиграют от отмены экспортных ограничений, особенно в ситуациях продовольственного кризиса.

В [15] исследуются причинно-следственные связи между волатильностью цен на зерно и экстремальными ценовыми событиями и их движущими силами, которые могут усиливать и способствовать более широким социальным рискам с точки зрения продовольственной безопасности, экономического развития и политической стабильности. В частности, исследуются исторические данные с точки зрения различных мер волатильности, в том числе стандартного отклонения логарифмической доходности, коэффициента вариации от среднего или тренда, условной волатильности (GARCH) и др.

Ряд работ посвящен исследованию структуры зерновых рынков, в частности исследованию рыночной власти отдельных игроков. Так, в [8, 11, 13, 17–19] отмечается, что олигополистические рыночные структуры являются источником рыночной власти, и мировой рынок пшеницы, несомненно, снабжается несколькими странами-экспортерами. Конкуренция между этими государствами ограничивается географией, поскольку пшеница относится к категории громоздких продуктов, которые влекут за собой значительные транспортные расходы при торговле. Таким образом, географическая близость может подразумевать и ценовую власть.

Важными вопросами при моделировании зерновых рынков является вопросы оценки эластичности спроса на зерно по отношению к различным факторам. Так, в [8, 11, 13] отмечается, что ценовая эластичность спроса на зерно в последние годы была ниже, чем ранее, что способствовало повышению волатильности цен. Менее чувствительный к цене спрос может позволить экспортерам лучше использовать доминирующее положение на рынке, поскольку индекс Лернера как мера проявления рыночной власти является функцией ценовой эластичности спроса. В [11, 13] авторы утверждают, что спрос на основные продукты

питания менее чувствителен по отношению к цене в годы дефицита. Поэтому вопрос рыночной власти особенно актуален в периоды дефицита и высоких цен. Экспортеры пшеницы, эксплуатирующие рыночную власть, могут способствовать росту и волатильности цен и, следовательно, существенно влиять на продовольственную безопасность в развивающихся странах.

В некоторых публикациях затрагиваются вопросы рыночной власти России в международной торговле пшеницей и оценки последствий для глобальной продовольственной безопасности. Так, в [18, 19] на основе данных о российском экспорте пшеницы авторы используют метод остаточной эластичности спроса для анализа ценового поведения России на двух ее важнейших экспортных рынках, в Египте и Турции. Результаты оценок авторов показывают, что Россия ведет себя конкурентоспособно в Египте, в то же время она демонстрирует рыночную власть в Турции с предполагаемой наценкой в 13,5 %. В [17] моделируется влияние запрета на экспорт пшеницы из России в 2010/2011 годах на пространственную рыночную интеграцию и транзакционные издержки рынков зерна.

Вопросы влияния политики экспортных ограничений на цены внутреннего рынка страны экспортера рассматривалась в ряде публикаций, в том числе в [3, 4, 10, 20]. В [3, 4] предложена модель частичного равновесия, которая позволяет оценить влияние экспортной деятельности на внутренний рынок страны-экспортера. Проанализированы взаимосвязи между экспортом и продажами на внутреннем рынке на примере российского рынка подсолнечного масла. В [10, 20] обобщены некоторые эмпирические данные о влиянии ограничений на экспорт продовольствия на внутренние цены и на благосостояние участников в экономике стран-экспортеров. Данные свидетельствуют о том, что ограничения на экспорт продовольствия позволяют краткосрочно снизить скачки цен на продукты за счет стимулирования внутреннего предложения. Однако они имеют и отрицательные последствия: не позволяют отечественным производителям воспользоваться высокими мировыми ценами, стимулируя сельскохозяйственный сектор и увеличивая производство продуктов питания.

Следует отметить, что, по мнению автора, многие исследования и полученные выводы в перечисленных работах сделаны под влиянием концепции свободного рынка, которая господствовала среди западных экономистов последние десятилетия. В настоящее время среди экономистов и политиков набирает обороты концепция здорового изоляционизма, которая позволяет защитить внутренние рынки, что соответствует интересам собственных государств. Особенно это важно для России на современном этапе ее развития.

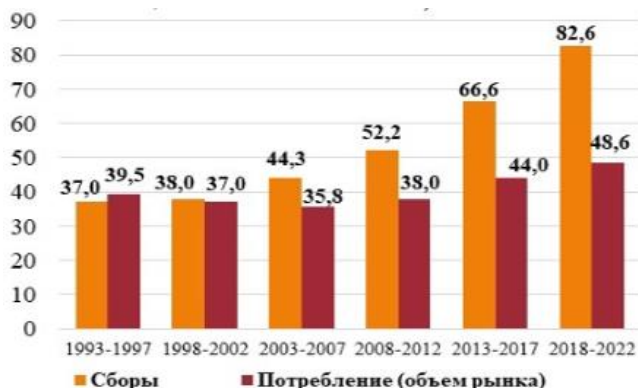
В данной работе мы рассматриваем задачу анализа и выбора параметров механизмов экспортных ограничений (управляющих воздействий правительства) на динамику цен на внутреннем рынке. Мы предлагаем для этих целей использовать подход к моделированию, который учитывает рыночные взаимодействия между участниками рынка и позволяет согласовать интересы независимых производителей и государства. В следующих разделах будут рассмотрены вопросы регулирования рынка зерна в РФ, дана математическая формулировка исследуемой задачи и методы ее решения, приведены результаты сценарного анализа влияния параметров экспортных ограничений на внутренние цены на примере рынка пшеницы.

2. Рынок зерна РФ и его регулирование

В настоящее время Россия стала крупным экспортером зерна и сегодня она занимает существенную долю рынка во многих странах-импортерах пшеницы на Ближнем Востоке и в Северной Африке [6]. На протяжении последних лет устойчиво росли объемы сбора пшеницы. Среднегодовой валовый сбор за 2018–2022 гг. достиг 82,5 млн т, а среднегодовые объемы экспорта составили 34,1 млн т (рис. 2). Самообеспеченность России пшеницей в 2018–2022 гг. достигла отметок в 169,9%. Под самообеспеченностью понимается отношение объемов производства к объемам внутреннего потребления в процентном выражении.

За последние пять лет (2018–2022) объем российского рынка (объем потребления) пшеницы также вырос и достиг 48,6 млн т против 44,0 млн т в 2013–2017 гг. Расширение объема рынка связано с ростом потребления фуражной пшеницы на

нужды отраслей животноводства. Существенная разница между валовым сбором зерна и внутренним его потреблением создало условия для увеличения в последние годы экспорта зерна российскими производителями.



Источник: Расчеты АБ-Центр по данным Росстата и USDA

Рис. 2. Производство и потребление пшеницы в РФ, млн т

Следует отметить, что внешние рынки зерна достаточно волатильны (рис. 3).



Источник: USDA (Foreign Agricultural Service).

Рис. 3. График изменения мировой цены пшеницы (USD/100 бушель)

Цены на зерно зависят от многих факторов, в том числе от благоприятных или не благоприятных погодных условий каждого года, от экспортной политики стран, поставляющих зерно на мировой рынок, геополитики и от много другого. График демонстрирует высокую волатильность цен на пшеницу на мировом рынке и его циклический характер.

Для снижения влияния волатильности внешних рынков и мировых цен на российскую экономику правительство РФ использует различные механизмы экспортных ограничений для компаний – экспортеров сельскохозяйственной продукции. Если цены растут вслед за мировыми, то страдают потребители, если цены падают, то страдают производители. Правительство преследует при этом ряд целей, в том числе снижение темпов инфляции на продовольствие на внутреннем рынке, создание паритета между производителями и переработчиками и обеспечение надежных продовольственных поставок на внутреннем рынке.

Следует отметить, что за последнее десятилетие наблюдается устойчивый процесс концентрации российского экспорта пшеницы. В то время как в 2003 году десять крупнейших российских компаний – экспортеров пшеницы экспортировали менее 40% всей российской пшеницы, в 2011 году они контролировали уже 70% российского экспорта пшеницы. На рис. 3 схематично показаны основные участники российского зернового рынка – множество компаний производителей зерна, трейдеры и правительство, которое осуществляет регуляторную функции в интересах государства. Цена на внутреннем рынке формируется на биржевых площадках (Московской биржа, Национальная товарная биржа) на основе предложения и спроса со стороны перерабатывающих предприятий и трейдеров.

Рассмотрим основные механизмы управления рынком со стороны государства, в том числе, поведением компаний-экспортеров зерна.

Правительство РФ с 2021 года ввело механизм **зернового демпфера**, который предусматривает плавающие пошлины на экспорт пшеницы, кукурузы и ячменя и возврат полученных от них средств на субсидирование сельхозпроизводителей. Они были запущены в период, когда высокие мировые цены оказы-

вали давление на внутренний рынок и являлись существенным проинфляционным фактором. Размер пошлин рассчитывается на базе индикаторов, основанных на ценах экспортных контрактов, которые регистрируются на Московской бирже. В 2025 году пошлина составляет 70% от разницы между базовой и индикативной ценами.

Базовые цены на зерно рассчитываются и корректируются Минсельхозом с учетом текущих темпов инфляции и, соответственно, растущей себестоимостью производства зерна для поддержания приемлемой рентабельности производства. Индикативная цена рассчитывается на основе экспортных контрактов, которые регистрируются на Московской бирже. Гибкая ставка пошлины позволяет сгладить влияние цен внешних рынков на внутренние цены при сохранении рентабельности экспорта. Сначала базовая цена для расчета пошлин составляла 15 тыс. рублей за тонну пшеницы. С июня 2023 года она была повышена до 17 тыс. рублей за тонну. С июня 2024 года базовая цена на пшеницу составляет 18 тыс. рублей за тонну.

Квоты на экспорт. В России введена квота на экспорт в государства, не являющиеся членами ЕАЭС. Квота ежегодно пересчитывается с учетом прогноза урожая и валового сбора зерна, а также баланса производства и потребления на внутреннем рынке. Внутри квоты действует плавающая ставка вывозной пошлины (демпфер).

Одним из важных механизмов стабилизации рынка являются **зерновые интервенции**. Зерновые интервенции – рыночный метод участия государства в регулировании зернового рынка. Их основная задача – поддержание цен на зерно, обеспечивающих формирование мотивации сельхозпроизводителей к увеличению объемов производства. Закупочные интервенции проводятся с целью сокращения ресурсов на внутреннем рынке и предотвращения нежелательного падения цен. Товарные интервенции, наоборот, служат для сдерживания роста цен и балансируют рынок в случае высокого спроса. Функции государственного агента при проведении государственных закупочных и товарных интервенций на зерновом рынке выполняет ОАО «Объединенная зерновая компания» (ОЗК).

Возникает задача оценки эффективности механизмов регулирования зернового рынка РФ при различных сочетаниях сценариев динамики цен на внешних рынках, динамики производства зерна российскими производителями, темпов инфляции и курса национальной валюты. Такой анализ позволит донстроить параметры имеющихся механизмов и сделать их еще более эффективными.

3. Математическая формулировка задачи

Для формализации рассматриваемой задачи мы используем подход, основанный на моделировании рыночных взаимодействий игроков, в котором каждый игрок выбирает свое решение в рамках некоторой задачи оптимизации (задачи математического программирования) [1, 2, 9, 14]. Заметим, что рынки сельхозпродукции, как правило, имеют характер олигополии. Причем игроки могут быть различных типов, включая и правительственные структуры, которые также могут влиять на поведение остальных игроков. Важной особенностью такой постановки является то, что задачи оптимизации игроков взаимосвязаны через общие искомые переменные.

Здесь используется гипотеза рационального поведения игроков, заключающаяся в том, что каждый игрок с учетом имеющейся у него информации выбирает стратегию, которая приводит к наиболее предпочтительному для игрока результату. Цель стратегии каждого игрока состоит в максимизации некоторой собственной функции полезности. Общее, согласованное решение для всех игроков заключается в поиске равновесных стратегий игроков с точки зрения равновесия Нэша.

Будем рассматривать два типа участников рынка: множество компаний-экспортеров и Правительство, которое осуществляет регуляторную функцию в интересах государства. Рассмотрим задачи оптимизации каждого игрока.

Задача оптимизации компании-экспортера. Будем предполагать, что компании-экспортеры производят продукцию и поставляют ее на внутренний и на несколько внешних рынков, например, как показано на рис. 4.

Используемые обозначения: $i \in I$ – множество компаний-экспортеров; $m \in M$ – множество рынков, где $m = 1$ обозначает внутренний рынок, а $2 \leq m \leq M$ – внешние рынки; $x_{i,t}$ – производство продукции, например зерна, компании i в t году. В данной задаче $x_{i,t}$ определяется производственной мощностью компании i (например, посевными площадями под зерновые культуры) и климатическими условиями выращивания в конкретном году t и задается экзогенно. Данный параметр задает сценарные условия, учитываемые при решении задачи.

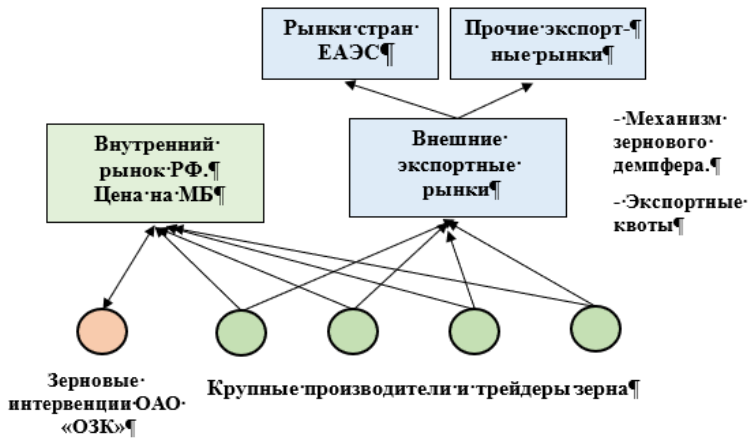


Рис. 4. Схема рынка зерна РФ

Каждая компания-экспортер решает задачу максимизации своей выручки от продажи произведенной продукции, которая зависит от стратегии продаж. Искомое решение в задаче задается переменной $s_{i,m,t}$, которая определяет объем продукции, поставляемой компанией i на рынок m в период t

Если цена продукции на внешних рынках задается в модели экзогенно, то цена продукции на внутреннем рынке P_t зависит от стратегий продаж всех компаний-экспортеров и формируется на основе соотношения спроса со стороны потребителей и предложения со стороны производителей.

Потребители на внутреннем рынке представлены обратной функцией спроса, которую можно рассматривать как результат решения их задач максимизации полезности: $P_t = a_t - b_t \sum_{i=1}^I s_{i,1,t}$,

Здесь $\sum_{i=1}^I s_{i,1,t}$ – суммарный объем поставок на внутренний рынок, a_t и b_t – заданные параметры, характеризующие функцию спроса потребителей на внутреннем рынке.

Далее, пусть $Pf_{m,t}$ – экспортная цена продукции на внешнем рынке m в t году или индикативная цена, используемая при расчете экспортных пошлин; P_t^* – базовая цена продукции, установленная правительством в t году. Заметим, что базовые цены для расчета экспортных пошлин динамически пересчитываются по годам с учетом инфляции. Здесь и везде далее мы используем реальные цены, т.е. цены, очищенные от инфляции; Q_{mt} – квота на экспорт, установленная правительством в t году.

Тогда экспортная пошлина вычисляется по следующей формуле: $Ed_{m,t} = (Pf_{m,t} - P_t^*)k_t$, где $0 \leq k_t \leq 1$ – ставка экспортной пошлины. Пусть C_{mt} – дополнительные удельные затраты, связанные с экспортом продукции на внешние рынки.

Задача оптимизации компании-экспортера i запишется следующим образом:

$$(1) \max_{s_{i,m,t}} \sum_{t=1}^T \left[\left(a_t - b_t \sum_{i=1}^I s_{i,1,t} \right) s_{i,1,t} + \sum_{m=2}^M (P_{m,t} - c_{m,t} - Ed_{m,t}) s_{i,m,t} \right]$$

при ограничениях

$$(2) \quad x_{i,t} - \sum_{m=1}^M s_{i,m,t} \geq 0 \quad \forall i, t,$$

$$(3) \quad Q_{m,t} - \sum_{i=1}^I s_{i,m,t} \geq 0 \quad \forall m, t,$$

$$(4) \quad s_{i,m,t} \geq 0 \quad \forall m, t.$$

В (1)–(4) максимизируется общая выручка, полученная компанией на всех рынках за T периодов, при выполнении ограничений на суммарный объем поставок компанией на все рынки (2) и ограничения на поставку всеми компаниями на внешний

рынок m , задаваемое квотой Q_{mt} (3) и на положительность иско-
мой переменной (3). Заметим, что (1)–(4) является квадратичной
задачей оптимизации.

Задача оптимизации правительства. Как мы отметили
ранее, цель правительства состоит в обеспечении цен на про-
дукцию на внутреннем рынке P_t на уровне, близком к базовой
цене P_t^* . При этом достигается цель сдерживания инфляции на
продовольственном рынке. Правительство может влиять на вы-
бор стратегий продаж компаний-экспортеров с использованием
назначения параметров механизмов экспортных ограничений,
в том числе ставки экспортной пошлин k_t и квоты на поставку
продукции на внешние рынки Q_{mt} .

Задача правительства состоит в следующем:

$$(5) \min_{k_t, Q_{mt}} \left(a_t - b_t \sum_{i=1}^I s_{i,1,t} - P_t^* \right)$$

$$(6) Q_{m,t} \geq 0 \quad \forall m, t,$$

$$(7) 0 \leq k_t \leq 1 \quad \forall t.$$

В (5)–(7) минимизируется величина разности между ценами
на продукцию на внутреннем рынке P_t и базовой ценой P_t^* при
ограничениях на управляющие переменные (6), (7). Данную за-
дачу можно упростить, если потребовать, чтобы для всех перио-
дов t P_t не превышала P_t^* . При этом задача каждой компании-
экспортера сведется к квадратичной задаче оптимизации вида

$$(8) \max_{s_{im}, k_i, Q_{mt}} \sum_{t=1}^T \left[\left(a_t - b_t \sum_{i=1}^I s_{i,1,t} \right) s_{i,1,t} + \sum_{m=2}^M (P_{m,t} - c_{m,t} - (Pf_{m,t} - P_t^*) k_t) s_{i,m,t} \right]$$

при ограничениях

$$(9) x_{i,t} - \sum_{m=1}^M s_{i,m,t} \geq 0 \quad \forall i, t,$$

$$(10) Q_{m,t} - \sum_{i=1}^I s_{i,m,t} \geq 0 \quad \forall m, t,$$

$$(11) P_t^* - (a_t - b_t \sum_{i=1}^I s_{i,1,t}) \geq 0,$$

$$(12) s_{i,m,t} \geq 0, \quad Q_{m,t} \geq 0, \quad 0 \leq k_t \leq 1, \quad \forall i, m, t.$$

Общий метод решения подобных задач основан на схеме сведения их к смешенной задаче дополнительности (МСП) [14]. Метод основан на нескольких фундаментальных результатах теории оптимизации, в том числе теории двойственности, методе построения функции Лагранжа, а также условиях Каруша – Куна – Таккера.

Рассмотрим теоретико-игровую структуру, в которой все игроки $i = 1, \dots, N$ стремятся одновременно максимизировать свои целевые функции, решая свои задачи оптимизации. Обратите внимание, что эти задачи взаимосвязаны, поскольку выбор стратегии каждым игроком x_i влияет на целевые функции других игроков $f_i(x)$. В этом случае равновесие Нэша определяется как набор стратегий x_i , гарантирующих, что ни один игрок не сможет улучшить свою целевую функцию, изменив свою стратегию в одностороннем порядке. Следовательно, равновесие Нэша можно идентифицировать как совместное решение задач оптимизации для всех игроков одновременно.

Общий подход к решению основан на применении условий разрешимости задач нелинейной оптимизации – так называемых условий Каруша – Куна – Таккера (ККТ). Если функции $f_i(x)$ и $g_i(x)$ в задачах оптимизации игроков непрерывно дифференцируемы, тогда мы можем выписать условия ККТ, связанные с задачей каждого игрока. Чтобы решить исходную задачу, необходимо объединить все условия ККТ в одной задаче МСП. Ее решение может быть получено, например, с использованием пакета PATH Solver, входящего в систему моделирования GAMS [14]. Более детально данный метод и примеры его использования описаны, например, в [1, 2, 9].

Заметим, что k_t и Q_{mt} в задаче (8)–(12), которые трактуются как управления, можно спользовать в качестве варьируемых параметров, задавая сценарии их изменения. Это позволяет упростить решение задачи. Далее мы используем сценарный подход к решению рассматриваемой задачи, который позволяет исследовать влияние различных параметров, задаваемых экзогенно, включая k_t , Q_{mt} , прогноз сбора зерна по годам, цен зерна на внешних рынках, на цены внутреннего рынка. Результаты приведены в следующем разделе.

4. Сценарный анализ влияния экспортных ограничений на цены внутреннего рынка

Методология исследования основана на сценарном моделировании и анализе стратегий компаний в зависимости от внешних условий на рынке, включая управляющие воздействия правительства. Важное замечание: поскольку все экономические показатели, связанные с сельским хозяйством, имеют явно выраженную сезонную динамику, то мы в нашем исследовании будем рассматривать среднегодовые показатели. Анализ среднегодовых показателей позволяет наиболее точно определить внутренние потребности, сгладить влияние природно-климатических факторов на ключевые показатели рынка, более наглядно отобразить тенденции его развития.

Вначале мы кратко проанализируем основные показатели рынка, которые характеризуют отрасль производства и потребления пшеницы. В таблице 1 приведены данные по статьям, составляющим баланс пшеницы за период с 2018 года по 2023 год.

Таблица. 1 Баланс рынка пшеницы РФ по годам

Период	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Валовый сбор, млн т	71,7	73,6	85,3	75,2	92,0	98,2
Импорт, млн т	0,4	0,3	0,4	0,3	0,3	0,2
Экспорт, млн т	35,8	34,5	39,1	33,0	43,5	52,6
Потребление (объем рынка), млн т	40,5	40,0	42,5	42,7	45,5	48,5
В том числе на продовольственные цели, млн т	22,5	23,0	23,5	23,3	24,0	24,7
Изменение запасов, млн т	-4,3	0,0	+4,1	0,0	+3,2	-2,7
Самообеспеченность, %	177	184	200	175	202	201

Источник: Росстат, Экспертно-аналитический центр "АБ-Центр" www.ab-centre.ru

По данным Росстата валовый сбор пшеницы в РФ в 2024 году, по предварительным данным, составил 82,4 млн т. Это ниже показателей предыдущего года, когда было собрано

98,2 млн т пшеницы. Приведенные данные показывают высокую волатильность показателя «валовый сбор пшеницы», который может колебаться в интервале 70,0–100,0 млн т в год. При этом внутреннее потребление пшеницы росло также неравномерно, в среднем 5–7% в год.

Цену зерна на внешнем рынке (экспортную цену) формируют компании-экспортеры с учетом цен реальных контрактов и логистических издержек по доставке зерна до портов отгрузки. Мировые цены – это биржевые маркеры, отображающие ситуацию со стоимостью зерна в странах участницах зернового рынка. Они крайне волатильны и их уровень зависит от баланса спроса и предложения на конкретных рынках (рис. 3).

Экспортные цены на российскую пшеницу в 2023–2024 годах находились на уровне \$220–\$245 за тонну FOB. Экспортная цена в рублях зависит от курса национальной валюты, который также подвержен колебаниям. Так, например, экспортная цена спроса на российскую пшеницу с протеином 12,5% с поставкой в январе 2025 года составила \$235 за тонну FOB, что при курсе рубля 102 руб. за доллар составляет 24,0 тыс. рублей за тонну. В то же время внутренние цены находились на уровне 13,9–17,5 тыс. рублей за тонну, что примерно на 25–30% ниже цен экспортных контрактов.

Очевидно, что желание экспортировать зерно зависит от разницы между экспортными ценами на пшеницу и ценами на внутреннем рынке. Заметим, что цена на внутреннем рынке формируется на основе контрактов между производителями зерна и оптовыми покупателями и трейдерами.

Для определения параметров обратной функции спроса в задаче (8)–(12) нас будет интересовать вопрос: как будет меняться потребление (объем внутреннего рынка) от цены на пшеницу и цена на пшеницу от объема предложения со стороны компаний производителей зерна. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Многочисленные исследования показали, что спрос на пшеницу малоэластичен по цене [9–11]. Это связано с тем, что пшеница – товар первой необходимости, и даже при существенном изменении цены людям сложно изменить уровень её потребления. Спрос на пшеницу также слабо эластичен по уровню

благосостояния и доходов населения. Это означает, что по мере роста доходов люди очень слабо увеличивают спрос на пшеницу. Вместе с тем при возникновении дисбаланса между спросом (потреблением) и предложением со стороны производителей (поставками на рынок) цена может существенно меняться. Эта зависимость может задаваться обратной функцией спроса $P_t = \Phi(S_t)$, где S_t – поставки зерна на рынок; P_t – цена в зависимости от баланса спроса и предложения. Причем эластичность цены по дисбалансу на рынке, как правило, больше при дефиците, чем при профиците пшеницы на рынке [11, 13]. В данном исследовании модель рынка $P_t = \Phi(S_t)$ задается кусочно-линейной функцией, показанной на рис. 5.

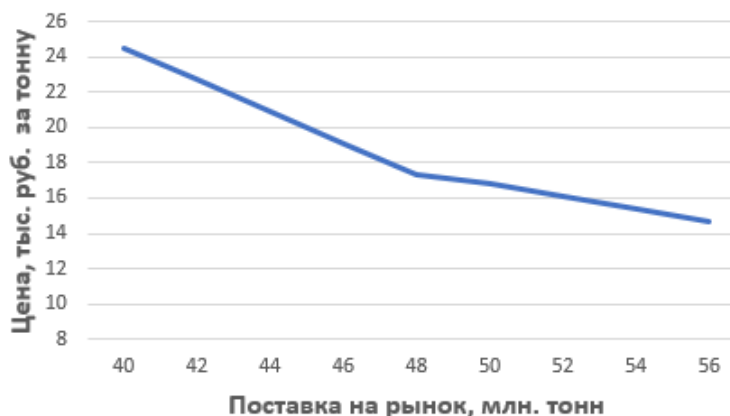


Рис. 5 Обратная функция спроса

При построении этой зависимости использовалась следующая исходная информация. Пусть рынок пшеницы в некотором периоде сбалансирован, т.е. поставки S_t^* равны спросу (потреблению) D_t^* и равны 48 млн т. Равновесная цена при этом P_t^* равна 17,5 тыс. рублей за тонну. Эти данные соответствуют средним показателям 2023 года. График показывает, что если поставки S_t будут меньше спроса D_t^* , равного 48 млн т, т.е. на рынке будет наблюдаться дефицит зерна и цена P_t будет выше равновесной цены P_t^* . Коэффициент эластичности принят

равным 0,9. При профиците зерна на рынке наблюдается обратная ситуация, коэффициент эластичности принят на уровне 0,35. Данный вопрос исследовался, например, в [8, 13] для рынков различных стран. Здесь мы используем усредненные коэффициенты эластичности, приведенные в ряде работ.

Рассмотрим результаты использования предлагаемого подхода на модельном примере. Для наглядности представления результатов исследования мы будем рассматривать упрощенный вариант задачи (8)–(12), а именно: рассматриваем два рынка, внутренний и внешний ($M = 2$), а также будем рассматривать одну консолидированную компанию-экспортера. При этом система из I квадратичных задач вида (8)–(12) сведется к решению одной задачи математического программирования с квадратичным критерием и линейными ограничениями, которая может быть легко решена стандартными пакетами оптимизации.

В результате решения задачи определяются по годам объемы экспорта зерна и поставок зерна на внутренний рынок, при которых суммарная выручка компании будет максимальной. Причем цена зерна на внутреннем рынке заранее не известна и задается функцией $P_t = \Phi(S_t)$, которая зависит от выбора компанией стратегии поставок зерна на рынки. Заметим, что компании-экспортеры выбирают свои стратегии исходя из своих прогнозов внешних сценарных условий и параметров экспортных ограничений, определяемых правительством.

Исходные данные для решения задачи оптимизации представлены в таблице 2. Здесь приведены гипотетические прогнозы следующих параметров:

- валовый сбор пшеницы в РФ, млн тонн;
- динамика экспортных цен на российскую пшеницу, долл. США за тонну;
- курс рубля к долл. США;
- базовая цена продукции P_t^* ;
- ставка экспортной пошлины k_t ;
- квота на экспорт, установленная правительством в t году, – Q_{mt} . Квота на экспорт задается фиксированной ставкой (здесь 0,5) в зависимости от сбора урожая текущего года.

Таблица. 2 Исходные данные (сценарные условия)

Период	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
Валовый сбор пшеницы, млн т	82,4	76,7	73,2	92,1	100,0	80,0	90,0
Экспортная цена, \$/т	225,0	230,0	250,0	265,0	220,0	200,0	230,0
Курс рубля, руб./\$	98,0	100,0	110,0	110,0	110,0	110,0	110,0
Экспортная цена, руб./т	22,1	23,0	27,5	29,2	24,2	22,0	25,3
Базовая цена, руб./т	17,0	17,5	18,0	18,5	19,0	19,5	20,0
Ставка экспортной пошлины	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7
Экспортная квота, млн т	41,2	38,4	36,6	46,1	50,0	40,0	45,0

Результаты решения задачи приведены в таблице 3, в том числе экспорт зерна, объемы продаж зерна на внутреннем рынке, цена зерна на внутреннем рынке и выручка компаний-экспортеров.

Таблица. 3 Результаты решения задачи при заданных сценарных условиях

Период	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030
Экспорт, млн т	35,2	30,3	28,6	46,1	50,0	34,8	45,0
Продажа на внутреннем рынке, млн т	47,2	46,4	44,6	46,0	50,0	45,2	45,0
Цена на внутреннем рынке, тыс. руб. за т	18,0	18,7	20,4	19,1	16,8	19,8	20,0
Выручка компаний – экспортеров, млрд руб.	1450,1	1365,7	1343,2	1765,1	1873,5	1462,4	1716,2
Пошлина в доход государства, млрд руб.	121,6	110,5	167,6	328,8	189,3	56,0	155,8

Следует отметить, что заметное изменение рыночной конъюнктуры при фиксированной ставке экспортной пошлины может приводить к существенным колебаниям внутренних цен. Так, например, высокий урожай зерна в 100 млн т, собранный в РФ в 2028 году, в сочетании со снижением экспортных цен с 265 \$/т. в 2027 году до 220 \$/т. в 2028 году привел к снижению цены на внутреннем рынке с 19,1 тыс. руб. за тонну до 16,8 тыс. руб. за тонну (таблица 3). Данные, приведенные в таблице, показывают, что в последующие годы цены на внутреннем рынке восстанавливаются до нормального уровня.

И далее, варьируя параметры экспортных ограничений, мы можем провести анализ влияния управляющих воздействий правительства на поведение компаний-экспортеров, от которого зависит внутренняя цена на зерно. На рис. 6. приведена зависимость цены зерна на внутреннем рынке от ставки экспортной пошлины. График показывает, что ставка k_e существенно влияет на цену зерна.

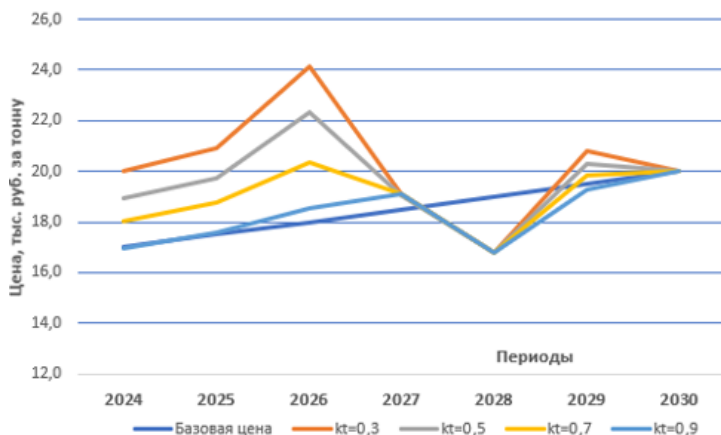


Рис. 6. Зависимость цены от ставки экспортной пошлины

Из графика мы видим, что в 2026 году наблюдается существенный рост цены, а в 2028 году – ее снижение. Это связано с особенностью урожая в эти годы. Для выравнивания цен правительство может ввести динамическую экспортную квоту,

дифференцированную по годам в зависимости от прогнозируемого сбора урожая текущего года. Если изменить квоту в 2026 году до 0,35, а в 2028 году – до 0,6, то результат влияния этого изменения на цены внутреннего рынка представлен на рис. 7. Компании стремятся экспортировать в пределах квоты до тех пор, пока цена на внутреннем рынке не вырастет до интересного для них уровня. Мы видим, что использование динамических квот позволяет существенно снизить волатильность цен.

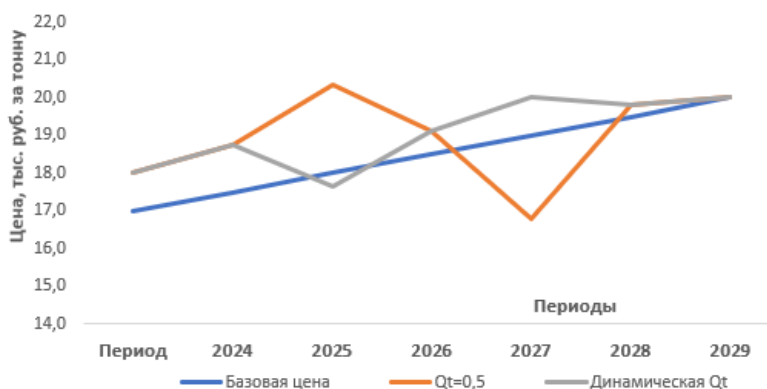


Рис. 7. Цена при фиксированной и динамической ставке экспортной квоты

Компании-экспортеры принимают решения исходя из максимизации своего критерия в задаче (8)–(12). Предложенная модель позволяет проводить анализ рентабельности деятельности компаний и влияния на нее экспортных ограничений. На рис. 8 показана зависимость суммарной выручка компаний-экспортеров на внешнем и внутреннем рынках от ставки экспортной пошлины для сценарных условий таблицы 2.

График показывает, что завышенная экспортной пошлины может существенно снизить выручку компаний от продажи продукции и, при высоких производственных издержках, понизить рентабельность производства до критического уровня.

Следует заметить, что на многие параметры, используемые при решении задачи, существенное влияние оказывает текущий курс рубля. Так, при его укреплении цены экспортных контрактов в рублях снижаются, что приводит также к снижению экс-

портных пошлин и выручки компаний-экспортеров. В этой связи интересен анализ влияние курса рубля на величину внутренних цен на зерно при различных сценариях внешней конъюнктуры.

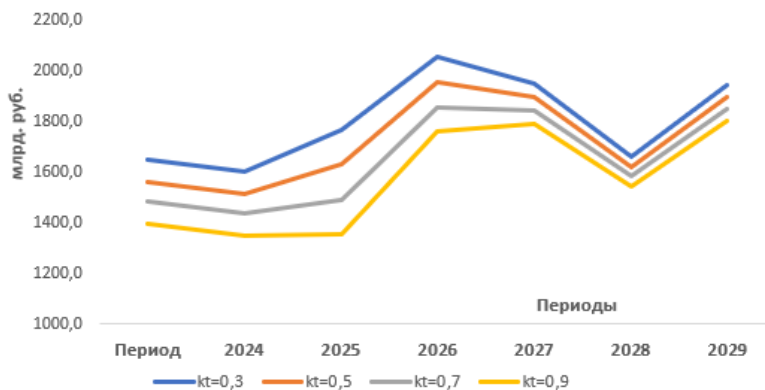


Рис. 8. Выручка компаний экспортеров от ставки экспортной пошлины

5. Заключение

Рассмотрена проблема анализа и моделирования механизмов взаимодействия государственных органов и компаний в рыночной экономике. Одной из таких проблем является настройка механизмов регулирования со стороны государства деятельности компаний-экспортеров с целью сдерживания роста внутренних цен и темпа инфляции на критически важные виды продукции.

Мы предлагаем для этой цели использовать подход к моделированию, который учитывает взаимодействие между участниками рынка и позволяет согласовать интересы независимых производителей и государства. Рассматриваются и анализируются механизмы регулирования рынка зерна в РФ, дана математическая формулировка исследуемой задачи и методы ее решения. Приведены результаты сценарного анализа влияния пара-

метров экспортных ограничений на внутренние цены на примере рынка пшеницы РФ.

В результате проведенных исследований можно сделать следующие выводы. Используемые государством механизмы экспортных ограничений позволяют регулировать внутренний рынок и эффективно влиять на внутренние цены. Вместе с тем, с учетом инфляции и роста издержек компаний-экспортеров, необходимо иметь в виду, что цена на внутреннем рынке должна быть не ниже цены, которая обеспечит приемлемый уровень маржинальности бизнеса, связанного с выращиванием пшеницы.

Если в качестве экспортных ограничений используется экспортная пошлина, которая рассчитывается с использованием двух параметров, устанавливаемых правительством: ставки экспортной пошлины и базовой цены, то компании-экспортеры максимизируют выручку при распределении валового сбора пшеницы между экспортными поставками и внутренним рынком, при котором цена на внутреннем рынке будет стремиться к экспортной цене с учетом текущего курса рубля минус динамически рассчитанной экспортной пошлины.

На поведение экспортеров существенное влияние оказывает курс национальной валюты: при укреплении рубля экспортные цены в рублях снижаются, что при высокой пошлине может привести к отсутствию интереса производителей к экспорту продукции. Может возникнуть ситуация, когда экспортная цена может быть меньше цены внутреннего рынка. В этом случае компании будут терпеть убытки и сокращать посевные площади, тем самым снижая давление на рынок для поддержания цены продукции на равновесном приемлемом уровне.

Рассматриваемая проблема открывает большое поле для исследований и применения методов математического моделирования. Естественно, что в данной статье мы не ставили цель рассмотреть все вопросы и ограничились постановкой проблемы и предложили подход к ее решению для достаточно простого случая. В этой связи в дальнейшем потребуются исследования, которые позволят учесть многие значимые факторы, которые не были учтены в этой работе. Интерес представляет, например, учет в задаче нескольких экспортных рынков, причем на неко-

торых рынках РФ обладает рыночной властью и может влиять на цену зерна на них и ряд других вопросов.

Литература

1. АКИНФИЕВ В.К. *Два подхода к решению динамической задачи расширения мощности производства на рынке олигополии* // Управление большими системами. – 2019. – Вып. 79. – С. 65–85.
2. АКИНФИЕВ В.К. *Модели пространственного развития инфраструктурных систем* // Управление большими системами. – 2021. – Вып. 91. – С. 96–119.
3. БОРОДИН К.Г. *Влияние экспортных ограничений на внутренний рынок экспортера* // Российский внешнеэкономический вестник. – 2019. – №12. – С. 31–39.
4. БОРОДИН К.Г. *Влияние экспорта на внутренний рынок страны-экспортера* // Экономическая наука современной России. – 2021. – №4(95). – С. 49–67.
5. *Единый план по достижению национальных целей развития до 2030 года и на перспективу до 2036 года.* – URL: <http://government.ru/news/53927/>.
6. КРЫЛОВ Д. *Продовольственная инфляция в России и мировые цены на продукты питания* // Серия докладов об экономических исследованиях ЦБ РФ № 126. – Февраль 2024 г.
7. *Указ Президента РФ от 21 января 2020 г. №20 "Об утверждении Доктрины продовольственной безопасности Российской Федерации"*. – URL: <https://base.garant.ru/73438425>.
8. ABBOTT P.C., HURT C., TYNER W.E. *What's driving food prices in 2011?* // AgEcon Search. The Open Access Agricultural & Applied Economics Digital Library, 2011. – P. 39.
9. AKINFIEV V.K. *Dynamic Capacity Expansion Problem in Competitive Markets* // Proc. of the 12th Int. Conf. «Management of Large-Scale System Development» (MLSD–2019). – Moscow: IEEE, 2019.
10. AKTER S. *The effects of food export restrictions on the domestic economy of exporting countries: A review* // Global Food Security. – 2022. – Vol. 35. – P. 100657.

11. BAFFES J., DENNIS A. *Long-term drivers of food prices* // World Bank Policy Research Working Paper. – 2013. – No. 6455.
12. BURSTEIN A., GOPINATH G. *International prices and exchange rates* // Handbook of International Economics. – Elsevier, 2014. – Vol. 4. – P. 391–451.
13. ESPITIA A., ROCHA N., RUTA M. *Covid-19 and food protectionism: the impact of the pandemic and export restrictions on world food markets* // World Bank Policy Research Working Paper. – 2020. – No. 9253.
14. FERRIS M., MUNSON T.S. *Complementarity Problems in GAMS and the PATH Solver* // Journal of Economic Dynamics and Control. – 2000. – Vol. 24, Iss. 2. – P. 165–188.
15. KALKUHL M., VON BRAUN J., TORERO M. *Food price volatility and its implications for food security and policy*. – Springer Nature, 2016. – P. 626.
16. LABORDE D., ESTRADES C., BOUET A. *A global assessment of the economic effects of export taxes* // The World Economy. – 2013. – Vol. 36, No. 10. – P. 1333–1354.
17. SVANIDZE M., GÖTZ L., SEREBRENNIKOV D. *The influence of Russia's 2010/2011 wheat export ban on spatial market integration and transaction costs of grain markets* // Applied Economic Perspectives and Policy. – 2022. – Vol. 44, No. 2. – P. 1083–1099.
18. UHL K.M., PEREKHOZHUK O., GLAUBEN T. *Russian market power in international wheat exports: evidence from a residual demand elasticity analysis* // Journal of Agricultural & Food Industrial Organization. – 2019. – Vol. 17, No. 2. – P. 20160026.
19. UHL K. M. *Russian market power in international wheat trade and implications for global food security* // Studies on the Agricultural and Food Sector in Transition Economies. – 2021. – No. 97.
20. ZHAI L., YUAN S., FENG Y. *The economic effects of export restrictions imposed by major grain producers* // Agricultural Economics/Zemědělská Ekonomika. – 2022. – Vol. 68, No. 1.

MODELING THE IMPACT OF EXPORT RESTRICTIONS ON DOMESTIC MARKET PRICES

Valery Akinfiev, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Doctor of Science, Professor (akinf@ipu.ru).

Abstract: The article considers the problem of analysis and selection of measures of state regulation of the activities of exporting companies. This problem is considered on the example of the grain industry, in particular, wheat. Grain markets, as a rule, have an oligopolistic nature. We consider two types of market participants: many exporting companies and the state, which exercises the function of the market regulator. The goal of the state is to regulate domestic prices for critically important types of products. We use an approach to modeling that takes into account the interaction of market participants and allows us to coordinate the interests of independent producers and the state. A feature of our approach is that each player chooses a strategy for its behavior in the market within the framework of a certain optimization problem, which are related to each other through common variables. A mathematical formulation of the problem under study is given and methods for its solution are proposed. The results of scenario modeling and analysis of the impact of export restriction parameters on domestic prices are presented using the example of the wheat market.

Keywords: export restrictions, domestic market volatility, mathematical programming problems, scenario modeling.

УДК 338.2
ББК 65.050

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.Д. Богатыревым.*

*Поступила в редакцию 25.03.2025.
Опубликована 31.07.2025.*

СИСТЕМНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОМЫШЛЕННОСТИ: ФАКТОРЫ РОСТА И АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ

Цветков В. В.¹

(Аппарат Правительства Российской Федерации, Москва)

Представлена системная динамическая модель экономических потоков в промышленности, разработанная в IThink. Модель позволяет исследовать влияние стратегий инвесторов и государственной налоговой политики на темпы роста промышленности с учетом амортизации основных фондов и рентабельности. Моделирование показало, что в основе промышленности заложен потенциал нелинейного роста, однако ускорение требует значительного времени и условий. Важным фактором выступает уровень износа: при высокой амортизации значительная часть инвестиций направляется на поддержание мощностей и только чистые инвестиции обеспечивают расширение. Выявлено, что эффективность государственной политики определяется горизонтом планирования: при краткосрочном горизонте (до 15 лет) государству выгодно устанавливать высокие налоги, но при увеличении горизонта до 30 лет ситуация меняется: оптимальной становится налоговая ставка 20%, способствующая росту отрасли и налоговых поступлений. Ключевым фактором роста является поведение инвесторов: при краткосрочной стратегии они накапливают прибыль, но теряют потенциал роста и получают значительно меньшую прибыль в долгосрочной перспективе. Долгосрочные стратегии инвесторов позволяюткратно увеличить совокупные доходы. Государству выгодны такие инвесторы, так как они способствуют устойчивому росту отрасли, модернизации и увеличению налоговой базы. Таким образом, согласование долгосрочных стратегий государства и инвесторов является условием промышленного развития.

Ключевые слова: системная динамика, промышленность, моделирование в IThink, экономический рост, инвестиционные стратегии.

1. Введение

Отрасли промышленности (далее – отрасли, промышленность) играют ключевую роль в развитии общества. Какие факторы способствуют её росту, и почему некоторые отрасли развиваются быстрее других? В статье делается попытка разобраться в этом вопросе с помощью модели, которая объясняет,

¹ Виктор Владимирович Цветков, гл. советник (Tsvetkov.dinamika@internet.ru).

как инвестиции, износ основных фондов налоги и стратегии инвесторов влияют на развитие целых отраслей.

В статье используется простая, но в то же время содержательная модель, созданная в IThink [1, 3, 4] и основанная на дифференциальных уравнениях [2], которая помогает понять, как решения инвесторов и государства могут ускорить или замедлить рост экономики.

Целью исследования является разработка инструментария, который не только описывает теоретические аспекты роста промышленности, но и предоставляет практические рекомендации для выработки оптимальной государственной политики и инвестиционных стратегий [5, 6]. Применение модели позволяет выявить, как различные управленческие решения могут ускорить рост отраслей, повысить налоговые поступления и стимулировать долгосрочные инвестиции.

Новизна работы заключается в разработке математического аппарата, адаптированного для анализа долгосрочных стратегий развития отраслей промышленности, и в практическом применении полученных результатов. Полученные выводы имеют как теоретическую, так и прикладную значимость, что делает модель универсальным инструментом для управления социально-экономическими системами.

2. Описание модели и математический аппарат

Предложенная в статье системная динамическая модель экономических потоков отрасли промышленности разработана с использованием программы iThink и опирается на положения модели экономического роста Р. Солоу [7]. Вместе с тем она имеет отличие от модели Р. Солоу: в предложенной модели особое внимание уделено источникам инвестиций и стратегиям инвесторов и государства, что позволяет более детально исследовать влияние выбранных стратегий инвесторов на развитие отрасли.

В модели также учитывается влияние государственных решений и стратегий инвесторов на долгосрочное развитие отрасли, что делает ее более гибкой и практичной по сравнению с традиционными теоретическими подходами.

Модель представляет собой систему потоков и накопителей (рис. 1). В центре модели находится совокупный доход отрасли (DO), который генерируется производственной деятельностью. Доход отрасли (DO) увеличивается с притоком инвестиций в основные фонды (Inv) и уменьшается из-за их естественного износа (IzF). С дохода отрасли формируется ежегодная прибыль до налогов (Pdn), зависящая от величины рентабельности отрасли (R). С прибыли до налогов (Pdn) в государство идут налоговые поступления (Np), регулируемые налоговой ставкой (Sn). Чистая прибыль (Cp) распределяется инвесторами в зависимости от выбранной стратегии: либо во вне (Pri), где суммируется в блоке дохода инвесторов (DI), либо поступает в блок инвестиции (Inv). Решения инвесторов регулируются параметром (Dpi) – долей прибыли инвесторов.

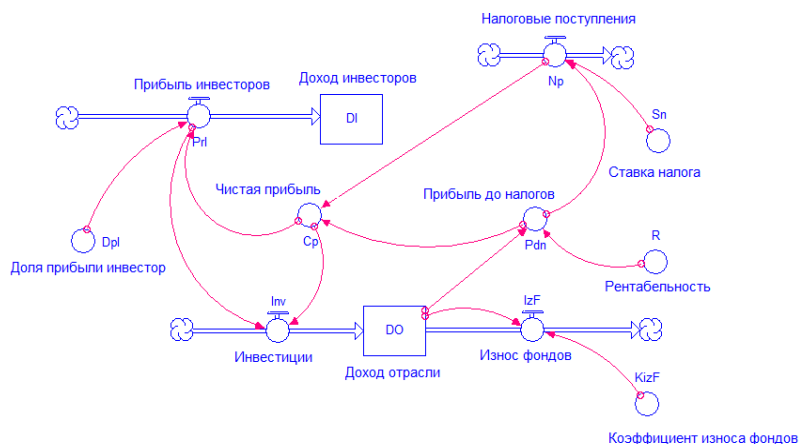


Рис. 1. Графический образ модели отрасли

В модель внесены упрощения для повышения ее наглядности: исключены инфляция и влияние банковского сектора, предполагается неограниченные трудовые ресурсы и постоянство технологий, а инвестиции в основные фонды осуществляются моментально. Это позволило сосредоточиться на ключевых экономических потоках: доходах, инвестициях и износе

фондов, что сделало модель более наглядной и доступной для анализа.

Система дифференциальных уравнений, созданная в программе IThink (рис. 2).

```

□ DI(t) = DI(t - dt) + (Pri) * dt
INIT DI = 0
INFLOWS:
  ☞ Pri = Cp*Dpi
□ DO(t) = DO(t - dt) + (Inv - IzF) * dt
INIT DO = 100
INFLOWS:
  ☞ Inv = Cp-Pri
OUTFLOWS:
  ☞ IzF = DO*KizF
UNATTACHED:
  ☞ Np = Pdn*Sn
○ Cp = Pdn-Np
○ Dpi = 0
○ KizF = 0.03
○ Pdn = DO*R
○ R = 0.05
○ Sn = 0
    
```

Рис. 2. Система уравнений, записанная на языке Дунато

Математическое описание модели.

Предложенная системная динамическая модель описывает изменения ключевых параметров отрасли промышленности на основе системы дифференциальных уравнений. Главным уравнением модели является уравнение динамики дохода отрасли (DO):

$$(1) \frac{dDO}{dt} = DO(t) * R * (1 - Sn) * (1 - Dpi) - KizF * DO(t),$$

где $DO(t)$ – доход отрасли в момент времени t ; R – коэффициент рентабельности; Sn – налоговая ставка; Dpi – доля прибыли, сохраняемая инвесторами; $KizF$ – коэффициент износа фондов.

Описание переменных:

Инвестиции (Inv): объем инвестиций в основные фонды, направленных на увеличение выпуска продукции. Параметр зависит от выбранной стратегии инвесторов. Определяется формулой

$$(2) Inv(t) = Cp(t) * (1 - Dpi) = DO(t) * R * (1 - Sn) * (1 - Dpi).$$

Доход отрасли (DO): общий объем дохода отрасли от всей произведенной продукции. Он измеряется в денежном эквива-

ленте и является условной величиной, начиная с определенного значения в модели:

$$(3) \quad \frac{dDO(t)}{dt} = Inv(t) - KizF * DO(t).$$

Износ фондов (IzF): уровень амортизации основных фондов, который влияет на снижение дохода отрасли; задается коэффициентом износа фондов в % отношении от дохода отрасли ($KizF$):

$$(4) \quad IzF(t) = DO(t) * (1 - KizF).$$

Прибыль до налогообложения (Pdn): определяется через рентабельность отрасли и отражает доходы, которые еще не подвергались налогообложению:

$$(5) \quad Pdn(t) = DO(t) * (1 - R).$$

Коэффициент рентабельность – рентабельность (R): показатель эффективности отрасли, влияющий на объемы прибыли и возможности для накопления или реинвестирования.

Коэффициент налоговых поступлений – налоговые поступления (Np): общий объем налогов, рассчитываемый исходя из ставки налога (Sn), которая установлена государством:

$$(6) \quad Np(t) = Pdn(t) * Sn(t).$$

Коэффициент доли прибыли инвесторов (Dpi): доля прибыли, сохраняемая инвесторами (Pri) либо направляемая на реинвестирование в основной капитал (Inv), именно она определяет выбранные стратегии инвесторов сберегать или инвестировать. Пример: $Dpi = 10\%$ – это означает, что инвесторы 10% от чистой прибыли сберегают (Pri), а 90 % направляют в блок инвестиции (Inv).

Дополнительно введенный в сценарии 1 коэффициент инвестиций ($Kinv$): показатель роста дохода отрасли, в %:

$$(7) \quad Kinv(t) = \left(\frac{Inv(t)}{DO(t)} \right) * 100\% - KizF.$$

В разделе 3 проведен анализ чувствительности ключевых параметров модели с использованием численных методов решения.

3. Предложенные сценарии моделирования

3.1. СЦЕНАРИЙ РОСТА С ПОЛНОЙ РЕИНВЕСТИЦИЕЙ ПРИБЫЛИ.

Начальные параметры модели:

- Доход отрасли (DO) = 100 у.е.
- Доля прибыли инвесторов (Dpi) = 0%.
- Ставка налога (Sn) = 0%.
- Рентабельность отрасли (R) = 14%.
- Коэффициент износа основных фондов ($KizF$) = 5%.
- Горизонт моделирования – 40 лет.

Описание сценария: Рассматривается сценарий, в котором налоговая ставка и доля прибыли, сохраняемая инвесторами, равны нулю. В этих условиях вся прибыль от производства реинвестируется в основные фонды, создавая оптимальные условия для ускоренного роста отрасли.

Цель: исследовать поведение модели и определить ключевые коэффициенты, которые позволяют описать и спрогнозировать динамику роста системы. Результаты моделирования представлены на рис. 3.

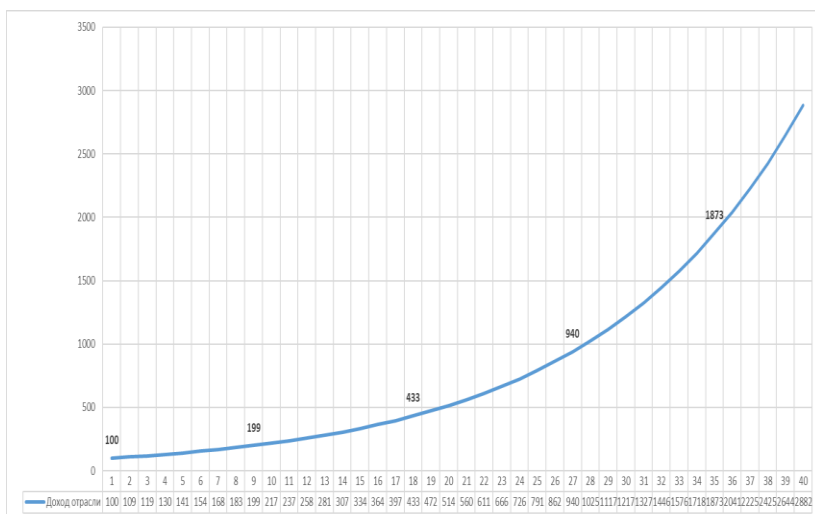


Рис. 3. Результаты моделирования

Первые 8 лет отрасль демонстрирует медленный линейный рост, так как объем реинвестируемой прибыли в первые годы сравнительно невелик и не создает значительного эффекта ускоренного роста. Также мы видим, что доход отрасли удваивается каждые 8 лет – время удвоения отрасли. По мере накопления капитала к 20-му году наблюдается ускорение роста доходов отрасли, но характер роста остается линейным, просто увеличивается его ежегодный денежный объем. Этап ускоренного роста наблюдается примерно с 18–20 года моделирования. В начальные годы доход отрасли удваивается со 100 до 199 у.е. за 8 лет. Однако в поздние годы модель начинает демонстрировать более значительные приросты дохода: например, доход в 20-й год увеличивается на 46 у.е. за один год, в ранний период такой прирост занимал около 5 лет.

Для нахождения скорости удвоения дохода отрасли предлагается ввести коэффициент инвестиций (K_{inv}), который позволяет оценить, насколько эффективно прибыль реинвестируется в основные фонды и как это влияет на динамику модели. В данном сценарии расчетный коэффициент инвестиций составляет 9%.

Выводы: сценарий показал, что на «взращивание» отрасли требуется значительное время для достижения ускоренного роста. В первые годы наблюдается медленная динамика роста, и только к 18–20 году ускорение становится значительным. Введенный коэффициент инвестиций (K_{inv}) является ключевым показателем, который определяет, насколько быстро отрасль может развиваться и удваивать свои доходы. Чем выше K_{inv} , тем быстрее происходит накопление капитала и тем быстрее наша модель достигает точки, с которой начинается ускорение роста.

Такое поведение системы объясняется тем, что первоначальные инвестиции требуют времени для создания условий, способствующих ускоренному росту. Это подчеркивает важность государственной поддержки реинвестирования прибыли, чтобы ускорить экономическое развитие промышленности в долгосрочной перспективе.

В реальности аналогичный эффект ускорения роста можно наблюдать в развитии промышленности на протяжении послед-

них 100–200 лет. Примером этого является индустриализация экономик мира, сегодня подобные темпы прироста, которых раньше достигали за десятилетия, реализуются всего за несколько лет или даже за один год. Ускорение темпов роста обусловлено не только накоплением капитала и инвестиций, но также технологическим прогрессом, улучшением инфраструктуры, повышением производительности труда и совершенствованием логистики.

3.2. СЦЕНАРИИ РОСТА ПРИ РАЗНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ КОЭФФИЦИЕНТА ИЗНОСА ФОНДОВ.

Начальные параметры модели:

- Доход отрасли (DO) = 100 у.е.
- Доля прибыли инвесторов (Dpi) = 0%.
- Ставка налога (Sn) = 0%.
- Рентабельность отрасли (R) = 14%.
- Коэффициент износа основных фондов ($KizF$) = 3%, 5%, 7%, 9%.
- Горизонт моделирования – 20 лет.

В данном сценарии исследуется, как увеличение коэффициента износа основных фондов ($KizF$) влияет на динамику роста отрасли. Результаты моделирования представлены на рис. 4.

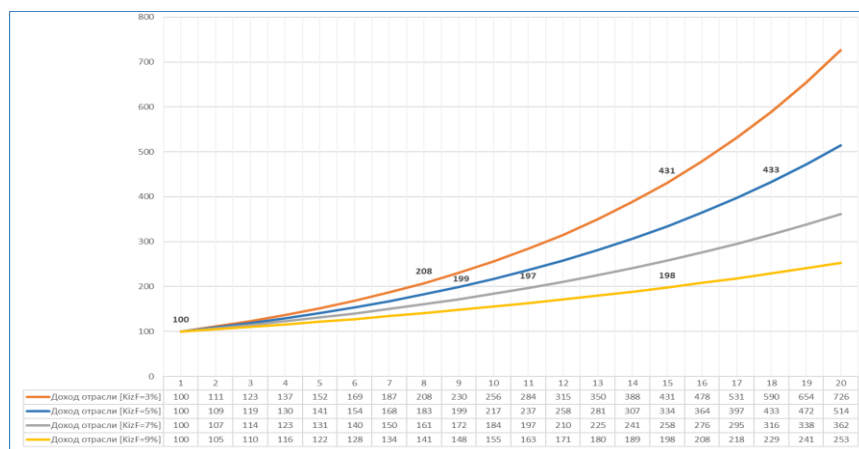


Рис.4. Результаты моделирования

На начальном этапе при $KizF = 3\%$ отрасль демонстрирует более быстрый рост, так как объем реинвестируемой прибыли достаточен для покрытия износа и увеличения основных фондов. При таких условиях доход отрасли удваивается через 7 лет, ускоренный рост наблюдается с 16 года. Это показывает, что низкий уровень износа способствует более интенсивному накоплению капитала и росту промышленности.

При $KizF = 5\%$ отрасль также демонстрирует быстрый рост. При таких условиях доход отрасли удваивается через 8 лет, аналогично результатам, полученным в сценарии 1.

При увеличении коэффициента износа до 7% наблюдается замедление роста. Удвоение дохода отрасли при этом происходит примерно за 10 лет. Это связано с тем, что значительная часть прибыли направляется на поддержание текущих мощностей, а не на их расширение, что ограничивает возможности для ускоренного роста, начало ускоренного роста происходит позже.

При дальнейшем увеличении коэффициента износа до 9% темп роста еще больше замедляется, и удвоение дохода происходит уже через 14 лет. Это объясняется тем, что высокий уровень износа основных фондов требует значительных вложений на их замену, что существенно снижает объем средств, доступных для расширения и модернизации.

Выводы: результаты данного сценария показывают, что увеличение износа основных фондов оказывает негативное влияние на темпы роста промышленности. Чем выше уровень износа, тем больше средств необходимо направлять на поддержание текущих мощностей, что замедляет процесс накопления капитала и увеличивает время, требуемое на удвоение отрасли и выход на ускоренный рост. Важно учитывать эти факторы при разработке стратегий поддержки промышленного роста, так как модернизация и снижение износа основных фондов могут способствовать ускорению роста и уменьшению сроков удвоения доходов.

3.3. СЦЕНАРИЙ РОСТА ПРИ РАЗНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ РЕНТАБЕЛЬНОСТИ.

Начальные параметры модели:

- Доход отрасли (DO) = 100 у.е.
- Доля прибыли инвесторов (Dpi) = 0%.
- Ставка налога (Sn) = 0%.
- Рентабельность отрасли (R) = 5%, 10%, 15%, 20%.
- Коэффициент износа основных фондов ($KizF$) = 5%.
- Горизонт моделирования – 40 лет.

Описание сценария: данный сценарий моделирует рост дохода отрасли при различных уровнях рентабельности.

Цель: определить, как изменение рентабельности влияет на время удвоения отрасли и момент перехода из линейного роста к ускоренному росту. Результаты моделирования представлены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты моделирования

Годы	DO ($R=10\%$)	DO ($R=15\%$)	DO ($R=20\%$)	Годы	DO ($R=20\%$)	DO ($R=20\%$)	DO ($R=20\%$)
1	100	100	100	21	265	673	1637
2	105	110	115	22	279	740	1882
3	110	121	132	23	293	814	2164
4	116	133	152	24	307	895	2489
5	122	146	175	25	323	985	2863
6	128	161	201	26	339	1083	3292
7	134	177	231	27	356	1192	3786
8	141	195	266	28	373	1311	4354
9	148	214	306	29	392	1442	5007
10	155	236	352	30	412	1586	5758
11	163	259	405	31	432	1745	6621
12	171	285	465	32	454	1919	7614
13	180	314	535	33	476	2111	8757
14	189	345	615	34	500	2323	10070
15	198	380	708	35	525	2555	11580
16	208	418	814	36	552	2810	13318
17	218	459	936	37	579	3091	15315
18	229	505	1076	38	608	3400	17612
19	241	556	1238	39	639	3740	20254
20	253	612	1423	40	670	4114	23292

При $R = 5\%$, $K_{inv} = 0$. Доход отрасли не удваивается на протяжении всего периода моделирования. Это связано с тем, что все инвестиции направляются на покрытие износа фондов.

При $R = 10\%$, $K_{inv} = 5\%$. Удвоение дохода отрасли происходит каждые 14 лет. Это говорит о том, что несмотря на линейный характер роста в начальные годы, увеличенное количество реинвестируемой прибыли начинает давать эффект в долгосрочной перспективе. Доход отрасли в 20 году составил 253 у.е., а к 40 году увеличился до 670 у.е.

При $R = 15\%$, $K_{inv} = 10\%$. Удвоение дохода отрасли происходит каждые 7 лет. С ростом рентабельности появляется больше средств для реинвестирования, что позволяет отрасли постепенно накапливать капитал и увеличивать объем основных фондов. Это ведет к ускоренному росту, который начинается уже в середине периода моделирования. По мере накопления капитала наблюдается переход от линейного к ускоренному росту с 15 года. Доход отрасли в 20 году – 612 у.е., а к 40 – 4114 у.е.

При $R = 20\%$, $K_{inv} = 15\%$. Удвоение дохода происходит каждые 4–5 лет. Высокая рентабельность обеспечивает более интенсивное реинвестирование, что значительно ускоряет темп роста. Ускоренный рост наблюдается уже с 11 года. Доход отрасли в 20 году – 1423 у.е., а к 40 – 23 292 у.е.

Выводы: анализ показывает, что рентабельность является ключевым фактором, определяющим время удвоения отрасли. При рентабельности равной износу фондов рост отсутствует.

В результате моделирования установлено, что переход от линейного к ускоренному росту наблюдается в начале 3 цикла удвоения отрасли. Это связано с тем, что значительная часть прибыли реинвестируется, что позволяет отрасли быстрее увеличивать свои основные фонды и наращивать доход. Результаты моделирования подчеркивают важность поддержания высокой рентабельности для устойчивого роста отрасли. Государство и сами предприятия могут рассматривать меры по повышению эффективности производства и снижению издержек, чтобы увеличить рентабельность и, следовательно, ускорить рост.

Для достижения быстрого роста отрасли необходимо поддержание высокой рентабельности, что требует как внутренних

изменений на уровне предприятий, так и внешних стимулов со стороны государства.

3.4. СЦЕНАРИЙ РОСТА ПРИ РАЗНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ СТАВКИ НАЛОГА.

Начальные параметры модели:

- Доход отрасли (DO) = 100 у.е.
- Доля прибыли инвесторов (Dpi) = 0%.
- Ставка налога (Sn) = 10%, 20%, 30%, 40%, 50%.
- Рентабельность отрасли (R) = 20%.
- Коэффициент износа основных фондов ($KizF$) = 5%.
- Горизонт моделирования – 40 лет.

Целью данного сценария является моделирование влияния различных ставок налога на рост дохода отрасли. Основное внимание уделяется тому, как налоговая нагрузка влияет на возможности отрасли по удвоению доходов и объему налоговых поступлений в бюджет. Результаты моделирования представлены в таблице 2 и 3. В таблицах 2 и 3 зеленым цветом выделены наибольшие значения, назовем их оптимальные стратегии.

Таблица 2. Результаты моделирования (1–20 годы)

Годы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Доход отрасли [$Sn=10\%$]	100	113	128	144	163	184	208	235	266	300	339	384	433	490	553	625	707	799	902	1020
Доход отрасли [$Sn=20\%$]	100	111	123	137	152	169	187	208	230	256	284	315	350	388	431	478	531	590	654	726
Доход отрасли [$Sn=30\%$]	100	109	119	130	141	154	168	183	199	217	237	258	281	307	334	364	397	433	472	514
Доход отрасли [$Sn=40\%$]	100	107	114	123	131	140	150	161	172	184	197	210	225	241	258	276	295	316	338	362
Доход отрасли [$Sn=50\%$]	100	105	110	116	122	128	134	141	148	155	163	171	180	189	198	208	218	229	241	253
Налоговые поступления [$Sn=10\%$]	2	2	3	3	3	4	4	5	5	6	7	8	9	10	11	13	14	16	18	20
Налоговые поступления [$Sn=20\%$]	4	4	5	5	6	7	7	8	9	10	11	13	14	16	17	19	21	24	26	29
Налоговые поступления [$Sn=30\%$]	6	7	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	17	18	20	22	24	26	28	31
Налоговые поступления [$Sn=40\%$]	8	9	9	10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	21	22	24	25	27	29
Налоговые поступления [$Sn=50\%$]	10	11	11	12	12	13	13	14	15	16	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Таблица 3. Результаты моделирования (21–40 годы)

Годы	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Доход отрасли [$Sn=10\%$]	1152	1302	1471	1663	1879	2123	2399	2711	3063	3462	3912	4420	4995	5644	6378	7207	8144	9202	10399	11751
Доход отрасли [$Sn=20\%$]	806	895	993	1103	1224	1359	1508	1674	1858	2062	2289	2541	2821	3131	3475	3857	4282	4753	5276	5856
Доход отрасли [$Sn=30\%$]	560	611	666	726	791	862	940	1025	1117	1217	1327	1446	1576	1718	1873	2041	2225	2425	2644	2882
Доход отрасли [$Sn=40\%$]	387	414	443	474	507	543	581	621	665	711	761	815	872	933	998	1068	1142	1222	1308	1399
Доход отрасли [$Sn=50\%$]	265	279	293	307	323	339	356	373	392	412	432	454	476	500	525	552	579	608	639	670
Налоговые поступления [$Sn=10\%$]	23	26	29	33	38	42	48	54	61	69	78	88	100	113	128	144	163	184	208	208
Налоговые поступления [$Sn=20\%$]	32	36	40	44	49	54	60	67	74	82	92	102	113	125	139	154	171	190	211	211
Налоговые поступления [$Sn=30\%$]	34	37	40	44	47	52	56	61	67	73	80	87	95	103	112	122	134	146	159	159
Налоговые поступления [$Sn=40\%$]	31	33	35	38	41	43	46	50	53	57	61	65	70	75	80	85	91	98	105	105
Налоговые поступления [$Sn=50\%$]	27	28	29	31	32	34	36	37	39	41	43	45	48	50	53	55	58	61	64	64

Из таблиц 2 и 3 видно, что чем меньше ставка налога S_n , тем быстрее удваивается доход отрасли, к примеру при $S_n = 30\%$ скорость удвоения отрасли равна 8 годам, при $S_n = 50\%$ удвоение происходит через 14 лет. Также при рассмотрении результатов моделирования выявлено, что государству на горизонте 14 лет выгоднее установить высокую ставку налога $S_n = 50\%$, что позволит ежегодно собирать наибольшую прибыль, но при увеличении горизонта планирования до 20 лет ситуация меняется: оптимальной ставкой является 30%, это объясняется большей скоростью удвоения отрасли. Назовем это краткосрочная и долгосрочная стратегии и подробно рассмотрим каждую из них.

Краткосрочная стратегия: горизонт планирования 10-14 лет.

При анализе горизонта планирования в 10-14 лет оптимальной оказывается высокая налоговая ставка (в нашем сценарии 50%), так как она позволяет государству собирать значительные налоговые поступления в краткосрочной перспективе. Ежегодно собираемые налоги с 1–10 год будут равны 10–16 у.е., это наибольший показатель из моделируемых сценариев. Но при такой ставке отрасль удвоит свои доходы через 14 лет.

Такая стратегия имеет негативные стороны: замедление скорости роста отрасли ограничивает ее возможности в долгосрочной перспективе. Высокие налоговые ставки снижают объем средств, доступных для реинвестирования, что препятствует ускорению роста. Ускоренный рост возможен если государство перенаправит собранные деньги на инвестиции.

Долгосрочная стратегия: горизонт планирования 25 лет.

При увеличении горизонта планирования оптимальная ставка уменьшается и на 25 год становится равной 20%. Хотя при ставке в 20% государство и получает в течение 10 лет 4–10 у.е ежегодно, но на 25 год ежегодные поступления возрастают до 49 у.е, против 31 у.е. (при ставке в 50%). На 40 год разница в поступлении налогов увеличивается кратно и составляет 211 у.е (при ставке 20%) против 64 у.е. (при ставке 50%).

Это объясняется тем, что при ставке 20% отрасль удваивает свои доходы каждые 7 лет. Такая ставка обеспечивает умеренную скорость роста, а также поступление значительных налогов

в бюджет, что важно для обеспечения устойчивого экономического развития.

Ставка налога в размере 20% дает возможность инвесторам реинвестировать достаточное количество средств, что способствует более быстрому накоплению капитала и росту доходов. Таким образом, налоговая ставка 20% является оптимальным выбором при долгосрочном горизонте планирования, обеспечивая стабильное развитие отрасли и поступление налогов.

Таблица 4. Расчетный коэффициент инвестиций K_{inv} и время удвоения отрасли

Ставка налога, %	K_{inv} , %	Время удвоения отрасли, лет
10	13	6
20	11	7
30	9	8
40	7	11
50	5	14

Выводы: в результате проведенного моделирования выявлен новый важный параметр – горизонт планирования (стратегия), который оказывает значительное влияние на время удвоения доходов промышленности и налоговых поступлений. Горизонт планирования определяет временной промежуток, в течение которого как инвесторы, так и государство оценивают эффективность принятых экономических решений, таких как налоговая политика или стратегия инвестирования. Рис. 5 демонстрирует влияние разных налоговых ставок на динамику роста налоговых поступлений.

С повышением ставки налога с 10% до 50% увеличивается период удвоения доходов с 6 до 14 лет. Это указывает на необходимость учета баланса между краткосрочными и долгосрочными приоритетами, чтобы обеспечить стабильный рост доходов при максимизации налоговых поступлений.

Оптимальная ставка налога должна учитывать горизонты планирования как инвесторов, так и государства. Высокие налоговые ставки (40-50%) целесообразны для краткосрочных горизонтов, так как позволяют государству собирать больше налогов. Однако для долгосрочного роста более подходящими явля-

ются умеренные ставки (около 20%), которые обеспечивают баланс между налоговыми поступлениями и возможностями для инвестиций в рост. Если государство выбирает ставку 20%, оно дает понять инвесторам, что нацелено на долгосрочный горизонт планирования, отдавая значительную долю заработанных средств в распоряжение инвесторов. Это способствует поддержанию устойчивого роста отрасли, так как большая часть прибыли остается для реинвестирования.

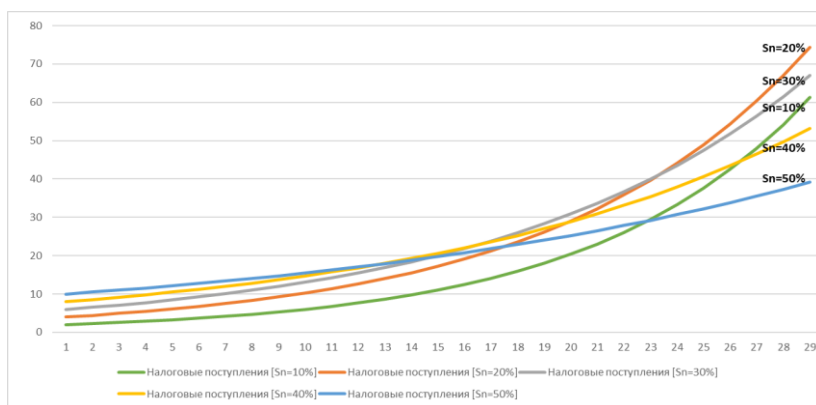


Рис. 5. Влияние налоговой ставки на динамику роста налоговых поступлений

Необходимо отметить, что ставка налога, в отличие от решений инвестора инвестировать полученные средства, регулируется государством. Этот процесс достаточно бюрократизирован, что связано с необходимостью учета множества экономических и социальных факторов.

3.5. СЦЕНАРИЙ РОСТА ПРИ РАЗНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДОЛИ ПРИБЫЛИ ИНВЕСТОРОВ (DPI).

Начальные параметры модели:

- Доход отрасли (DO) = 100 у.е.
- Доля прибыли инвесторов (Dpi) = 0%, 10%, 20%, 30%, 40%, 50%, 60%, 70%, 80%, 90%, 100%.
- Ставка налога (Sn) = 20%.

- Рентабельность отрасли (R) = 20%.
- Коэффициент износа основных фондов ($KizF$) = 5%.
- Горизонт моделирования – 40 лет.

Описание сценария: данный сценарий моделирует влияние изменения доли прибыли, сохраняемой инвесторами, на темпы роста отрасли.

Целью является исследовать, как выбор стратегии инвесторов может ускорить или замедлить рост промышленности.

С увеличением доли прибыли (Dpi), сохраняемой инвесторами, K_{inv} уменьшается, что увеличивает время удвоения доходов отрасли, см. таблицу 5. При $Dpi = 50\%$ время удвоения отрасли снижается до 24 лет. При $Dpi = 70\%$ и более отрасль полностью теряет потенциал роста, так как прибыль инвесторов направляется на накопление и частичное обновление фондов, а не на инвестиции в развитие. Результаты моделирования представлены в таблицах 5 и 6. В них зеленым цветом выделены оптимальные стратегии.

Таблица 5. Результаты моделирования (1–20 годы)

Годы	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
Доходы инвесторов [Dpi=10%]	0	2	3	5	7	10	12	15	18	21	25	29	33	38	43	48	55	61	69	77	
Доходы инвесторов [Dpi=20%]	0	3	7	10	14	19	23	28	34	40	46	53	60	68	76	86	95	106	118	130	
Доходы инвесторов [Dpi=30%]	0	5	10	15	21	27	34	41	48	56	64	73	82	92	102	113	125	138	151	165	
Доходы инвесторов [Dpi=40%]	0	6	13	20	27	35	43	51	60	69	79	89	100	111	122	134	147	160	173	188	
Доходы инвесторов [Dpi=50%]	0	8	16	25	33	42	52	61	71	81	92	102	114	125	137	149	161	174	187	201	
Доходы инвесторов [Dpi=60%]	0	10	19	29	39	49	60	70	81	91	102	113	124	136	147	159	171	183	195	207	
Доходы инвесторов [Dpi=70%]	0	11	22	34	45	56	67	78	89	100	111	122	133	144	155	166	177	187	198	209	
Доходы инвесторов [Dpi=80%]	0	13	25	38	50	62	73	85	96	107	118	129	139	150	160	170	179	189	198	208	
Доходы инвесторов [Dpi=90%]	0	14	28	42	55	67	79	91	102	113	124	134	144	153	163	171	180	188	196	204	
Доходы инвесторов [Dpi=100%]	0	16	31	46	59	72	85	97	108	118	128	138	147	156	164	172	179	186	193	199	
Доход отрасли [Dpi=0%]	100	111	123	137	152	169	187	208	230	256	284	315	350	388	431	478	531	590	654	726	
Доход отрасли [Dpi=10%]	100	109	120	131	143	157	171	188	205	224	246	269	294	322	352	385	421	461	504	551	
Доход отрасли [Dpi=20%]	100	108	116	125	135	146	157	169	182	197	212	228	246	265	286	309	333	359	386	417	
Доход отрасли [Dpi=30%]	100	106	113	120	127	135	143	152	162	172	182	194	206	219	232	247	262	278	295	314	
Доход отрасли [Dpi=40%]	100	105	109	114	120	125	131	137	143	150	157	164	172	179	188	196	205	215	225	235	
Доход отрасли [Dpi=50%]	100	103	106	109	113	116	119	123	127	130	134	138	143	147	151	156	160	165	170	175	
Доход отрасли [Dpi=60%]	100	101	103	104	106	107	109	110	112	113	115	117	118	120	121	123	125	127	128	130	
Доход отрасли [Dpi=80%]	100	98	96	95	93	91	90	88	86	85	83	82	80	79	78	76	75	73	72	71	
Налоговые поступления [Dpi=0%]	4	4	4	5	5	6	7	7	8	9	10	11	13	14	16	17	19	21	24	26	29
Налоговые поступления [Dpi=10%]	4	4	4	5	5	6	6	7	8	8	9	10	11	12	13	14	15	17	18	20	22
Налоговые поступления [Dpi=20%]	4	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	9	10	11	11	12	13	14	15	17
Налоговые поступления [Dpi=30%]	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	12
Налоговые поступления [Dpi=40%]	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
Налоговые поступления [Dpi=60%]	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Налоговые поступления [Dpi=80%]	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Налоговые поступления [Dpi=100%]	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Прибыль инвесторов [Dpi=10%]	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	5	5	6	6	7	7	8	9
Прибыль инвесторов [Dpi=20%]	3	3	4	4	4	4	5	5	5	6	6	7	7	8	8	9	10	11	11	12	13
Прибыль инвесторов [Dpi=30%]	5	5	5	5	6	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	11	12	13	13	14	15
Прибыль инвесторов [Dpi=40%]	6	7	7	7	8	8	8	9	9	10	10	10	10	11	11	12	13	13	14	14	15
Прибыль инвесторов [Dpi=50%]	8	8	8	9	9	9	10	10	10	10	10	11	11	11	12	12	13	13	13	14	14
Прибыль инвесторов [Dpi=60%]	10	10	10	10	10	10	10	10	10	11	11	11	11	11	11	12	12	12	12	12	13
Прибыль инвесторов [Dpi=70%]	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
Прибыль инвесторов [Dpi=80%]	13	13	12	12	12	12	11	11	11	11	11	10	10	10	10	10	10	10	9	9	9
Прибыль инвесторов [Dpi=90%]	14	14	13	13	13	12	12	11	11	11	10	10	10	9	9	9	8	8	8	7	7
Прибыль инвесторов [Dpi=100%]	16	15	14	14	13	12	12	11	11	10	10	9	9	8	8	7	7	7	6	6	6

Таблица 6. Результаты моделирования (21–40 годы)

Годы	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
Доходы инвесторов [Dri=10%]	86	95	106	117	130	144	159	175	194	213	235	259	285	313	344	378	415	456	500	549
Доходы инвесторов [Dri=20%]	143	158	173	190	208	227	248	271	295	321	349	380	413	448	486	527	572	620	671	727
Доходы инвесторов [Dri=30%]	180	196	213	231	251	271	292	315	340	366	393	422	453	486	521	558	598	639	684	731
Доходы инвесторов [Dri=40%]	203	219	235	252	270	289	309	329	351	374	397	422	448	475	503	532	563	596	629	665
Доходы инвесторов [Dri=50%]	215	229	244	260	275	292	308	326	343	362	381	400	420	441	462	484	506	529	553	578
Доходы инвесторов [Dri=60%]	220	232	245	258	272	285	299	312	326	341	355	369	384	399	414	430	445	461	477	494
Доходы инвесторов [Dri=70%]	220	231	241	252	263	273	284	295	305	316	326	337	348	358	368	379	389	400	410	421
Доходы инвесторов [Dri=80%]	217	226	234	243	251	260	268	276	283	291	299	306	313	321	328	335	341	348	355	361
Доходы инвесторов [Dri=90%]	211	219	226	232	239	245	251	257	263	268	273	279	284	288	293	297	302	306	310	314
Доходы инвесторов [Dri=100%]	205	211	216	222	227	231	236	240	244	248	251	255	258	261	264	267	270	272	274	277
Доход отрасли [Dri=0%]	806	895	993	1103	1224	1359	1508	1674	1858	2062	2289	2541	2821	3131	3475	3857	4282	4753	5276	5856
Доход отрасли [Dri=10%]	603	660	722	790	864	945	1034	1131	1237	1354	1481	1620	1772	1939	2121	2321	2539	2777	3038	3324
Доход отрасли [Dri=20%]	449	484	522	563	607	654	705	760	819	883	952	1026	1106	1192	1285	1386	1494	1610	1736	1871
Доход отрасли [Dri=30%]	333	354	376	399	424	450	478	507	539	572	608	645	685	728	773	821	872	926	983	1044
Доход отрасли [Dri=40%]	246	257	269	281	294	308	322	337	352	368	385	403	422	441	461	483	505	528	552	578
Доход отрасли [Dri=50%]	181	186	192	197	203	209	216	222	229	236	243	250	258	265	273	281	290	299	307	317
Доход отрасли [Dri=60%]	132	134	136	138	140	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160	163	165	167	170	172
Доход отрасли [Dri=80%]	70	68	67	66	65	64	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49
Налоговые поступления [Dri=0%]	32	36	40	44	49	54	60	67	74	82	92	102	113	125	139	154	171	190	211	211
Налоговые поступления [Dri=10%]	24	26	29	32	35	38	41	45	49	54	59	65	71	78	85	93	102	111	122	122
Налоговые поступления [Dri=20%]	18	19	21	23	24	26	28	30	33	35	38	41	44	48	51	55	60	64	69	69
Налоговые поступления [Dri=30%]	13	14	15	16	17	18	19	20	22	23	24	26	27	29	31	33	35	37	39	39
Налоговые поступления [Dri=40%]	10	10	11	11	12	12	13	13	14	15	15	16	17	18	18	19	20	21	22	22
Налоговые поступления [Dri=60%]	5	5	5	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7
Налоговые поступления [Dri=80%]	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Налоговые поступления [Dri=100%]	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Прибыль инвесторов [Dri=10%]	10	11	12	13	14	15	17	18	20	22	24	26	28	31	34	37	41	44	49	49
Прибыль инвесторов [Dri=20%]	14	15	17	18	19	21	23	24	26	28	30	33	35	38	41	44	48	52	56	56
Прибыль инвесторов [Dri=30%]	16	17	18	19	20	22	23	24	26	27	29	31	33	35	37	39	42	44	47	47
Прибыль инвесторов [Dri=40%]	16	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	30	31	32	34	35	35
Прибыль инвесторов [Dri=50%]	14	15	15	16	16	17	17	18	18	19	19	20	21	21	22	23	23	24	25	25
Прибыль инвесторов [Dri=60%]	13	13	13	13	13	14	14	14	14	14	15	15	15	15	15	16	16	16	16	16
Прибыль инвесторов [Dri=70%]	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	10	10	10	10	10	10	10
Прибыль инвесторов [Dri=80%]	9	9	9	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6
Прибыль инвесторов [Dri=90%]	7	7	7	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4
Прибыль инвесторов [Dri=100%]	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2

Таблица 7. Расчетный коэффициент инвестиций K_{inv} и время удвоения отрасли.

Доля прибыли инвесторов, %	K_{inv} , %	Время удвоения отрасли, лет
0	11	7
10	9	8
20	7,8	9
30	6,2	12
40	4,6	16
50	3	24
60	1,4	50
70	-1,8	Отрасль сокращается
80	-2,2	Отрасль сокращается
90	-4,6	Отрасль сокращается
100	-5	Отрасль сокращается

Подробно остановимся на краткосрочной и долгосрочной стратегиях.

Краткосрочная стратегия: горизонт планирования 15 лет. На горизонте планирования до 15 лет инвесторам выгодно установить максимальное значение доли своей прибыли (Dpi), приближенное к 100%. В таком случае вся прибыль накапливается и инвестор получает максимальную краткосрочную выгоду, так как доходы практически не реинвестируются, а остаются в его распоряжении. При этом возвращение промышленности не является приоритетом, и отрасль остается без развития. Это позволяет инвестору получить максимальную прибыль в короткий срок на горизонте до 16 лет, особенно если его цель – быстрое извлечение дохода без долгосрочного участия в отрасли.

Из таблицы 5 видно, что при $Dpi = 100\%$ совокупный доход инвесторов за 15 лет будет равен 164 у.е., при стратегии сохранения только 20% совокупный доход в 2 раза меньше – 76 у.е. Тогда как ежегодно получаемая прибыль инвесторов при $Dpi = 100\%$ на 15 год составит 8 у.е., при 20% – 9 у.е.

Однако в долгосрочной перспективе такие инвесторы проигрывают, поскольку время удвоения доходов отрасли замедляется, а возможность получения более высоких доходов в будущем упускается.

Для примера, на 30 год совокупный доход инвесторов при $Dpi = 100\%$ составит 248 у.е против 321 у.е при $Dpi = 20\%$. Тогда как ежегодно получаемая прибыль инвесторов при $Dpi = 100\%$ на 30 год составит 4 у.е., при 20% – 28 у.е., в 7 раз больше.

Долгосрочная стратегия: горизонт планирования 20 лет и более.

В долгосрочной перспективе картина меняется. При (Dpi), близком к 0%, происходит быстрое возвращение промышленности, что не только стимулирует экономическое развитие, но и повышает налоговые поступления.

Долгосрочные инвесторы с низким значением Dpi хотя и получают меньшую прибыль на раннем этапе (до 15 лет), вкладывают средства в развитие отрасли, что позволяет добиться ускоренного роста. В результате к горизонту 20–40 лет такие инвесторы получают кратно выше доходы, что подтверждается моделированием.

Что касается выбора оптимальной стратегии государства то моделирование показало, что государству выгодно, чтобы инвесторы выбирали минимальное значение $Dpi = 0\%$, поскольку это обеспечивает максимальный объем реинвестирования прибыли в основные фонды и способствует ускоренному росту отрасли и, как следствие, – увеличению ежегодных налоговых поступлений.

Вывод: результаты моделирования подчеркивают, что горизонт планирования инвесторов играет ключевую роль в определении будущего потенциала промышленности и объемах поступающих средств в бюджет государства. Краткосрочным инвесторам оптимально извлекать выгоду за счет высокой прибыли в ближайшие годы, однако такая стратегия препятствует формированию устойчивого и ускоренного роста промышленности. В противоположность этому долгосрочные инвесторы с низкой долей прибыли вкладывают средства в развитие основных фондов возвращая промышленность, что позволяет отрасли расти ускоренными темпами и приносит более высокую прибыль в долгосрочной перспективе. Государству выгодны долгосрочные инвесторы, поскольку их инвестиции способствуют росту промышленного потенциала, доходов и увеличению налоговых поступлений в бюджет.

Кроме того, результаты моделирования выявили оптимальную долгосрочную стратегию для инвесторов, а именно: стратегия «80 на 20», при которой 80% чистой прибыли направляется на инвестиции, а оставшиеся 20% остаются в распоряжении инвесторов, является оптимальной для обеспечения устойчивого и ускоренного роста.

4. Заключение

Предложенная модель дополняет существующие подходы в теории управления за счет введения нового коэффициента инвестиций ($Kinv$), который отражает долю дохода, направляемую на развитие основных фондов, а также позволяет определить время удвоения дохода отрасли.

Одной из ключевых находок модели является влияние горизонта планирования на выбор оптимальных стратегий как инве-

сторов, так и государства. Краткосрочные стратегии приносят быструю выгоду, но ограничивают возможности для долгосрочного роста. В то же время долгосрочное планирование позволяет не только быстрее возвращать промышленность, но и увеличивать налоговые поступления, что является важным фактором для государственного бюджета.

Результаты моделирования показали, что в основе любой промышленной отрасли заложен потенциал роста, однако этот рост не происходит мгновенно и требует значительного времени и усилий для его реализации. Первоначальные инвестиции и накопление капитала формируют фундамент для ускоренного роста в будущем. Если инвесторы по каким-либо причинам не раскрывают этот потенциал, например из-за выбора краткосрочной стратегии или недостаточной рентабельности, государство может вмешаться и создать стимулы к реализации стратегий, направленных на долгосрочное развитие. В таких условиях государственная политика играет важнейшую роль в обеспечении необходимых условий для ускоренного роста.

Таким образом, долгосрочные стратегии, поддерживаемые оптимальной налоговой политикой и модернизацией основных фондов, способны обеспечить устойчивый рост и повышение конкурентоспособности промышленности на глобальной арене.

Можно заключить, что оптимальное состояние системы достигается в зоне стратегического компромисса, при котором государство снижает налоговую нагрузку (наиболее сбалансированная налоговая ставка в районе 20%) и стимулирует инвестора к реинвестированию части прибыли не менее 80%, оставляя в его распоряжении около 20%. Эти значения позволяют одновременно удовлетворить интересы обеих сторон, а также формируют устойчивую базу для ускоренного промышленного развития.

Вместе с тем долгосрочные инвестиционные стратегии связаны с такими рисками и неопределенностями для самих инвесторов, как изменение социально-экономической или политической ситуации. Поэтому важно в дальнейшем исследовать механизмы, которые помогут минимизировать эти риски для обеспечения стабильного роста. Будущие исследования могут включать применение модели к российским реалиям, что позволит

адаптировать подходы для специфики отечественной экономики. Также стоит обратить внимание на международный опыт, где различные стратегии государств и инвесторов способствовали ускоренному росту отраслей. Это может помочь в разработке эффективных решений для российской промышленности.

Литература

1. *Исследование социально-экономических и политических процессов : учебник* // Под ред. А.Н. Данчула. – М.: Изд-во РАГС, 2010. – С. 269–408.
2. ПЕТРОВ А.А., ПОСПЕЛОВ И.Г., ШАНАНИН А.А. *Опыт математического моделирования экономики*. – М.: Энергоатомиздат, 1996. – С. 17-117.
3. СНЕТКОВ Н.Н. *Имитационное моделирование экономических процессов*. Учебно-практическое пособие. – М.: Изд. Центр ЕАОИ, 2008.
4. ЦИСАРЬ И.Ф. *Моделирование экономики в Ithink_Stella: кризисы, налоги, инфляция, банки*. М.: Изд-во Диалог-МИФИ, 2009.
5. ФОРРЕСТЕР Д. *Основы кибернетики предприятия*. – М.: Прогресс, 1971.
6. ФОРРЕСТЕР Д. *Динамика развития города*. – М.: Прогресс, 1974.
7. SOLOW R.M. *Contribution to the theory of economics growth* // Quarterly Journal of Economics, 1956.

SYSTEM DYNAMIC MODEL OF INDUSTRY: GROWTH FACTORS AND ANALYSIS OF OPTIMAL STRATEGIES

Viktor Tsvetkov, The Office of the Government of the Russian Federation, Moscow, Chief Advisor (Tsvetkov.dinamika@internet.ru).

Abstract: The paper presents a system dynamic model of economic flows in industry developed in IThink. The model allows one to study the influence of investor strategies and state tax policy on industrial growth rates taking into account depreciation of fixed assets and profitability. Modeling has shown that industry is based on the potential for nonlinear growth, but acceleration requires significant time and conditions. An important factor is the level of wear: with high depreciation, a significant part of investments is directed to maintaining capacities, and only net investments

ensure expansion. It has been revealed that the effectiveness of state policy is determined by the planning horizon: with a short-term horizon (up to 15 years), it is profitable for the state to set high taxes, but with an increase in the horizon to 30 years, the situation changes - a tax rate of 20% becomes optimal, contributing to the growth of the industry and tax revenues. The key factor of growth is the behavior of investors: with a short-term strategy, they accumulate profits, but lose growth potential and receive significantly less profit in the long term. Long-term strategies of investors allow for a multiple increase in total income. Such investors are beneficial to the state, since they contribute to the sustainable growth of the industry, modernization, and an increase in the tax base. Thus, the coordination of long-term strategies of the state and investors is a condition for industrial development.

Keywords: system dynamics, industrial growth, investment strategies, planning horizon.

УДК 338.26 + 303.732.4

ББК 65.054

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Р.М. Нижегородцевым.*

*Поступила в редакцию 30.10.2024.
Опубликована 31.07.2025.*

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ В МОДЕЛЯХ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ¹

Буслова К. В.²

(Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова, Москва)

Работа посвящена исследованию асимптотического поведения функции плотности вероятности стоимости акций в рамках различных моделей, характеризующихся стохастической волатильностью. Центральное внимание сосредоточено на дальнейшем развитии и распространении ранее достигнутых результатов, связанных с классической однофакторной моделью Хестона, на более широкий круг многомерных ситуаций, отражающих реальную сложность современного финансового рынка. Методы исследования базируются на использовании инструментов аффинной теории, позволяющих изучать основные характеристики асимптотического поведения рассматриваемых функций путем подробного анализа соответствующих уравнений Риккати вблизи критических точек. Значительное внимание уделено использованию высокоэффективных алгоритмов оценки функций по схеме Эйлера высоких порядков, что обеспечивает высокую точность расчетов и надежность полученных выводов. Кроме того, активно применяется подход, основанный на комбинировании техники седловой точки и принципа Таубера, что позволяет получать важную дополнительную информацию относительно свойств асимптотического поведения исходных функций непосредственно из анализа преобразований вблизи критических значений. Представленные результаты имеют важное значение для развития современной теории стохастических дифференциальных уравнений и открывают перспективные направления приложения в ряде важнейших областей, таких как финансовая математика, эконометрия и теория риска.

Ключевые слова: асимптотическая формула для стоимости опциона, многомерная модель Хестона, преобразование Меллина.

1. Введение

На первых этапах формирования рыночных опционов их ценообразование осуществлялось в случайном порядке, но всё изменила докторская диссертация Луи Башелье, в которой была

¹ Автор признателен О.С. Розановой за помощь и ценное обсуждение содержания статьи.

² Кристина Владимировна Буслова, студент (buslova.kristina@mail.ru).

представлена первая математическая модель броуновского движения и ее использование для оценки опционов на акции. Модель Башелье оказала влияние на разработку других широко используемых моделей, включая модель Блэка – Шоулза. Главной предпосылкой появления модели Блэка – Шоулза является предположение о том, что динамика цены базового актива описывается случайным процессом в непрерывном времени вида

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t,$$

где μ – тренд и σ – волатильность доходности базового актива, который предполагается постоянным; W_t – броуновское движение.

В период со времени публикации (1973 г.) и по 1987 год модель Блэка – Шоулза являлась общепринятым стандартом для практических расчётов стоимостей опционов. Но из наблюдений за реальными стоимостями опционов возникла необходимость разработки новых моделей оценки опционов, учитывающих непостоянство волатильности. Одним из первых, кто разработал соответствующую модель, был Стивен Хестон. Модель Хестона имеет вид

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu X_t dt + \sqrt{\nu_t} X_t dW_t, \\ d\nu_t &= k(\theta - \nu_t) dt + \sigma \sqrt{\nu_t} dZ_t, \end{aligned}$$

где ν_t – волатильность, заданная стохастическим процессом, а броуновские движения W_t и Z_t имеют корреляцию ρ .

Среди однофакторных моделей модель Хестона до сих пор остается одной из наиболее популярной и простой в реализации, но зависимость модели от одного фактора не позволяет ей учесть всех зависимостей, которые присутствуют на рынке, поэтому стали разрабатывать многофакторные модели. Многофакторная модель Хестона, которая будет рассмотрена в данной работе, впервые была рассмотрена в статье [5]. Отличительная особенность модели в том, что факторный процесс, определяющий волатильность, основан на матричном процессе Уишарта.

В книге [14] автор анализирует асимптотику цен на акции для различных стохастических моделей. Нас интересует один из

ключевых результатов данной главы, а именно формула, характеризующая асимптотику цен акций в модели Хестона. Первоначально формула была получена в статье [15] для некоррелированной модели Хестона, а затем результат был обобщен в статье [11] на случай, когда корреляция между броуновскими движениями есть. Можем ли мы получить аналогичный результат для многофакторной модели Хестона? Оказывается, что для класса многофакторных моделей вид асимптотической формулы аналогичен виду для однофакторной модели Хестона.

Методы, используемые в данной работе, основаны на аффинных принципах: всю необходимую информацию об асимптотике получим из анализа соответствующих уравнений Риккати вблизи так называемого момента критичности, используя оценки Эйлера высокого порядка. Далее вместе с использованием метода седловой точки используем принцип Таубера, согласно которому точное поведение преобразованной функции вблизи критической точки содержит всю асимптотическую информацию об исходной функции.

2. Асимптотическая формула для плотности стоимости акции в многофакторной модели Хестона

Рассмотрим следующую многофакторную модель Хестона:

$$dX_t = X_t Tr[\sqrt{\Sigma_t} dZ_t],$$

$d\Sigma_t = (AA^\top + B\Sigma_t + \Sigma_t B^\top)dt + \sqrt{\Sigma_t} dW_t C + C^\top (dW_t)^\top \sqrt{\Sigma_t}$, где X_t – цена актива; Tr – след оператора; $Z_t, W_t \in M_n$ (множество квадратных матриц размера $n \times n$) – матрицы броуновского движения (т.е. состоящие из n^2 независимых броуновских движений) при нейтральной к риску мере (т.е. цена каждой акции в точности равна дисконтированному ожиданию цены акции в соответствии с этой мерой).

Волатильность Σ_t принадлежит множеству симметричных $n \times n$ положительно определенных матриц; $A, B, C \in M_n$ – диагонализированные коммутирующие матрицы, матрица A обратима.

Чтобы учесть эффект улыбки волатильности, предположим, что два матричных броуновских движения W_t и Z_t имеют диагональную матрицу корреляций $R = (\rho_j)_{j=1, \dots, n} \in M_n$, где

$$dW_t^{ij} dZ_t^{ij} = \rho_j dt.$$

Для простоты мы предполагаем, что $x_0 = 1$ и $-1 < \rho_j \leq 0$ (ограничение на ρ_j не является математически существенным), где x_0 – начальное условие для процесса, определяющего цену акции.

Основным результатом данной работы является теорема, которая характеризует асимптотическое поведение плотности распределения стоимости акции в многофакторной модели Хестона. Она является обобщением аналогичного результата для однофакторной модели Хестона.

Теорема 1. Для каждого $T > 0$ существуют положительные константы A_1, A_2 и A_3 такие, что для плотности распределения D_T цены акций X_T в многомерной модели Хестона справедлива следующая асимптотическая формула:

$$(1) \quad D_T(x) = A_1 x^{-A_3} e^{A_2 \sqrt{\ln x}} (\ln x)^{-\frac{3}{4} + \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}} \times \\ \times (1 + O((\ln x)^{-\frac{1}{2}})), \quad x \rightarrow \infty,$$

где a_j, c_j – элементы соответствующих диагональных матриц коэффициентов A' и C' (результаты диагонализации соответствующих матриц коэффициентов A и C).

Доказательство теоремы будет представлено в следующих разделах. Ниже приведена схема доказательства.

1. Приводим матрицы коэффициентов многофакторной модели Хестона A, B, C к диагональному виду.

2. Находим явную формулу для преобразования Меллина.

3. Выводим асимптотические формулы для функций, входящих в преобразование Меллина, вблизи так называемого момента критичности.

4. Вычисляем седловую точку и заменяем исходное выражение локальным разложением вокруг седловой точки.

5. Находим асимптотику интеграла вблизи седловой точки.

6. Уточняем оценку погрешности до заявленной в теореме.

7. Выводим явную формулу для константы A_1 .

3. Диагонализация матриц коэффициентов

Следующая теорема (см. [17]) характеризует совместно диагонализуемые матрицы:

Теорема 2. *Множество матриц является множеством диагонализуемых коммутирующих матриц тогда и только тогда, когда оно является совместно диагонализуемым.*

Так как матрицы коэффициентов A, B, C – диагонализуемые и коммутируют между собой, то по теореме это множество матриц является совместно диагонализуемым. Это значит, что существует единственная обратимая матрица P , такая что $A' = P^{-1}AP$, $B' = P^{-1}BP$ и $C' = P^{-1}CP$ являются диагональными матрицами. Проведем диагонализацию матриц, получим:

$$A' = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n \end{pmatrix}.$$

Тогда наша модель приобретает следующий вид:

$$dX_t = X_t Tr[\sqrt{\Sigma_t} dZ_t],$$

$$d\Sigma_t = (A'(A')^\top + B'\Sigma_t + \Sigma_t(B')^\top)dt +$$

$$+ \sqrt{\Sigma_t} dW_t C' + (C')^\top (dW_t)^\top \sqrt{\Sigma_t}.$$

Далее знаки ' у матриц будут опущены.

4. Преобразование Меллина

Преобразование Меллина для плотности D_t определяется следующим образом (см. [9]):

$$MD_t(u) = \mathbb{E}[X_t^{u-1}] = \int_0^\infty x^{u-1} D_t(x) dx,$$

где переменная u – комплексная. Следовательно, плотность D_t можно восстановить по формуле обратного преобразования Меллина:

$$(2) \quad D_t(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{r-i\infty}^{r+i\infty} x^{-u} MD_t(u) du, \quad x > 0.$$

Далее выведем явную формулу для преобразования Мелли-на. Для этого рассмотрим процесс логарифма цены $X_t^{\ln} = \ln X_t$ в многофакторной модели Хестона. Будем искать логарифм в виде производящей функции моментов:

$$(3) \quad \ln \mathbb{E}[\exp\{sX_t^{\ln}\}] = \phi(s, t) + \text{Tr}[\psi(s, t)\Sigma_0],$$

где функции ϕ и ψ удовлетворяют следующим уравнениям Риккати:

$$\begin{aligned} \phi' &= U(s, \psi), \quad \phi(0) = 0, \\ \psi' &= V(s, \psi), \quad \psi(0) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} U(s, v) &= \text{Tr}[AA^\top v], \\ V(s, v) &= vB + (B^\top + 2sRC)v + 2vC^\top Cv + \frac{1}{2}(s^2 - s)I_n. \end{aligned}$$

Здесь ϕ' и ψ' являются частными производными по t функций ϕ и ψ соответственно. Переменная s – действительная. Однако уравнения Риккати будут также справедливы, если заменить s комплексной переменной $u = s + iy$. Найдем решение уравнений Риккати.

Для начала найдём решение матричного уравнения Риккати для $\psi(t)$. Для этого воспользуемся процедурой линеаризации, а именно, представим $\psi(t)$ в виде произведения двух матриц $F(t)$ и $G(t)$:

$$(4) \quad \psi(t) = F(t)^{-1}G(t),$$

где $F(t) \in GL(n)$, $G(t) \in M_n$, $F(0) = I$, $G(0) = 0$. Тогда

$$\frac{d}{dt}[F(t)\psi(t)] - \frac{d}{dt}[F(t)]\psi(t) = F(t)\frac{d}{dt}\psi(t),$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(t) - \frac{d}{dt}[F(t)]\psi(t) &= \frac{s(s-1)}{2}F(t) + G(t)B + \\ &+ (F(t)(B^\top + 2sRC) + 2G(t)C^\top C)\psi(t). \end{aligned}$$

Последнее уравнение приводит нас к следующей системе:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}G(t) &= \frac{s(s-1)}{2}F(t) + G(t)B, \\ \frac{d}{dt}F(t) &= -F(t)(B^\top + 2sRC) - 2G(t)C^\top C. \end{aligned}$$

Перепишав систему покомпонентно, получим:

$$\frac{d}{dt}G_{ij}(t) = \frac{s(s-1)}{2}F_{ij}(t) + b_jG_{ij}(t),$$

$$\frac{d}{dt}F_{ij}(t) = -(b_j + 2s\rho_jc_j)F_{ij}(t) - 2c_j^2G_{ij}(t),$$

откуда следует

$$G'_{ij}(t) = \frac{s(s-1)}{2}F_{ij}(t) + b_jG_{ij}(t),$$

$$G_{ij}(t) = -\frac{1}{2c_j^2} (F'_{ij}(t) + (b_j + 2s\rho_jc_j)F_{ij}(t)).$$

Подставляя $G_{ij}(t)$ в первое уравнение, получим:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2c_j^2}(F''_{ij}(t) + (b_j + 2s\rho_jc_j)F'_{ij}(t)) &= \frac{s(s-1)}{2}F_{ij}(t) - \\ &- \frac{b_j}{2c_j^2}(F'_{ij}(t) + (b_j + 2s\rho_jc_j)F_{ij}(t)), \end{aligned}$$

откуда следует

$$(5) \quad F''_{ij}(t) + 2s\rho_jc_jF'_{ij}(t) + (c_j^2s(s-1) - b_j(b_j + 2s\rho_jc_j))F_{ij}(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение для (5) имеет вид:

$$\lambda^2 + 2s\rho_jc_j\lambda + (c_j^2s(s-1) - b_j(b_j + 2s\rho_jc_j)) = 0,$$

$$\begin{aligned} D/4 &= s^2\rho_j^2c_j^2 - c_j^2s(s-1) + b_j(b_j + 2s\rho_jc_j) = \\ &= (s\rho_jc_j + b_j)^2 - c_j^2s(s-1) = P_j^2, \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = -s\rho_jc_j \pm P_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{ij}(t) = M_{ij}e^{(-s\rho_jc_j+P_j)t} + N_{ij}e^{(-s\rho_jc_j-P_j)t}.$$

Найдем теперь $G_{ij}(t)$:

$$\begin{aligned} G_{ij}(t) &= -\frac{1}{2c_j^2} (F'_{ij}(t) + (b_j + 2s\rho_jc_j)F_{ij}(t)) = \\ &= \frac{1}{2c_j^2} (-b_j - s\rho_jc_j - P_j)M_{ij}e^{(-s\rho_jc_j+P_j)t} + \\ &\quad + \frac{1}{2c_j^2} (-b_j - s\rho_jc_j + P_j)N_{ij}e^{(-s\rho_jc_j-P_j)t}. \end{aligned}$$

Осталось найти постоянные M_{ij} и N_{ij} из начальных условий $F(0) = I$, $G(0) = 0$:

$$\begin{aligned} M_{ij} + N_{ij} &= 1, \quad i = j, \\ M_{ij} + N_{ij} &= 0, \quad i \neq j, \\ \frac{1}{2c_j^2}(-b_j - s\rho_j c_j - P_j)M_{ij} &= -\frac{1}{2c_j^2}(-b_j - s\rho_j c_j + P_j)N_{ij}, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{1}{2P_j}(-b_j - s\rho_j c_j + P_j), \quad i = j, \\ N_{ij} &= -\frac{1}{2P_j}(-b_j - s\rho_j c_j - P_j), \quad i = j, \\ M_{ij} &= N_{ij} = 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Для нахождения $\psi(t)$ осталось найти $F(t)^{-1}$:

$$F(t)^{-1} = \begin{pmatrix} F_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_n(t) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} F_1(t)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_n(t)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда элементы матрицы $\psi(t)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_{ij}(t) &= F_{ij}(t)^{-1}G_{ij}(t) = \\ &= \frac{1}{2c_j^2} \cdot \frac{(-b_j - s\rho_j c_j + P_j)(-b_j - s\rho_j c_j - P_j)(e^{P_j t} - e^{-P_j t})}{(-b_j - s\rho_j c_j + P_j)e^{P_j t} - (-b_j - s\rho_j c_j - P_j)e^{-P_j t}} = \\ &= \frac{1}{2c_j^2} \cdot \frac{c_j^2(s^2 - s)(e^{P_j t} - e^{-P_j t})}{2P_j \left(\frac{e^{P_j t} + e^{-P_j t}}{2} \right) + 2(-b_j - s\rho_j c_j) \left(\frac{e^{P_j t} - e^{-P_j t}}{2} \right)} = \\ &= \frac{\frac{1}{2}(s^2 - s) \sinh(P_j t)}{P_j \cosh(P_j t) + (-b_j - s\rho_j c_j) \sinh(P_j t)}, \quad i = j, \\ \psi_{ij}(t) &= 0, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

При $t = 0$ все элементы матрицы обнуляются, т.е. граничное условие $\psi(0) = 0$ выполняется. Теперь найдем $\phi(t)$ из следующего уравнения:

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \text{Tr}[AA^\top \psi].$$

Тогда

$$\phi(t) = \int (a_1^2 \psi_1 + \dots + a_n^2 \psi_n) dt,$$

где

$$\int a_j^2 \psi_j dt = \frac{a_j^2}{2c_j^2} \ln \left(\frac{\exp((-b_j - s\rho_j c_j)t)}{P_j \cosh(P_j t) + (-b_j - s\rho_j c_j) \sinh(P_j t)} \right) + a_j^2 C_j.$$

Рассмотрим граничные условия на $\phi(t)$. Так как $\phi(0) = 0$, то

$$-\frac{a_1^2}{2c_1^2} \ln P_1 - \dots - \frac{a_n^2}{2c_n^2} \ln P_n + a_1^2 C_1 + \dots + a_n^2 C_n = 0.$$

Следовательно, возьмём $C_j = \frac{1}{2c_j^2} \ln P_j$, получаем:

$$\phi(t) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2} \ln \left(\frac{P_j \exp((-b_j - s\rho_j c_j)t)}{P_j \cosh(P_j t) + (-b_j - s\rho_j c_j) \sinh(P_j t)} \right).$$

Из определения преобразования Меллина и формулы (3) получаем

$$\ln MD_T(u) = \phi(u-1, T) + Tr[\psi(u-1, T)\Sigma_0].$$

5. Время расхождения момента

Предполагая действительную переменную $s \geq 1$, определим время расхождения для момента порядка s по формуле:

$$T^*(s) = \sup\{t > 0 : E[X_t^s] < \infty\},$$

и для любого $T > 0$ определим верхний критический момент $s_+(T)$ по формуле

$$(6) \quad s_+ = s_+(T) = \sup\{s \geq 1 : E[X_t^s] < \infty\}.$$

При фиксированном T критический момент определяется численно из уравнения

$$T^*(s_+(T)) = T.$$

Аналогично определяется нижний критический момент:

$$(7) \quad s_- = s_-(T) = \inf\{s \leq 0 : E[X_t^s] < \infty\}.$$

Определение 1. Пусть время $T > 0$ фиксировано. Величины

$$(8) \quad \sigma_+ = -\frac{\partial T^*(s)}{\partial s} \Big|_{s=s_+}, \quad \kappa_+ = \frac{\partial^2 T^*(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=s_+}$$

называются верхним критическим наклоном и верхней критической кривизной соответственно. Аналогично определяются нижний критический наклон и нижняя критическая кривизна:

$$\sigma_- = -\frac{\partial T^*(s)}{\partial s} \Big|_{s=s_-}, \quad \kappa_- = \frac{\partial^2 T^*(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=s_-}.$$

Пусть $s \geq 1$ и $T^*(s)$ – время расхождения для момента порядка s . Используя уравнения Риккати для ψ , видим, что

$$(1/\psi)' = -\frac{\psi'}{\psi^2} = -\frac{R(s, \psi)}{\psi^2}$$

или

$$(1/\psi_j)' = -\frac{\psi_j'}{\psi_j^2} = -\frac{R_j(s, \psi_j)}{\psi_j^2}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Так как

$$\frac{R_j(s, u)}{u^2} \rightarrow 2c_j^2, \quad u \rightarrow \infty,$$

то

$$(9) \quad \psi_j(s, t) \sim \frac{1}{2c_j^2(T^*(s) - t)}, \quad t \uparrow T^*(s).$$

Далее зафиксируем время $T > 0$. Тогда $T = T^*(s_+)$. Используя тот факт, что функция T^* непрерывно дифференцируема относительно s , получаем

$$(10) \quad T^*(s) - T = T^*(s) - T^*(s_+) = \\ = (s_+ - s)(\sigma + O(s_+ - s)) \sim \sigma(s_+ - s), \quad s \uparrow s_+,$$

где σ – критический наклон. Следовательно:

$$(11) \quad \psi_j(s, T) \sim \frac{1}{2(s_+ - s)c_j^2\sigma}, \quad s \uparrow s_+.$$

Из (9) и (11) следует, что

$$\phi(s, t) = \int_0^t (a_1^2\psi_1 + \dots + a_n^2\psi_n)d\nu$$

имеет логарифмическое приращение:

$$\phi(s, t) \sim -\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2} \cdot \ln(T^*(s) - t), \quad t \uparrow T^*(s),$$

или

$$\phi(s, T) \sim -\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2} \cdot \ln(\sigma(s_+ - s)), \quad s \uparrow s_+.$$

Следующая лемма уточняет эти асимптотические результаты.

Лемма 1. Пусть $T > 0$ и $s \uparrow s_+$. Тогда справедливы следующие формулы:

$$\psi_j(s, T) = \frac{1}{2c_j\sigma(s_+ - s)} - \frac{b_j + s_+\rho_j c_j}{2c_j^2} - \frac{\kappa}{4c_j^2\sigma^2} + \\ + O(s_+ - s), \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\phi(s, T) = \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2} \left(\ln \frac{1}{s_+ - s} + \ln \frac{T}{\sigma} \right) + \\ + a_j^2 \int_0^T \left(\psi_j(s_+, \nu) - \frac{1}{2c_j^2(T - \nu)} \right) d\nu + O(s_+ - s).$$

Доказательство. Введем время достижения критической точки

$$\tau = T^*(s) - t$$

и положим

$$\hat{\psi}_j(s, \tau) = \psi_j(T^*(s) - \tau).$$

Заметим, что $1/\hat{\psi}_j(s, 0) = 0$ и

$$(1/\hat{\psi}_j)' = -\frac{(\hat{\psi}_j)'}{\hat{\psi}_j^2} = \frac{R_j(s, \hat{\psi}_j)}{\hat{\psi}_j^2} = \\ = 2c_j^2 + \frac{2(b_j + s\rho_j c_j)}{\hat{\psi}_j} + \frac{s^2 - s}{2\hat{\psi}_j^2} = W_j(s, 1/\hat{\psi}_j),$$

где

$$W_j(s, u) = 2c_j^2 + 2(b_j + s\rho_j c_j)u + \frac{s^2 - s}{2}u^2.$$

Схема Эйлера второго порядка для этого ОДУ дает

$$(1/\hat{\psi}_j)(s, \tau) = (1/\hat{\psi}_j)(s, 0) + W_j(s, 0)\tau + \\ + W_j(s, 0)W_j'(s, 0)\frac{\tau^2}{2} + o(\tau^2), \quad \tau \rightarrow 0.$$

Так как $W_j(s, 0) = 2c_j^2$ и $W_j'(s, 0) = 2(b_j + s\rho_j c_j)$, получаем

$$(1/\hat{\psi}_j)(s, \tau) = 2c_j^2\tau + c_j^2(b_j + s\rho_j c_j)\tau^2 + o(\tau^2) = \\ = 2c_j^2\tau (1 + (b_j + s\rho_j c_j)\tau + o(\tau^2)) = \\ = 2c_j^2\tau (1 - b_j + s\rho_j c_j)\tau + o(\tau^2))^{-1}.$$

Из этого следует, что

$$(12) \quad \hat{\psi}_j(s, \tau) = \frac{1}{2c_j^2 \tau} (1 - (b_j + s\rho_j c_j)\tau + o(\tau^2)) = \\ = \frac{1}{2c_j^2 \tau} - \frac{b_j + s\rho_j c_j}{2c_j^2} + o(\tau),$$

где $\tau = T^*(s) - t \downarrow 0$. Обратим внимание, что

$$\frac{1}{\tau} = \left(\sigma(s_+ - s) + \frac{1}{2}\kappa(s_+ - s)^2 + O((s_+ - s)^3) \right)^{-1} = \\ = \frac{1}{\sigma(s_+ - s)} - \frac{\kappa}{2\sigma^2} + O(s_+ - s).$$

Следовательно

$$\psi_j(s, T) = \frac{1}{2c_j^2 \sigma(s_+ - s)} - \frac{b_j + s\rho_j c_j}{2c_j^2} - \frac{\kappa}{4c_j^2 \sigma^2} + O(s_+ - s), \quad s \uparrow s_+.$$

Для функции

$$\phi(s, t) = \int_0^t (a_1^2 \psi_1 + \dots + a_n^2 \psi_n) d\nu$$

получаем

$$\phi(s, t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t a_j^2 \psi_j d\nu = \\ = \sum_{j=1}^n \int_0^t \left(a_j^2 \psi_j - \frac{a_j^2}{2c_j^2} \cdot \frac{1}{T^*(s) - \nu} + \frac{a_j^2}{2c_j^2} \cdot \frac{1}{T^*(s) - \nu} \right) d\nu = \\ = \sum_{j=1}^n \left(a_j^2 \int_0^t \left(\psi_j - \frac{1}{2c_j^2 (T^*(s) - \nu)} \right) d\nu + \frac{a_j^2}{2c_j^2} \int_0^t \frac{1}{T^*(s) - \nu} d\nu \right) = \\ = \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2} \left(\ln \frac{1}{T^*(s) - t} + \ln T^*(s) \right) + \\ + \sum_{j=1}^n a_j^2 \int_0^t \left(\psi_j - \frac{1}{2c_j^2 (T^*(s) - \nu)} \right) d\nu = \\ = \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2} \left(\ln \frac{1}{T^*(s) - t} + \ln T^*(s) \right) + \\ + \sum_{j=1}^n a_j^2 \int_0^{T^*(s)} \left(\psi_j - \frac{1}{2c_j^2 (T^*(s) - \nu)} \right) d\nu + O(T^*(s) - t).$$

Чтобы установить последнее равенство, отметим, что подынтегральное выражение в интеграле

$$\int_t^{T^*(s)} \left(\psi_j(s, \nu) - \frac{1}{2c_j^2(T^*(s) - \nu)} \right) d\nu$$

имеет разложение, полученное в (12). Это выражение можно почленно проинтегрировать, что даст нам множитель $O(T^*(s) - t)$. Далее, используя (10), получаем нужную формулу.

Замечание 1. Лемма 1 также будет справедлива при $s \mapsto s_+$ в комплексной плоскости при условии $\Re(s) < s_+$.

6. Метод седловой точки

Можем представить преобразование Меллина следующим образом:

$$\ln MD_T(u) = \phi(u-1, T) + \Sigma_0^{11} \psi_1(u-1, T) + \dots + \Sigma_0^{nn} \psi_n(u-1, T).$$

Следовательно, используя формулу (2), получаем

$$(13) \quad D_T(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{-uL + \phi(u-1, T) + \Sigma_0^{11} \psi_1(u-1, T) + \dots + \Sigma_0^{nn} \psi_n(u-1, T)} du.$$

В (13) используем обозначение $L = \ln x$ и предполагаем, что $\Re(s) \in (s_-(T), s_+(T))$, где $s_+(T)$ и $s_-(T)$ – верхний и нижний критические моменты соответственно.

Почему формула (13) применима к многофакторной модели Хестона? Известно (см. статья [19]), что все особенности преобразования Меллина для плотности цен на акции в модели Хестона расположены на вещественной прямой. Следовательно, функция

$u \mapsto \exp\{\phi(u-1, T) + \Sigma_0^{11} \psi_1(u-1, T) + \dots + \Sigma_0^{nn} \psi_n(u-1, T)\}$ аналитична везде на комплексной плоскости за исключением точек сгулярности на вещественной прямой. Из следующей леммы следует, что интеграл в правой части формулы (13) существует.

Лемма 2. Пусть $T > 0$ и $1 \leq s_1 \leq \Re(s) \leq s_2$. Тогда при $\Im(s) \rightarrow \infty$ справедлива следующая оценка:

$$|e^{\phi(s,T) + \Sigma_0^{11}\psi_1(s,T) + \dots + \Sigma_0^{nn}\psi_n(s,T)}| = O(e^{-C\Im(s)}),$$

где константа $C > 0$ зависит от $T, s_1, s_2, \Sigma_0^{11}, \dots, \Sigma_0^{nn}$.

Изучим асимптотическое поведение выражения в (13) методом седловой точки (или наискорейшего спуска). Метод седловой точки является расширением метода Лапласа для аппроксимации интеграла, при котором контурный интеграл в комплексной плоскости деформируется для прохождения вблизи седловой точки примерно в направлении наикрутейшего спуска или стационарной фазы. Основная идея состоит в том, чтобы преобразовать контур интегрирования в траекторию наиболее крутого спуска от седловой точки подынтегрального выражения. В тех случаях, когда метод может быть успешно применен, седловина становится круче и более выраженной по мере увеличения параметра (в нашем случае x). Поскольку подынтегральное выражение является аналитическим, контур может быть деформирован в новый контур без изменения значения интеграла.

Седловую точку подынтегрального выражения в (13) найдём из условия равенства нулю её производной. Обычно достаточно вычислить приблизительную седловую точку. Ниже будут приведены данные вычисления. Из леммы 1 и замечания после неё следует формула

$$(14) \quad \phi(u-1, T) + \sum_{j=1}^n \Sigma_0^{jj} \psi_j(u-1, T) = \\ = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\beta_j^2}{u^* - u} + \frac{a_j^2}{2c_j^2} \ln \frac{1}{u^* - u} + \Gamma_j \right) + O(u^* - u)$$

при $u \rightarrow u^* = s_+ + 1 = A_3$ с условием $\Re(u) < u^*$. Здесь мы положили

$$(15) \quad \beta_j^2 = \frac{\Sigma_0^{jj}}{2c_j^2 \sigma}$$

и

$$(16) \quad \Gamma_j = -\Sigma_0^{jj} \left(\frac{b_j + s_+ \rho_j c_j}{2c_j^2} + \frac{\kappa}{4c_j^2 \sigma^2} \right) + \frac{a_j^2}{2c_j^2} \ln \frac{T}{\sigma} + \\ + a_j^2 \int_0^T \left(\psi_j(s_+, \nu) - \frac{1}{2c_j^2(T-\nu)} \right) d\nu.$$

Сохраняя только главный член в (14), получаем приближенное уравнение седловой точки:

$$\left[x^{-u} \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j^2}{u^* - u} \right\} \right]' = 0,$$

что эквивалентно

$$(17) \quad -L + \sum_{j=1}^n \frac{\beta_j^2}{(u^* - u)^2} = 0.$$

Решение (17) задается формулой

$$(18) \quad \hat{u} = \hat{u}(x) = u^* - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{-1/2}.$$

Выражение в (18) является приближительной седловой точкой подынтегрального выражения. Далее нам нужно продолжить в комплексную плоскость функцию $u \mapsto \exp\{\phi(u-1, T) + \Sigma_0^{11}\psi_1(u-1, T) + \dots + \Sigma_0^{nn}\psi_n(u-1, T)\}$ в точке $u = \hat{u}$. Положим $u = \hat{u} + iy$. Поскольку приближительная седловая точка $\hat{u}$ приближается к u при $L \rightarrow \infty$, можем продолжить в комплексную точку приведенную выше функцию, используя (14). Для обеспечения сходимости интеграла ограничим y следующим интервалом:

$$(19) \quad |y| < L^{-\alpha}, \quad \frac{2}{3} < \alpha < \frac{3}{4}.$$

Выбор верхней границы для α в (19) далее будет обоснован. Поскольку $u^* - u = \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{-1/2} - iy$, получаем:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{u^* - u} &= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} \left(1 - i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} y \right)^{-1} = \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} \times \\
 &= \left(1 + i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} y - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1} L y^2 + O(L^{\frac{3}{2}-3\alpha}) \right) = \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} + i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1} L y - \\
 &\quad - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-3/2} L^{3/2} y^2 + O(L^{2-3\alpha}).
 \end{aligned}$$

Из этого следует, что

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{1}{u^* - u} &= \ln \left[\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} \left(1 + O(L^{\frac{1}{2}-\alpha}) \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \ln L - \frac{1}{2} \ln \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right) + O(L^{\frac{1}{2}-\alpha}).
 \end{aligned}$$

Далее, подставляя предыдущие разложения с $u = \hat{u} + iy$ в (18), получаем следующую асимптотическую формулу

$$\begin{aligned}
 \phi(\hat{u} - 1 + iy, T) + \sum_{j=1}^n \Sigma_0^{jj} \psi_j(\hat{u} - 1 + iy, T) &= \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{1/2} + i L y - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{3/2} y^2 + \\
 &\quad + \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2} \right) \left(\ln L - \ln \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right) \right) + \sum_{j=1}^n \Gamma_j + O(L^{2-3\alpha}).
 \end{aligned}$$

7. Аппроксимация плотности в седловой точке

Для простоты докажем теорему с более слабой оценкой погрешности $O((\ln x)^{-1/4+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Далее получим более сильную оценку $O((\ln x)^{1/2})$.

Для начала сместим контур в формуле обратного преобразования Меллина (13) в седловую точку $\hat{u}$. Это дает

$$(20) \quad D_T(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{u}-i\infty}^{\hat{u}+i\infty} e^{-uL+\phi(u-1,T)+\sum_0^{11}\psi_1(u-1,T)+\dots+\sum_0^{nn}\psi_n(u-1,T)} du.$$

Следовательно,

$$(21) \quad D_T(x) = x^{-\hat{u}} \frac{1}{2\pi} \times \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyL+\phi(\hat{u}-1+iy,T)+\sum_0^{11}\psi_1(\hat{u}-1+iy,T)+\dots+\sum_0^{nn}\psi_n(\hat{u}-1+iy,T)} dy.$$

Коэффициент $x^{-\hat{u}} \approx x^{-u^*} = x^{-A_3}$ приводит к главному члену асимптотики. Его показатель степени соответствует местоположению главной сингулярности преобразования Меллина.

Лемма 3. Пусть $B > 0$ и положим $L = \ln x$. Тогда часть интеграла в (20), где $\Im(u) > B$, равна $O(x^{-A_3} \exp\{(\sum_{j=1}^n \beta_j^2)^{1/2} L^{1/2}\})$.

Доказательство. Если $\tilde{B} > B$ – достаточно большая положительная константа, то утверждение леммы 3 следует из леммы 2:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\hat{u}+i\tilde{B}}^{\hat{u}+i\infty} e^{-uL+\phi(u-1)+\sum_0^{11}\psi_1(u-1)+\dots+\sum_0^{nn}\psi_n(u-1)} du \right| &\leq \\ &\leq C x^{-A_3} \exp\left\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\right\} \int_{\tilde{B}}^{\infty} e^{-Cy} dy = \\ &= O\left(x^{-A_3} \exp\left\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\right\}\right). \end{aligned}$$

Более того, так как преобразование Меллина не имеет особенностей за пределами вещественной прямой, получаем

$$\left| \int_{\hat{u}+iB}^{\hat{u}+i\tilde{B}} e^{-uL+\phi(u-1)+\Sigma_0^{11}\psi_1(u-1)+\dots+\Sigma_0^{nn}\psi_n(u-1)} du \right| =$$

$$= O\left(e^{-\hat{u}L}\right) = O\left(x^{-A_3} \exp\left\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\right\}\right).$$

На этом завершается доказательство леммы 3.

Лемма 3 показывает, что часть хвоста интеграла, где $\Im(u) > B$, асимптотически намного меньше центральной части. Далее оценим весь хвост интеграла.

Лемма 4. Для хвоста интеграла справедлива следующая оценка:

$$\left| \int_{\hat{u}+iL^{-\alpha}}^{\hat{u}+i\infty} e^{-uL+\phi+\Sigma_0^{11}\psi_1+\dots+\Sigma_0^{nn}\psi_n} du \right| =$$

$$= x^{-A_3} \exp\left\{2\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(\ln L)\right\},$$

$$L \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Докажем, что существует константа $B > 0$, такая что абсолютное значение части хвоста интеграла, где $L^{-\alpha} < \Im(u) < B$, определяется как

(22)

$$x^{-A_3} \exp\left\{2\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(\ln L)\right\}.$$

Достаточно подтвердить предыдущее утверждение леммы 3, так как лемма 4 показывает, что абсолютное значение интеграла от $\hat{u} + iB$ до $\hat{u} + i\infty$ асимптотически меньше, чем выражение в (22).

Действительно, разделив (22) на $x^{-A_3} \exp\left\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\right\}$, получим слагаемое $\exp\left\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} + O(L^{3/2-2\alpha})\right\}$, кото-

рое стремится к бесконечности, так как согласно условию (23) $3/2 - 2\alpha < 1/2$. Далее, используя лемму 1 и замечание после неё, видим, что для некоторой константы $\gamma > 0$

$$e^{\phi(u-1, T) + \Sigma_0^{11} \psi_1(u-1, T) + \dots + \Sigma_0^{nn} \psi_n(u-1, T)} = \\ = O \left(\exp \left\{ \frac{\sum_{j=1}^n \beta_j^2}{A_3 - u} - \gamma \ln(A_3 - u) \right\} \right),$$

поскольку u стремится к $u^* = s_+ + 1 = A_3$ внутри полосы аналитичности. Точнее, существует константа $C > 0$, такая что для достаточного малого числа $B > 0$ и для всех u в полосе аналитичности с условиями $|\Im(u)| < B$ и $\Re(u) > u^* - B$, получаем

$$|e^{\phi(u-1) + \Sigma_0^{11} \psi_1(u-1) + \dots + \Sigma_0^{nn} \psi_n(u-1)}| \leq \\ \leq C |A_3 - u|^{-\gamma} \exp \left\{ \Re \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j^2}{A_3 - u} \right) \right\}.$$

Из этого следует, что

$$| \int_{\hat{u} + iL^{-\alpha}}^{\hat{u} + iB} e^{-uL + \phi + \Sigma_0^{11} \psi_1 + \dots + \Sigma_0^{nn} \psi_n} du | \leq \\ \leq C x^{-A_3} \exp \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{1/2} \right\} \times \\ \times \int_{L^{-\alpha}}^B |A_3 - (\hat{u} + iy)|^{-\gamma} \exp \left\{ \Re \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j^2}{A_3 - (\hat{u} + iy)} \right) \right\} dy \\ \leq C x^{-A_3} \exp \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{1/2} \right\} L^{\gamma/2} \exp \left\{ \frac{(A_3 - \hat{u}) \sum_{j=1}^n \beta_j^2}{(A_3 - \hat{u})^2 + L^{-2\alpha}} \right\} = \\ = C x^{-A_3} \exp \left\{ 2 \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(\ln L) \right\}.$$

Здесь мы пользуемся тем, что

$$\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{-1/2} = A_3 - \hat{u} \leq |A_3 - (\hat{u} + iy)|,$$

откуда имеем

$$L^{\gamma/2} \leq |A_3 - (\hat{u} + iy)|^{-\gamma}.$$

Кроме того, величина

$$(23) \quad \Re \left(\frac{\sum_{j=1}^n \beta_j^2}{A_3 - (\hat{u} + iy)} \right) = \frac{(A_3 - \hat{u}) \sum_{j=1}^n \beta_j^2}{(A_3 - \hat{u})^2 + y^2}$$

уменьшается с ростом $|y|$. Следовательно, можем оценить интеграл от функции (23) на интервале $[L^{-\alpha}, B]$ значением её подынтегральной функции, умноженным на длину пути интегрирования в L раз. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{(A_3 - \hat{u}) \sum_{j=1}^n \beta_j^2}{(A_3 - \hat{u})^2 + L^{-2\alpha}} &= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{1/2} - \frac{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{1/2}}{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right) L^{2\alpha-1} + 1} = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(L^{5/2-4\alpha}). \end{aligned}$$

Наконец, записываем коэффициент $L^{\gamma/2}$ как $\exp\{O(\ln L)\}$.

На этом доказательство леммы 4 завершается.

«Хвост» интеграла в (21), соответствующий $|y| > L^{-\alpha}$, можно оценить с помощью Леммы 4. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} D_T(x) &= x^{-\hat{u}} \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_{-L^{-\alpha}}^{L^{-\alpha}} e^{-iyL + \phi(\hat{u}-1+iy, T) + \sum_0^{11} \psi_1(\hat{u}-1+iy, T) + \dots + \sum_0^{nn} \psi_n(\hat{u}-1+iy, T)} dy \\ &+ x^{-A_3} \exp\left\{2 \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(\ln L)\right\}. \end{aligned}$$

Далее, используя асимптотическую формулу и равенство

$$x^{-\hat{u}} \exp\left\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\right\} = x^{-u^*} \exp\left\{2 \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\right\},$$

получаем

$$\begin{aligned}
 D_T(x) = & \frac{\exp\{\sum_{j=1}^n \Gamma_j\}}{2\pi} x^{-u^*} e^{2(\sum_{j=1}^n \beta_j^2)^{1/2} L^{1/2}} \times \\
 & \times \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}} L^{\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}} \times \\
 & \times \int_{-L^{-\alpha}}^{L^{-\alpha}} \exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2} y^2\right\} dy (1 + O(L^{2-3\alpha})) \\
 & + x^{-A_3} \exp\left\{2\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(\ln L)\right\}.
 \end{aligned}$$

Вычисляя интеграл Гаусса, получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{-L^{-\alpha}}^{L^{-\alpha}} \exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2} y^2\right\} dy = \\
 & = \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/4} L^{-3/4} \int_{-(\sum_{j=1}^n \beta_j^2)^{-1/4} L^{3/4-\alpha}}^{(\sum_{j=1}^n \beta_j^2)^{-1/4} L^{3/4-\alpha}} \exp\{-w^2\} dw \sim \\
 & \sim \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/4} L^{-3/4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-w^2\} dw = \sqrt{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/4} L^{-3/4}.
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание последние два выражения, можем сравнить основную часть асимптотического разложения и получившиеся два члена ошибки:

$$\text{const} \cdot x^{-A_3} L^{\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2} - \frac{3}{4}} \exp\left\{2\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\right\}$$

(основная часть),

$$x^{-A_3} L^{\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2} - \frac{3}{4}} \exp\left\{2\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\right\} O(L^{2-3\alpha})$$

(ошибка из-за локального расширения вокруг седловой точки) и

$$x^{-A_3} \exp\left\{2 \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2} - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha} + O(\ln L)\right\}$$

(ошибка из-за конечной оценки).

Так как $2 - 3\alpha < 0$, выражение во второй строке асимптотически меньше основной части. Кроме того, поскольку $3/2 - 2\alpha > 0$, величина $\exp\left\{\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2-2\alpha}\right\}$ убывает быстрее, чем любая степень L в ошибке локального разложения. Получаем, что выражение в третьей строке пренебрежимо мало по сравнению с ошибкой в локальном разложении. Следовательно, достаточно взять только значение ошибки, возникающее в результате локального расширения.

В результате погрешность в асимптотической формуле для D_T равна $O(L^{2-3\alpha}) = O(L^{-1/4+\varepsilon})$ (возьмем α , близкое к $\frac{3}{4}$). Получаем следующую формулу:

$$D_T(x) = \left[\frac{\exp\{\sum_{j=1}^n \Gamma_j\}}{2\pi} \sqrt{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/4 - \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}} \right] \times \\ \times x^{-(s_++1)} e^{2(\sum_{j=1}^n \beta_j^2)^{1/2} L^{1/2}} L^{-3/4 + \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}} \times \\ \times (1 + O(L^{-1/4+\varepsilon})), \quad L \rightarrow \infty.$$

Из этого следует, что Теорема 1 с более слабой оценкой погрешности верна при

$$(24) \quad A_1 = \frac{\exp\{\sum_{j=1}^n \Gamma_j\}}{2\pi} \sqrt{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/4 - \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}}.$$

Далее докажем теорему 1 с относительной погрешностью $O((\log x)^{-1/2})$. Для этого возьмем ещё два члена разложения для $1/(u^* - u)$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{u^* - u} &= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} \left(1 - i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} y \right)^{-1} = \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} (1 + i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} y - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1} Ly^2 - \\
 &\quad - i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-3/2} L^{3/2} y^3 + \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-2} L^2 y^4 + O(L^{\frac{5}{2}-5\alpha})) = \\
 &= \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} + i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1} Ly - \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-3/2} L^{3/2} y^2 - \\
 &\quad - i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-2} L^2 y^3 + \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-5/2} L^{5/2} y^4 + O(L^{3-5\alpha}).
 \end{aligned}$$

Разложив логарифм, получим:

$$\begin{aligned}
 \ln \frac{1}{u^* - u} &= \frac{1}{2} \ln L - \ln \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right) + i \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{1/2} y - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1} Ly^2 + O(L^{\frac{3}{2}-3\alpha}).
 \end{aligned}$$

Далее, подставив два предыдущих разложения в (14), получаем уточнение разложения подынтегральной функции:

$$\begin{aligned}
 x^{-\hat{u}-iy} \exp\{\phi(\hat{u} - 1 + iy, T) + \sum_{j=1}^n \Sigma_0^{jj} \psi_j(\hat{u} - 1 + iy, T)\} &= \\
 &= x^{-u^*} \exp\left\{2 \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{1/2} L^{1/2} + \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2} \right) \left(\ln L - \ln \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right) \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$- \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2 \right)^{-1/2} L^{3/2} y^2 + \sum_{j=1}^n \Gamma_j \cdot (1 + c_1 L^2 y^3 + c_2 L^{5/2} y^4 + c_3 L^{1/2} y + \\ + c_4 L y^2 + c_5 L^{-1/2} + O(L^{-3/4+\varepsilon}))$$

с константами $c_1, \dots, c_5$. Обратим внимание, члены с c_1 и c_2 взяты из $(u^* - u)^{-1}$, те, которые включают c_3 и c_4 , — из $\ln(u^* - u)^{-1}$, и тот, который содержит c_5 , взят из $(u^* - u)$. Здесь используется факт, что член в (14) имеет вид $c(u^* - u) + O((u^* - u)^2)$.

Используя те же идеи, что в доказательстве для более слабой оценки погрешности, видим, что основной член и член ошибки из-за конечной оценки остаются неизменными. Получим значение ошибки из-за локального расширения. Сначала проинтегрируем функции в формуле выше и примем во внимание, что

$$\int_{-L^{-\alpha}}^{L^{-\alpha}} y^3 \exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2} y^2\right\} dy = \\ = \int_{-L^{-\alpha}}^{L^{-\alpha}} y \cdot \exp\left\{-\left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{-1/2} L^{3/2} y^2\right\} dy = 0.$$

Два интеграла, полученные из множителей с y^2 и y^4 , можно вычислить. Они дают относительный вклад $L^{-1/2}$, который можно объединить с членом $c_5 L^{-1/2}$. Из этого следует, что абсолютная погрешность, полученная из локального разложения, равна

$$x^{-A_3} L^{-3/4 + \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}} \exp\left\{2 \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} L^{1/2}\right\} O(L^{-1/2}).$$

Осталось увидеть, что константы A_2 и A_3 задаются формулами

$$(25) \quad A_3 = s_+ + 1, \quad A_2 = 2 \left(\sum_{j=1}^n \beta_j^2\right)^{1/2} = 2 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\Sigma_0^{jj}}{2c_j^2 \sigma}\right)^{1/2}.$$

8. Явная формула для константы A_1

Найдем явную формулу для константы A_1 , которая фигурирует в формуле (1). Тогда доказательство теоремы будет завершено. Для любого $t \in (0, T)$ положим

$$(26) \quad J_t^j = a_j^2 \int_0^t \left(\psi_j(s_+, \nu) - \frac{1}{2c_j^2(T - \nu)} \right) d\nu.$$

Из формулы для функции ϕ следует, что

$$\sum_{j=1}^n J_t^j = \phi(s_+, t) - \left(\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2} \right) \ln \frac{T}{T-t}.$$

Тогда

$$(27) \quad J_t^j = \frac{a_j^2}{2c_j^2} \ln \left(\frac{(T-t)P_j(s_+) \exp\{(-b_j - s_+ \rho_j c_j)t\}}{T[P_j(s_+) \cosh(P_j(s_+)t) - (b_j + s_+ \rho_j c_j) \sinh(P_j(s_+)t)]} \right).$$

Используя правило Лопиталя, получаем

$$\begin{aligned} L_j &= \lim_{t \uparrow T} \frac{T-t}{P_j(s_+) \cosh(P_j(s_+)t) - (b_j + s_+ \rho_j c_j) \sinh(P_j(s_+)t)} = \\ &= \lim_{t \uparrow T} \frac{-1}{P_j^2(s_+) \sinh(P_j(s_+)t) - P_j(s_+)(b_j + s_+ \rho_j c_j) \cosh(P_j(s_+)t)}. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что знаменатель в первом пределе стремится к нулю, так как функция ϕ расходится при $u = s_+(T)$ и $t = T$, т.е.

$$P_j(s_+) \cosh(P_j(s_+)t) = (b_j + s_+ \rho_j c_j) \sinh(P_j(s_+)t),$$

тогда

$$(28) \quad L_j = \frac{1}{(b_j + s_+ \rho_j c_j)^2 \sinh(P_j(s_+)t) - P_j^2(s_+) \sinh(P_j(s_+)t)}.$$

Из (26)–(28) следует, что

$$\lim_{t \uparrow T} e^{J_t^j} = \exp \left(a_j^2 \int_0^T \left(\psi_j(s_+, \nu) - \frac{1}{2c_j^2(T - \nu)} \right) d\nu \right) =$$

$$= \exp \left(\frac{(-b_j - s_+ \rho_j c_j) a_j^2 T}{2c_j^2} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{(b_j + s_+ \rho_j c_j)^2 + c_j^2 (s_+ - s_+^2)}}{T c_j^2 s_+ (s_+ - 1) \sinh[T \sqrt{(b_j + s_+ \rho_j c_j)^2 + c_j^2 (s_+ - s_+^2)}]} \right)^{\frac{a_j^2}{2c_j^2}}.$$

Далее, используя формулу для Γ , видим, что

$$e^{\Gamma_j} = \left(\frac{T}{\sigma} \right)^{\frac{a_j^2}{2c_j^2}} \exp \left(-\Sigma_0^{jj} \left(\frac{b_j + s_+ \rho_j c_j}{2c_j^2} + \frac{\kappa}{4c_j^2 \sigma^2} \right) \right) \times$$

$$\times \exp \left(\frac{(-b_j - s_+ \rho_j c_j) a_j^2 T}{2c_j^2} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{\sqrt{(b_j + s_+ \rho_j c_j)^2 + c_j^2 (s_+ - s_+^2)}}{T c_j^2 s_+ (s_+ - 1) \sinh[T \sqrt{(b_j + s_+ \rho_j c_j)^2 + c_j^2 (s_+ - s_+^2)}]} \right)^{\frac{a_j^2}{2c_j^2}}.$$

Следовательно, из (24) следует, что

$$A_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\Sigma_0^{jj}}{2c_j^2 \sigma} \right)^{-\frac{1}{4} - \sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{4c_j^2}} \left(\frac{T}{\sigma} \right)^{\sum_{j=1}^n \frac{a_j^2}{2c_j^2}} \times$$

$$\times \exp \left(-\sum_{j=1}^n \Sigma_0^{jj} \left(\frac{b_j + s_+ \rho_j c_j}{2c_j^2} + \frac{\kappa}{4c_j^2 \sigma^2} \right) + \frac{(b_j + s_+ \rho_j c_j) a_j^2 T}{2c_j^2} \right) \times$$

$$\times \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sqrt{(b_j + s_+ \rho_j c_j)^2 + c_j^2 (s_+ - s_+^2)}}{T c_j^2 s_+ (s_+ - 1) \sinh[T \sqrt{(b_j + s_+ \rho_j c_j)^2 + c_j^2 (s_+ - s_+^2)}]} \right)^{\frac{a_j^2}{2c_j^2}}.$$

Таким образом, доказательство теоремы 1 завершено.

9. Заключение

В теореме 1 мы рассмотрели асимптотику плотности для многофакторной модели Хестона $D_T(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Но как ведет себя плотность $D_T(x)$ вблизи нуля? Оказывается, что при

$x \downarrow 0$ подынтегральное выражение имеет седловую точку, которая приближается к сингулярной точке $s_- + 1$ со скоростью $(-\log x)^{-1/2}$ (s_- обозначает нижний критический момент). Далее, используя те же идеи, что и в случае $x \rightarrow \infty$, можем получить аналогичные асимптотические формулы.

Также стоит отметить тот факт, что явным видом функций преобразования Меллина мы пользовались только для вычисления константы A_1 , в основном использовали соответствующие уравнения Риккати. Поэтому общий вид асимптотической формулы плотности распределения стоимости акции можем получить для любой многофакторной модели без процесса диагонализации матриц.

Литература

1. BRU M. *Wishart processes* // Journal of Theoretical Probability. – 1991. – Vol. 4. – P. 725–743.
2. CARR P., MADAN D.B. *Option valuation using the fast Fourier transform* // Journal of Computational Finance. – 1999. – Vol. 2, No. 4.
3. CARR P., WU L. *Stochastic Skew in Currency Options* // Preprint, 2004.
4. CONT R., DA FONSECA J. *Dynamics of implied volatility surfaces* // Quantitative Finance. – 2002. – Vol. 2, No. 1. – P. 45–60.
5. DA FONSECA J., GRASSELLI M., TEBALDI C. *A multifactor volatility Heston model* // Quantitative Finance. – 2008. – Vol. 8, No. 6. – P. 591–604.
6. DAI Q., SINGLETON K. *Specification Analysis of Affine Term Structure Models* // Journal of Finance. – 2000. – Vol. 55. – P. 1943–1978.
7. DUFFIE D., KAN R. *A Yield-Factor Model of Interest Rates* // Mathematical Finance. – 1996. – Vol. 6(4). – P. 379–406.
8. DUFFIE D., PAN J., SINGLETON K. *Transform analysis and asset pricing for affine jump-diffusions* // Econometrica. – 2000. – Vol. 68. – P. 1343–1376.

9. FLAJOLET P., GOURDON X., DUMAS P. *Mellin transforms and asymptotics: Harmonic sums* // Theoretical Computer Science. – 1995. – Vol. 144. – P. 3–58.
10. FREILING G. *A Survey of Nonsymmetric Riccati Equations* // Linear Algebra and Its Applications. – 2002. – P. 243–270.
11. FRIZ P., GERHOLD S., GULISASHVILI A. et al. *On refined volatility smile expansion in the Heston model* // Quantitative Finance. – 2011. – Vol. 11. – P. 1151–1164.
12. GOURIEROUX C., SUFANA R. *Derivative Pricing with Multivariate Stochastic Volatility: Application to Credit Risk* // Working paper. – CREST, 2004.
13. GRASSELLI M., TEBALDI C. *Solvable Affine Term Structure Models* // Mathematical Finance. – 2004.
14. GULISASHVILI A. *Analytically Tractable Stochastic Stock Price Models* // Springer Finance. – 2012. – P. 167–184.
15. GULISASHVILI A., STEIN E.M. *Asymptotic behavior of the stock price distribution density and implied volatility in stochastic volatility models* // Applied Mathematics and Optimization. – 2010. – Vol. 61. – P. 287–315.
16. HESTON S. *A Closed-Form Solution for Option with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options* // Review of Financial Studies. – 1993. – Vol. 6. – P. 327–343.
17. HORN R.A., JOHNSON C.R. *Matrix analysis*. – Cambridge, 1990. – P. 464–469.
18. LEWIS A.L. *Option Valuation Under Stochastic Volatility*. – Finance Press, 2000.
19. LUCIC V. *On singularities in the Heston models* // Large Deviations and Asymptotic Methods in Finance, 2007. – P. 439–448.
20. WONG G. *Forward Smile and Derivative Pricing* // Equity Quantitative. Strategists Working Paper, UBS, 2004.

ASYMPTOTIC REPRESENTATION IN STOCHASTIC VOLATILITY MODELS

Kristina Buslova, Lomonosov Moscow State University, Moscow,
Student (buslova.kristina@mail.ru).

Abstract: This work is devoted to the study of the asymptotic behavior of the probability density function of stock prices within models with stochastic volatility. The main focus is on generalizing previously known results for the one-factor Heston model to more complex cases, including multivariate models. The research methodology is based on the use of affine principles, which allow analyzing the necessary aspects of asymptotics through solving corresponding Riccati equations near the critical point. The application of high-order Euler estimates ensures accuracy in calculations and robustness of conclusions. Additionally, the method of steepest descent combined with Tauber's principle is used, providing an opportunity to extract precise data about the asymptote of the original function from the analysis of its transformation near the critical point. This allows a deeper understanding of the structure of probability density functions in the context of complex stochastic systems. The obtained results are important for the development of the theory of stochastic differential equations and can find applications in various fields such as financial mathematics and econometrics.

Keywords: asymptotic formula for the stock of an option, multidimensional Heston model, Mellin transform.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.И. Орловым.*

Поступила в редакцию 03.12.2024.

Дата опубликования 31.07.2025.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОРГАНИЗАЦИОННЫХ МЕХАНИЗМОВ ВНЕДРЕНИЯ ТЕХНОЛОГИЙ ИНДИВИДУАЛЬНОГО МОНИТОРИНГА СОСТОЯНИЯ ИЗДЕЛИЙ АВИАЦИОННОЙ ТЕХНИКИ

Касаткин А. А.¹, Рахманина В. Е.²

*(ФГБУ «НИЦ «Институт имени Н.Е. Жуковского»,
Жуковский)*

Рассматривается согласование экономических интересов сторон, участвующих в техническом обслуживании и ремонте летательных аппаратов и их систем, при изменении подхода к их технической эксплуатации, обусловленного применением технологий индивидуального мониторинга состояния объектов авиационной техники. При внедрении таких технологий ожидается повышение долговечности продукции авиастроения и продление фактических сроков её эксплуатации. С экономической точки зрения это может стать причиной снижения прибыли разработчиков и производителей изделий авиационной техники, а также организаций, осуществляющих их техническое обслуживание и ремонт. В работе рассматриваются экономические механизмы внедрения данных технологий, позволяющие обеспечить их привлекательность как для вышеперечисленных организаций, так и для эксплуатантов. Так, определены взаимовыгодные диапазоны цен на модифицированную продукцию, предложен способ её реализации совместно с работами по техническому обслуживанию и ремонту в формате продажи эксплуатации летательных аппаратов по фиксированной ставке за лётный час. Проведено имитационное моделирование выполнения плановых полетов в нескольких регионах совместно с выполнением технического обслуживания и ремонта воздушных судов. Проведено сравнение затрат на выполнение полетов при различном эффекте от внедрения таких технологий при обеспечении качества оказания услуг. Показано, что при объединении нескольких эксплуатантов в пул с целью определения единой для всех эксплуатантов ставки продажи возможно предложить единую ставку продажи ниже, чем при обслуживании эксплуатантов по отдельности.

Ключевые слова: индивидуальный мониторинг состояния, согласование экономических интересов, единая ставка продажи.

¹ Андрей Алексеевич Касаткин, н.с. (kasatkinaa@nrczh.ru).

² Валерия Евгеньевна Рахманина, гл. специалист (rakhmaninave@nrczh.ru).

1. Введение

Воздушные суда – это сложные инженерные системы, состоящие из множества взаимосвязанных подсистем с возможными неопределенностями в их структуре. Они часто функционируют в течение длительного количества летных часов в изменяющихся или жестких условиях, поэтому прогнозирование и управление состоянием критических подсистем или компонентов в рамках общей системы имеет решающее значение для поддержания безопасности и надежности самолета [5]. Технологии индивидуального мониторинга состояния (ТИМС) объектов авиационной техники (АТ) позволяют отслеживать параметры состояния данного объекта, в частности, параметры, определяющие накопленные повреждения или выработку ресурса узлов и агрегатов. В состав системы мониторинга входят датчики измерения различных физических величин, бортовые блок-регистраторы и специальное программное обеспечение для обработки и анализа зарегистрированной датчиками информации. Системы мониторинга предназначены для регистрации в режиме реального времени нагрузок, действующих на конструкции, обнаружения повреждений, в том числе ударных, в контролируемых конструкциях, оценки предотказного состояния и остаточного ресурса [10, 22]. Первостепенной целью внедрения ТИМС является заблаговременное предотвращение отказа узлов и агрегатов каждого отдельного воздушного судна (ВС) [9, 14].

Ожидаемым эффектом от внедрения ТИМС объектов АТ является увеличение средних по парку временных интервалов между проведением различных форм технического обслуживания и ремонта (ТОиР), обусловленное выполнением ТОиР по факту накопления повреждений и/или достижения предотказного состояния соответствующих узлов и агрегатов, вместо выполнения ТОиР по факту наступления календарного срока или достижения соответствующего налёта [6, 19]. В работах [12, 18] рассматриваются подходы к оценке технического состояния АТ по показателям различных датчиков, фиксирующих ухудшения характеристик отдельных систем ВС. Таким образом, ТИМС

позволяют перейти от традиционной системы эксплуатации с едиными межремонтными и назначенными ресурсами для всего парка изделий данного типа к эксплуатации АТ по техническому состоянию [7, 13]. Следствием этого будет повышение готовности парка АТ и увеличение долговечности изделий (времени эксплуатации до списания), особенно при эксплуатации ВС в благоприятных условиях (при низком темпе накопления повреждений). Данной тематике посвящен ряд зарубежных работ [15, 17], в которых исследуется методология анализа затрат и выгод от применения технологий прогнозирования и управления состоянием АТ. Методология учитывает особенности эксплуатации коммерческих самолетов для получения оценок экономической целесообразности применения технологии на этих платформах.

Оптимизация технического обслуживания ВС – одна из приоритетных задач для каждой авиационной организации, так как расходы на ТОиР ВС составляют существенную долю операционных затрат авиакомпании [21]. В свою очередь и поставщики услуг ТОиР заинтересованы в снижении себестоимости предоставляемых услуг и увеличении собственной прибыли. Рассмотрим более подробно возможные эффекты при переходе к выполнению работ ТОиР по фактическому состоянию.

Эксплуатанты, проводящие мониторинг состояния объектов АТ и использующие его результаты для управления состоянием изделий АТ, при внедрении указанных технологий потенциально могут рассчитывать на экономическую выгоду

- от сокращения ожидаемых затрат на ТОиР, на замену и приобретение новых изделий (благодаря повышению их долговечности);
- от сокращения ожидаемых затрат при отказах изделий (благодаря повышению ожидаемой безотказности).

Описанное сокращение общей стоимости владения (затрат на приобретение парка ВС и затрат на ТОиР) является именно ожидаемым, носит вероятностно-статистический характер, а реальное изменение общей стоимости владения изделиями АТ в конкретном парке за конкретный рассматриваемый период является случайным и может отличаться от ожидаемого как

по абсолютной величине, так и по знаку, причем тем сильнее, чем короче рассматриваемый период и чем меньше численность и среднегодовой налет парка изделий в эксплуатации.

С другой стороны, эксплуатанты несут риски повышения издержек на покупку и ТО парка ВС ввиду повышения цен на АТ и дополнительных затрат на внедрение ТИМС. Они могут стать основанием для отказа от перехода к эксплуатации изделий АТ по техническому состоянию.

Разработчики и производители АТ также могут склоняться к отказу от внедрения ТИМС в свою продукцию. Повышение долговечности изделий, безусловно, является целесообразным: такая продукция становится более конкурентоспособной, так как выгодна эксплуатирующей организации. Однако повышение долговечности продукции требует от ее разработчика и изготовителя затрат (на разработку, внедрение конструктивных изменений и т.д.), что приведет к увеличению стоимости для эксплуатантов. Сокращение потребностей авиакомпаний на приобретение новых изделий и их ТОиР может привести к сокращению спроса на продукцию авиастроительных и ремонтных предприятий. Тем не менее в случае повышения себестоимости более качественной продукции можно предложить действенные организационные механизмы, обеспечивающие экономическую заинтересованность разработчиков и производителей АТ, а также организаций, осуществляющих её техническое обслуживание и ремонт во внедрении ТИМС [4].

В зарубежных работах, например [17, 20], также проводится анализ жизненного цикла использования прогностических систем в будущих или современных самолетах. Моделирование эксплуатации и технического обслуживания самолетов и расчёт возникающих затрат и доходов дает глубокую экономическую оценку эффектов внедрения технологий мониторинга состояния. В работах подчеркивается, что множество факторов влияет на то, будет ли внедрение ТИМС для конкретной системы в конечном итоге выгодным.

Таким образом, целью работы является разработка организационных механизмов согласования экономических интересов всех участников при внедрении ТИМС, формализация предло-

женных механизмов, анализ их эффективности и преимущественных условий их применимости.

2. Выработка организационных механизмов внедрения технологий индивидуального мониторинга состояния объектов АТ

В работе рассматриваются взаимодействующие стороны: авиакомпании, эксплуатирующие ВС (далее в тексте *эксплуатанты*), и организации-разработчики и изготовители изделий АТ, а также организации, осуществляющие ТОиР (для краткости далее в тексте *поставщики*).

Предполагается, что при внедрении ТИМС возможен общий выигрыш в экономической системе (включающей в себя поставщиков и эксплуатантов), поскольку средние сроки службы изделий АТ могут существенно возрастать – на десятки процентов или даже кратно [3, 18, 19]. Были проанализированы возможные способы перераспределения этого общего выигрыша взаимовыгодным для всех участников образом.

Одним из механизмов согласования экономических интересов организаций указанных типов может быть повышение цен на изделия АТ и услуги по их ТОиР в некотором взаимовыгодном диапазоне. Разработана математическая модель оценки границ такого диапазона, при которых одновременно не убывают прибыли поставщиков и не увеличиваются затраты эксплуатантов на приобретение парка АТ и ТОиР изделий АТ, с учетом увеличения среднего срока службы изделий АТ в парке благодаря внедрению таких технологий [8]. Описание модели приведено ниже.

Рассмотрим механизм договорного изменения цен с помощью экономико-математической модели на примере взаимодействия поставщика и единственной эксплуатирующей организации. Пусть предполагается увеличить периодичность выполнения ТОиР объектов АТ, ранее составлявшую T летных часов, на ΔT . Тогда при неизменном плане работы эксплуатирующей организации, использующей некоторое число ВС при суммарном налёте η летных часов за год, ожидаемый спрос на ремонт АТ

в течение года сокращается с $\frac{\eta}{T}$ заявок до $\frac{\eta}{T + \Delta T}$. Обозначим

переменной c себестоимость ТО, а её изменение – Δc . Если при этом исходная цена ТО p изменилась на величину Δp , то годовая прибыль поставщика Π , ранее составлявшая

$$(1) \quad \Pi = (p - c) \frac{\eta}{T},$$

теперь составит

$$(2) \quad \Pi' = (p + \Delta p - c - \Delta c) \frac{\eta}{T + \Delta T}.$$

При этом годовые затраты эксплуатирующей организации на ТОиР ВС парка изменятся с

$$(3) \quad C_T = p \frac{\eta}{T}$$

до

$$(4) \quad C_T' = (p + \Delta p) \frac{\eta}{T + \Delta T}.$$

Достаточные условия взаимовыгодного увеличения периодичности ТО таковы:

- неубывание прибыли поставщика ($\Pi' \geq \Pi$);
- невозрастание затрат эксплуатирующей организации ($C_T' \leq C_T$).

Для этого должны выполняться следующие неравенства:

$$(5) \quad (p + \Delta p - c - \Delta c) \frac{\eta}{T + \Delta T} - (p - c) \frac{\eta}{T} \geq 0$$

и

$$(6) \quad (p + \Delta p) \frac{\eta}{T + \Delta T} - p \frac{\eta}{T} = \eta \frac{(p + \Delta p)T - p(T + \Delta T)}{T(T + \Delta T)} \leq 0.$$

Или после упрощения:

$$(7) \quad \Delta p \geq \Delta c + (p - c) \frac{\Delta T}{T}$$

и

$$(8) \quad \Delta p \leq p \frac{\Delta T}{T}.$$

Неравенства (5) и (7) представляют собой условия экономической эффективности для поставщика, а (6) и (8) – условия экономической эффективности для эксплуатирующей организации.

Следовательно, можно повысить цену на модифицированную продукцию так, чтобы обеим сторонам было выгодно, то есть в диапазоне

$$(9) \quad p \frac{\Delta T}{T} \geq \Delta p \geq \Delta c + (p - c) \frac{\Delta T}{T}.$$

Чем ближе контрактная цена к верхней границе указанного диапазона, тем больше относительный выигрыш поставщика; чем ближе к нижней границе, тем больше выигрыш эксплуатирующей организации. Заметим, что полученный выше диапазон допустимых изменений цен не должен быть пустым, что достигается только при справедливости неравенства $\frac{\Delta c}{c} \leq \frac{\Delta T}{T}$. Это

неравенство можно считать необходимым условием экономической заинтересованности всех сторон в разработке и внедрении таких технологий. Выбор пропорции распределения между поставщиками и эксплуатантами выгоды, обусловленной внедрением ТИМС, является предметом их договора и в данной работе не рассматривается.

Другим видом механизмов согласования экономических интересов организаций является заключение контрактов определенного типа, с помощью которых становится возможным распределение рисков и выгод между сторонами. Рассмотрим существующие виды контрактов по продаже услуг ТО и сферы их применения.

Продукция авиастроения включает в себя не только изделия АТ, но и различные виды их послепродажного обслуживания. Договоры о ТОиР между эксплуатантом и поставщиком могут предусматривать как традиционную оплату фактически проведенных работ и затраченных материалов (в зарубежной литературе – контракты типа ТАМ, Time and Materials), так и фиксированную ставку оплаты за летный час использования

ВС (в зарубежной литературе – контракты типа PBN, Power by the Hour) [16, 23].

Ввиду возможности отказов и повреждений элементов авиатехники фактические затраты на ТОиР представляют собой случайный поток. Заметим, что даже плановые затраты эксплуатирующей организации в связи с выработкой ресурса узлами и агрегатами АТ, хотя и могут быть определены заранее, в любом случае носят нерегулярный характер, что может в некоторые периоды заметно повышать потребность эксплуатанта в оборотных средствах [10]. Особенно существенной эта неравномерность может быть для небольших авиакомпаний. Поскольку в каждом конкретном случае объем потребных работ случаен, при контракте типа ТАМ затрудняется планирование денежных потоков, времени отхода ВС в ремонт и времени выхода из ремонта. Таким образом, контракт такого типа может быть сопряжен со значительными рисками как для эксплуатанта, так и для поставщика.

В свою очередь, контракт типа PBN предполагает, что поставщик ТОиР получает деньги не за выполненную работу по техобслуживанию, а за бесперебойное функционирование ВС или парка ВС. Поставщик получает фиксированные периодические выплаты за конкретное количество летных часов, выполненных ВС в течение определенного отрезка времени, и должен выполнять всю необходимую работу по техобслуживанию за свой счет вне зависимости от ее состава и стоимости. Преимущество этой схемы заключается в том, что организация-поставщик услуг ТОиР заинтересован в максимально эффективном выполнении работ, так как он принимает на себя большую часть рисков. Кроме того, оплата ТОиР по фиксированной ставке облегчает оценку лизинговых контрактов на приобретение АТ и снижает транзакционные издержки, особенно для небольших авиакомпаний, для которых эти издержки могут быть существенными.

Рассмотрим подробнее методы оценивания контрактов на ТОиР. Наиболее просты в оценке контракты типа ТАМ: требуется лишь определить цены запасных частей, материалов и ставки оплаты работ по замене или ремонту элементов изде-

лий АТ. Контракт типа РВН с теоретико-экономической точки зрения представляет собой пример страхования: исполнитель ТООР обязуется за фиксированную плату поддерживать ВС в состоянии, пригодном для использования по назначению, по мере необходимости выполняя работы по ТООР. Теория страхования хорошо разработана [11] и позволяет рассчитать приемлемый для обеих сторон уровень страхового взноса в зависимости от вероятностных характеристик риска (в данном случае – интервалов между ТО). Выплаты каждого эксплуатанта поставщику услуг ТООР, рассчитываемые по фиксированным ставкам за летный час, должны обеспечивать:

- возмещение поставщику ожидаемых затрат на ТООР образца АТ, принадлежащих данной эксплуатирующей организации;
- премию поставщику за принимаемый им риск изменения затрат на ТООР.

Поскольку страхование основано на законе больших чисел, контракты типа РВН целесообразно заключать именно крупным авиационно-техническим центрам (организациям по ТО), обслуживающим множество авиакомпаний. В то же время собственный парк изделий АТ и их комплектующих крупнейших авиакомпаний достаточно велик, чтобы внутри него произошли вероятностное усреднение и стабилизация потоков затрат на ТООР. Для таких эксплуатирующих организаций контракт типа РВН может оказаться невыгодным, поскольку он включает в себя премию за риск поставщику.

Таким образом, контракты типа РВН (в сравнении с контрактами типа ТАМ) рационально заключать между авиакомпаниями с малочисленными парками ВС и крупными организациями по ТО (обслуживающими десятки и более авиакомпаний).

3. Имитационное моделирование эксплуатации парка ВС при внедрении ТИМС

Для проверки применимости рассмотренных организационных механизмов было проведено имитационное моделирование эксплуатации парка ВС. В работе определяются характери-

стики выполнения пассажироперевозок гипотетическим парком ВС местных воздушных линий (МВЛ) при различном эффекте от ТИМС. Для решения поставленной задачи проведено моделирование выполнения пассажироперевозок МВЛ однотипным парком совместно с моделированием выполнения ТОиР парка. Задача состоит из следующих этапов:

- составление расписания полетов (при его отсутствии);
- описание процесса организации ТОиР ВС;
- моделирование выполнения полетов рассматриваемым парком;
- моделирование выполнения ТОиР ВС рассматриваемого парка;
- расчёт технико-экономических характеристик.

Исходными данными для составления расписания были сведения о пассажиропотоках МВЛ в регионе (Иркутская и Тюменская области, *регион 1* и *регион 2* далее в тексте соответственно), ожидаемая средняя загруженность борта, число дней в неделю, когда совершаются полеты, а также количество часов, в которые совершаются полеты в течение одного летного дня. Каждое ВС в расписании имеет рейсы только на одной линии. Все рейсы парные: *туда* и *обратно*. Исходя из потребного для перевозки всех пассажиров числа рейсов и существующих временных ограничений определялось потребное число ВС на каждой линии. При проведении исследования расписание полётов задано детерминированными значениями. Было сделано упрощающее предположение, что аэропорт, расположенный в региональном центре, является местом базирования всех ВС, выполняющих полеты в данном регионе.

Модель выполнения полетов представляет собой марковскую цепь. Исходными данными для моделирования выполнения полетов являются: расписание полетов, местоположение всех ВС, летно-технические характеристики ВС и состояние каждого ВС (готов к полетам или находится в ремонте). Моделирование проводилось последовательно для всех ВС. Сначала проверялось положение ВС: если оно совпадает с местом отправки, то рейс не отменяется, если нет – рейс добавлялся

в список рейсов, требующих замены планового ВС. Затем проверялось состояние ВС: если ВС находится в ремонте или не сможет выполнить рейс из-за наступления планового ремонта, или необходимость ремонта выявлена в ходе предполетной проверки (что относится в данной работе к «случайным отказам» или эксплуатации по фактическому состоянию, о чем речь пойдет дальше), тогда рейс добавлялся в список рейсов, требующих замены планового ВС. Заключительным этапом является проверка фактического налета ВС с ресурсом на списание: если соответствующий налет достигнут, то данное ВС переходит в категорию *списанных*, оно более не совершает полеты, все его последующие рейсы переходят в категорию «требующие замены планового ВС», закупка новых ВС вместо списанных в данной работе не рассматривалась. Если все данные проверки были пройдены, то рейс выполнялся, налет ВС увеличивался на соответствующее число часов, положение ВС менялось на место назначения.

После выполнения всех рейсов за день составлялось расписание всех отмененных рейсов, оно дополнялось транзитными рейсами из аэропорта базирования, если отменялись рейсы из *периферийного аэропорта в региональный центр*. Далее эти рейсы распределялись между ВС региона, не имеющими плановых рейсов в соответствующее время. После чего проводилось моделирование выполнения замен отмененных рейсов аналогично выполнению плановых рейсов с тем отличием, что замены выполнялись ВС, отличными от планового ВС для данного рейса, свободными от плановых рейсов и готовыми к полетам в соответствующее время.

При моделировании эксплуатации парка ВС в части организации технического обслуживания и ремонта рассматривались пять форм ТОиР, имеющих периодичность и стоимость $\{\tau_i, c_i\}$ каждой i -й формы ТОиР ($i = 1, \dots, 5$), а также случайный отказ, требующий кратковременного ремонта продолжительностью τ_0 и стоимостью c_0 . Считалось, что работы по всем формам ТОиР выполняются централизованно на сервисной инфраструктуре (для их выполнения требуется перелет из *периферийного аэропорта в региональный центр*, откуда уже ВС отправляются

на сервисную инфраструктуру), случайные отказы могут быть устранены силами технических служб аэропорта в месте их фактического пребывания. Продолжительности выполнения работ различных форм τ_i представлены в таблице 1. Выбранные данные для описания процесса выполнения работ по ТОиР являются достаточными для демонстрации примера расчета и для формирования качественных выводов о влиянии внедрения ТИМС на характеристики выполнения парком ВС пассажирских перевозок.

Таблица 1. Продолжительность выполнения рассматриваемых форм ТОиР (ч)

Случайный отказ	A-check	B-check	C-check	D-check	E-check
τ_0	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
24	48	72	96	120	240

Стоимости выполнения ремонтных работ различных форм c_i приняты следующими (см. таблицу 2).

Таблица 2. Стоимость выполнения рассматриваемых форм ТОиР (тыс. руб.)

Случайный отказ	A-check	B-check	C-check	D-check	E-check
c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
20	50	200	1200	8000	50000

Составление модельного расписания полетов, моделирование полетов рассматриваемым парком и моделирование выполнения ТОиР ВС рассматриваемого парка аналогичны таковым в работе [2], где данные этапы описаны более подробно.

В работе рассматриваются сценарии, когда внедрение ТИМС приводит к возможности перевода всех форм ТОиР на выполнение по фактическому состоянию, совместно со случаем, когда выполнение наиболее трудоемких форм ТОиР (D-check, E-check) остается привязанным к назначаемым фиксированным наработкам.

При различных условиях эксплуатации в разных регионах темпы накопления повреждений и наработки могут быть различными. Соответственно, ожидаемый эффект от внедрения ТИМС подразумевает также различные сценарии:

- Технологии индивидуального мониторинга не внедрены, все формы ТОиР выполняются по единой для всего парка межремонтной наработке, назначаемой разработчиком, обозначаются «без ТИМС».

- Внедрение технологий индивидуального мониторинга состояния не приводит к увеличению средней наработки, обозначаются «+0%». Такие сценарии характерны для неблагоприятных условий эксплуатации (при высоком темпе накопления повреждений).

- Внедрение технологий индивидуального мониторинга состояния приводит к увеличению средней межремонтной наработки на 20%, 50% и 100%, обозначаются «+20%», «+50%» и «+100%» соответственно. Такие сценарии могут реализоваться в благоприятных условиях эксплуатации.

При выполнении ТОиР в соответствии с назначенными наработками моменты возникновения необходимости выполнения каждой формы равномерно распределены по летным часам. При внедрении ТИМС моменты возникновения необходимости выполнения ТОиР случайны и имеют распределение Пуассона с заданным математическим ожиданием ($1/T_i$ для i -й формы). Периодичности выполнения ремонтов и различных форм ТОиР T_i для различных сценариев условий эксплуатации ВС представлены в таблице 3 [1]. Во всех сценариях технической эксплуатации моменты возникновения случайных отказов имели распределение Пуассона.

В силу ограниченности набора доступных исходных данных и значительной трудоемкости построения имитационной модели функционирования самих ТИМС объектов АТ была построена вероятностная имитационная модель, в которой эффект от внедрения таких технологий является экзогенным по отношению к параметрам модели.

Таблица 3. Периодичность выполнения рассматриваемых форм ТОиР (ч)

	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
Без ТИМС	300	150	500	1000	2000	3000
+0%	300	150	500	1000	2000	3000
+20%	360	180	600	1200	2400	3600
+50%	450	225	750	1500	3000	4500
+100%	600	300	1000	2000	4000	6000

В работе рассматриваются два варианта начального состояния ВС: новые, без начального налета (обозначено «одновозрастный парк»), и ВС, начальные налеты которых составляют 0 ч, 2500 ч, 5000 ч, в одинаковой пропорции распределенные по численности парка, выполняющего полеты в регионе («разно-возрастный парк»).

В данной работе проводится сравнение экономических характеристик выполнения заданной транспортной работы с обеспечением коэффициента готовности парка не ниже 0,99, исходя из чего предварительно определялось число запасных ВС каждого вида.

Выполнение замен отмененных рейсов авиакомпания может производиться за счет имеющихся у нее ВС, выполняющих плановые рейсы (N_{BC_i} , индекс i относится к конкретному эксплуатанту), и за счет имеющихся в ее распоряжении запасных ВС (ΔN_{BC_i}), необходимых для обеспечения бесперебойной работы авиапарка.

Также рассматриваются случаи, в которых авиакомпания-эксплуатанты объединяются в общий «пул» с целью определения единой для всех эксплуатантов ставки продажи. При этом рассматривается возможность предоставления *общих* запасных ВС (в числе N_p) всем эксплуатантам, объединенным в «пул», по запросу на время выполнения «тяжелых» форм ТОиР (D-check, E-check).

Регионы-эксплуатанты подают заявку на предоставление им запасного ВС из общего «пула» в случае, когда один из их ВС встает на «тяжелую» форму ТОиР. Поставщик услуг ТОиР

собирает данные заявки со всех эксплуатантов, фиксируя моменты времени подачи заявки. По окончании полетного дня все заявки сортируются по следующему принципу: 1-я заявка из первого региона, 1-я заявка из второго региона, 1-я заявка из третьего региона, 2-я заявка из первого региона и т.д. После сортировки заявок поставщик услуг ТООР передает имеющиеся у него в данный момент нераспределенные ВС из общего «пула» запасных верхним в отсортированном списке заявок регионам. По окончании выполнения тяжелой формы ТООР ВС, которое было заменено запасным из общего «пула», запасное ВС из общего «пула» возвращается поставщику услуг.

4. Результаты имитационного моделирования эксплуатации парков ВС при внедрении ТИМС

В результате моделирования выполнения пассажироперевозок МВЛ однотипным парком определяются:

- налет каждого ВС и совершенная транспортная работа за рассматриваемый период времени;
- перечень выполненных форм ТООР за рассматриваемый отрезок времени;
- готовность парка за рассматриваемый отрезок времени;

Во всех рассмотренных случаях считается, что ВС имеют одни и те же летно-технические характеристики, сравниваются затраты при выполнении пассажироперевозок в одних и тех же регионах с неизменным расписанием плановых полетов.

В результате обработки результатов имитационного моделирования работы эксплуатантов получены следующие параметры, осредненные по 20 реализациям:

- Количество отказов и операций ТООР каждой формы N_i для рассматриваемого авиапарка в течение рассматриваемого периода T .
- Средний по реализациям суммарный налет всех ВС авиапарка η .

С помощью полученных данных рассчитывались следующие экономические показатели:

- Прямые расходы на выполнение работ по ТОиР:

$$(10) C_T = \sum_{i=1}^n c_i N_i,$$

где c_i – стоимость проведения ремонта или ТОиР i -й формы, представлены в таблице 2; N_i – число ремонтов или ТОиР i -й формы; n – число различных ремонтов и форм ТОиР.

- Затраты на лизинг ВС авиапарка:

$$(11) C_{\text{Л}} = C_{\text{ВС}} N_{\text{ВС}} \frac{\eta}{\text{term} \cdot N_{\text{ВС}}} = C_{\text{ВС}} \frac{\eta}{\text{term}},$$

где $C_{\text{ВС}}$ – стоимость ВС; $N_{\text{ВС}}$ – численность парка; η – суммарный налёт парка ВС; term – проектный срок службы до списания одного ВС.

- Суммарные средние (по реализациям) затраты на содержания авиапарка:

$$(12) \overline{COST} = \overline{C_{\text{Л}}} + \overline{C_{\text{Т}}},$$

где $\overline{C_{\text{Л}}}$ – средние по реализациям затраты на лизинг; $\overline{C_{\text{Т}}}$ – средние по реализациям затраты на ТОиР.

Прежде чем перейти к рассмотрению экономических аспектов внедрения ТИМС, продемонстрируем, как проявляется положительный эффект от внедрения данных технологий в натуральных величинах, а именно, как снижается доля ВС авиапарка, одновременно находящихся в ремонте.

Было проведено моделирование выполнения полетов авиапарками одинаковой численности без ТИМС и с внедрением данных технологий при различном эффекте от внедрения. В результате проведенного моделирования на конец каждого полётного дня рассматриваемого периода была получена информация о числе ВС, находящихся в ремонте. Для проверки эффекта внедрения ТИМС данная величина была отнесена к числу ВС авиапарка, тем самым были вычислены доли парка, находящиеся в ремонте к концу полётного дня. На рис. 1 представлено сравнение долей для двух сценариев эксплуатации парка: без ТИМС и с внедрением ТИМС в неблагоприятных условиях эксплуатации, когда средние наработки на форму ТОиР не возрас-

тают (число запасных ВС одинаково во всех случаях на рис. 1 и 2).

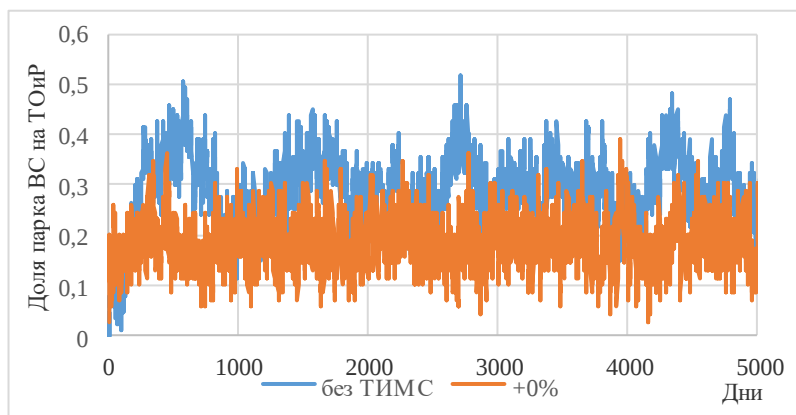


Рис. 1. Снижение доли парка ВС, одновременно находящихся в ремонте, при внедрении ТИМС

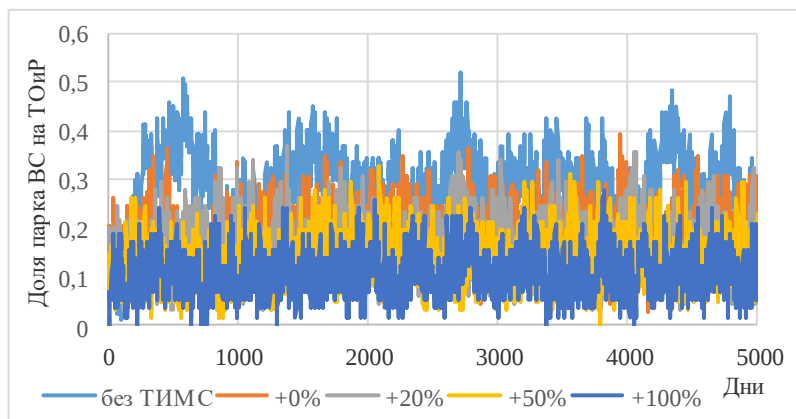


Рис. 2. Сравнение долей парка, одновременно находящихся в ремонте, при различном эффекте от внедрения ТИМС

Даже при эксплуатации парка ВС в неблагоприятных условиях (+0%) внедрение ТИМС приводит к снижению потребного

числа запасных ВС, так как различные ВС реже одновременно выполняют ТОиР, как было при эксплуатации по регламенту при одинаковой интенсивности эксплуатации парка.

Если же рассмотреть сценарии увеличения межремонтной наработки на 20%, 50% и 100% (благодаря внедрению ТИМС), то можно отметить существенное уменьшение числа «пиковых» ситуаций (рис. 2), когда большое количество ВС одновременно выходит на ремонт, при этом доля парка ВС, одновременно находящихся в ремонте, также снижается.

4.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ АВИАПАРКА НА ДОЛГОСРОЧНОМ ПЕРИОДЕ

При рассмотрении долгосрочного периода считалось, что только тяжёлые формы ТОиР – D-check и E-check – производятся согласно Программе ТО, все оставшиеся формы вследствие внедрения ТИМС производятся по фактическому состоянию. Рассмотрим пример эксплуатанта, который приобретает в лизинг парк ВС на период $T = 20$ лет (контракт типа ТАМ).

Для эксплуатанта (регион 1), в расписании которого плановые рейсы могут выполняться одиннадцатью ВС, рассчитаны фактические стоимости операций ТОиР в течение рассматриваемого периода для различных сценариев технической эксплуатации (без ТИМС, +0%, +20% и т.д.) (см. рис. 3).

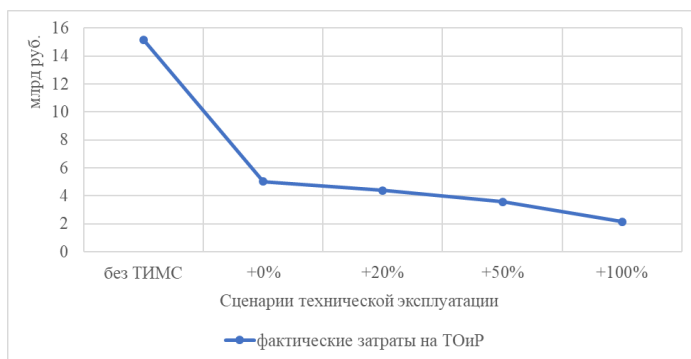


Рис. 3. Сравнение фактических затрат на ТОиР при различном эффекте от внедрения ТИМС

При этом для сценария «без ТИМС» фактические затраты на ТОиР кратно превышают соответствующие затраты для сценария +0%. Это обусловлено проблемой «переноса ремонта», в данном случае для текущего эксплуатанта, а не для последующего. В данном случае эксплуатантом было оплачено большое количество тяжёлых форм ТОиР, после чего истёк период эксплуатации, и парк ВС перешёл в пользование к другому эксплуатанту (см. рис. 4).



Рис. 4. Иллюстрация непропорциональности длительности контракта и количества выполненных тяжёлых форм ТОиР

Для того чтобы корректно рассчитывать затраты эксплуатанта на операции ТОиР (без вышеописанных «краевых» эффектов) на долгосрочном периоде эксплуатации предлагается устанавливать оплату плановых операций тяжёлых форм ТОиР не на основе фактически выполненных за период планирования работ, а на основе доли ресурса элементов ВС, исчерпанной за период планирования данной эксплуатирующей организацией (так называемая амортизация ТОиР). Так сумма затрат на тяжёлые формы ТОиР равномерно распределяется на весь календарный срок службы. Рис. 5 иллюстрирует разницу в подходах расчёта стоимости ТОиР. Далее при моделировании на долгосрочном периоде везде производится амортизация стоимости тяжёлых форм ТОиР.

На рис. 6 представлена детальная структура затрат на каждую форму ТОиР при различном эффекте от внедрения ТИМС.

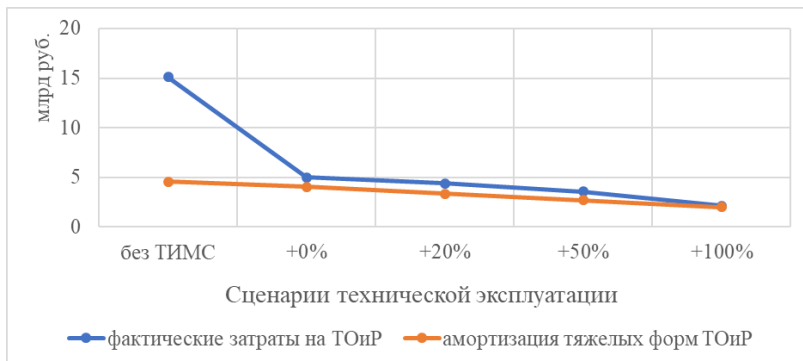


Рис. 5. Эффект амортизации тяжёлых форм ТОиР
(контракт на 20 лет)

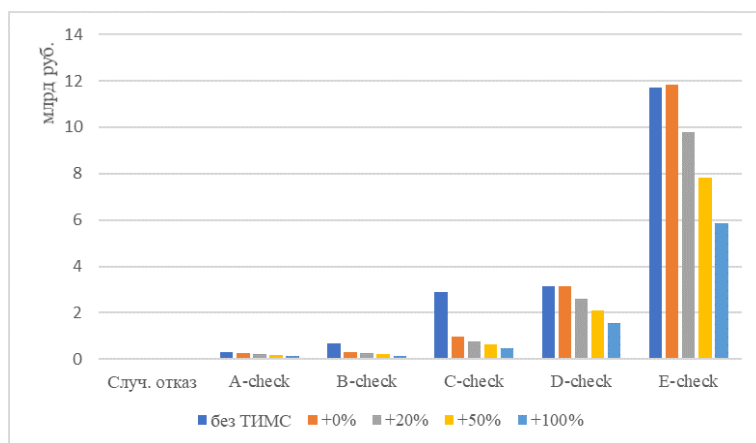


Рис. 6. Сравнение затрат на ТОиР при различном эффекте
от внедрения ТИМС (контракт на 20 лет)

Можно отметить существенное снижение затрат на выполнение *легких* форм ТОиР при переходе от «без ТИМС» к «+0%», что свидетельствует о том, что назначенные регламентные сроки выполнения соответствующих форм определены с заведомо избыточными запасами.

Возвращаясь к другой категории затрат (лизинговые издержки по приобретению необходимого количества ВС, в том числе и запасных), отметим, что снижение частоты производимых операций ТОиР приводит к уменьшению доли ВС, находящихся в ремонте и, соответственно, к снижению потребного числа запасных ВС (см. рис. 7).

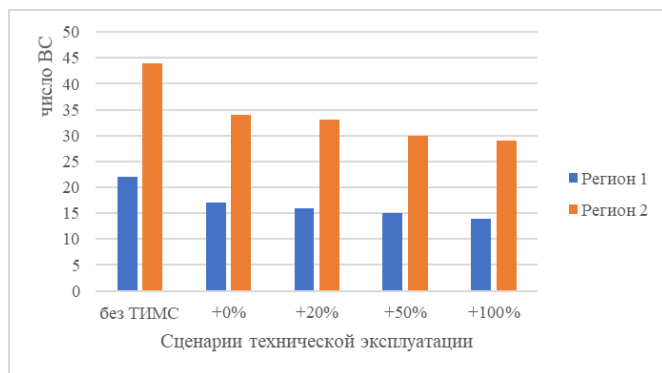


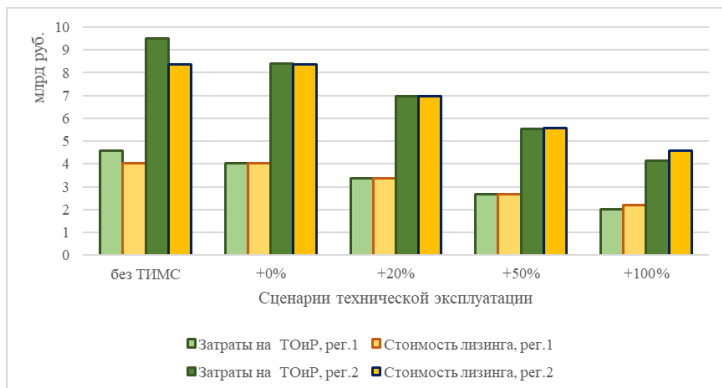
Рис. 7. Численность парка ВС эксплуатантов включая штатные и запасные ВС (контракт на 20 лет)

Таким образом, уменьшение суммарных издержек происходит за счёт снижения затрат на ТОиР и на содержание запасных ВС. На рис. 8 представлены значения затрат двух эксплуатантов (регион 1 – 11 ВС, регион 2 – 24 ВС в эксплуатируемом парке) при различных сценариях увеличения межремонтной наработки при внедрении ТИМС по сравнению с исходным сценарием.

Для обоих регионов можно отметить более высокий темп убывания издержек на оплату ТОиР в связи с увеличением межремонтной наработки объектов АТ по сравнению с темпом уменьшения лизинговых затрат.

Стоит также отметить, что в случае, если внедрение ТИМС не приводит к существенному увеличению средней межремонтной наработки, затраты на ТОиР, тем не менее, сокращаются: для сценария +0% одинаково в обоих регионах произошло уменьшение затрат на ТОиР на 11,5%. В случае двукратного

увеличения межремонтной наработки (сценарий +100%) возможно снижение затрат на ТОиР до 56% в каждом из регионов, при этом затраты на лизинг сократятся на 45%.



*Рис. 8. Издержки эксплуатантов на содержание авиапарка
(контракт на 20 лет)*

Было проведено сравнение затрат на ТОиР для одновозрастного и разновозрастного парков ВС (см. таблицу 4).

Таблица 4. Сравнение затрат на содержание авиапарков с различным исходным налётом входящих в него ВС (контракт на 20 лет)

	Затраты на ТОиР, $\overline{C_T}$, млрд руб.	
	Одновозрастный парк	Разновозрастный парк
без ТИМС	4,56	4,61
+0%	4,04	4,04
+20%	3,36	3,36
+50%	2,68	2,68
+100%	2,01	2,00

В рассмотренном случае, когда начальный налет мал в сравнении со средним ресурсом и средним сроком службы, он не имеет существенного влияния на суммарные затраты

на ТОиР. Далее в тексте везде приведены результаты для разновозрастных парков.

Рассмотрим экономические аспекты внедрения ТИМС с позиции поставщика. В первую очередь разработка и внедрение ТИМС требует от поставщика дополнительных затрат FC . Если не изменятся цены c_i , по которым производитель будет осуществлять операции ТОиР, то прибыль производителя от ТОиР снизится вследствие того, что увеличится средняя периодичность ремонтов за период T ($\overline{C'_T} < \overline{C_T}$). За счёт увеличения надёжности и долговечности ВС эксплуатантам будет необходимо меньшее число запасных ВС $\Delta N'_{BC_i} < \Delta N_{BC_i}$, вследствие чего затраты на лизинг сократятся до величины $\overline{C'_L} < \overline{C_L}$, что, как показано выше, выгодно эксплуатанту. Таким образом, при внедрении ТИМС ожидается снижение суммарных затрат на содержание авиапарка:

$$(13) \overline{COST}' = \overline{C'_L} + \overline{C'_T} < \overline{COST}.$$

Пусть прибыль поставщика в базовом сценарии (без ТИМС) составляет 10% от затрат на содержание авиапарка:

$$(14) R_{\text{пост}} = 0,1 \cdot \overline{COST} = 0,1 \cdot (\overline{C_L} + \overline{C_T}).$$

При этих условиях затраты эксплуатанта в базовом сценарии составят

$$(15) EXP = \overline{COST} + R_{\text{пост}}.$$

При переходе к эксплуатации по состоянию поставщик несет издержки FC на разработку и внедрение ТИМС АТ. При оценке минимального значения данной величины прибыль поставщика $R_{\text{пост}}$ считается неизменной:

$$(16) EXP' = \overline{COST}' + R_{\text{пост}} + FC.$$

Несмотря на появление нового слагаемого, при определённых сценариях существует возможность сокращения суммарных затрат эксплуатанта за счёт существенного снижения стоимости содержания авиапарка $\overline{COST}'$.

Для оценки максимально возможной прибыли поставщика $R'_{\text{пост}}$ необходимо при сохранении прежнего уровня затрат эксплуатанта рассмотреть их разность с новыми затратами на содержание авиапарка вместе затратами на внедрение и разработку ТИМС:

$$(17) R'_{\text{пост}} = EXP - \overline{COST'} - FC.$$

Условия, при которых и эксплуатанту, и поставщику выгодно внедрение ТИМС, являются следующими:

$$(18) \begin{cases} R'_{\text{пост}} \geq R_{\text{пост}}, \\ EXP' \leq EXP. \end{cases}$$

Данные неравенства отражают идею о существовании взаимовыгодного диапазона цен, описываемого формулами (7)–(9). Для возможности сравнения результатов имитационного моделирования для различных сценариев и регионов введём также удельный параметр – ставку эксплуатации C_{exp} , отражающий ожидаемые средние затраты на содержание авиапарка за период T в расчёте на лётный час, вычисляемые как отношение суммарных затрат эксплуатанта к количеству совершенных лётных часов η за рассматриваемый период времени:

$$(19) C_{\text{exp}} = \left(\frac{EXP'}{\eta} \right) = \left(\frac{COST' + R_{\text{пост}} + FC}{\eta} \right).$$

Минимальная ставка эксплуатации при переходе на сценарии с ТИМС реализуется при сохранении прибыли поставщика на прежнем уровне. Если поставщик желает повысить прибыль (и если этому не противоречит условие невозрастания затрат эксплуатанта по сравнению с базовым сценарием), то поставщик может назначать ставку эксплуатации выше минимальной.

Для определения взаимовыгодного диапазона цен были рассмотрены следующие граничные случаи:

- Прибыль поставщика остается неизменной, а затраты эксплуатанта сокращаются:

$$(20) \begin{cases} R_{\text{пост}} = \text{const}, \\ EXP' \leq EXP. \end{cases}$$

- Уровень затрат эксплуатантов сохраняется равным первоначальному, при этом прибыль поставщика растёт:

$$(21) \begin{cases} EXP = const, \\ R'_{\text{ПОСТ}} \geq R_{\text{ПОСТ}}. \end{cases}$$

Тем самым определяются «коридоры» взаимовыгодных цен для обоих участников (см. таблицу 5).

Таблица 5. Взаимовыгодные диапазоны изменения прибыли поставщика и затрат эксплуатанта (контракт на 20 лет, разновозрастной парк)

Сценарий	Сохранение прибыли поставщика			Сохранение затрат эксплуатантов		
	$R_{\text{ПОСТ}min}$, млрд руб	EXP'_{min} , млрд руб	$C_{exp min}$, руб	$R'_{\text{ПОСТ}max}$, млрд руб	EXP_{max} , млрд руб	$C_{exp max}$, руб
без ТИМС	3,53	36,45	46 485	5,85	38,69	49 452
+0%	3,53	30,89	39 502	11,41	38,69	49 591
+50%	3,53	25,36	32 510	16,94	38,69	49 710
+100%	3,53	20,68	26 571	21,62	38,69	49 710

Отразим коридоры значений, соответствующих условиям (20) и (21), на графике (см. рис. 9):

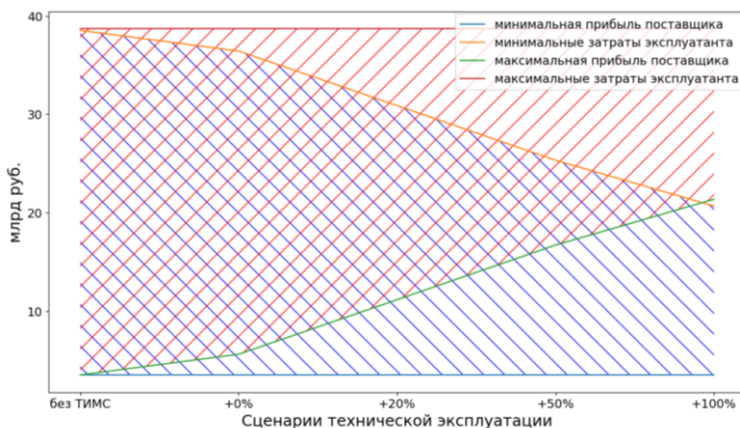


Рис. 9. Взаимовыгодные диапазоны изменения прибыли поставщика и затрат эксплуатанта (контракт на 20 лет)

На рисунке красной штриховкой выделен взаимовыгодный диапазон цен при сохранении затрат авиакомпаний на прежнем уровне (так, поставщик может получить ощутимый выигрыш в прибыли, особенно если при внедрении ТИМС произойдет существенное повышение межремонтной наработки (сценарии +50%, +100%). Синей штриховкой выделен диапазон при сохранении прибыли поставщика: тогда затраты авиакомпании удастся снизить до 45% при максимальном увеличении межремонтной наработки.

Необходимо также провести параметризацию в зависимости от предполагаемых затрат FC . Рассмотрим значения $FC = 2$ млрд, 4 млрд, 6 млрд руб. На рис. 10 представлены значения ставки эксплуатации C_{exp} для различных сценариев внедрения ТИМС при различной стоимости их разработки и внедрения.

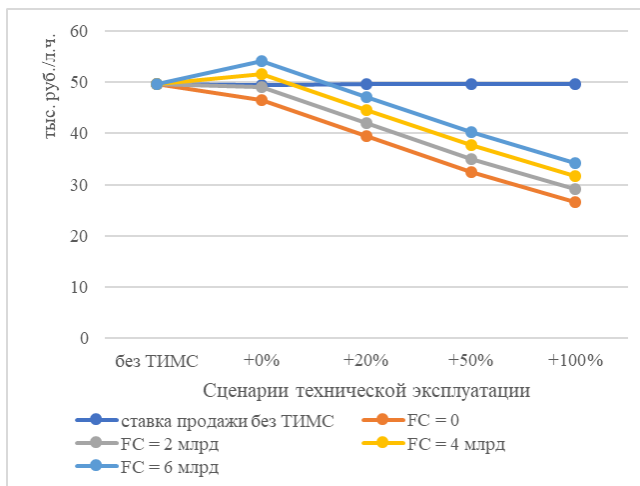


Рис. 10. Диапазоны изменения ставки эксплуатации при различной стоимости разработки и внедрения ТИМС (контракт на 20 лет)

Максимальная ставка эксплуатации для исходного сценария без ТИМС обозначена синей линией. Те случаи, когда став-

ка выше, свидетельствуют о нецелесообразности внедрения ТИМС, так как затраты на их разработку и внедрение не приносят экономической выгоды эксплуатантам (если не происходит увеличения межремонтной наработки, сценарий +0%). В сценариях с увеличением межремонтной наработки на 20% и выше внедрение ТИМС становится выгодным при всех рассмотренных значениях FC .

Со стороны поставщика ситуация аналогична: если рассматривать фиксированные максимальные затраты эксплуатантов по сравнению со сценарием без ТИМС, то для оценки максимальной ожидаемой средней прибыли из текущей минимальной выгоды поставщика еще следует вычесть стоимость разработки ТИМС (см. формулу (17), рис. 11):

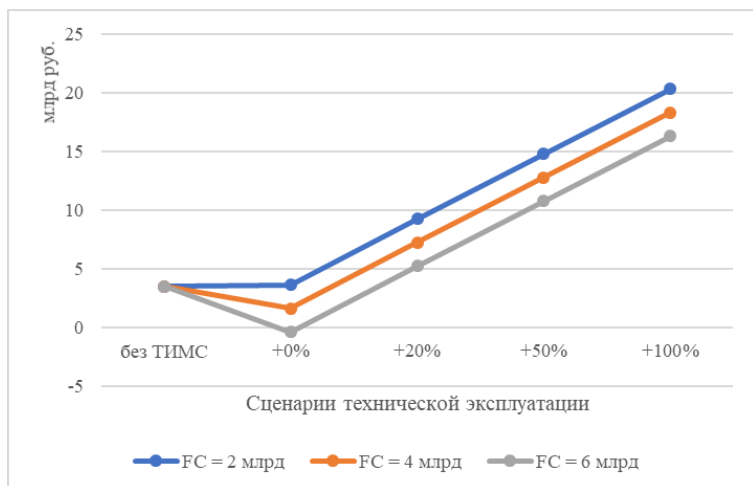


Рис. 11. Изменение максимальной прибыли поставщика с учётом стоимости разработки и внедрения ТИМС (контракт на 20 лет)

График изменения возможной прибыли поставщика свидетельствует о том, что разработка и внедрение технологий для сценария +0% невыгодна, так как не даёт положительного эко-

номического эффекта, однако для остальных сценариев может давать кратный выигрыш в прибыли поставщика.

С учетом различных значений FC диапазон взаимовыгодных цен несколько меняет свой вид: на рис. 12 приведен пример для $FC = 6$ млрд руб. в соответствии с формулами (20) и (21):

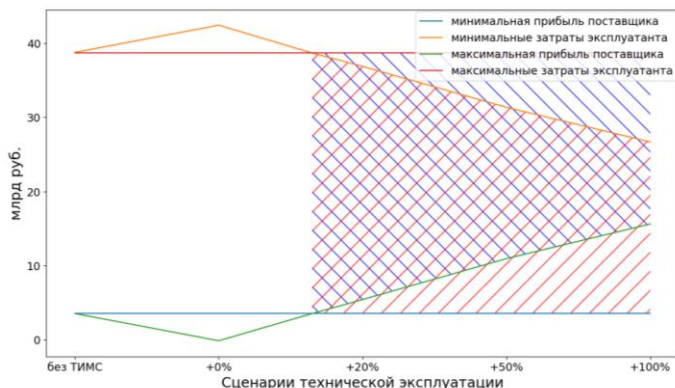


Рис. 12. Диапазоны изменения прибыли завода и затрат авиакомпаний (контракт на 20 лет)

Таким образом, показана возможность «ценового» урегулирования интересов организаций, лежащего в основе первого из рассматриваемых организационных механизмов. Для оценки эффекта объединения эксплуатантов в единый «пул» сравним значения минимально возможных ставок эксплуатации при сохранении исходной прибыли поставщика для изолированных регионов и для случая их совместного обслуживания поставщиком. Рассчитанные ставки приведены в таблице 6.

В результате расчётов получено, что объединение отдельных регионов в «пул» практически не даёт никакого выигрыша по ставке, если считать, что у каждого эксплуатанта одинаково изменилась межремонтная наработка. Однако на практике мы можем столкнуться с тем, что в силу различных условий эксплуатации у авиакомпаний будет происходить различное увеличение средней межремонтной наработки при внедрении ТИМС.

Таблица 6. Значения ставок эксплуатации для изолированных регионов и регионов, объединённых в единый «пул» (контракт на 20 лет)

Сценарий	«Пул» (3 региона вместе)	Изолированно регион 1	Изолированно регион 2	Изолированно регион 3
Без ТИМС	49 594	49 587	49 587	49 607
+0%	46 485	46 442	46 442	46 549
+20%	39 502	39 500	39 500	39 537
+50%	32 510	32 520	32 520	32 548
+100%	26 571	26 560	26 560	26 598

Пусть один из регионов эксплуатирует авиапарк в неблагоприятных условиях (регион 2), а у остальных произойдет увеличение межремонтной наработки +20%, +50% или +100% (см. таблицу 7). Примем $FC = 2$ млрд руб. Рассмотрим сценарии смешанного изменения межремонтной наработки в соответствии со следующей таблицей:

Таблица 7. Сценарии изменения межремонтной наработки при внедрении ТИМС

Сценарии:	Сц. 1	Сц. 2	Сц. 3
регион 1, 11 ВС	+20%	+50%	+100%
регион 2, 11 ВС	+0%	+0%	+0%
регион 3, 24 ВС	+20%	+50%	+100%

Сравним значения ставок эксплуатации при объединении в единый «пул» эксплуатантов с различной средней межремонтной наработкой (см. рис. 13).

Поскольку регион 2 эксплуатировался в неблагоприятных условиях, единая ставка для всего «пула» эксплуатантов оказывается ниже исходной ставки изолированного региона 2, таким образом, такой авиакомпании выгодно вступление в общий «пул». Что касается остальных эксплуатантов, для которых происходит существенное увеличение межремонтной наработки, для них единая ставка в «пуле» оказывается либо выше исходной (на 3.5% – Сц.1), либо чуть ниже исходной (–1% для Сц.2

и –3,5% Сц.3). Таким образом, авиакомпании, эксплуатирующие ВС в благоприятных условиях, не испытывают существенных выгод от вступления в общий «пул» с другими авиакомпаниями при заключении контракта на долгосрочный период.

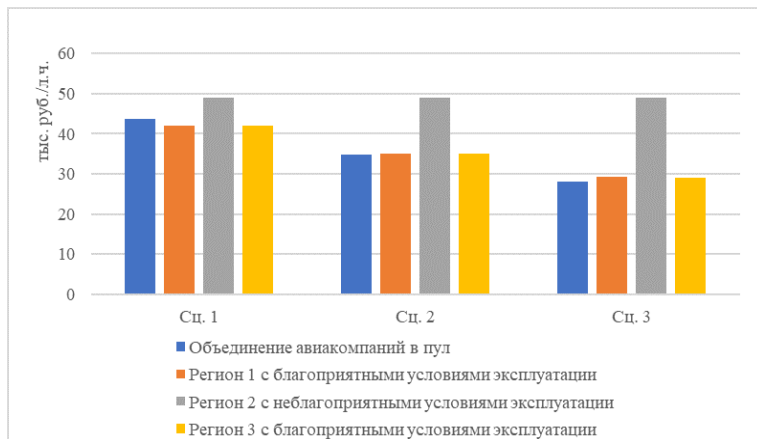


Рис. 13. Ставка эксплуатации (контракт на 20 лет)

4.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКСПЛУАТАЦИИ АВИАПАРКА НА СРЕДНЕСРОЧНОМ ПЕРИОДЕ

При рассмотрении среднесрочного периода считалось, что все формы ТОиР вследствие внедрения ТИМС производятся по фактическому состоянию. Рассмотрим вариант заключения договора между эксплуатантом и поставщиком на среднесрочный период ($T = 5$ лет). Покажем, что в таких условиях будет эффективен второй из рассматриваемых организационных механизмов внедрения ТИМС, а именно, заключение контракта о продаже лётного часа.

В отличие от долгосрочного периода (где выполнение тяжелых форм ТОиР оставалось привязано к единым межремонтным наработкам) на среднесрочном периоде коэффициент вариации величины затрат на ТОиР достигал 15%. Такое существенное отличие затрат на ТОиР от реализации к реализации обусловлено существенным отличием числа тяжелых форм ТОиР, выполненных за время среднесрочного контракта. В силу зна-

чительности разброса величины затрат на ТОиР тяжелых форм, её нельзя считать с помощью амортизации, как это было на долгосрочном периоде, следует вычислять фактические затраты на все формы ТОиР. В данной ситуации поставщик заинтересован в заключении с авиакомпаниями контракта типа РВН.

Определим размер страховой премии (брутто-премии, в дальнейшем обозначается БП). Страховая премия складывается из нетто-премии (в дальнейшем обозначается НП, представляет собой страховые резервы) и нагрузки (в дальнейшем обозначается Н, включает в себя расходы на ведение дела и премию для страховой компании):

$$(22) \text{ БП} = \text{НП} + \text{Н} = \text{НП} + \text{НП} \cdot f.$$

Пусть нагрузка вычисляется как доля от нетто-премии (в нашем случае в расчёты заложено $f = 0,1$). В свою очередь, нетто-премия складывается из рисковой премии (равной математическому ожиданию убытка вследствие наступления страхового случая) и рисковой надбавки (премия за риск):

$$(23) \text{ НП} = P_{\text{Пр}} + P_{\text{Надб}}.$$

Для оценки рисковой надбавки используем параметр 3σ , покрывающий основную долю риска наступления страхового случая (σ – среднеквадратическое отклонение фактических затрат на ТОиР от ожидаемых за период действия контракта) [16]. Таким образом:

$$(24) \text{ БП} = \text{НП} + \text{Н} = (P_{\text{Пр}} + P_{\text{Надб}})(1 + f).$$

Тогда суммарные затраты поставщика составляют

$$(25) \text{ COST}'_{\text{РВН}} = (C'_{\text{Л}} + C'_{\text{Т}} + FC + 3\sigma)(1 + f).$$

В таком случае минимальные затраты эксплуатанта при сохранении прежнего уровня прибыли поставщика составят

$$(26) \text{ EXP}'_{\text{РВН}} = \text{COST}'_{\text{РВН}} + R_{\text{ПОСТ}}.$$

Для определения ставки эксплуатации необходимо отнести суммарные затраты эксплуатанта к суммарному налёту:

$$(27) C_{\text{expРВН}} = \left(\frac{\text{EXP}'_{\text{РВН}}}{\eta} \right),$$

$$(28) C_{\text{exp}_{\text{РВН}}} = \left(\frac{(C'_\text{Л} + C'_\text{Т} + FC + 3\sigma)(1 + f) + R_{\text{ПОСТ}}}{\eta} \right).$$

Производителю выгоднее обслуживать как можно больше авиакомпаний, так как за счет эффекта масштаба риски снизятся и распределение вероятностей отказов будет более равномерным.

В соответствии формулой (28) ставка эксплуатации будет варьироваться в зависимости от величины FC от 40 до 120 тыс. руб. (см. рис. 14):

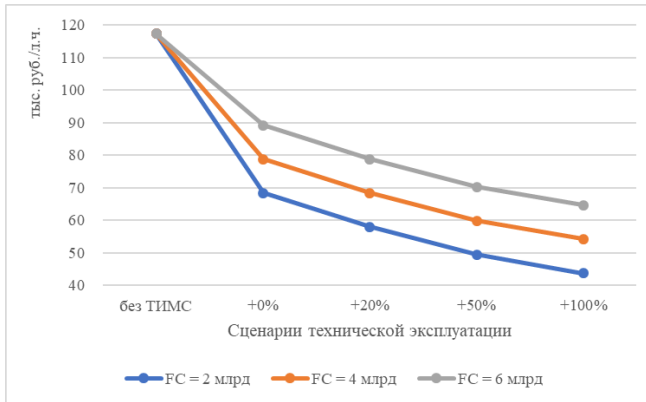


Рис. 14. Изменение ставки эксплуатации при внедрении ТИМС на примере региона 1 (контракт на 5 лет)

На рис. 15 представлено сравнение ставок эксплуатации для среднесрочного контракта с учетом рисковой надбавки (3σ) и без нее. При внедрении ТИМС рисковая надбавка составляет от 19% до 26% величины ставки эксплуатации.

Произведем сравнение полученных ставок эксплуатации для нескольких регионов для смешанного случая увеличения наработки (или его отсутствия) при внедрении ТИМС (см. таблицу 7). Полученные ставки приведены на рис. 16.

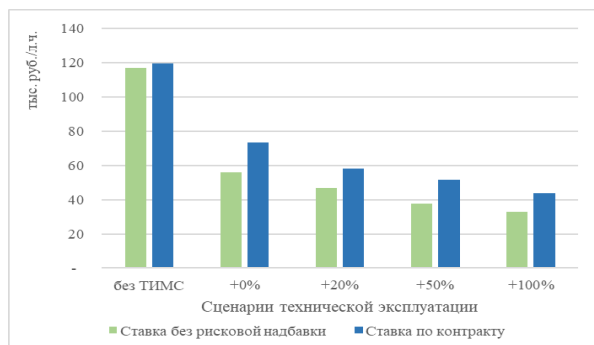


Рис. 15. Влияние рискованной надбавки на величину ставки эксплуатации, $FC = 0$ млрд руб.

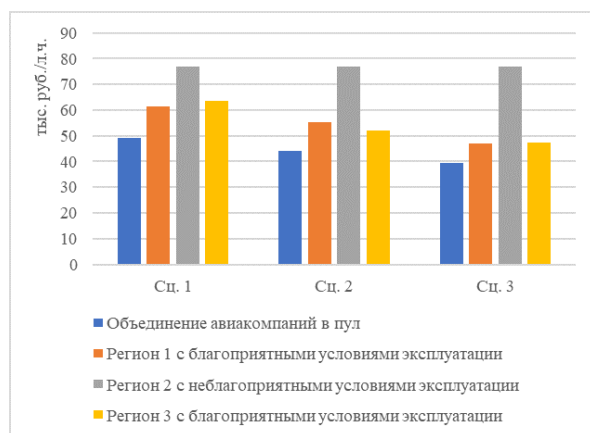


Рис. 16. Сравнение величины ставки эксплуатации при объединении различных авиакомпаний в «пул» ($FC = 2$ млрд руб.)

Распределение ставок при различных сценариях свидетельствует о том, что даже для авиакомпаний, эксплуатирующих ВС в благоприятных условиях (большое увеличение межремонтной наработки при внедрении ТИМС), выгодно объединение в «пул» и обслуживание по единой ставке при среднесрочном контракте (5 лет).

Получены аналогичные распределения для случаев $FC = 4$ млрд руб. (см. рис. 17) и $FC = 6$ млрд руб. (см. рис. 18).

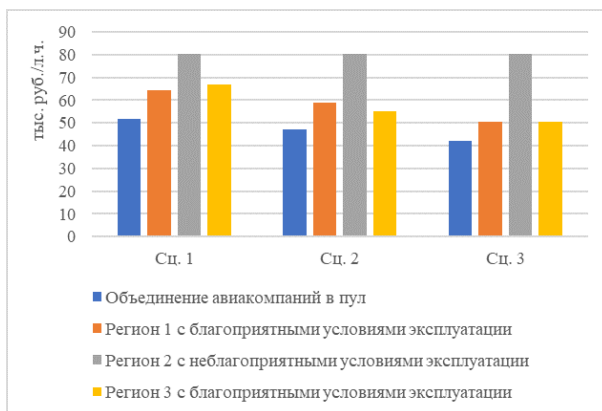


Рис. 17. Сравнение величины ставки эксплуатации при объединении различных авиакомпаний в «пул» ($FC = 4$ млрд руб.)

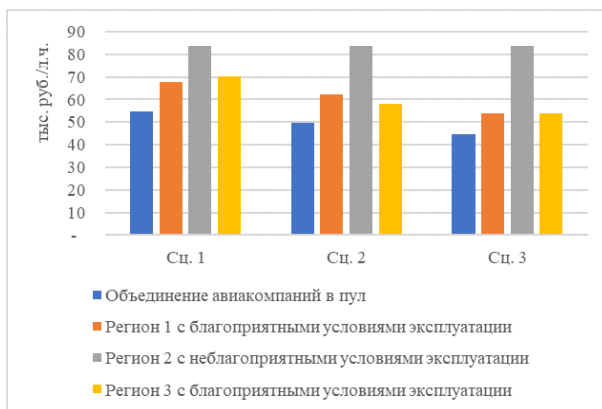


Рис. 18. Сравнение величины ставки эксплуатации при объединении различных авиакомпаний в «пул» ($FC = 6$ млрд руб.)

Если сравнить единые ставки для «пула», полученные в случае долгосрочного и среднесрочного контрактов (см. таблицу 8), то можно увидеть, что на среднесрочном периоде став-

ки выше, что в первую очередь обусловлено наличием надбавки за риск:

Таблица 8. Ставки эксплуатации при различных периодах T

	Сц.1	Сц.2	Сц.3
Контракт на 20 лет	43 608	34 797	28 185
Контракт на 5 лет	52 523	44 044	36 068

5. Заключение

На примере имитационного моделирования эксплуатации парка ВС показана эффективность рассматриваемых организационных механизмов внедрения ТИМС. Показано, что применение ТИМС позволяет эксплуатанту реже производить работы по ТОиР по сравнению с установленными Программой ТО наработками и, как следствие, уменьшить число требуемых запасных ВС для поддержания необходимого уровня готовности авиапарка. Благодаря этому удастся снизить издержки эксплуатанта на ТОиР, а также лизинговые затраты. При увеличении межремонтной наработки на 100% возможно максимальное снижение затрат на ТОиР и лизинг на 56% и 45% соответственно.

При расчете ожидаемых затрат на ТОиР при долгосрочном контракте необходимо производить амортизацию тяжелых форм ТОиР в течение срока эксплуатации. Определены диапазоны взаимовыгодных цен, при которых после введения ТИМС не убывает прибыль поставщика и не возрастают затраты эксплуатанта. Рассмотрены условия, при которых разработка и внедрение ТИМС не были бы экономически выгодны сторонам (лишь при отсутствии увеличения межремонтной наработки).

При долгосрочном контракте (20 лет) объединение различных эксплуатантов в «пул» позволяет предложить всем эксплуатантам единую ставку эксплуатации на уровне ставки для регионов с благоприятными условиями эксплуатации или немного ниже.

При среднесрочном контракте (5 лет) переход на фиксированную ставку оплаты ТОиР за лётный час может способствовать снижению рисков эксплуатантов и поставщика. При объединении в «пул» авиакомпаний, эксплуатирующих авиапарк как в благоприятных, так и в неблагоприятных условиях, формируется единая ставка эксплуатации ниже, чем таковая для изолированных регионов.

Литература

1. ДАЛЕЦКИЙ С.В, ДЕРКАЧ О.Я., ПЕТРОВ А.Н. *Эффективность технической эксплуатации самолетов гражданской авиации*. – М.: Воздушный транспорт, 2002.
2. КАСАТКИН А.А. *Методы моделирования и оптимизации уровня автономности технического обслуживания и ремонта парка авиационной техники гражданского назначения* // Управление большими системами. – 2023. – Вып. 104. – С. 5–35
3. КИРПИЧЕВ И.Г., КУЛЕШОВ А.А., ШАПКИН В.С. *Основы стратегии формирования конкурентных преимуществ российской авиационной техники на современном этапе* – М: Воздушный транспорт, 2007. – 334 с.
4. КЛОЧКОВ В.В. *Оптимизация экономических условий договора о техническом обслуживании и ремонте авиадвигателей* // Авиакосмическая техника и технология. – 2004. – №1. – С. 64–70.
5. КУЛЕШОВ А.А., ФИЛИМОНОВ А.В., ШАПКИН В.С. *Вопросы использования данных мониторинга технического состояния авиационного двигателя в системе управления безопасностью полетов разработчика* // ТВФ. – 2023. – №1. – С. 36–41.
6. ПИСАРЕНКО В.Н. *Техническое обслуживание воздушных судов как система поддержания летной годности гражданской авиационной техники*. – Самара: Изд-во СамНЦ РАН, 2017 – 170 с.

7. РИХТЕР К., ВАЛЬТЕР Й. (ред) *Интеграция поставщиков и глобализация решений в гражданском авиастроении. Сборник статей.* – СПб.: Питер, 2021 – 352 с.
8. САРКИСЯН С.А., СТАРИК Д.Э. *Экономика авиационной промышленности* – М.: Высшая школа, 1985 – 320 с.
9. СЕРЬЁЗНОВ А.Н., КУЗНЕЦОВ А.Б., ЛУКЬЯНОВ А.В. и др. *Применение оптоволоконных технологий при создании встроенных систем самодиагностики авиационных конструкций* // Научный вестник НГТУ. – 2016. – Т. 64, №3. – С. 95–105.
10. ТЮРИН Ю.А. *Некоторые вопросы состояния эксплуатации и разработки авиадвигателей в России* // Авиатранспортное обозрение. – 1999. – №9. – С. 50–58.
11. ЧЕТЫРКИН Е.М. *Финансовая математика* – М.: Дело, 2002 – 400с.
12. AZEVEDO D., CARDOSO A., RIBEIRO B. *Estimation of health indicators using advanced analytics for prediction of aircraft systems remaining useful lifetime* // PHM Society European Conference. – 2020. – Vol. 5, No. 1. – P. 10.
13. FIGUEIREDO-PINTO D.G., ABRAHÃO F., FAN I.S. *An Operational Availability Optimization Model Based on the Integration of Predictive and Scheduled Maintenance* // Proc. of the 6th European Conf. of the Prognostics and Health Management Society, 2021.
14. KHORASANI K, KORDESTANI M. *An Overview of the State-of-the-Art in Aircraft Prognostic and Health Management Strategies* // IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, 2023.
15. LEAO B.P., FITZGIBBON K.T., PUTTINI L.C. et al. *Cost-benefit analysis methodology for PHM applied to legacy commercial aircraft* // IEEE Aerospace Conference, 2008. – P. 1–13.
16. LEITE J.D. *Engine Contract Comparisons* // Engine Yearbook. – 2003. – P. 26–31.
17. MEISSNER R., MEYER H., WICKE K. *Concept and economic evaluation of prescriptive maintenance strategies for an automated condition monitoring system* // Int. Journal of Prognostics and Health Management. – 2021. – Vol. 12(3).

18. MOGHADDASS R., ZUO M. J. *An integrated framework for online diagnostic and prognostic health monitoring using a multistate deterioration process* // Reliability Engineering & System Safety. – 2014. – Vol. 124. – P. 92–104.
19. RAHN A. *Developing prescriptive maintenance strategies in the aviation industry based on a discrete-event simulation framework for post-prognostics decision making* // Reliability Engineering & System Safety. – 2021.
20. SCHILLING T., GOLLNICK V. *System Analysis of Prognostics and Health Management Systems for Future Transport Aircraft* // 28th Congress of the Int. Council of the Aeronautical Sciences, 23–28 September 2012, Brisbane, Australia.
21. TSEREMOGLOU I., SANTOS B.F. *Condition-based maintenance scheduling of an aircraft fleet under partial observability: A deep reinforcement learning approach* // Reliability Engineering & System Safety, 2024. – Vol. 241. – P. 109582.
22. VERHAGEN W.J.C., SANTOS B.F., FREEMAN F. et al. *Condition-Based Maintenance in Aviation: Challenges and Opportunities* // Aerospace. – 2023. – Vol. 10. – P. 762.
23. WILLIS C. *Engine Leasing and Maintenance* // Engine Yearbook. – 2003.

MATHEMATICAL MODELS OF ORGANIZATIONAL MECHANISMS FOR IMPLEMENTING TECHNOLOGIES FOR INDIVIDUAL MONITORING OF THE CONDITION OF AVIATION EQUIPMENT PRODUCTS

Andrey Kasatkin, National Research Center «Zhukovsky Institute», Zhukovsky (kasatkinaa@nrczh.ru).

Valeria Rakhmanina, National Research Center «Zhukovsky Institute», Zhukovsky (rakhmaninave@nrczh.ru).

Abstract: The paper considers the coordination of economic interests of the participants in the maintenance and repair of aircraft and their systems, when changing the approach to their technical operation, due to the application of technologies for individual monitoring of the condition of aircraft objects. The introduction of such technologies is expected to increase the durability of aircraft products and extend their actual lifetime. From the economic point of view, this may cause a decrease in the profit of developers and manufacturers of aircraft products, as well as organiza-

tions engaged in their maintenance and repair. The paper considers the economic mechanisms of implementation of these technologies, allowing to ensure their attractiveness both for the above organizations and for the operators. Thus, mutually beneficial price ranges for modified products are determined, and a method of their realization together with maintenance and repair works in the format of selling aircraft operation at a fixed rate per flight hour is proposed. Simulation modeling of scheduled flights in several regions together with aircraft maintenance and repair is carried out. A comparison of the costs of flight fulfillment at different effects from the introduction of such technologies in ensuring the quality-of-service provision has been made. The paper shows that when several operators are combined into a pool in order to determine a single sales rate for all operators, it is possible to offer a single sales rate lower than when operators are serviced separately.

Keywords: individual monitoring of condition, coordination of economic interests, uniform sales rate.

УДК 051.7 + 629.7

ББК 39.585

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии В.В. Ключковым.*

*Поступила в редакцию 10.06.2024.
Опубликована 31.07.2025.*

ПОДХОДЫ К ПЛАНИРОВАНИЮ СКОРОСТИ ДЛЯ НАЗЕМНЫХ БЕСПИЛОТНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

Лившиц А. Б.¹, Темкин И. О.², Фадеев А. Ю.³
(НИТУ МИСИС, Москва)

Статья представляет обзор методов планирования профиля скорости для наземных беспилотных транспортных средств. Технология автономного вождения находится в фазе активной разработки, и многие задачи уже решены, но с недостаточным для безопасной эксплуатации и масштабирования технологии качеством. Таким образом, эта область является перспективной с научной и инженерной точек зрения. В работе подробно разбираются постановки задачи, описываются различные виды ограничений к итоговому решению, а также рассматривается построение целевой функции в зависимости от требований и используемых методов. Особое внимание уделено ST-графу как инструменту моделирования взаимодействия с другими участниками движения. Также детально анализируются практические сценарии взаимодействия агентов в различных ситуациях, часто возникающих в дорожном потоке. Авторы концентрируют внимание на классе методов построения профиля скорости по известной геометрической траектории. В частности, рассматривается два семейства подходов: динамическое программирование и сведение непрерывной задачи к задаче квадратичного программирования. Подробно разбираются существующие современные методы, основанные на этих подходах, а также предлагаются улучшения и доработки в контексте различных дополнительных требований к решению. Статья служит методической основой для разработчиков систем автономного вождения.

Ключевые слова: беспилотные транспортные системы, профиль скорости, динамическое программирование, непрерывная оптимизация, ST-граф.

1. Введение

Беспилотные транспортные средства в последние годы активно развиваются и все больше используются в различных сферах. Одной из наиболее интересных и сложных областей применения беспилотного транспорта является осуществление

¹ Ася Борисовна Лившиц, бакалавр, выпускник (asyalivshits@yandex.ru).

² Игорь Олегович Темкин, д.т.н., профессор (temkin.io@misis.ru).

³ Александр Юрьевич Фадеев, аспирант (frogcatcher@mail.ru).

автономного движения пассажирского (и некоторых типов грузового) транспорта по городским улицам и магистралям, а также по междугородним трассам. Несмотря на то, что на рынке уже появились некоторые разработки, например, Waymo (США) [6], Baidu (Китай), а среди российских компаний активность в области разработки экспериментальных образцов проявляют Яндекс, Камаз, Cognitive Pilot, StarLine, в данный момент речи о широком внедрении этих технологий не идет.

Следует отметить, что ответы на ряд принципиальных вопросов, связанных с возможностью применения автономных автомобилей на дорогах общего назначения, сегодня уже получены. Однако остается ряд задач, без решения которых масштабирование данных технологий невозможно. Одной из таких задач является планирование скорости (Speed planning).

Далее в статье будет подробно описана постановка задачи построения профиля скорости, проанализированы некоторые подходы к решению этой оптимизационной задачи и проведено обсуждение достоинств этих подходов и возникающих при их использовании проблем, а также, будут предложены некоторые возможные решения, которые иллюстрируются конкретными примерами.

2. Постановка задачи планирования профиля скорости

Существует два подхода к решению задачи планирования скорости: методы, одновременно выполняющие вычисление геометрии пути и планирование скорости [3], и методы, которые это делают раздельно – сначала геометрическая траектория [8, 17, 20], затем скорость по уже готовой геометрии [9, 11, 14].

В данной статье рассматриваются методы, занимающиеся исключительно планированием профиля скорости при построенной потенциальной траектории движения.

Рассмотрим движение наземного беспилотного транспортного средства (далее – БТС) вдоль полностью рассчитанной геометрической непрерывной траектории в двумерном евклидо-

вом пространстве, тогда эту кривую можно задать как непрерывные дифференцируемые $x(d)$ и $y(d)$ для параметра $d \in [0, D]$.

Определим $s(d)$ как расстояние вдоль кривой, пройденное от начала до точки $(x(d), y(d))$, т.е.

$$(1) \quad s(d) = \int_0^d \sqrt{(x'(l))^2 + (y'(l))^2} \, dl.$$

Также пусть имеется предсказание траекторий других агентов и препятствий, полученное одним из алгоритмов Motion Prediction [10, 13, 22]. Они даны в следующей форме: для каждой точки на кривой $p(d) = (x(d), y(d))$ и каждого момента времени $t \in [0, T]$ есть информация, будет ли данная точка занята другим агентом/препятствием. Иными словами, произойдет ли коллизия, если БТС окажется через время t в точке $p(d)$.

Пусть в каждой точке $s_k = s(t_k)$ задан радиус кривизны $R_k = R(s_k)$.

Задача состоит в генерации оптимальной (с точки зрения целевой функции, заданной в зависимости от типа транспортного средства, погодных условий, решаемой данным БТС задачи и пр.) функции $s(t)$ – зависимости пройденного расстояния от времени, удовлетворяющей ограничениям. Все остальные параметры – скорость, ускорение в момент времени t – можно получить из функции $s(t)$.

Очевидно, что при планировании скорости движения автономного транспортного средства в потоке требуется учитывать как физические возможности автомобиля [15], так и окружающую обстановку [18], а также не забыть комфорт пассажиров [5, 7, 12]. Для этого требуется ввести ограничения на определенные характеристики системы, затем сформулировав их в рамках поставленной задачи, что подробно изложено в пунктах 2.1–2.2.

В рамках заданных ограничений возможно множество (возможно, бесконечное) потенциальных решений задачи планирования скорости. Среди них нужно выбрать лучшее по метрике, которая может формироваться из следующих компонент:

1. Минимизация времени прохождения траектории – оптимальное распределение скоростей для максимально быстрого преодоления заданного маршрута.

2. Обеспечение комфорта пассажира – учет ограничений на боковые, продольные ускорения и рывки, для минимизации неприятных ощущений у пассажиров.

3. Безопасность при взаимодействии с другими агентами – адаптация скорости в зависимости от положения и действий окружающих объектов (других транспортных средств, пешеходов) для предотвращения возможных столкновений и аварийных ситуаций.

Для получения искомого требуется сначала выбрать метод, с помощью которого будет оптимизировано решение в соответствии с обозначенными целями.

Рассмотрим два крупных подхода для решения задачи: на основе поисковых алгоритмов [4, 19, 21] и на основе непрерывной оптимизации [9, 11, 16, 21]. Подробно целевые функции для каждого из методов описаны в пунктах 2.3–2.4.

2.1. ОГРАНИЧЕНИЯ НА СКОРОСТЬ И ЕЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Для корректного описания движения будем использовать модель Friction Circle [15], изображенную на рис. 1. Ускорение и рывок (jerk) будем рассматривать в двух аспектах: a_{long} – продольной компоненты ускорения, направленной вдоль кривой пути в точке, и a_{lat} – поперечной компоненты, которая направлена перпендикулярно траектории в данной точке. Соответственно, полное ускорение равно

$$(2) \quad a = \sqrt{a_{2,long}^2 + a_{2,lat}^2}.$$

По тем же соображениям для рывка продольная компонента – j_{long} , поперечная – j_{lat} , а полный рывок равен

$$(3) \quad j = \sqrt{j_{2,long}^2 + j_{2,lat}^2}.$$

Если величина ускорения или рывка выходит за границы предельно допустимых параметров, то такое движение становится потенциально опасным из-за риска заноса транспортного средства. Изменение параметров для ускорения и торможения отражается на «Friction Circle», который приобретает вид двух полуэллипсов – верхнего и нижнего.

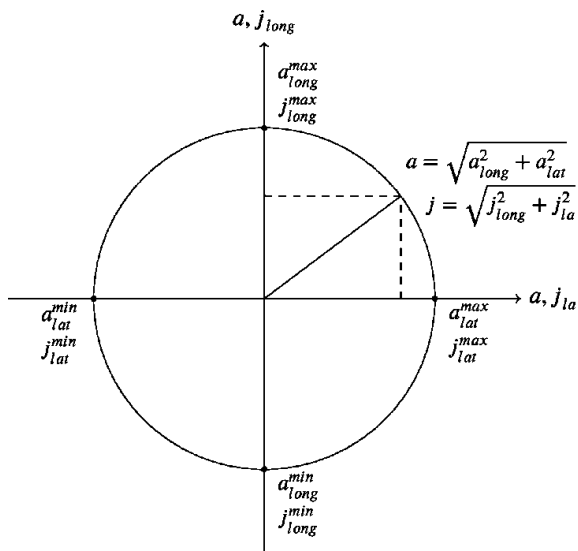


Рис. 1. Модель Friction Circle

Поскольку такие ограничения тяжело включить в модель, зачастую используют упрощенную модель «Friction Box», в которой ограничения аппроксимируются прямоугольником (рис. 2). Эти ограничения иногда называют «box constraints».

Далее перечислены часто встречающиеся виды ограничений:

1. Ограничения на скорость.

Мы рассматриваем движение вдоль кривой пути, т.е. скорость принимает вид функции $v(s)$.

Говоря о движении в городе, стоит упомянуть, что ландшафт, основные препятствия и особенности дороги и окружения известны заранее. К примерам таких особенностей окружения относятся:

- ограничения максимальной скорости на дороге, регулируемое ПДД;
- знаки ПДД («лежачий полицейский», другие дорожные знаки);
- пешеходные переходы;

- «вафельная» разметка на перекрестках, запрещающая остановку на ней;
- финишная точка пути, требующая остановиться.

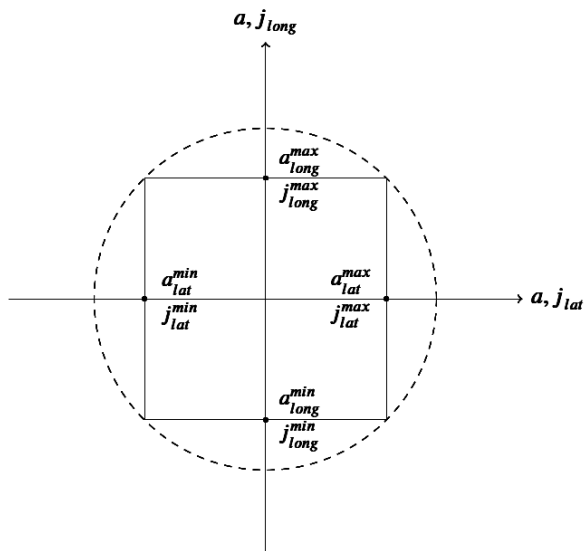


Рис. 2. Ограничения box constraints, получившиеся из Friction Circle

Такие особенности местности могут накладывать ограничения на скорость, отсюда

$$(4) \quad v(s_k) \leq v_k^{\max}$$

либо

$$(5) \quad v(s_k) \geq v_k^{\min},$$

где k – определенная точка пути с данным ограничением.

На рис. 3 показан пример возможных ограничений на скорость. На отрезке $[s_1, s_2]$ – крутой поворот, на котором во избежание заноса (из-за большого бокового ускорения) требуется снизить скорость. На отрезке $[s_3, s_4]$ требуется снизить скорость ниже максимальной из-за пешеходного перехода. Поскольку

остановка на нем запрещена, также водится ограничение на минимальную скорость.

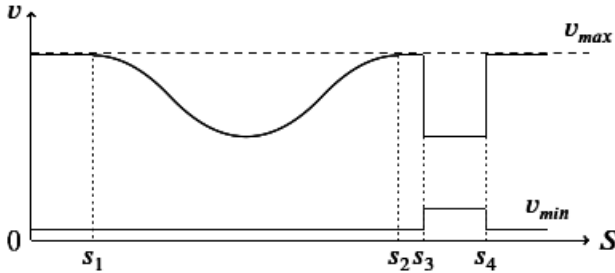


Рис. 3. Зависимость ограничений на скорость от пройденного расстояния вдоль кривой пути

2. Ограничения на продольное ускорение.

Такие ограничения требуется вводить в силу следующих факторов:

- сцепление с дорогой: сила, действующая на автомобиль, не должна превышать силу трения шин об дорогу, чтобы не произошло заноса;
- погодные условия (дождь, снег, наледь и пр.);
- комфорт пассажиров.

Эти ограничения по модели Friction Box выглядят так (рис. 2):

$$(6) \quad \forall t: a_{min} \leq a_{long}(t) \leq a_{max}.$$

3. Ограничения на боковое (поперечное) ускорение.

Ограничение бокового ускорения помогает поддерживать устойчивость транспортного средства во время поворотов и маневров. Если на транспортное средство действуют слишком большие боковые ускорения, то это может привести к потере сцепления шин с дорогой, что увеличивает риск заноса или опрокидывания.

Боковые ускорения могут вызывать дискомфорт у пассажиров и даже привести к травмам при резких маневрах транспортного средства. Например, если автомобиль резко поворачивает на высокой скорости, пассажиры могут испытывать значитель-

ные силы, которые могут их сместить с сидений или даже выбросить из машины.

Ограничение на поперечное ускорение можно описать формулой

$$(7) \quad a_{lat}^{max} \leq \frac{v^2(t)}{R(s(d))}.$$

Ограничения описываются в виде нелинейной функции на $v(s)$, пример показан на отрезке $[s_1, s_2]$ (рис. 3).

4. Ограничение на продольный и поперечный рывки (jerk).

Ограничение на рывок нужно для комфорта пассажира, так как слишком быстрое изменение ускорения может привести к плохому самочувствию, а также необходимо из-за физических ограничений автомобиля. Ограничение на продольный рывок, по Friction Box, имеет вид (рис. 2)

$$(8) \quad j_{min} = j_{long}(s) = j_{max}.$$

Ограничение на поперечный рывок – это фактически ограничение на изменение поперечного ускорения:

$$(9) \quad j_{lat}(s) = (a_{lat}(s))'_t.$$

Поэтому его можно включить в ограничение на продольное ускорение (рис. 4).

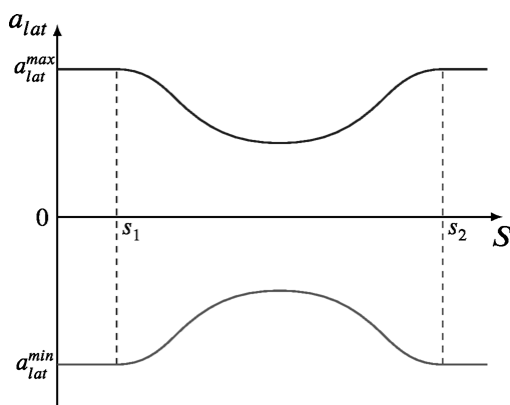


Рис. 4. Ограничения на боковое ускорение на повороте. Для того чтобы держать боковой рывок низким, максимальные значения на самом повороте (отрезок $s_1 - s_2$) требуется снизить

2.2. ОГРАНИЧЕНИЯ ОТ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ПРЕПЯТСТВИЙ

Другие объекты дорожной сцены могут создавать потенциально аварийные ситуации, во избежание которых требуется корректно обработать их виды и сформулировать в виде ограничений на профиль скорости. В отличие от ограничений предыдущего вида, где требовалось соблюдать скоростной режим и пр., данные ограничения концентрируются на взаимодействиях с другими объектами – препятствиями, автомобилями, пешеходами и пр.

Для проработки ограничений, связанных с препятствиями, удобно использовать ST-граф [9, 11].

ST-граф (Spatio-Temporal Graph) – это модель для представления движения и взаимодействия с другими агентами (автомобилями, пешеходами, стационарными препятствиями) в пространстве и времени. Обычно изображается как двумерный график, ось X которого представляет прошедшее от текущего момента время, а ось Y – пройденное расстояние вдоль зафиксированного геометрического пути.

1. Статические ограничения

Примерами статических препятствий могут служить:

- бочка, находящаяся на пути движения, куча песка или другой массивный неподвижный объект;
- неподвижно стоящий автомобиль на пути движения (причиной ситуации может стать авария, авария, стоячая пробка и пр.).

Данные объекты находились все время от начала движения БТС в неподвижном состоянии и будут находиться в нем и далее (рис. 5).

2. Динамические ограничения

Подобная ситуация встречается в разных случаях:

- когда БТС следует за агентом;
- когда агент следует за БТС;
- когда БТС перестраивается в чужую полосу;
- когда другой автомобиль перестраивается в текущую полосу;
- при пересечении перекрестков и пр.

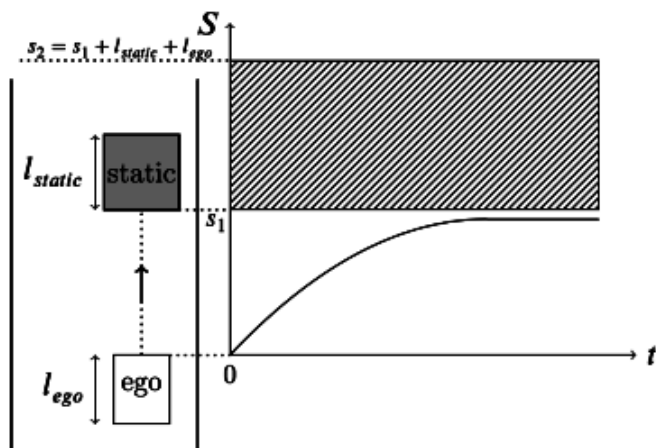


Рис. 5. Пример: закрашенной областью на ST-графе выделены такие точки, в которых статический объект находится в коллизии с БТС: по оси t – от 0 до ∞ , по оси S – от s_1 до s_2 . Профиль скорости пересекаться с этой областью не должен

Более подробный анализ ситуации, когда другой автомобиль встраивается в полосу беспилотного транспортного средства, приведен на рис. 6. Здесь известны момент времени и местоположение на кривой пути s_{coll} , когда он окажется в опасности столкновения. Возможны два решения для избежания аварии: $s_1(t)$ – снизить скорость, пропустив автомобиль вперед; $s_2(t)$ – увеличить скорость, обогнав автомобиль

3. «Мягкие ограничения».

Ограничения на ST-графе, которые рассматривались выше, образовывали на ST-графе регионы столкновений, отображенные на рис. 6. Если профиль скорости пересекает один из таких регионов, то он описывает столкновение БТС с агентом.

Для более детальной обработки ситуаций может помочь введение «мягких» ограничений. Например, соблюдение безопасной дистанции до другого агента является показательным примером, представленным на рис. 7.

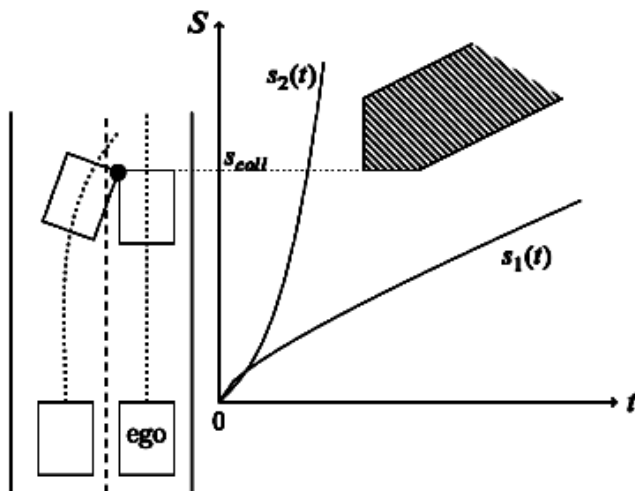


Рис. 6. Пример: другой агент (автомобиль) встраивается в полосу перед беспилотным автомобилем

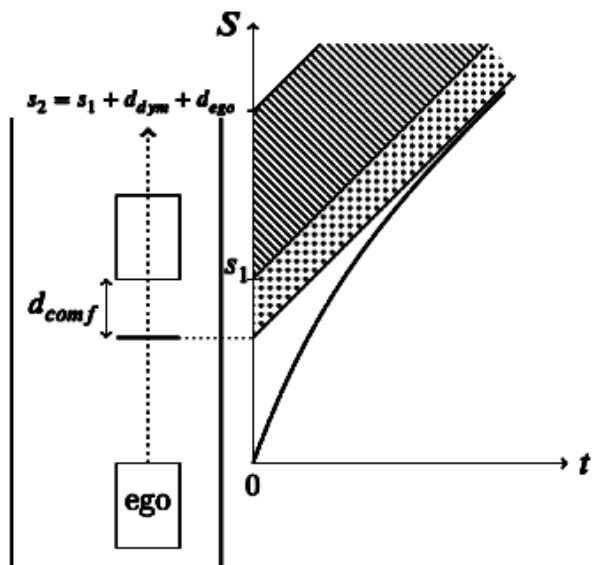


Рис. 7. Пример: соблюдение дистанции с едущим впереди агентом (автомобилем)

2.3. ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ ПОДХОДА DP

Будем рассматривать данный метод на примере пространства $S-V$. В этом пространстве отметим две оси: расстояние вдоль кривой S с возможными значениями $s \in [0, s_{max}]$ и ось V – возможная скорость движения со значениями в диапазон $v \in [0, v_{max}]$.

В рамках данного метода дискретизируем поисковое пространство. Выберем шаг дискретизации Δs , Δv по осям S и V соответственно. Все точки, принадлежащие отрезку $[0, \Delta s)$, относятся к точке s'_0 на оси S' в дискретизованном пространстве $S'-V'$, т.е. $[\Delta s \cdot i, \Delta s \cdot (i + 1)) \rightarrow s'_i, i \in \mathbb{N}$. Аналогичным образом поступим с осью V : $[\Delta v \cdot j, \Delta v \cdot (j + 1)) \rightarrow v'_j, j \in \mathbb{N}$.

На рис. 8:

- p_1 с координатами $(2,25 \cdot \Delta s, 8,25 \cdot \Delta v)$ в пространстве $S-V$ переходит в (s'_2, v'_8) в $S'-V'$;
- p_2 с координатами $(2,25 \cdot \Delta s, 8,75 \cdot \Delta v)$ в пространстве $S-V$ тоже переходит в (s'_2, v'_8) в $S'-V'$;
- p_3 с координатами $(5,5 \cdot \Delta s, 4,5 \cdot \Delta v)$ в пространстве $S-V$ переходит в (s'_5, v'_4) в $S'-V'$.

Таким образом, текущее состояние системы описывается парой (s'_i, v'_j) . Из состояния (s'_i, v'_j) можно сделать переходы в состояния (s'_{i+1}, v'_k) , $k \in \mathbb{N}$, где скорость может отличаться в зависимости от величины ускорения, с которой осуществляется переход. Эти переходы таковы, что они не должны нарушать ограничения по боковым (a_{lat}) и продольным (a_{long}) ускорениями.

На рис. 8 показаны допустимые переходы из клеток (s'_2, v'_3) и из (s'_8, v'_3) .

Следуя по различным комбинациям переходов между состояниями, может получиться множество профилей скорости. Из них следует выбрать тот, который наилучшим образом удовлетворяет требованиям к целевой функции. Для этого:

1. Введем функцию стоимости перехода, $C((s'_{i1}, v'_{j1}), (s'_{i2}, v'_{j2}))$. В зависимости от требований к целевой функции, она будет определяться по-разному: например, если требуется оп-

тимизировать время поездки, это может быть время прохождения из состояния (s'_{i1}, v'_{j1}) в состояние (s'_{i2}, v'_{j2}) .



Рис. 8. Пример построения решения методом DP и пример допустимых переходов между состояниями в дискретизованном S – V -пространстве

2. Введем метрику оценки полученного профиля скорости. Для примера выше это может быть сумма стоимостей всех переходов.

3. Для конкретного состояния (s'_i, v'_j) оптимальная стоимость профиля, заканчивающегося в этом состоянии, будет удовлетворять уравнению

$$(10) \quad dp(s'_i, v'_j) = \min_p (dp(s'_{i_p}, v'_{j_p}) + C((s'_{i_p}, v'_{j_p}), (s'_i, v'_j)))$$

$\forall p$, из которых есть переход в (s'_i, v'_j) .

2.4. ЦЕЛЕВАЯ ФУНКЦИЯ МЕТОДА QR

Метод квадратичного программирования (QP) – одна из классических задач оптимизации, и построение профиля скоро-

сти сводится к нему при некоторых допущениях. Чтобы произвести сведение, нужно:

1. Выбрать n переменных управления – вектор-столбец x размерности n .

2. Линеаризовать ограничения. В результате составляется матрица A размера $m \times n$, где m – количество ограничений, и m -мерный вектор-столбец b . Тогда решение x^* должно удовлетворять неравенству $Ax^* \leq b$.

3. Составить выпуклый квадратичный функционал. Составляется симметричная положительно полуопределенная матрица H размера $n \times n$ (гессиан) и градиент – вектор-столбец g размера n :

$$(11) \quad \frac{1}{2} x^T H x + g^T x.$$

Требуется минимизировать выражение, описанное в формуле (11), при ограничениях выше.

3. Обзор методов решения задачи планирования скорости

Сосредоточимся далее на описании методов на основе динамического программирования (DP) и квадратичной оптимизации (QP).

3.1. ПРИМЕР РЕАЛИЗАЦИИ DP

В работе [9] авторы описывают следующий метод сведения задачи к динамическому программированию:

Для начала строится *опорный* профиль скорости (Reference Speed Profile). Фактически это функция зависимости скорости от пройденного вдоль кривой расстояния $v(s)$. Для этого авторами вводятся несколько фильтров (называемых авторами «агентами»), каждый из которых накладывает ограничение:

- 1) на максимально осуществимую транспортным средством скорость;
- 2) связанное с соблюдением правил дорожного движения;
- 3) на скорость, связанное с боковыми ускорениями;
- 4) на скорость в зависимости от сигнала светофора.

Динамические препятствия (например, другие агенты) обрабатываются с помощью их проекции на ST-граф. Далее происходит дискретизация пространства расстояний S и времени T , по принципу, описанному в пункте 2.2.1. Узлы дискретизации формируют пространство вершин графа.

В получившемся пространственно-временном графе (Station-Time Graph, ST-graph) проводятся ребра между вершинами: $(s_1, t_1) \rightarrow (s_2, t_2)$; $s_1 \leq s_2$; t_2 является следующей точкой дискретизации T после t_1 . При этом нет строгого запрета на проведение ребер, проход по которым будет означать, что скорость транспортного средства нарушает все ограничения.

Такие параметры движения, как скорость, ускорение и рывок (jerk), хранятся в вершинах графа и определяются так:

- скорость v – как функция от s в текущей вершине и s в вершине-предке по ребру: $\frac{s_2 - s_1}{\delta t}$;
- ускорение a – как функция от v в текущей вершине и v в вершине-предке по ребру;
- рывок j – как функция от a в текущей вершине и a в вершине-предке по ребру.

Можно заметить, что фактически ускорение в вершине зависит от s трех последовательных вершин в пути, а рывок – от четырех.

Эти параметры учитываются в функции стоимости пути. Функция J_E является линейной комбинацией функций стоимостей за соблюдение скоростей опорного профиля скорости J_V , ограничений по продольному ускорению J_A , по продольному рывку J_J , соблюдение комфортного расстояния до препятствий J_O .

$$(12) J_E = C_V J_V + C_A J_A + C_J J_J + C_O J_O,$$

где C_V, C_A, C_J, C_O – это некоторые подобранные коэффициенты.

J_V штрафует разницу между скоростью v_{st} в вершине ST-графа и соответствующей ей скоростью v_{ref} из *опорного* профиля. Линейно, если $v_{st} < v_{ref}$, иначе – квадратично. Также учтен выход из физических ограничений транспортного средства – штраф в этом случае бесконечен.

- J_A штрафует тем сильнее, чем меньше скорость, если ускорение находится в «мягких» пределах, иначе – штраф экспоненциален. Как и в случае со скоростью, штраф бесконечен, если ускорение исполнить невозможно.

- J_J – рывок учитывается квадратично. Ограничений на физическую исполнимость нет.

- J_O – сумма по всем агентам. Для конкретного агента штраф бесконечен, если расстояние до другого агента меньше 0 (т.е. произошла коллизия), иначе обратно пропорционален расстоянию.

Заметим, что боковое ускорение и так было учтено в J_V ; к тому же в итоговой формуле не учтен боковой рывок.

Нетрудно доказать, что реализация модели может найти неоптимальное решение или даже не найти существующее решение вовсе, поскольку для конкретной вершины выбор оптимального ребра происходит среди вариантов вершин только с предыдущего по времени «слоя». Для учета всех вариантов требуется перебирать все возможные комбинации подсоединения до предка глубины 3 через предков глубины 1 и 2, поскольку в функции стоимости рывок – это функция четырех последовательных вершин в пути. Эта проблема становится тем менее значительной, чем меньше шаг дискретизации по S и T , так как разница по s и t между связанными ребрами вершинами становится меньше и, следовательно, возможное нарушение тоже уменьшается.

3.2. ПРИМЕР СВЕДЕНИЯ К QP ЧЕРЕЗ ДИСКРЕТИЗАЦИЮ ВРЕМЕНИ

В работе [1] авторы приводят один из возможных способов сведения к задаче квадратичного программирования – использование метода поиска в ширину (BFS) для поиска пути по ST-графу между агентами, внутри каждого шага BFS происходит решение задачи квадратичной оптимизации.

На оси времени T расставляются N опорных точек t_i , $1 \leq i \leq N$, где время будет зафиксировано (и равно $dt \times (i - 1)$ для заранее выбранного dt), а параметры рывка j , продольного ускорения a , скорости v и пройденного расстояния s (p в самой ста-

тье) являются искомыми. Переменные управления здесь j_i , все остальные параметры несложным образом из них выводятся:

$$\begin{aligned} s_{i+1} &= s_i + v_i \cdot dt, \\ (13) \quad v_{i+1} &= s_i + a_i \cdot dt, \\ a_{i+1} &= s_i + j_i \cdot dt. \end{aligned}$$

Ограничения для избежания коллизий формулируются следующим образом:

$$(14) \quad s_i^{lb} \leq s_i \leq s_i^{ub},$$

где s_i^{lb} и s_i^{ub} берутся напрямую из ST-графа как ближайшие от s_i границы агентов снизу (s_i^{lb}) и сверху (s_i^{ub}) соответственно.

Более того, для удержания комфортного расстояния до агентов вводятся slack-переменные [2]. Каждой точке t_i соответствует одна переменная для агента спереди и одна – для агента сзади:

$$(15) \quad s_i^{lb} + slack_i^{lb} \leq s_i \leq s_i^{ub} - slack_i^{ub}$$

На эти переменные также накладываются дополнительные условия $slack_i^{lb} \geq 0$, $slack_i^{ub} \geq 0$ для сохранения безопасного расстояния до объектов. Для того чтобы эти переменные «отталкивали» от агента, требуется их учесть в целевой функции.

В такую модель отлично ложатся ограничения на продольные ускорения и рывки, а также на скорости, если известны их точные зависимости от времени, т.е. заданы $v(t)$, $a_{long}(t)$ и $j_{long}(t)$ либо ограничения на них константны. В таком случае они выглядят аналогично формуле (14):

$$\begin{aligned} v_i^{lb} &\leq v_i \leq v_i^{ub}, \\ (16) \quad a_i^{lb} &\leq a_i \leq a_i^{ub}, \\ j_i^{lb} &\leq j_i \leq j_i^{ub}. \end{aligned}$$

Несложно показать, что в формуле (13) все a_i , v_i , s_i можно выразить через переменную управления j_i . Можно заметить, что данное сведение неточно, так как, например, между t_i и t_{i+1} скорость и ускорение считаются константными.

Точность модели можно улучшить несложным образом:

$$s_{i+1} = s_i + v_i \cdot dt + a_i \cdot \frac{dt^2}{2} + j_i \cdot \frac{dt^3}{6},$$

$$(17) \quad v_{i+1} = v_i + a_i \cdot dt + j_i \cdot \frac{dt^2}{2},$$

$$a_{i+1} = a_i + j_i \cdot dt.$$

Для расширения функциональности в такую модель можно напрямую включить:

1. Учет комфорта пассажира. Для этого добавим в целевую функцию $w_j \Sigma(j_i)^2$, где w_j – положительный коэффициент. Также можно добавить $w_a \Sigma(a_i)^2$ для учета ускорений, где w_a положительно. Ускорения a_i достаточно выразить через рывки j_i по формуле выше. И рывки, и ускорения, таким образом, добавляются в гессиан H . Чем больше коэффициенты w_a и w_j , тем меньше ускорения и рывки в оптимальном решении и, следовательно, выше комфорт пассажира.

2. Максимизация пройденного расстояния. Для этого достаточно добавить $w_s s_{N-1}$ в градиент g , где w_s – отрицательный коэффициент.

3. Комфортное расстояние до агентов. Поскольку slack-переменные являются отдельными переменными управления, в целевую функцию они добавляются тоже отдельно. Их можно добавить как в гессиан ($w_{slack} \cdot \Sigma((slack_i^{lb})^2 + (slack_i^{ub})^2)$), так и в градиент ($w_{slack} \cdot \Sigma(slack_i^{lb} + slack_i^{ub})$), где w_{slack} – вес этой компоненты.

Проблемой данной модели является то, что зависимость параметров от пройденного расстояния невозможно вставить в модель в качестве линейного ограничения. Например, это может касаться ограничений по скорости на пешеходных переходах: они зафиксированы в определенных точках пройденного пути, но нет прямой зависимости скорости в этих точках от времени.

То же касается и ограничений на боковые ускорения, поскольку они напрямую зависят не от времени, а от кривизны геометрической траектории в каждой её конкретной точке. Эту же проблему отмечают Alexandre Miranda Añon и коллеги в ра-

боте [1]. Они используют «funnel technique» – несложную эвристику для аппроксимации ограничений по скорости от расстояния. Возможным решением может стать разложение таких ограничений в ряд Тейлора по принципу, похожему на использующийся в работе [16].

3.3. ПРИМЕР СВЕДЕНИЯ К QP ЧЕРЕЗ ДИСКРЕТИЗАЦИЮ РАССТОЯНИЯ

В работе [11] авторы Changliu Liu и др. производят сведение задачи построения профиля скорости к задаче квадратичного программирования.

В данном случае вдоль оси S расставляются $N + 1$ опорная точка s_i , $0 \leq i \leq N$, в которых будет зафиксировано пройденное расстояние. Изначально переменными управления являются скорость $v(s_i)$, продольное ускорение $a(s_i)$ и $\delta_t(s_i)$ – разности во времени достижения точек s_i и s_{i+1} . Время достижения точки s_i можно представить как $\sum_{j=0}^{i-1} \delta_t(s_j)$.

Ограничения устроены следующим образом:

1. $0 \leq v(s_i) \leq \bar{v}(s_i)$, $v(s_0) = v_0$, $v(s_N) = v_N$, где $\bar{v}(s_i)$ – ограничение по скорости из ПДД и боковых ускорений. Поскольку они зависят от геометрической траектории, данные ограничения вставляются в модель напрямую. Ограничение на последнюю точку можно опустить.

2. $\underline{a}(s_i) \leq a(s_i) \leq \bar{a}(s_i)$, $a(s_0) = a_0$, $a(s_N) = a_N$ – ограничения по ускорению. Ограничения на последнюю точку в этом случае тоже можно опустить.

3. $\underline{t}(s_i) \leq t_i \leq \bar{t}(s_i)$, где $\underline{t}(s_i)$ и $\bar{t}(s_i)$ – верхние и нижние ограничения на ST-коробки, вычисляемые из ST-графа.

4. $v(s_i)\delta_t(s_i) = \Delta s$. Поскольку это ограничение не является линейным, оно линеаризуется с использованием разложения в ряд Тейлора по переменным $v(s_i)$ и $\delta_t(s_i)$ в точке (v_*, δ_*) . Также добавляются slack-переменные для улучшения сходимости. Итоговое выражение выглядит так:

$$(18) \quad \delta_* v(s_i) + v_* \delta_t(s_i) - v_* \delta_* = \Delta s + slack_v(s_i)$$

5. $a(s_i)\delta_t(s_i) = v(s_{i+1}) - v(s_i)$. Здесь применяется тот же прием с разложением в ряд Тейлора:

$$(19) \delta_* a(s_i) + a_* \delta_t(s_i) - a_* \delta_* = v(s_{i+1}) - v(s_i) + \text{slack}_a(s_i).$$

Данная задача решается в несколько итераций, пока решение не окажется достаточно близко к оптимуму. Значения a_* , v_* , δ_* берутся из предыдущей итерации решения квадратичной задачи (или из опорного профиля, если это первая итерация). Это требуется, поскольку ограничения в их оригинальном виде приближенные.

Целевая функция представляет из себя линейную комбинацию $C_T T + C_R R(s) + C_D D(s) + C_K K(s)$ заранее заданных коэффициентов C_T , C_R , C_D , C_K со следующими функциями:

1. $T = t(s_N) = \sum_{j=0}^{N-1} \delta_t(s_j)$ – время достижения финальной точки s_N , которое будет минимизировано за счет добавления в линейную часть квадратичного функционала (в вектор g – градиент).

2. $R(s) = \sum_{i=0}^{N-1} (a(s_{i+1}) - a(s_i))^2$ – добавляется в гессиан квадратичной задачи для обеспечения гладкости профиля.

Можно заметить, что данная компонента минимизирует сумму дискретных производных не по времени (рывки), а по расстоянию (так называемые «псевдо-рывки»). Следствием является то, что на малых скоростях рывок штрафует сильнее, чем на больших, так как Δs преодолевается за большее время, а значит, с большим изменением ускорения. Это может быть как положительным, так и отрицательным аспектом.

3. $D(s) = \sum_{i=0}^{N-1} (t(s_i) - t_d(s_i))^2$, где $t_d(s_i)$ – рекомендуемое расстояние до агента спереди. Добавляется в гессиан.

Согласно данной компоненте, выгодно жестко следовать выбранной дистанции, что является минусом данного подхода. Это может сказываться в ситуации, когда агент находится на большом расстоянии – такой механизм будет излишне «подгонять» БТС, даже если в этом нет необходимости. Возможно, подход из [1] через софт-ограничения и slack-переменные окажется эффективнее.

4. $K(s) = \sum_{i=0}^{N-1} (\text{slack}_v^2(s_i) + \text{slack}_a^2(s_i))$ – добавляется в гессиан для минимизации slack-переменных.

Преимуществом подхода является поддержка как ограничений на скорость, так и на удержание от агентов «из коробки» с быстродействием (согласно результатам экспериментов в самой работе), позволяющим использовать данный метод на системах реального времени. Минусом является отсутствие поддержки ограничений на продольные и поперечные рывки.

Недостатком подхода является невыпуклость модели, поскольку присутствует гиперболическое уравнение для связи пути и скоростей, представленное формулой (19).

4. Предложения по использованию

4.1. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ

Описанные методы и подходы можно использовать как по отдельности, так и в комбинации, в зависимости от поставленной задачи.

Если в задаче имеются невыпуклые ограничения, и они ярко выражены, то метод ДР использовать может быть эффективнее, так как аппроксимация данных ограничений будет качественнее. Реализация метода QR при этом не всегда возможна, в силу сложности сведения всех компонент (т.е. целевой функции и ограничений) к единой QR-задаче. Хотя типичным выходом из этой ситуации является разбиение решения на серию задач, последовательное решение которых сходится к оптимуму (SQP – sequential quadratic programming), оно далеко не всегда эффективно или возможно.

Метод ДР может использоваться для построения опорного профиля скорости. Само по себе это решение не подходит для непосредственного исполнения, так как является «грубой» оценкой и требует дополнительного сглаживания. Более того, на реальных двигателях такое управление может приводить к дополнительному износу деталей или быть попросту невыполнимым.

Данное опорное решение далее можно использовать для инициализации следующего метода. Например, используя метод QR, можно добиться гладкого варианта профиля скорости, относительно первоначально полученного из ДР.

Если в задаче необходимо управление производными $s(t)$ высокого порядка – от третьей производной (продольных рывков) и далее, и при этом требуется высокая точность при решении задачи, то использование метода ДР может быть проблематичным. Причиной является так называемое «проклятие размерности» («curse of dimensionality»), которое заключается в том, что метод плохо масштабируется при увеличении количества измерений поискового пространства и при уменьшении шага дискретизации.

4.2. МЕТОД ДР В КОНТЕКСТЕ ЗАДАЧИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Отличительной особенностью метода ДР является возможность применения для нахождения допустимых альтернатив; в частности, если в задаче присутствуют другие агенты и заранее не известно, требуется ли обогнать или следовать за каждым из них.

Примером задачи с принятием решений является ситуация на рис. 6. В данном случае динамическое программирование позволяет смоделировать все варианты: обогнать агента или уступить дорогу, и выбрать подходящий. В проекции $S-V$ этого добиться трудно, но просто в проекции $S-T$ (или $S-V-T$).

Еще одна ситуация: БТС оказывается вблизи светофора в момент, когда начинает мигать зеленый сигнал и загорается желтый. В этот момент необходимо оценить, требуется ли продолжать ехать, возможно увеличив скорость для того, чтобы успеть пересечь пешеходный переход, либо наоборот, затормозить и остановиться, пропустив пешеходов. Пример такой ситуации приведен на рис. 9: при нахождении в отмеченной штрихом зоне будут нарушены ПДД. Принятие решения сводится к выбору между альтернативами вида $s_1(t)$ и $s_2(t)$.

Во всех ситуациях, изложенных выше, с помощью ДР можно эффективно обрабатывать все исходы и осуществлять выбор из них без необходимости перезапускать решатель несколько раз для обработки каждого из вариантов по отдельности. Для этого требуется разобраться, как именно текущий сценарий влияет на пространство состояний. Задача является инженерной,

в каждом конкретном сценарии требуется отдельная проработка, но во всех описанных ранее примерах задачу можно решить путем ввода дополнительных ограничений на ST-графе.

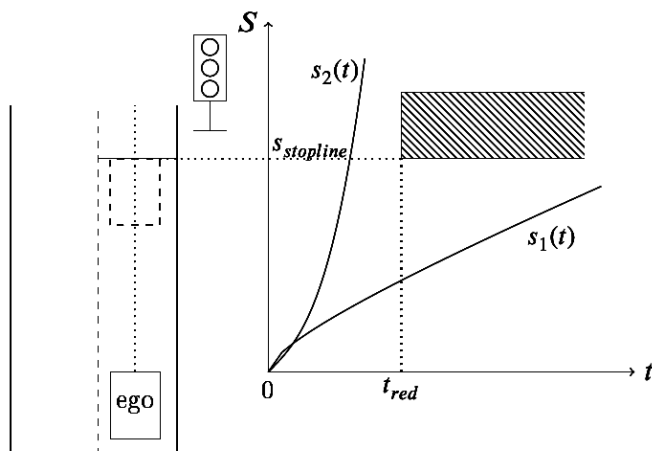


Рис. 9. Ограничения на ST-графе от загорающего запрещающего сигнала светофора. T_{red} обозначает момент времени, в который загорится красный сигнал

Таким образом, запустив метод один раз, удастся получить сразу все множество допустимых решений, из которых далее уже может быть осуществлен выбор.

5. Выводы

Рассмотренные в работе подходы планирования профиля скорости с помощью динамического программирования и квадратичной оптимизации являются актуальными и перспективными для дальнейших улучшений и научных изысканий. Поскольку коммерчески успешных проектов, использующих наземные БТС, пока нет, известны не все требуемые параметры задачи, необходимые для создания решения, обладающего достаточным для массового коммерческого использования качеством.

В статье были подробно разобраны сценарии работы методов. Методы находят свое применения на реальных задачах, сценарии применения вариативны. Авторами показаны преимущества и недостатки в конкретных ситуациях.

Авторами отмечено перспективное направление использования метода динамического программирования в рамках задачи принятия решения. Подход позволяет сэкономить вычислительные мощности при генерации допустимых альтернатив.

В дальнейшем авторы собираются исследовать возможность составления полностью выпуклой модели для решения задачи построения профиля скорости методом QP, а также исследовать границы применимости метода DP в пространстве S–V–T.

Литература

1. AÑON A.M. et al. *Multi-profile quadratic programming (MPQP) for optimal gap selection and speed planning of autonomous driving* // IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA–2024). – IEEE, 2024. – P. 12158–12164.
2. BOYD S.P., VANDENBERGHE L. *Convex optimization*. – Cambridge University Press, 2004.
3. DIACHUK M., EASA S.M. *Simultaneous Trajectory and Speed Planning for Autonomous Vehicles Considering Maneuver Variants* // Applied Sciences. – 2024. – Vol. 14, No. 4. – P. 1579.
4. DU Z. et al. *Speed profile optimisation for intelligent vehicles in dynamic traffic scenarios* // Int. Journal of Systems Science. – 2020. – Vol. 51, No. 12. – P. 2167–2180.
5. ELBANHAWI M., SIMIC M., JAZAR R. *In the passenger seat: investigating ride comfort measures in autonomous cars* // IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine. – 2015. – Vol. 7, No. 3. – P. 4–17.
6. *Expanding Waymo's testing to the city that keeps it weird* [Электронный ресурс]. – URL: <https://waymo.com/blog/2023/03/expanding-waymos-testing-to-austin/> (дата обращения: 16.03.2025)

7. FU D. et al. *Drive like a human: Rethinking autonomous driving with large language models* // IEEE/CVF Winter Conf. on Applications of Computer Vision Workshops (WACVW-2024). – IEEE, 2024. – P. 910–919.
8. KLANČAR G. et al. *Drivable path planning using hybrid search algorithm based on E* and Bernstein–Bézier motion primitives* // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems. – 2019. – Vol. 51, No. 8. – P. 4868–4882.
9. KRÜGER T.J., GÖHRING D., ULBRICH F. *Graph-Based Speed Planning for Autonomous Driving*. – PhD thesis, 2019.
10. LEE D. et al. *Convolution neural network-based lane change intention prediction of surrounding vehicles for ACC* // IEEE 20th Int. Conf. on Intelligent Transportation Systems (ITSC-2017). – IEEE, 2017. – P. 1–6.
11. LIU C., ZHAN W., TOMIZUKA M. *Speed profile planning in dynamic environments via temporal optimization* // IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). – IEEE, 2017. – P. 154–159.
12. MARTIN D., LITWHILER D. *An investigation of acceleration and jerk profiles of public transportation vehicles* // Annual Conference & Exposition. – 2008. – P. 13.194.1–13.194.13.
13. MOZAFFARI S. et al. *Deep learning-based vehicle behavior prediction for autonomous driving applications: A review* // IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems. – 2020. – Vol. 23, No. 1. – P. 33–47.
14. SHIMIZU Y. et al. *Jerk constrained velocity planning for an autonomous vehicle: Linear programming approach* // Int. Conf. on Robotics and Automation (ICRA-2022). – IEEE, 2022. – P. 5814–5820.
15. SINGH K.B., SIVARAMAKRISHNAN S. *Extended pacejka tire model for enhanced vehicle stability control* // arXiv preprint: arXiv:2305.18422. – 2023.
16. XU W. *Motion planning for autonomous vehicles in urban scenarios: a sequential optimization approach* : PhD thesis. – Carnegie Mellon University, 2021.
17. YANG G., YAO Y. *Vehicle local path planning and time consistency of unmanned driving system based on convolutional*

- neural network* // Neural Computing and Applications. – 2022. – P. 1–14.
18. YEO J., LEE J., JANG K. *The effects of rainfall on driving behaviors based on driving volatility* // Int. Journal of Sustainable Transportation. – 2021. – Vol. 15, No. 6. – P. 435–443.
 19. ZHANG J., JIN H. *Optimized calculation of the economic speed profile for slope driving: Based on iterative dynamic programming* // IEEE Trans. on Intelligent Transportation Systems. – 2020. – Vol. 23, No. 4. – P. 3313–3323.
 20. ZHANG Y. et al. *Optimal vehicle path planning using quadratic optimization for baidu apollo open platform* // IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). – IEEE, 2020. – P. 978–984.
 21. ZHAO F. et al. *On-Road Trajectory Planning of Connected and Automated Vehicles in Complex Traffic Settings: A Hierarchical Framework of Trajectory Refinement* // IEEE Access. – 2024. – Vol. 12. – P. 7456–7468.
 22. ZHAO T. et al. *Multi-agent tensor fusion for contextual trajectory prediction* // Proc. of the IEEE/CVF conference on computer vision and pattern recognition. – 2019. – P. 12126–12134.

APPROACHES TO SPEED PLANNING FOR GROUND-BASED AUTONOMOUS VEHICLES

Asya Livshits, NUST MISIS, Moscow, B.Sc. (asyalivshits@yandex.ru).

Igor Temkin, NUST MISIS, Moscow, Doctor of Technical Science, Professor (temkin.io@misis.ru).

Aleksandr Fadeev, NUST MISIS, Moscow, Postgraduate Student (frogcatcher@mail.ru).

Abstract: The article provides an overview of speed profile planning methods for ground-based unmanned vehicles. Autonomous driving technology is in the active development phase, and many tasks have already been solved, but with insufficient quality for safe operation and scaling of the technology. Thus, this field is promising from a scientific and engineering point of view. The paper examines in detail the formulation of the problem, describes various types of constraints to the final solution, and considers the construction of the task's functionality, depending on the requirements and methods used. Special attention is paid to the ST graph as a tool for modeling interaction with other traffic participants. Practical scenarios of agent interaction in various situations that often arise in traffic are also analyzed in de-

tail. The authors focus on a class of methods for constructing a velocity profile along a known geometric trajectory. Two families of approaches are considered: dynamic programming and reducing a continuous problem to a quadratic programming problem. The existing modern methods based on these approaches are analyzed in detail, and improvements and improvements are proposed in the context of various additional requirements for the solution. The article serves as a methodological basis for developers of autonomous driving systems.

Keywords: unmanned transport systems, speed profile, dynamic programming, continuous optimization, ST graph.

УДК 656.1

ББК 39.37 + 32.816-04

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Л.Б. Рапопортом.*

Поступила в редакцию 30.03.2025.

Опубликована 31.07.2025.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СУДНА НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ И ЕГО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА¹

Соляков О. В.²

*(ФГАОУ ВО Российский университет транспорта,
Москва)*

Уварова Л. А.³

*(Московский государственный технологический
университет «СТАНКИН», Москва)*

Методом возмущений получено аналитическое решение нелинейной динамической системы, являющейся моделью плоскопараллельного движения судна. Полученные решения позволяют учесть влияние всех основных параметров на линейную и угловую скорости. Проанализированы малые параметры, выбор которых определяется конкретными параметрами задачи. Показано влияние линейной скорости на угловую скорость, обусловленное нелинейностью задачи. Показано влияние статического момента на каждую из составляющих скорости. Рассмотрено влияние солёности и температуры и, следовательно, плотности на параметры системы и, как следствие, на скорость движения судна. Влияние солёности рассмотрено в виде кусочно-постоянной функции и кусочно-линейной функции. Показана модификация решений для скоростей, которую необходимо сделать для уточнения их величин на разных участках траектории. Предложен аналитико-численный метод моделирования плоскопараллельного движения судна, учитывающий влияние неоднородности водного бассейна на основе гидрометеорологических данных. Полученные решения могут быть использованы для автоматизации движения судна по ограниченному фарватеру с использованием автоматической системы управления.

Ключевые слова: математическое моделирование, водный транспорт, динамические нелинейные системы, методы возмущения, солёность.

¹ Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках проекта 0707-2020-0034.

² Олег Владимирович Соляков, к.т.н., доцент (solyakov1@yandex.ru).

³ Людмила Александровна Уварова, д.ф.-м.н., профессор (Uvar1@yandex.ru).

1. Введение

В последние годы все большее значение приобретает решение проблем автоматизации водного транспорта. В ближайшей перспективе необходимо будет решить проблему полной автоматизации управления судном – так называемой «безэкипажной навигации». Сегодня в рамках государственных заказов различных стран активно ведутся работы по проектированию таких систем автоматического управления безэкипажными судами различного назначения, в которых участвуют как частные организации, так и государственные разработчики. В связи со сложностью задачи, когда судно, корабль или катер движется по стеснённому руслу (речное судно, судно уровня река – море) под влиянием многих погодных факторов, меняющейся плотности воды в различных частях водного бассейна и с необходимостью быстрого принятия решений системой управления, возникает вопрос о включении в управляющую программу формул и выражений, удобных для быстрого расчета. Такие формулы могут быть получены (при определенных ограничениях) аналитическими методами или надежными численными методами. В то же время такие решения являются критериями правильности получения решений прямыми численными методами интегрирования динамических систем с широким варьированием параметров задачи. В данной работе мы решаем полулинейную динамическую систему плоскопараллельного движения судна с использованием метода возмущений. Учитывается также влияние изменяющейся плотности воды вследствие различия в солёности или (и) температуре в различных частях водной акватории.

2. Математическая модель в виде динамической системы и её решение с применением метода возмущений

Основные системы аналитических уравнений движения судов и их решения формировались с 50-х годов прошлого века и в настоящее время широко известны [17]. Эти методы и их

современные модификации приведены, в частности, в [2, 3, 5, 9, 10, 12, 15, 21, 23, 27]. Законы влияния ветра и турбулентности на движение судов разработаны и уточнены многими специалистами, например, в [4, 18, 19, 20, 22, 25]. Моделирование динамики речных судов численными методами может быть выполнено на основе системы Matlab/Simulink [7], в программном пакете «FlowVision» [11], среде моделирования Unity [1], специализированных и универсальных CAD-системах, например, SolidWorks [24] и в других программных средах. Однако ограничением численных моделей является их необходимая привязка к граничным условиям на каждом участке фарватера, а также к конкретным параметрам конструкций судов, которые должны быть определены с высокой точностью для обеспечения адекватности результатов.

В работе [17] авторы хорошо проанализировали существующие подходы к математическому моделированию движения судна как управляемой динамической системы, функционирующей в сложных изменяющихся условиях внешней среды, и основные классы задач, связанных с этими моделями. Отмечены недостатки частично линеаризованных моделей движения судна. Отличительным элементом каждой из существующих математических моделей этого типа является способ определения коэффициентов дифференциальных уравнений, отражающих гидродинамические силы на корпусе судна, в зависимости от геометрических параметров корпуса судна [17].

Метод возмущений с учетом возможности выбора параметра возмущений позволяет существенно уменьшить недостатки и расширить применение нелинейной динамической системы, являющейся моделью плоскопараллельного движения судна, для различных условий движения, в том числе в стесненном фарватере. Исследования аналитических решений позволят учесть влияние всех основных параметров на линейную и угловую скорости.

Общие аналитические решения, в отличие от визуального контроля и замера показателей с датчиков, состоят в последовательном проведении математических преобразований исходной модели, приводящих к заданному результату, и поскольку на

последнем этапе имеются формулы для расчётов, в которые достаточно подставить числа для получения цифрового результата, такие решения могут эффективно использоваться в широком диапазоне внешних условий.

В этой статье мы рассматриваем следующую полулинейную модель, представляющую собой динамическую систему уравнений [3]:

$$\begin{aligned} & -(m + \lambda_{11}) \frac{dV_x}{dt} + mV_y\omega + X = 0, \\ (1) \quad & -(m + \lambda_{22}) \frac{dV_y}{dt} - mV_x\omega - \lambda_{26} \frac{d\omega}{dt} + Y = 0, \\ & -(I_z + \lambda_{66}) \frac{d\omega}{dt} - \lambda_{26} \frac{dV_y}{dt} + M = 0, \end{aligned}$$

где V_x, V_y – компоненты скорости; ω – угловая скорость вращения корпуса судна; X, Y – суммарные силы, действующие вдоль осей x и y соответственно; M – суммарный момент относительно оси z ; m – масса водоизмещения судна; I_z – момент инерции корабля относительно оси z ; t – время. Через $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{66}, \lambda_{26}$ обозначены присоединенные массы при движении вдоль осей X, Y , при вращении относительно оси Z и от статического момента соответственно. Начальные условия имеют вид

$$(2) \quad \omega(t=0) = \omega_0, V_x(t=0) = V_{x0}, V_y(t=0) = V_{y0}.$$

При получении аналитического решения системы (1) в нулевом приближении можно пренебречь членами уравнений, содержащими меньшее значение по сравнению с другими параметрами. Пренебрегаем в третьем уравнении системы величиной $\lambda_{26} \frac{dV_y}{dt}$. Тогда зависимость угловой скорости от времени

определяется из третьего уравнения системы:

$$(3) \quad \omega = \omega_0 + \frac{Mt}{I_z + \lambda_{66}}.$$

В этом случае система из двух первых уравнений системы (1) становится линейной. Дифференцирование второго уравнения из системы (1) с учётом (3) даёт

$$(4) \quad (m + \lambda_{22}) \frac{d^2 V_y}{dt^2} + m \left(\omega_0 + \frac{Mt}{I_z \lambda_{66}} \right) \frac{dV_x}{dt} + m V_x \frac{M}{I_z \lambda_{66}} = 0.$$

Выражение для V_x может быть получено из второго уравнения (1) и имеет вид

$$(5) \quad V_x = \frac{Y(I_z + \lambda_{66})}{m(\omega_0(I_z + \lambda_{66}) + Mt)} - \frac{(m + \lambda_{22})(I_z + \lambda_{66})}{m(\omega_0(I_z + \lambda_{66}) + Mt)} \frac{dV_y}{dt}.$$

Подстановка V_x из (5), $\frac{dV_x}{dt}$ из первого уравнения системы

(1), ω из (3) в уравнение (4) приводит к следующему дифференциальному уравнению второго порядка для V_y :

$$(6) \quad p \frac{d^2 V_y}{dp^2} + \frac{mMD}{(I_z + \lambda_{66})} p^3 V_y - \frac{dV_y}{dp} = -\frac{Y}{(m + \lambda_{22})} - DXp^2.$$

Здесь введены обозначения:

$$D = \frac{mM}{(m + \lambda_{11})(m + \lambda_{22})(I_z + \lambda_{66})}, \quad \gamma = \omega_0(I_z + \lambda_{66})/M, \quad p = \gamma + t.$$

Соответственно, однородное уравнение запишется в виде

$$(7) \quad p \frac{d^2 V_y}{dp^2} + \frac{mMD}{(I_z + \lambda_{66})} p^3 V_y - \frac{dV_y}{dp} = 0.$$

Уравнение (7) является линейным уравнением с переменным коэффициентом вида 2.98 из [6]:

$$(8) \quad xy'' - y' - \alpha x^3 y = 0.$$

$$\text{В данном случае коэффициент } \alpha = -\frac{mMD}{I_z + \lambda_{66}}.$$

С учётом решения (8) для решения уравнения (7) можно записать как

$$(9) \quad V_{yh} = C_1 \cos(0,5kp^2) + C_2 \sin(0,5kp^2), \quad k = \sqrt{-\alpha}.$$

Определитель Вронского равен $2kp$. С помощью определителя Вронского и (9) определим общее решение уравнения (6):

$$V_y = C_1 \cos(0,5kp^2) + C_2 \sin(0,5kp^2) - \frac{DX}{k^2} -$$

$$(10) - \frac{Y}{2k(m + \lambda_{22})} (\sin(0,5kp^2)(Ci(0,5kp^2) - Ci(0,5k\gamma^2)) -$$

$$- \cos(0,5kp^2)(Si(0,5kp^2) - Si(0,5k\gamma^2))).$$

Из формул (5) и (10) определяется скорость V_x :

$$V_x = \frac{Y(I_z + \lambda_{66})}{mMp} - C_1 kp \sin(0,5kp^2) + C_2 kp \cos(0,5kp^2) -$$

$$(11) - Yp / (m + \lambda_{22}) \times (\cos(0,5kp^2)(Ci(0,5kp^2) - Ci(0,5k\gamma^2)) +$$

$$+ \sin(0,5kp^2)(Si(0,5kp^2) - Si(0,5k\gamma^2))).$$

Из формул (10)–(11) видно, что решения для компонент линейной скорости выражаются через интегральный синус и интегральный косинус:

$$(12) Si(x) = \int_0^x \frac{\sin q}{q} dq, \quad Ci(x) = - \int_x^\infty \frac{\cos q}{q} dq.$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий (2). Они равны:

$$(13) C_1 = \left(V_{y0} + \frac{DX}{k^2} \right) \cos(0,5k\gamma^2) - \left(V_{x0} - \frac{Y(I_z + \lambda_{66})}{mM\gamma} \right) \sin(0,5k\gamma^2)/k\gamma,$$

$$C_2 = \left(V_{x0} - \frac{Y(I_z + \lambda_{66})}{mM\gamma} \right) \cos(0,5k\gamma^2)/k\gamma + \left(V_{y0} + \frac{DX}{k^2} \right) \sin(0,5k\gamma^2).$$

Таким образом, в линейном приближении величины $V_x^{(0)}$, $V_y^{(0)}$, $\omega^{(0)}$ полностью определяются выражениями (3), (10)–(13). Отметим, что угловую скорость также можно записать через параметр γ и переменную p :

$$(3') \quad \omega = \frac{M(\gamma + t)}{I_z + \lambda_{66}} = \frac{Mp}{I_z + \lambda_{66}}.$$

Далее уточним решение, принимая в расчет параметр λ_{26} . Для этого будем использовать метод возмущений.

В качестве подходящего безразмерного малого параметра можно выбрать один из следующих параметров в зависимости от конкретной задачи:

$$(14) \quad \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\lambda_{26} M}{V_0^2 m^2 R}, \quad V_0 = (V_{0x}^2 + V_{0y}^2)^{0.5} \neq 0, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\lambda_{26} V_0^2}{QR^2}, \quad Q = (X^2 + Y^2)^{0.5} \neq 0, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\lambda_{26} R}{I_z}, \quad \varepsilon_4 = \frac{\lambda_{26}}{mR}, \quad \varepsilon_5 = \frac{\lambda_{26} Q}{V_0^2 m^2}, \end{aligned}$$

где R – характерный размер судна: длина L или ширина B . Можно обозначить: $\varepsilon_i \equiv \varepsilon = \lambda_{26} \sigma$, $\lambda_{26} = \varepsilon / \sigma$; σ – величина, зависящая от выбранного малого параметра в соответствии с (14). Тогда искомые скорости можно представить в следующем виде:

$$(15) \quad V_x = V_x^{(0)} + \varepsilon V_x^{(1)}, \quad V_y = V_y^{(0)} + \varepsilon V_y^{(1)}, \quad \omega = \omega^{(0)} + \varepsilon \omega^{(1)}.$$

Подстановка (15) в систему (1) и начальные условия (2) и определение выражений при одинаковых степенях ε приводит к следующей задаче Коши для $V_x^{(1)}$, $V_y^{(1)}$, $\omega^{(1)}$:

$$(16) \quad \begin{aligned} -(m + \lambda_{11}) \frac{dV_x^{(1)}}{dt} + m(V_y^{(1)} \omega^{(0)} + V_y^{(0)} \omega^{(1)}) &= 0, \\ (m + \lambda_{22}) \frac{dV_y^{(1)}}{dt} + m(V_x^{(1)} \omega^{(0)} + V_x^{(0)} \omega^{(1)}) + \frac{1}{\sigma} \frac{d\omega^{(0)}}{dt} &= 0, \\ (I_z + \lambda_{66}) \frac{d\omega^{(1)}}{dt} + \frac{1}{\sigma} \frac{dV_y^{(0)}}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

$$(17) \quad \omega^{(1)}(t=0) = 0, \quad V_x^{(1)}(t=0) = V_y^{(1)}(t=0) = 0.$$

Интегрирование третьего из уравнений данной системы приводит к решению

$$(18) \quad \omega \cong \omega^{(0)}(t) + \frac{\varepsilon}{\sigma(I_z + \lambda_{66})} (V_{y0} - V_y^{(0)}(t)).$$

Дифференцирование первого из уравнений (16) приводит к следующему уравнению:

$$(19) \quad \begin{aligned} & -(m + \lambda_{11}) \frac{d^2 V_x^{(1)}}{dt^2} + m \left(\frac{dV_y^{(1)}}{dt} \omega^{(0)}(t) + V_y^{(1)} \frac{M}{I_z + \lambda_{66}} \right) + \\ & + m \left(\frac{(V_{y0} - V_y^{(0)}(t))}{\sigma(I_z + \lambda_{66})} \frac{dV_y^{(0)}}{dt} - \frac{V_y^{(0)}(t)}{\sigma(I_z + \lambda_{66})} \frac{dV_y^{(0)}}{dt} \right) = 0. \end{aligned}$$

Подстановка $\omega^{(0)}(t) \frac{dV_y^{(1)}}{dt}$ (из второго уравнения (16)), $V_y^{(1)}$ (из первого уравнения (16)) и переход от t к переменной p в (19) преобразует последнее к следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(20) \quad \frac{d^2 V_x^{(1)}}{dt^2} - \frac{1}{p} \frac{dV_x^{(1)}}{dp} + k^2 p^2 V_x^{(1)} = F(p),$$

где

$$\begin{aligned} F(p) &= \tilde{F}(p) / \sigma, \\ \tilde{F}(p) &= -\frac{(m + \lambda_{22}) D V_y^{(0)}(p) \tilde{\omega}^{(1)}(p)}{\omega^{(0)}(p)} - m \kappa \omega^{(0)}(p) \tilde{\omega}^{(1)}(p) V_x^{(0)}(p) - \\ (21) \quad & - \frac{D}{\sigma} \omega^{(0)}(p) + \frac{m}{m + \lambda_{11}} \tilde{\omega}^{(1)}(p) \frac{dV_y^{(0)}}{dp} - \frac{\kappa}{\sigma} V_y^{(0)}(p) \frac{dV_y^{(0)}}{dp}, \\ \tilde{\omega}^{(1)}(p) &= \frac{V_{y0} - V_y^{(0)}(p)}{I_z + \lambda_{66}}, \quad \kappa = \frac{m}{(m + \lambda_{11})(m + \lambda_{22})}, \\ \omega^{(0)}(p) &= \frac{Mp}{I_z + \lambda_{66}}, \quad \frac{dV_y^{(0)}}{dp} = \left(Y - \frac{mMpV_x^{(0)}(p)}{I_z + \lambda_{66}} \right) / (m + \lambda_{22}). \end{aligned}$$

Соответствующее уравнению (20) однородное уравнение имеет вид

$$(22) \quad \frac{d^2 V_x^{(1)}}{dp^2} - \frac{1}{p} \frac{dV_x^{(1)}}{dp} + k^2 p^2 V_x^{(1)} = 0.$$

Данное уравнение относится к уравнению вида 2.162 из справочника [6]:

$$x^2 y'' + ax y' + (bx^m + c)y = 0, \\ (23) \quad y = x^{(1-a)/2} Z_\nu \left(\frac{2}{m} \sqrt{b} x^{m/2} \right), \quad \nu = \frac{1}{m} \sqrt{(1-a)^2 - 4c}.$$

Здесь через $Z_\nu \left(\frac{2}{m} \sqrt{b} x^{m/2} \right)$ обозначены функции Бесселя первого и второго рода порядка ν .

В данном случае $a = -1$, $m = 4$, $b = k^2$, $\nu = 1/2$. Поскольку порядок ν является полуцелым, то функции Бесселя выражаются в элементарных функциях и решение однородного уравнения (22) запишется так:

$$(24) \quad V_{xh}^{(1)} = C_3 \sqrt{p} \cos(0,5kp^2) + C_4 \sqrt{p} \sin(0,5kp^2),$$

где C_3, C_4 – постоянные интегрирования. Определитель Вронского из фундаментальных решений равен $kp^{3/2}$. Соответственно можно определить общее решение уравнения (20) и затем с помощью первого уравнения (16) – общее решение для $V_y^{(1)}$. Подстановка общих решений в начальные условия (17) приводит к равенству нулю постоянных C_3, C_4 . Таким образом, возмущённые решения определяются только неоднородной частью (21) уравнения (20). Они имеют вид:

$$(25) \quad V_x^{(1)} = \sqrt{p}/(\sigma k) (\sin(0,5kp^2) \int_\gamma^p \cos(0,5kp^2) \tilde{F}(p) p^{-3/2} dp - \\ - \cos(0,5kp^2) \int_\gamma^p \sin(0,5kp^2) \tilde{F}(p) p^{-3/2} dp),$$

$$(26) \quad V_y^{(1)}(p) = -\frac{V_y^{(0)}(p)(V_{y0} - V_y^{(0)}(p))}{\sigma Mp} + \frac{(m + \lambda_{11})(I_z + \lambda_{66})}{mMp\sigma} \times \\ \times \left((\sin(0,5kp^2)/(2k\sqrt{p}) - p^{3/2} \cos(0,5kp^2)) \times \right. \\ \times \int_\gamma^p \cos(0,5kp^2) \tilde{F}(p) p^{-3/2} dp + (p^{3/2} \sin(0,5kp^2) - \\ \left. - \cos(0,5kp^2)/(2k\sqrt{p})) \int_\gamma^p \sin(0,5kp^2) \tilde{F}(p) p^{-3/2} dp \right).$$

Интегралы, включенные в (25)–(26), не берутся в элементарных функциях и могут быть проинтегрированы численно.

3. Моделирование влияния на движение судна изменения солёности или (и) температуры

Для того чтобы оценить влияние изменения плотности воды за счёт изменения солёности или (и) температуры на движение корабля, необходимо рассмотреть параметры, входящие в систему (1). Влияние изменения плотности воды за счёт солёности или температуры может оказывать существенное влияние на скорость корабля. Так, в случае нескольких слоёв воды с различной солёностью, локализующихся в некоторой части бассейна, может возникнуть явление Экмана: так называемая «мёртвая вода», движение по которой становится крайне затруднительным [26]. В данной статье рассматривается плоскопараллельная модель движения судна, однако в пограничных областях «река – море», «пролив – море» также происходит встреча водных слоёв с разной солёностью и (или) разной температурой. Вблизи поверхности водоёмов плотность воды зависит от концентрации соли и температуры следующим образом:

$$(27) \quad \rho(s, \tau) = \rho_0(T) + A(T)s + F(T)s^{3/2} + Cs^2.$$

Здесь $\rho_0(T)$ – плотность чистой воды; s – концентрация соли; T – температура;

$$(28) \quad \begin{aligned} \rho_0 &= 999,84259 + 6,793952 \cdot 10^{-2}T - 9,095290 \cdot 10^{-3}T^2 + \\ &+ 1,0011685 \cdot 10^{-4}T^3 - 1,120083 \cdot 10^{-6}T^4 + 6,636332 \cdot 10^{-9}T^5, \\ A(T) &= 0,824493 - 4,0899 \cdot 10^{-3}T + 7,6438 \cdot 10^{-5}T^2 - \\ &- 8,2467 \cdot 10^{-7}T^3 + 5,3875 \cdot 10^{-9}T^4, \\ F(T) &= -5,72466 \cdot 10^{-3} + 1,0227 \cdot 10^{-4}T - 1,6546 \cdot 10^{-6}T^2, \\ C &= 4,8314 \cdot 10^{-4}. \end{aligned}$$

Приведём далее параметры задачи, поскольку они зависят от массы или от плотности:

- присоединенная масса воды при движении судна по оси X :

$$\lambda_{11} = \frac{m\tau}{2L},$$

– присоединенная масса воды при движении судна по оси Y :

$$\lambda_{22} = m \left(\frac{2\tau}{B} \left(1 - \frac{B}{2L} \right) \right),$$

– момент инерции от присоединенной массы воды по оси Z :

$$(29) \quad \lambda_{66} = m \left(\frac{2\tau}{B} \left(1 - 1.6 \frac{B}{\tau} \right) \right),$$

– момент инерции судна относительно оси Z :

$$I_z = km / (L^2 + B^2), \quad k = (1 + \delta^{4.5}) / 24..$$

– присоединенный статический момент жидкости относительно оси Z на проекции миделя:

$$(30) \quad \lambda_{26} = \frac{\rho\tau^3}{2} \left(1 - \frac{8}{3} \left(\frac{\tau - 0,18}{1 + \tau - 0,18} \right) \right),$$

где τ – осадка судна. При постоянной плотности масса водоизмещения судна равна: $m = \rho L B \tau \delta$; δ – коэффициент общей объемной полноты. Как видно из (29), параметры λ_{11} , λ_{22} , λ_{66} , I_z пропорциональны массе, поэтому можно разделить уравнения (1) и (16) на m и ввести обозначения: $\tilde{\lambda}_{11} = \lambda_{11}/m$, $\tilde{\lambda}_{22} = \lambda_{22}/m$, $\tilde{\lambda}_{66} = \lambda_{66}/m$, $\tilde{I}_z = I_z/m$. Также можно выделить из действующих сил и момента части, пропорциональные плотности воды (например, величины составляющих волновой силы и момента) и не содержащие ρ :

$$X = \tilde{X}_1 \rho + X_2, Y = \tilde{Y}_1 \rho + Y_2, M = \tilde{M}_1 \rho + M_2.$$

Коэффициент $\lambda_{26} = \tilde{\lambda}_{26} \rho$, где $\tilde{\lambda}_{26}$ не зависит от плотности и равен

$$\tilde{\lambda}_{26} = \frac{\tau^2}{2LB\delta} \left(1 - \frac{8}{3} \left(\frac{\tau - 0,18}{1 + \tau - 0,18} \right) \right). \text{ Тогда в качестве малых па-}$$

раметров можно взять $\varepsilon_3 = \frac{\tilde{\lambda}_{26} R}{\tilde{I}_z}$ или $\varepsilon_4 = \frac{\tilde{\lambda}_{26}}{R}$.

Пусть на пути следования имеются зоны с разной солёностью и температурой. Средние значения в то или иное время года в этих зонах известны. Обозначим эти зоны в водоёмах $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, 2$.

Величина x как функция времени (и при необходимости y) может быть найдена с помощью полученных выше решений путём интегрирования:

$$(31) \quad \begin{aligned} x(t) &= \int_0^t V_x(t) dt = \int_0^t (V_x^{(0)}(t) + \varepsilon V_x^{(1)}(t)) dt = \\ &= \int_{\gamma}^{p+\gamma} (V_x^{(0)}(p) + \varepsilon V_x^{(1)}(p)) dp. \end{aligned}$$

Тогда, попав в точку x_i , можно уточнить значения компонент скорости в пределах данного полуинтервала $[x_i, x_{i+1}]$, задавая соответствующие значения плотности ρ_i . Соответственно, в формулах решений (3), (10), (11), (13), (18), (21), (25), (26) необходимо сделать следующие замены:

$$(32) \quad \begin{aligned} X &= \tilde{X}_1 \rho_i + X_2, \quad Y = \tilde{Y}_1 \rho_i + Y_2, \quad M = \tilde{M}_1 \rho_i + M_2, \\ D &= D(m_i), \quad k = k(m_i), \quad \gamma = \gamma(m_i), \\ \lambda_{11} &= \tilde{\lambda}_{11} m_i, \quad \lambda_{22} = \tilde{\lambda}_{22} m_i, \quad \lambda_{66} = \tilde{\lambda}_{66} m_i, \quad I_z = \tilde{I}_z m_i. \end{aligned}$$

Также можно рассмотреть плавное изменение солёности на отдельных отрезках пути. В этом случае необходимо использовать формулы (27)–(28). При относительно небольших колебаниях температуры в период движения судна можно полагать, что температура равна своему среднему значению в соответствии с метеоданными на том или ином участке пути. Изменение солёности будем полагать линейным по координате на каждом выбранном промежутке:

$$(33) \quad \rho_{i,i+1} \equiv \rho(x_i \leq x < x_{i+1}) = l_{i0} + l_{i1} x.$$

Подстановка (33) в (27) и интегрирование получаемого выражения на указанном отрезке приводит к следующему выражению для массы m_i :

$$\begin{aligned}
 m_i = & \frac{\tau B \delta}{n} [\rho_0(\bar{T})nL + A(\bar{T})l_{i0}nL + 0.5A(\bar{T})l_{i1}(n^2L^2 + 2Lnx_i) + \\
 (34) & + \frac{0,4F(\bar{T})}{l_{i1}} \left((l_{i0} + l_{i1}(x_i + nL))^{2,5} - (l_{i0} + l_{i1}x_i)^{2,5} \right) + \\
 & + \frac{C}{3l_{i1}} \left(((l_{i0} + l_{i1}(x_i + nL)))^3 - (l_{i0} + l_{i1}x_i)^3 \right)].
 \end{aligned}$$

При получении формулы (34) полагалось, что $x_{i+1} = x_i + nL$, n – количество шагов на выбранном отрезке длиной L . В формулах полученных выше решений необходимо сделать замены:

$$X = \tilde{X}_1 \rho_{i,i+1}(x) + X_2, \quad Y = \tilde{Y}_1 \rho_{i,i+1}(x) + Y_2,$$

$$M = \tilde{M}_1 \rho_{i,i+1}(x) + M_2, \quad x \in [x_i, x_{i+1}).$$

Далее – такие же замены, что и в (32). После выполнения указанных замен получаются уточнённые решения для линейной и угловой скоростей. В зависимости от требуемой точности можно вместо $\rho_{i,i+1}(x)$ рассматривать среднюю плотность на данном промежутке $\bar{\rho}_i$. В этом случае малые параметры $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ не зависят от плотности и остаются такими же, что и в предыдущем случае.

Таким образом, получен аналитико-численный метод моделирования плоско-параллельного движения судна, учитывающий влияние неоднородности водного бассейна на основе гидрометеорологических данных.

С целью апробации результатов работы аналитико-численного метода моделирования плоско-параллельного движения судна необходимо провести натурные испытания.

Адекватность и корректность работы алгоритмов может быть подтверждена на водном транспорте (катере, судне) на реальной акватории водного бассейна, с применением комплекса автоматической системы управления автономным катером.

4. Натурные испытания

По итогам разработки алгоритма было создано программное обеспечение автоматической системы управления автоном-

ным судном – катером – и в июле 2022 года проведены его натурные испытания.

Для формирования линии пути (маршрута) движения был назначен следующий маршрут из 10 галсов: 2 раза по 5 галсов (туда и обратно), см. рис. 1.



Рис.1 Маршрут натурных испытаний на акватории водоема по адресу г.Санкт-Петербург, Петродворцовый район, п. Стрельна, Санкт-Петербургское ш., 43, ручей Стрелка

В качестве средства разработки АСУ использовалась среда IDE CBuilder. Преимуществом предложенной модели являлась сравнительная лаконичность уравнений и зависимостей, обеспечивающая заданную точность управления катером и учитывающая вместе с тем характеристики воды (плотность и солесность).

ПО управляло двумя двигателями катера через микроконтроллер, используя разработанный алгоритм, корректируя ошибку с помощью датчика (Д)ГНСС GPS/ГЛОНАСС.

Ресурсоемкость решений (скорость вычислений, вычислительные, энерго- и иные затраты) на обработку данных напрямую зависят от производительности аппаратуры, объема обрабатываемой информации, корпуса судна движительно-рулевого комплекса и внешних факторов. Аналитическое решение не превышает 1390 строк в среде АСУ IDE CBuilder. Оптимизация решений зависит от требуемых задач и полезной нагрузки.

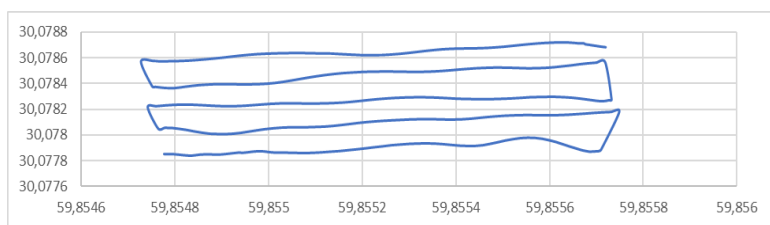


Рис.2 Трек прохода катера в автономном режиме

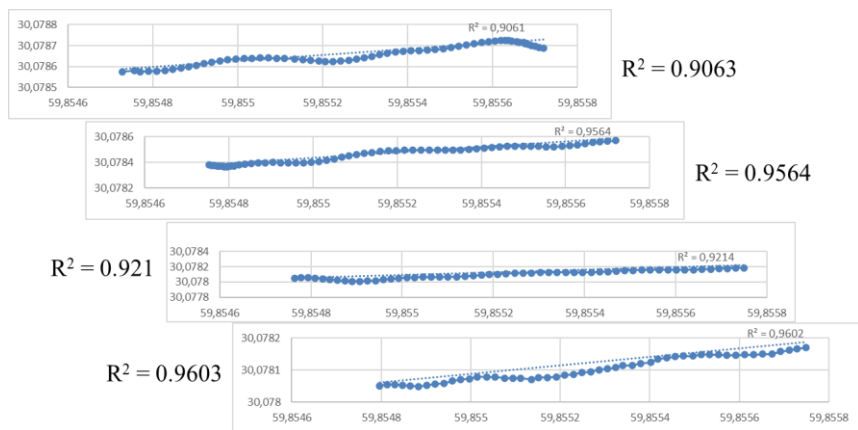


Рис.3 Обоснование адекватности модели с использованием методов математической статистики

В ходе испытаний катер уверенно обеспечивал заданную точность при движении по маршруту (отклонение до 1 м).

Среднеквадратичное отклонение катера от оси маршрута R^2 составило от 0,9063 до 0,9603, что равно абсолютному отклонению от оси маршрута 0,4–1 м.

Проблемным остается скорость распознавания объектов навигационной обстановки и его обработка для выдачи нужной команды в автоматизированной системе управления. Сегодня существуют способы распознавания специализированными камерами высокого разрешения. В работе [14] подробно описан способ и алгоритм автоматического обнаружения и сопровождения объектов на морской поверхности без использования жёстко запрограммированных эталонных изображений. Где алгоритм основывается на пространственно-временном анализе потока полутоновых изображений видимого диапазона с оптико-электронной системы, установленной на борту безэкипажного катера [14].

Вместе с тем, авторы статьи не ставили целью использование дополнительных методов навигации, также как затраты на энергоресурсы обработки данных, так как апробация проходила как в модельном испытании с использованием ЭВМ «Программное средство системы автоматического управления судном, катером в условиях стесненного фарватера», так и в натурном на катере, где ПО управляло двумя движителями катера через микро-контроллер, используя разработанный алгоритм, корректируя ошибку с помощью датчика (Д)ГНСС GPS/ГЛОНАСС.

Использование искусственного интеллекта и правильно обученной нейросети позволит ускорить обработку навигационной информации, в частности оптимизации решений уравнений.

5. Обсуждение

Таким образом, в первом разделе было получено решение исходной полулинейной модели движения судна, найденное с использованием метода возмущений и содержащее линейную и угловую скорости в следующем виде:

$$(35) \quad \begin{aligned} V_x &= V_x^{(0)} + \varepsilon V_x^{(1)} = V_x^{(0)} + \lambda_{26} \tilde{V}_x^{(1)}, \\ V_y &= V_y^{(0)} + \varepsilon V_y^{(1)} = V_y^{(0)} + \lambda_{26} \tilde{V}_y^{(1)}, \end{aligned}$$

$$\omega = \omega^{(0)} + \lambda_{26} \tilde{\omega}^{(1)},$$

$$\tilde{V}_x^{(1)} = \frac{V_x^{(1)}}{\sigma}, \tilde{V}_y^{(1)} = \frac{V_y^{(1)}}{\sigma}, \tilde{\omega}^{(1)} = \frac{\omega^{(1)}}{\sigma}.$$

Величины, входящие в (35) определяются формулами (3), (10), (11), (13), (18), (21), (25), (26). Полученные решения позволяют учесть влияние всех основных параметров на линейную и угловую скорости. При этом компоненты линейной скорости зависят от тригонометрических функций и интегральных синуса и косинуса. Что касается угловой скорости, то из формул (3) и (18) следует, что линейное увеличение угловой скорости с течением времени должно быть ограничено, что достигается за счет перекадки руля. Также на изменение угловой скорости, обусловленное возмущением, влияет y – компонента линейной скорости. Малый параметр может быть выбран тем или иным способом в соответствии с формулами (14) в зависимости от конкретных значений параметров задачи.

Отметим, что значение малого параметра ε_5 зависит только от величин, включенных в задачу Коши (1)–(2) и не зависит в явной форме от характерного размера судна. Используя метод возмущений, можно получить добавки к скоростям квадратичного порядка по ε (и более высоких порядков), но при этом величины вкладов не оправдывают возрастающей сложности получающихся дифференциальных уравнений.

Учитывая выражение для λ_{26} (30) как параметра, непосредственно связанного с использованием метода возмущений, можно сделать оценку величины вклада. Мы сделали такую оценку по реальным данным. Были рассмотрены данные судна сухогруза проекта 1743 (Омский): длина $L = 108,4$ м, ширина $B = 15,2$ м, $T = 3,3$ м. Считалось, что на угловую скорость влияет только момент, вызванный волной (волна принималась равной

4 баллам по шкале Бофорта), время поворота определялось по формуле (3) и по значению предельного угла:

$$\omega_0 t^* + \frac{M(t^*)^2}{2(I_z + \lambda_{66})} = \psi_{lim}.$$

Необходимые формулы для расчета были взяты из [3]. Оценка вклада $\varepsilon\omega^{(1)}$ по отношению к $\omega^{(0)}$, обусловленного только моментом при нерегулярном волнении, составляет около 3%, что является небольшой величиной. В целом при рассмотрении суммарного момента и суммарных сил вклад увеличивается, но малость реальных значений ε позволяет применять метод возмущений.

В третьем разделе рассматривается влияние изменения плотности воды в основном за счёт изменения солёности (температура учитывается в среднем). Рассматривается влияние солёности в виде кусочно-постоянной функции и кусочно-линейной функции. Поскольку полученное в первом разделе решение для скорости V_x позволяет определить путём интегрирования координату $x(t)$, то, как показано в разделе 3, по гидрометеорологическим данным можно определять значение плотности воды в зависимости от солёности и в общем случае от температуры на том или ином промежутке пути. Определив плотность, можно найти массу водоизмещения на выбранном отрезке и соответственно учесть изменение параметров задачи, зависящих от массы или плотности.

В разделе анализируются такие зависимости. В частности, показано, что малые параметры ε_3 , ε_4 не зависят от плотности воды или массы m_i и могут быть использованы для расчётов на всём пути следования судна независимо от неоднородности бассейна. В разделе 3 показана модификация решений первого раздела для скоростей V_x , V_y , ω , которую необходимо сделать для уточнения величин скоростей на разных участках траектории по мере движения корабля.

Таким образом, в статье предложен аналитико-численный метод моделирования плоско-параллельного движения судна, учитывающий влияние неоднородности водного бассейна на основе гидрометеорологических данных. В разделе 3 показано

влияние неоднородности водной среды на скорости движения корабля через параметры исходной динамической системы (1) с начальными данными (2).

В частности, в решения для скоростей (3'), (10)–(11) и соответственно для скоростей, найденных с учётом метода возмущений, входит параметр γ , непосредственно связанный с начальной угловой скоростью ω_0 . Параметр γ зависит от массы m_i . Поэтому он будет меняться в зависимости от солёности.

Поскольку данный параметр пропорционален ω_0 , то даже небольшое изменение массы может оказать заметное влияние на скорость при выходе на фарватер из зоны условно стоячей воды. Отметим, что в работе [26] при проведении модельного эксперимента, поставленного с целью исследования явления Экмана, показано заметное усиление эффекта на начальном этапе движения судна.

По результатам испытаний отработки алгоритма на реальном катере была подтверждена его адекватность, что продемонстрировала точность позиционирования катера на линии маршрута с отклонением до 1 метра.

6. Заключение

Методом возмущений получено аналитическое решение нелинейной динамической системы, являющейся моделью плоскопараллельного движения судна. Полученные решения позволяют учесть влияние всех основных параметров на линейную и угловую скорости. Показано, что компоненты линейной скорости зависят от тригонометрических функций и интегральных синуса и косинуса. Проанализированы малые параметры, выбор которых определяется конкретными параметрами задачи. Показано влияние линейной скорости на угловую скорость, обусловленное нелинейностью задачи. Рассмотрено влияние солёности и температуры на скорость движения судна. Влияние солёности рассмотрено в виде кусочно-постоянной функции и кусочно-линейной функции. Оно обусловлено изменением плотности воды на различных отрезках пути движения корабля. Показана модификация решений для скоростей V_x , V_y , ω , которую необ-

ходима для уточнения их величин на разных участках траектории. Предложен аналитико-численный метод моделирования плоскопараллельного движения судна, учитывающий влияние неоднородности водного бассейна на основе гидрометеорологических данных.

С учетом успешной апробации на натурной модели, полученные решения могут быть использованы для проектирования обратной связи в системе автоматического управления движением судна по ограниченному фарватеру.

Литература

1. АБДУЛЛАЕВА З.М. *Моделирование движения судна на мелководье по заданной траектории при переменной глубине* // Вестник ДагГТУ: Технические науки. – 2017. – №1. – 10 с.
2. БАСИН А.М. *Ходкость и управляемость судов*. – Л.: 1977. – 455 с.
3. ВОЙТКУНСКИЙ Я.И., ПЕРШИЦ Р.Я., ТИТОВ И.А. *Справочник по теории корабля*. Л: Судостроение, 1978. – 382с.
4. ГОЛИКОВ В.В., МАЛЫЦЕВ С.Э. *Анализ вектора смещения пути судна от ветра* // Морской и речной транспорт. №1, 2015. – С.29-35
5. ГОФМАН А.Д. *Движительно-рулевой комплекс и маневрирование судна*. – Л.: Судостроение, 1988. – 360 с.
6. КАМКЕ Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям* // Под ред. Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
7. КОСТЮКОВ В.А., МАЕВСКИЙ А.М., ГУРЕНКО Б.В. *Математическая модель надводного мини-корабля* // Инженерный вестник Дона. – 2015. – №3. – 18 с.
8. КЛЮЕВА С.Ф., ЗАВЬЯЛОВ В.В. *Синтез алгоритмов батиметрических систем навигации*. – Владивосток: Мор. гос. ун-т, 2013. – 132 с.
9. ПАВЛЕНКО В.Г., АНФИМОВ В.Н., ВАГАНОВ Г.И. *Судовые тяговые расчеты* // Под ред. В.Г.Павленко. – М.: Транспорт, 1978. – 216 с.

10. ПАВЛЕНКО В.Г. *Маневренные качества речных судов.* – М.: Транспорт, 1979. – 184 с.
11. ПЕЧЕНЮК А.В. *Численное моделирование обтекания корпуса судна в условиях мелководья.* – ООО «Digital Marine Technology», 2005. – 10 с.
12. СОЛЯКОВ О.В., СОКОЛОВ С.С., ЯКУНЧИКОВ В.В. *Методическое обеспечение управления автономными надводными судами внутреннего водного плавания* // Системный анализ, управление и обработка информации. Известия ТулГУ. Технические науки. – 2024. – Вып. 9. – С. 393–401. – DOI: 10.24412/2071-6168-2024-9-393-394.
13. СОЛОВЬЕВ А.А. и др. *Применение метода пропорциональной навигации при решении задач судовождения* // Вестник МГТУ. – 2022. – Т. 25, №4. – С. 400–408. – DOI: 10.21443/1560-9278-2022-25-4-400-408.
14. ТУПИКОВ В.А., ПАВЛОВА В.А., БОНДАРЕНКО В.А. и др. *Способ автоматического обнаружения объектов на морской поверхности в видимом диапазоне* // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2016. – Вып. 11, Ч. 3. – С. 105–121
15. ТУМАШИК А.П. *Расчет гидродинамических характеристик судна при маневрировании.* – Л.: Судостроение, 1978. – 80 с.
16. ЮДИН Ю.И. *Идентификации математической модели судна.* – М: Моркнига, 2015. – 157 с.
17. ЮДИН Ю.И., СОТНИКОВ И.И. *Математические модели плоскопараллельного движения судна. Классификация и критический анализ* // Вестник МГТУ. – 2006. – Т. 9, №2. – С. 200–208
18. ЮРКАНСКИЙ А.В. *Исследование управляемости судов в условиях ветра и волнения.* Автореферат дисс. ... канд. техн. наук. – СПб, 2006. – 28 с.
19. AUNG MYAT THU, EIEI HTWE, HTAY HTAY WIN *Mathematical Modeling of a Ship Motion in Waves under Coupled Motions* // Int. Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS). – 2015. – Vol. 2, Iss. 12. – P. 97–102.

20. CHEN, SHIGEAKI SHIOTANI, KENJI SASA *Numerical ship navigation based on weather and ocean simulation* // Ocean Engineering. – 2013. – Vol. 69. – P. 44–53.
21. DONNARUMMA S.; MARTELLI M.; VIGNOLO S. *Numerical models for ship dynamic positioning* // "MARINE VI : Proc. of the VI Int. Conf. on Computational Methods in Marine Engineering". – CIMNE, 2015. – P. 1078–1088.
22. EMRE UZUNOGLU *Numerical and Experimental Study of Parametric Rolling of a Container Ship in Waves. Centre of Marine Technology*. – Technical University of Lisbon, 2011. – 98 p.
23. HENRY PETER PIEHL. *Ship roll damping analysis / Genehmigte Dissertation Universität Duisburg-Essen*. – Hamburg, 2016. – 178c.
24. HINOSTROZA M.A. et al. *Ship Movements' Analysis In a Scale Model* // 10th Congresso Nacional de Mecanica Experimental, CNME, 2016. – 12 p.
25. IBRAHIM R.A., GRACE I.M. *Modeling of Ship Roll Dynamics and Its Coupling with Heave and Pitch*. // Mathematical Problems in Engineering. – 2010. – Wayne State University, Detroit, USA. – 32 p.
26. MERCIER M.J., VASSEUR R., DAUXOIS T. *Resurrecting Dead-water Phenomenon* // Nonlinear Processes in Geophysics. – 2011. – Vol. 18 (2). – P. 193–208
27. SOLYAKOV O.V., UVAROVA L.A., YAKUNCHIKOV V.V. et al. *Movement Based on a Semi-linear System of Differential Equations using the Perturbation Method* // IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science. – 2021. – Vol. 666. – Int. Science and Technology Conference "Earth Science", 8–10 December 2020, Vladivostok, Russia. – 052087 – 6 p.

**MODELING OF PLANE-PARALLEL MOTION
OF A VESSEL BASED ON A NONLINEAR DYNAMIC
SYSTEM WITH VARYING PARAMETERS USING
THE PERTURBATION METHOD AND ITS
EXPERIMENTAL VERIFICATION**

Oleg Soliakov, Russian University of Transport, Moscow, Cand.Sc.,
Assistant Professor (solyakov1@yandex.ru).

Ludmila Uvarova, Moscow State University of Technology «STANKIN», Moscow, Doct.Sc., Professor (uvar11@yandex.ru).

Abstract: The analytical solution of a nonlinear dynamic system, which is a model of plane-parallel motion of a vessel, was obtained by the perturbation method. The solutions obtained allow us to take into account the influence of all the main parameters on linear and angular velocities. Small parameters are analyzed, the choice of which is determined by the specific parameters of the task. The influence of linear velocity on angular velocity due to the nonlinearity of the back is shown. The influence of the static moment on each of the velocity components is shown. The influence of salinity and temperature and, consequently, density on the parameters of the system and, as a result, on the speed of the vessel is considered. The effect of salinity is considered in the form of a piecewise constant function and a piecewise linear function. A modification of the solutions for velocities is shown, which must be done to clarify their values in different sections of the trajectory. An analytical and numerical method for modeling the plane-parallel motion of a vessel is proposed, taking into account the influence of heterogeneity of the water basin on the basis of hydrometeorological data. The obtained solutions can be used to automate the movement of a vessel along a limited fairway using an automatic control system.

Keywords: mathematical modeling, water transport, dynamic nonlinear systems, perturbation methods, salinity.

УДК 519.8

ББК 22.16

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии Н.А. Коргиным.*

Поступила в редакцию 22.02.2025.

Опубликована 31.07.2025.

МОДЕЛИ И МЕТОДЫ МАРШРУТИЗАЦИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ РЕСУРСОВ В СЕТЯХ ДОСТАВКИ КОНТЕНТА НА ОСНОВЕ ОТЕЧЕСТВЕННОГО ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Прокуровский А. А.¹, Тутова Н. В.², Андреев И. А.³
*(Московский технический университет связи
и информатики, Москва)*

Сети доставки контента предназначены для ускорения загрузки веб-сайтов, приложений и другого цифрового контента для пользователей, находящихся в различных регионах. Основная цель таких сетей заключается в том, чтобы уменьшить задержку при передаче данных между сервером и пользователем, обеспечивая быструю доставку контента независимо от географического положения пользователя. Импортзамещение сетей доставки контента является актуальной и важной научно-технической задачей. В работе предложены модели и методы эффективного распределения цифровых информационных ресурсов в сети доставки контента эффективного распределения цифровых информационных ресурсов в сети доставки контента с кэшированием контента на пограничных серверах. Сеть доставки контента впервые реализована в отечественном программном продукте 1С:Шина. Для решения поставленных задач оптимизации использовался муравьиный алгоритм, который позволяет найти эффективное решение в вычислительных сложных задачах с большой размерностью за приемлемое время. Приведено описание эксперимента с использованием существующей инфраструктуры сети доставки контента и показана эффективность предложенного метода. По сравнению с случайным формированием маршрута предложенные методы формирования маршрута позволяют ускорить загрузку контента до 20%. Многопоточная передача позволила ускорить загрузку контента еще в два раза.

Ключевые слова: сеть доставки контента, распределение контента, цифровые ресурсы, муравьиный алгоритм, поиск минимального пути, 1С:Шина.

¹ Алексей Андреевич Прокуровский, аспирант (a.a.prokurovskiy@mtuci.ru).

² Наталья Владимировна Тутова, к.т.н., доцент (n.v.tutova@mtuci.ru).

³ Илья Александрович Андреев, к.э.н. (kis.dep@mtuci.ru).

1. Введение

Сети доставки контента (Content Delivery Network, CDN) предназначены для ускорения загрузки веб-сайтов, приложений и другого цифрового контента для пользователей по всему миру. CDN широко используются в приложениях, где требуется быстрая доставка видеоконтента пользователям, таких как видеохостинги (YouTube, RuTube), социальные сети, онлайн-магазины, игровые платформы, где важна минимальная задержка при передаче игровых данных. Среди крупнейших сетей доставки контента можно выделить Akamai CDN, которая обрабатывает от 20% до 30% всего веб-трафика. Другим примером сети является Amazon Cloudfront, поддерживающая более 100 пограничных узлов по всему миру [18].

CDN кэширует часто запрашиваемые статические файлы, например, изображения, видео, CSS-файлы, JavaScript-коды, что ускоряет их повторную загрузку. Когда пользователь повторно обращается к сайту, ему передается уже закэшированный контент с ближайшего сервера, что уменьшает нагрузку на исходный сервер и сокращает время отклика. За счет резервирования повышается надежность и отказоустойчивость сети.

Сети доставки контента находят применение и в новых приложениях, таких как мониторинг транспортных средств, мониторинг беспилотных летательных аппаратов, умное здравоохранение, умные города и электронное обучение [18].

В области электронного обучения были разработаны отдельные прототипы CDN [14, 16], но они были построены на иностранном программном обеспечении.

Однако в текущих условиях возникла необходимость импортозамещения и разработки отечественного программного обеспечения, что указано в соответствующих национальных программах «Цифровая экономика Российской Федерации» и «Экономика данных и цифровая трансформация государства».

1С:Шина – это технология, разработанная компанией «1С» для обеспечения взаимодействия между различными программными продуктами линейки 1С через защищенные каналы связи. Она позволяет организовать обмен данными и сервисами между

приложениями, работающими на разных платформах и в различных сетях, обеспечивая при этом безопасность передачи данных. В настоящее время 1С:Шина является важным инструментом для создания комплексных информационных систем на базе продуктов 1С, обеспечивающим надёжную и безопасную связь между ними.

В данной работе представлены модели и методы маршрутизации контента и их реализация в сеть доставки контента для дистанционного обучения на основе отечественного программного обеспечения 1С:Шина.

2. Выбор кэширующего сервера и маршрутизация контента в CDN

В CDN можно выделить следующие подсистемы, отвечающие за функционирование сети [12, 18].

- Подсистема перенаправления запроса на выбранный сервер. Обеспечивает перенаправление запроса на ближайший подходящий кэширующий сервер.
- Подсистема распределения и управления контентом. Отвечает за управление кэшами, обновление данных на серверах и другие подобные задачи.
- Подсистема учета и аналитики. Проводит измерения параметров работы сети, собирает данные о доступе к серверам и использовании контента.

Существует три основные модели для распространения контента с исходных серверов на пограничные серверы [13, 15].

- push-модель: контент заранее распространяется, если ожидается его запрос на пограничном сервере;
- pull-модель: пограничный сервер извлекает контент с исходного сервера при получении запроса от конечного пользователя; такая модель используется в большинстве CDN в связи с простотой реализации;
- гибридная push-pull-модель динамически адаптируется к изменяющимся запросам конечного пользователя, проактивно проталкивая часть контента и реактивно извлекая другой кон-

тент. В частности, в сети Akamai для определения маршрута доставки контента используется фирменный алгоритм SureRoute [17]. Принцип работы данного алгоритма заключается в следующем: на исходном сервере размещается тестовый объект. С заданной периодичностью проводятся «гонки» по извлечению данного объекта пограничным сервером с источника по трем доступным маршрутам. Минимальный по длительности маршрут отмечается и считается основным до тех пор, пока не будет найден другой маршрут. Недостатком такого подхода является то, что создается дополнительный трафик для постоянного тестирования маршрутов, что нагружает сеть.

В специализированных CDN гибридные алгоритмы могут дать лучший результат, если можно сделать достаточно точный прогноз использования контента. В данной работе предложены модели и методы маршрутизации контента в CDN для дистанционного обучения на основе гибридной модели кэширования.

3. Постановка задачи маршрутизации контента в CDN с кэшированием контента на промежуточных узлах

3.1. МОДЕЛЬ МАРШРУТИЗАЦИИ В ВИДЕ СВЯЗНОГО ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА

Сформулируем задачу распределения контента по всем узлам сети *CDN* в форме задачи оптимизации на графах. Рассмотрим связный ориентированный граф $G = (V, E, h)$ (рис. 1), в котором $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – конечное множество вершин, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ – конечное множество дуг, $h : E \rightarrow Z_+$ – весовая функция дуг.

Контент распространяется по всем узлам сети, и желательно это сделать оптимальным образом с учетом значений весовой функции дуг: $c_{ij} = h(e_k)$, где дуга $e_k \in E$ соответствует упорядоченной паре вершин (v_i, v_j) . Значения весовой функции дуг $c_{ij} = h(v_i, v_j)$ соответствуют длине участка сети от i -го узла до j -го. Длина любого подмножества дуг $E_k \subset E$ в графе G равна сумме весов дуг, входящих в это подмножество.

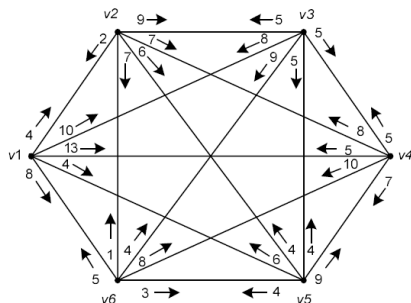


Рис. 1. Иллюстрация задачи маршрутизации контента в CDN
в виде связанного ориентированного графа

Требуется определить такое подмножество дуг, которое образует в графе G замкнутый путь, проходит через каждую вершину ровно один раз и обладает минимальной длиной.

Не все узлы CDN могут быть включены в рассмотрение. Это зависит от прогноза использования контента на кэширующих узлах. Например, если пользователи, записанные на онлайн-курс, просмотрели первый урок, то с большой степенью вероятности они перейдут ко второму уроку. Главное, чтобы граф оставался связным, что в условиях работы в интернете легко реализуется.

Данная постановка задачи соответствует известной задаче коммивояжера и может быть представлена в виде модели булева программирования.

Пусть булевы переменные x_{ij} означают, входит ли дуга (v_i, v_j) в искомый маршрут. Если переменная $x_{ij} = 1$, то дуга (v_i, v_j) входит, т.е. контент передается непосредственно из i -го узла в j -й узел, а если $x_{ij} = 0$, то соответствующая дуга не входит в маршрут.

Тогда математическая постановка задачи маршрутизации контента с кэшированием на всех узлах сети может быть сформулирована следующим образом:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad x \in \Delta_\beta,$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}); \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}); \\ u_i - u_j + n \cdot x_{ij} \leq n - 1 \quad (\forall i, j \in \{2, 3, \dots, n\}, i \neq j); \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}); \\ u_i \in R^1, \quad (\forall i \in \{2, 3, \dots, n\}). \end{array} \right.$$

В данной математической модели используются также вспомогательные переменные u_i ($\forall i \in \{2, 3, \dots, n\}$), которые могут принимать любые действительные значения. При этом первое и второе ограничения в системе (2) обеспечивают выполнение условий, что искомым путь должен проходить через каждую вершину графа ровно один раз. Третья группа ограничений обеспечивает выполнение условий, что искомым путь не должен распадаться на отдельные циклы. Всего в задаче $n^2 - n + 2$ ограничений.

3.2. МОДЕЛЬ МАРШРУТИЗАЦИИ В ВИДЕ НЕСВЯЗНОГО ОРИЕНТИРОВАННОГО ГРАФА

Рассмотрим ориентированный граф, представленный на рис. 2, также состоящий из вершин, дуг и весовых коэффициентов дуг $G = (V, E, h)$.

Отличием данного графа от представленного на рис. 1, является его несвязность. Маршрут всегда начинается в вершине v_s , соответствующей основному узлу сети CDN, и заканчивается в конечной вершине v_t , соответствующей наиболее отдаленному серверу от основного узла. Длина любого маршрута в графе равна сумме весов дуг, входящих в этот маршрут. Веса дуг $c_{ij} = h(v_i, v_j)$ назначаются с учетом прогноза потребности пользователей контента в ближайшем будущем. Для образовательного контента данная потребность может быть оценена исходя из записей пользователей того или иного региона на онлайн-курсы.

Контент передаётся от узла к узлу сети и кэшируется на всех промежуточных узлах. Требуется определить маршрут минимальной длины из начальной вершины v_s в конечную вершину v_t .

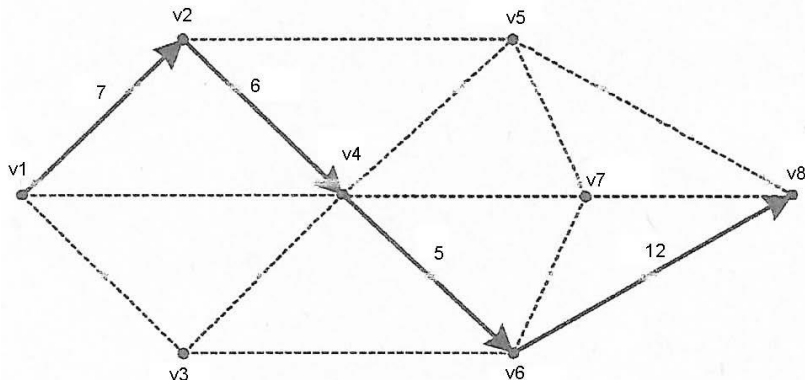


Рис. 2. Иллюстрация задачи нахождения минимального пути кэширования контента

Математическая постановка задачи о минимальном маршруте контента может быть сформулирована следующим образом:

$$(3) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad x \in \Delta_\beta,$$

где множество допустимых альтернатив Δ_β формируется следующей системой ограничений:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n x_{sj} - \sum_{i=1}^n x_{is} = 1; \\ \sum_{j=1}^n x_{tj} - \sum_{i=1}^n x_{it} = -1; \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} = 0 \quad (\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq s, i \neq t); \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad (\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}). \end{array} \right.$$

При этом первое ограничение (4) требует выполнения следующего условия – искомый путь должен начинаться в вершине v_s , второе ограничение задаёт, что искомый путь должен заканчиваться в вершине v_t . Третье ограничение гарантирует связность минимального пути, т.е. искомый путь должен проходить через промежуточные вершины графа. Общее количество ограничений (4) равно n .

4. Метод решения задач оптимизации

Метод муравьиных колоний – это один из эвристических методов оптимизации, который основан на поведении муравьёв в природе. Данный метод используется для решения различных задач оптимизации, таких как задача коммивояжера, задача маршрутизации и другие [1–3, 6–9]. В этих задачах необходимо найти оптимальный маршрут или распределение ресурсов, удовлетворяющее определённым ограничениям.

В основе метода лежит идея о том, что муравьи способны находить кратчайший путь от муравейника до источника пищи благодаря феромонам – особым химическим веществам, которые они оставляют на земле. Когда муравей находит источник пищи, он возвращается в муравейник, оставляя за собой след из феромонов. Другие муравьи следуют по этому следу и также находят пищу. Со временем след из феромонов испаряется и муравьи начинают искать новые пути. Если какой-то путь оказывается более коротким, то количество муравьёв, следующих по нему, увеличивается, а след из феромонов на этом пути становится более «заметным». Таким образом, муравьи постепенно находят кратчайший путь до источника пищи.

Суть метода заключается в следующем.

- Создаётся популяция муравьёв (или агентов), каждый из которых представляет возможное решение задачи.
- Муравьи перемещаются по графу задачи, выбирая следующий узел на основе вероятности, которая зависит от количества феромона на ребре и его качества (например, длины ребра).

- После каждого перемещения муравья количество феромона на рёбрах графа обновляется в соответствии с качеством найденного решения.

- Процесс повторяется до тех пор, пока не будет найдено приемлемое решение или не будет выполнено заданное количество итераций.

Преимуществом метода является его простота и эффективность при решении сложных задач оптимизации. Однако метод может потребовать большого количества итераций для нахождения хорошего решения. Параметры (скорость испарения, количество феромонов) могут сильно влиять на результаты. Иногда подвержен преждевременной сходимости (закрепляется на неоптимальном пути).

Рассмотрим основные блоки схемы алгоритма определения маршрута методом муравьиной колонии, приведенной на рис. 3:

- Начало: старт алгоритма.
- Инициализация параметров: на этом этапе задаются начальные параметры для работы алгоритма, такие как количество муравьёв, количество феромона и другие настройки.
- Качественный критерий пройден – проверяется, достигнуто ли удовлетворительное решение. Если да, алгоритм завершается.
- k = числу муравьёв – проверяется, прошло ли необходимое количество итераций для каждого муравья. Если нет, то происходит выбор следующего маршрута для муравья.
- Выбор маршрута k , оценка его стоимости: для текущего муравья k .
- k происходит выбор маршрута и оценка его стоимости (длины, стоимости и т.д.).
- Маршрут $k <$ текущего – проверка, является ли найденный маршрут короче текущего лучшего маршрута.
- Если да, феромон не добавляется.
- Если нет, происходит расчёт количества наносимого феромона.
- Нанесение феромона на маршрут: обновление количества феромонов на графе.

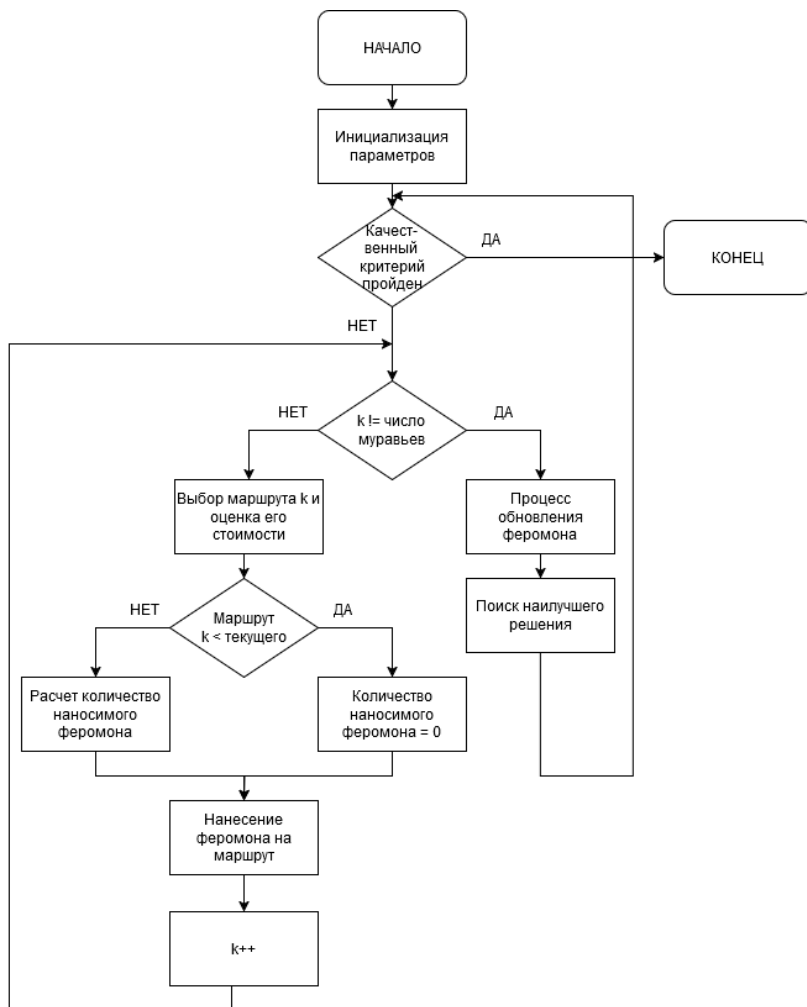


Рис. 3. Блок-схема алгоритма определения маршрута методом муравьиной колонии

- $k++$: увеличение счётчика муравьёв.
- Процесс обновления феромона: после того как все муравьи прошли свои маршруты, обновляется информация о феромонах.

- Поиск наилучшего решения: определяется текущее лучшее решение, исходя из найденных маршрутов.
- Конец: завершение работы алгоритма.

Таким образом, блок-схема описывает процесс итерационного поиска оптимального решения с использованием муравьиных агентов.

Вероятность выбора пути муравьём

Каждый муравей выбирает следующий узел (маршрут) на основе вероятности, которая зависит от количества феромонов и длины пути. Формула для вероятности выбора муравьём пути j из узла i такова:

$$P_{ij}(t) = \frac{[\tau_{ij}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{k \in N_i} [\tau_{ik}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ik}]^\beta},$$

где $P_{ij}(t)$ – вероятность, что муравей выберет узел j из узла i на итерации t ; $\tau_{ij}(t)$ – количество феромона на ребре (i, j) на итерации t ; $\eta_{ij} = \frac{1}{d_{ij}}$ – эвристическая информация, обратная длине

пути d_{ij} ; α – параметр, влияющий на важность феромона; β – параметр, влияющий на важность длины пути; N_i – множество доступных узлов для перехода из узла i .

Обновление феромонов

После того как все муравьи завершили свой путь, феромоны на каждом ребре обновляются по формуле

$$\tau_{ij}(t+1) = (1 - \rho) \cdot \tau_{ij}(t) + \sum_k \Delta\tau_{ij}^k(t),$$

где $\tau_{ij}(t+1)$ – новое значение феромона на ребре (i, j) ; ρ – коэффициент испарения феромона ($0 < \rho < 1$); $\Delta\tau_{ij}^k(t)$ – количество феромона, добавляемое муравьём k на ребро (i, j) , которое определяется как

$$\Delta\tau_{ij}^k(t) = \begin{cases} \frac{Q}{L_k}, & \text{если муравей } k \text{ прошёл через ребро } (i, j), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где Q – константа, представляющая общее количество феромонов, которые муравей может оставить; L_k – длина пути, пройденного муравьём k .

Испарение феромонов

Процесс испарения феромонов необходим для того, чтобы алгоритм не закикливался на локальных решениях и мог исследовать новые пути. Этот процесс моделируется уменьшением количества феромонов на каждом ребре:

$$\tau_{ij}(t+1) = (1 - \rho) \cdot \tau_{ij}(t).$$

Чем больше ρ , тем быстрее испаряются феромоны.

Функция стоимости (длина пути)

Для каждого муравья рассчитывается длина пути L_k , которую он прошёл за одну итерацию:

$$L_k = \sum_{(i,j) \in \text{путь муравья } k} d_{ij},$$

где d_{ij} – длина ребра между узлами i и j .

Лучший путь

На каждой итерации алгоритма также может сохраняться лучший найденный путь. Это используется для поиска глобально оптимального решения. Лучший путь B может обновляться либо каждый раз, когда найдено лучшее решение, либо с учётом нескольких итераций:

$$B = \min (L_k),$$

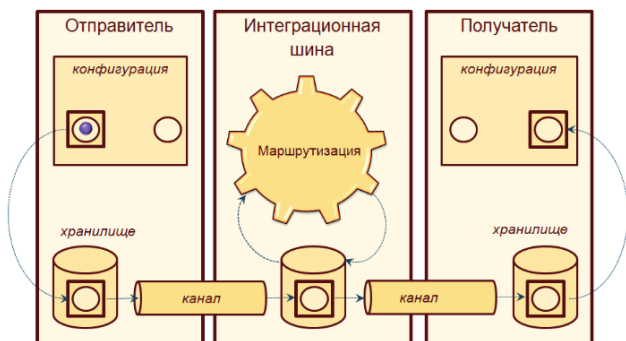
где L_k – длина пути, пройденного муравьём k .

5. Вычислительный эксперимент

5.1. ТЕСТОВЫЙ СТЕНД

Предложенный метод маршрутизации контента был внедрен в сеть доставки контента учебного центра 1С, служащую для распространения обучающих материалов, преимущественно в формате видеоуроков. Сеть имеет более 50 физических географически распределенных серверов в различных городах России. CDN реализована на интеграционной шине «1С:Шина», построенной на базе стандарта открытой архитектуры SOA, что обеспечивает возможность её применения не только для объ-

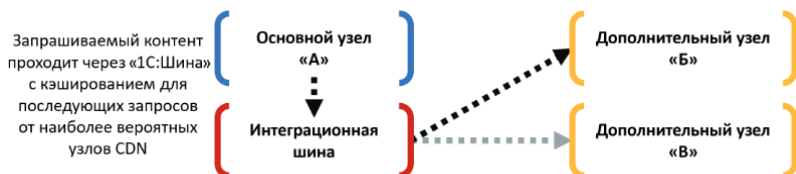
единения различных систем на платформе 1С, но и для взаимодействия с внешними системами [4]. Шина поддерживает открытые протоколы, такие как SOAP, REST, JMS и другие, благодаря чему она совместима с разными архитектурными решениями. Принцип функционирования интеграционной шины «1С:Шина» показан на рис. 4.



*Рис. 4. Принцип функционирования интеграционной шины
«1С:Шина»*

1С:Шина выполняет функции маршрутизатора данных между узлами, центра управления кэшированием и аналитического центра для мониторинга и оптимизации нагрузки на узлы сети доставки контента [11].

На рис. 5 схематично представлена интеграция 1С:Шины в CDN.



*Рис. 5. Схематическое представление интеграции 1С:Шины
в CDN*

В случае запроса контента узлом «Б» с основного сервера данные передаются через 1С:Шину по протоколу AMQP. При наличии промежуточных кэширующих узлов запрашиваемый контент будет кэшироваться на всех промежуточных узлах.

Для проведения экспериментов использовалась инфраструктура сети доставки контента, имеющая 57 физических узлов. Для масштабирования сети до 500 узлов были использованы контейнеры Docker, имеющие техническую конфигурацию, приведенную в таблицах 1 и 2. Использование принципа контейнеризации позволяет значительно повысить показатель устойчивости сети. Это связано с возможностью дополнительной инициализации необходимого количество контейнеров Docker в тех случаях, когда нагрузка на сеть характеризуется как повышенная или критическая.

Таблица 1. Конфигурация сервера с интеграционной шиной

Параметр	Значение
Операционная система	Linux (Ubuntu 24.0)
Оперативная память	8 GB RAM
Центральный процессор	4 ядра по 2.4 ГГц
Внешняя память	100 Гб (SSD)
Веб-сервер	Nginx
Интеграционная шина	1С:Шина

Таблица 2. Конфигурация кэширующих серверов сети доставки контента

Параметр	Значение
Операционная система	Linux (Ubuntu 24.0)
Оперативная память	4 GB RAM
Центральный процессор	4 ядра по 2.4 ГГц
Внешняя память	80 Гб (SSD)
Веб-сервер	Nginx
API сети доставки контента	Скрипт-файлы «1С:Исполнитель»

Для условного отображения построенной сети представлена схема-аналог из пяти узлов (рис. 6).



Рис. 6. Диаграмма тестовой сети доставки контента

5.2. МАСШТАБИРУЕМОСТЬ МУРАВЬИНОГО АЛГОРИТМА

Метод маршрутизации контента, использующий муравьиный алгоритм, реализован в интеграционной шине. Для того чтобы оценить масштабируемость муравьиного алгоритма было зафиксировано время формирования маршрута с числом узлов от 50 до 500. Результаты приведены на рис. 6.

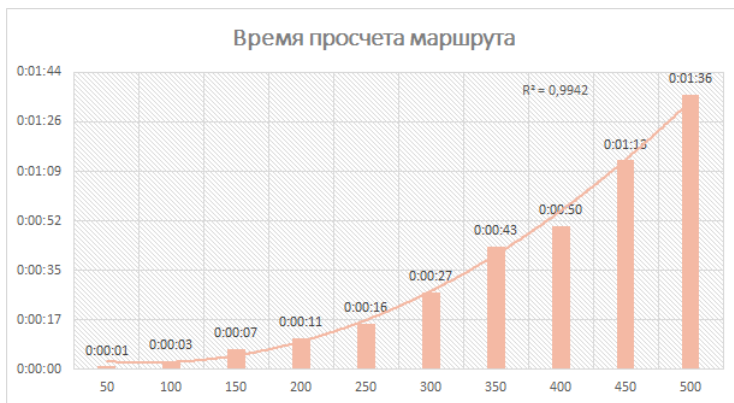


Рис. 7. Время просчета маршрута в зависимости
от размерности задачи

Муравьиный алгоритм позволяет получить маршрут за полиномиальное время ($O(n^2)$). Время просчета маршрута для 500 узлов составило 1 минуту 36 секунд, что позволяет использовать его в больших сетях.

5.3. ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДА МАРШРУТИЗАЦИИ

Для решения задачи было проведено несколько итераций эксперимента.

Сначала было реализовано кэширование контента на всех узлах с поэтапным распространением контента без использования какого-либо метода маршрутизации контента, когда каждый последующий промежуточный узел, на который будет передаваться файл, выбирался случайным образом. Далее был реализован предложенный метод маршрутизации.

В ходе экспериментов использовалось 50 файлов. Размер файлов варьировался от 1 Кб до 1 Гб. Скорость передачи и приема на узлах была ограничена 15 Мбайт/с. Передача осуществлялась последовательно. Фиксировалось суммарное время на передачу всех файлов. Максимальное число серверов – 500, а длительность загрузки составила 7 часов 20 минут для случайного формирования маршрута и 6 часов 14 минут предложенным методом.

Результаты эксперимента приведены на рис. 8. После внедрения алгоритма среднее время загрузки контента на кэширующие серверы уменьшилось в среднем на 17–20%.

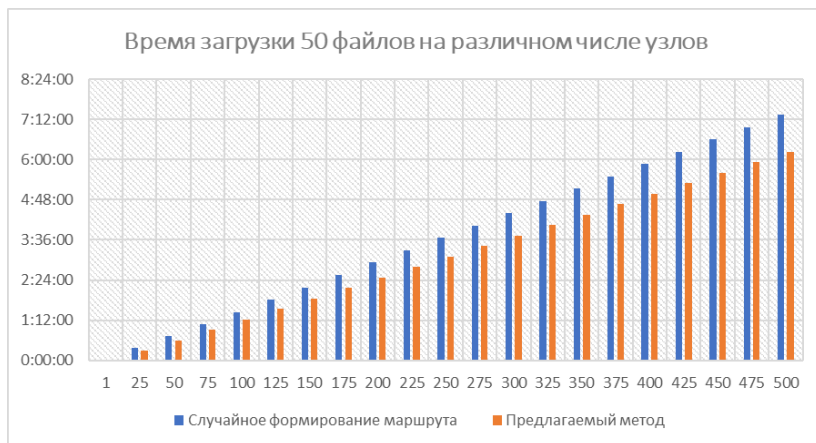


Рис. 8. Результаты эксперимента внедрения в CDN метода маршрутизации контента

Для повышения скорости загрузки контента была реализована многопоточная передача с каждого узла. Результаты эксперимента по передаче файла размером 1 Гб приведены в таблице 3 и на рис. 9.

Таблица 3. Время загрузки файла при однопоточной и многопоточной передаче в зависимости от числа узлов

Число узлов	Однопоточная передача	Многопоточная передача
1	00:00:25	00:00:14
5	00:02:06	00:01:10
10	00:04:13	00:02:20
15	00:06:19	00:03:31
20	00:08:25	00:04:41
25	00:10:32	00:05:51
30	00:12:38	00:07:01
35	00:14:44	00:08:11
40	00:16:51	00:09:21
45	00:18:57	00:10:32
50	00:21:03	00:11:42

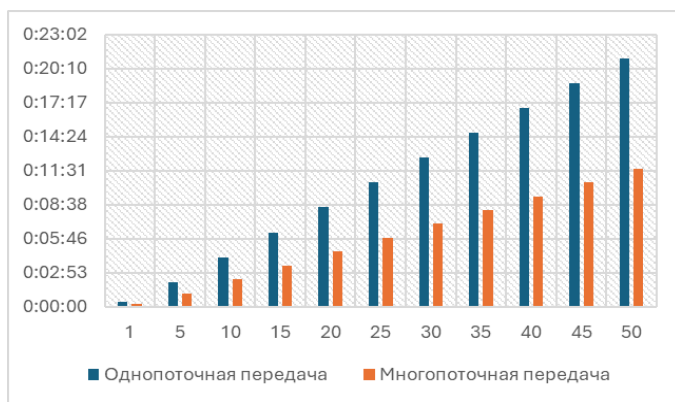


Рис.9. Длительность загрузки файла размером 1 Гб при однопоточной и многопоточной передаче в зависимости от числа узлов

Как видно, при многопоточной передаче длительность загрузки файлов сократилась еще почти в два раза.

6. Заключение

В работе предложены модели и методы маршрутизации контента в сети доставки контента, реализованной на отечественном программном продукте 1С:Шина. В основу методов положены задачи оптимизации коммивояжёра и о минимальном пути в направленном графе. Для решения поставленных задач использовался муравьиный метод, который позволяет найти эффективное решение в NP-полных задачах с большой размерностью за полиномиальное время. Приведено описание эксперимента с использованием реальной сети доставки контента и показана эффективность предложенных методов. По сравнению с случайным формированием маршрута предложенные методы формирования маршрута позволяют ускорить загрузку контента до 20%. Многопоточная передача позволила ускорить загрузку контента еще в два раза.

Литература

1. БОРОНИХИНА Е.А. и др. *Исследование гибридных эвристических методов решения задачи коммивояжера* // Материалы IV Международной молодежной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем». – 2016. – С. 7–10.
2. ВАСИЛЬЕВА Л.И., СУГАЛ Ф.Н., КАРТАК В.М. *Обзор алгоритмов построения маршрутов на примере задачи коммивояжера* // Современные проблемы и перспективы развития естествознания. – 2020. – С. 64–68.
3. ВАТУТИН Э.И., ТИТОВ В.С. *Анализ результатов применения алгоритма муравьиной колонии в задаче поиска пути в графе при наличии ограничений* // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2014. – №12(161). – С. 111–120.

4. ДИГО С.М., НУРАЛИЕВ Б.Г. *Взаимодействие экосистемы ИС с системой образования в эпоху цифровой экономики* // Новые информационные технологии в образовании. – 2022. – С. 7–24.
5. ИТУРРИАГА ФАБРА С.Д., НЕСМАЧНОВ КАНОВАС С.Е., ГОНИ БОФРИСКО Н. и др. *Конструирование и оптимизация сетей распространения контента* // Труды ИСП РАН. 2019. – №2. – URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/konstruirovanie-i-optimizatsiya-setey-rasprostraneniya-kontenta> (дата обращения: 02.01.2025).
6. ЛЕБЕДЕВ Б. и др. *Моделирование адаптивного поведения муравьиной колонии при поиске решений, интерпретируемых деревьями* // Известия Южного федерального университета. Технические науки. – 2012. – Т. 132, №7. – С. 27–34.
7. МЕЛЕХИН В.Б., ХАЧУМОВ М.В. *Об одном подходе решения задачи коммивояжера для планирования автономным беспилотным летательным аппаратом маршрутов облета целей* // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. – 2021. – Т. 48. – №1. – С. 108–118.
8. МУХИНА Д.А. *Муравьиный алгоритм в решении задачи маршрутизации транспорта* // В сб.: Информационные технологии и высокопроизводительные вычисления: Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции. – 2017. – С. 91–103.
9. ПОПОВ Д.В. *Некоторые аспекты развития практических методов решения задач класса NP* // Исторические, философские, методологические проблемы современной науки. – 2018. – С. 254–258.
10. ПРОКУРОВСКИЙ А.А., АНДРЕЕВ И.А., БУЛАНОВ Г.А. *Архитектура сети доставки контента на основе технологии блокчейна* // Технологии информационного общества. – 2022. – С. 245–247.
11. ПРОКУРОВСКИЙ А.А., АНДРЕЕВ И.А., ТУТОВА Н.В. *Повышение эффективности распределения ресурсов в сетях доставки образовательного контента с использовани-*

ем интеграционной шины «IC: Шина» // Информатика и образование. – 2024. – Т. 39, №4. – С. 90–95.

12. BUYYA R., PATHAN M., VAKALI A. (eds.). *Content delivery networks*. – Springer Science & Business Media, 2008. – Vol. 9.
13. CARLSSON N. et al. *Caching and optimized request routing in cloud-based content delivery systems* // Performance Evaluation. – 2014. – Vol. 79. – P. 38–55.
14. ESTEVE M. et al. *A streaming content distribution network for e-learning support* // Interactive Technology and Smart Education. – 2006. – Vol. 3, No. 1. – P. 9–19.
15. PODLIPNIG S., BÖSZÖRMENYI L. *A survey of web cache replacement strategies* // ACM Computing Surveys (CSUR). – 2003. – Vol. 35, No. 4. – P. 374–398.
16. SAFAVI M., BASTANI S., LANDFELDT B. *Online learning and placement algorithms for efficient delivery of user generated contents in telco-CDNs* // IEEE Trans. on Network and Service Management. – 2019. – Vol. 17, No. 1. – P. 637–651.
17. *SureRoute*, – URL: <https://techdocs.akamai.com/property-mgr/docs/sureroute-beh> (дата обращения: 19.04.2025).
18. ZOLFAGHARI B. et al. *Content delivery networks: State of the art, trends, and future roadmap* // ACM Computing Surveys (CSUR). – 2020. – Vol. 53, No. 2. – P. 1–34.

ROUTING MODELS AND METHODS OF INFORMATION RESOURCES ON THE CONTENT DELIVERY NETWORK BASED ON DOMESTIC SOFTWARE

Alexey Prokurovsky, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Postgraduate (a.a.prokurovskiy@mtuci.ru).

Natalia Toutova, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Assistant Professor (n.v.tutova@mtuci.ru).

Iliya Andreev, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Assistant Professor (kis.dep@mtuci.ru).

Abstract: Content Delivery Networks are designed to accelerate the loading of web-sites, applications and other digital content for users located in different regions.

*Программы и системы моделирования объектов,
средств и систем управления*

The main goal of such networks is to reduce the delay in data transmission between the server and the user, ensuring fast content delivery regardless of the user's geographic location. Import substitution of content delivery networks is a relevant and important scientific and technical task. The paper proposes a method for efficient distribution of digital information resources in a content delivery network implemented on the domestic software product 1C:Bus. The method is based on the problem of optimizing the route for placing content on caching servers, which corresponds to the problem of the minimum path in a directed graph. To solve the problem, we used the ant colony method to find an efficient solution in the computationally complex problem in an acceptable time. Compared with random route generation, the proposed route generation methods can speed up content loading by up to 20%. Multithreaded transmission made it possible to speed up content loading by two more times.

Keywords: content delivery network, content distribution, digital resources, ant colony algorithm, minimum path search, 1C:Bus.

УДК 004.41

ББК 32.972

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.А. Печниковым.*

Поступила в редакцию 24.01.2025.

Опубликована 31.07.2025.

АНАЛИЗ СПОСОБОВ КОМПЕНСАЦИИ НАВЕДЕННОЙ ПОМЕХИ И МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЫ МЕТОДОМ ИНВЕРСИИ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДАННЫХ АЭРОЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

**Власов Л. Н.¹, Каплун Д. В.², Третьякова Е. А.³,
Хлюстов Д. К.⁴**

**(ФГБУН Институт проблем управления
им. В. А. Трапезникова РАН, Москва)**

Проведено сравнение различных методов компенсации наведенной помехи для системы ЭКВАТОР и нескольких модификаций бортовой электромагнитной системы «ЕМ4Н»: с петлей передатчика, закрепленной на фюзеляже самолета, и с петлей, буксируемой вертолетом. Рассмотрены два способа моделирования помех сигналов передатчиков: в виде стационарной систематической составляющей измерений и в виде стационарного вектора поля, жестко связанного с передатчиком. Для реализации второго подхода в «ЕМ4Н» и ЭКВАТОР используются два дополнительных диполя для определения взаимного расположения передатчика и приемника, а именно радиус-вектора и углов ориентации. На большой высоте при отсутствии отклика от земли анализировались следующие статистические параметры сигналов, оставшихся после компенсации помех: среднеквадратическое отклонение и разность минимального и максимального значений. Показано, что наилучший результат компенсации дает подход, при котором учитывается перемещение приемника относительно источника поля. Следующим после компенсации этапом обработки являлась интерпретация данных, направленная на выявление значимых геофизических характеристик. Для каждой из рассматриваемых систем были построены разрезы удельных электрических сопротивлений, полученные в результате решения соответствующей стохастической задачи оценивания с использованием фильтра Калмана, для которых было проведено сравнение разрешающей способности.

Ключевые слова: аэроэлектроразведка, компенсация, переменное электромагнитное поле, источник, приёмник, магнитный диполь, одномерная модель, фильтр Калмана, ЕМ4Н, ЭКВАТОР.

¹ Лев Николаевич Власов, вед. инженер (Leo_Vlassov@yahoo.com).

² Дмитрий Владимирович Каплун, вед. инженер (dvkaplun@yandex.ru).

³ Екатерина Алексеевна Третьякова, м.н.с. (ekaterina_tretikova@mail.ru).

⁴ Дмитрий Кириллович Хлюстов, аспирант (hlustov.d@gmail.com).

1. Введение

Аэроэлектроразведка является одним из наиболее популярных геофизических методов, используемых при разведке полезных ископаемых во всем мире [5, 10, 12, 14]. В разных странах создано большое количество аэроэлектроразведочных систем, отличающихся как конструкцией передатчика и приемника, так и способами компенсации различных помех.

Разработчики всех видов систем постоянно повышают чувствительность измерительной аппаратуры. В связи с этим необходимо проводить анализ соответствия методов компенсации помех уровню чувствительности. В первой части данной работы анализируется соответствие существующих моделей и методов компенсации помех современному уровню чувствительности аппаратуры.

Кроме того, постоянно совершенствуются методы интерпретации данных электроразведки. Одним из методов интерпретации является одномерная инверсия, в результате которой получается модель среды в виде набора горизонтальных слоев с различным удельным сопротивлением.

Таким образом, обработка данных аэроэлектроразведки состоит из двух этапов. На первом этапе выполняется компенсация помех, на втором – построение модели среды.

Основным источником помех в аэроэлектроразведке являются неконтролируемые вихревые токи, возникающие в проводящих конструктивных элементах аэроэлектроразведочной системы. В случае, когда петли генератора, являющиеся источниками поля, установлены на самолете или вертолете, вихревые токи могут создавать поле, составляющее около 1% от поля генераторной петли. Это существенно затрудняет выделение вторичного поля на фоне первичного [15].

Наиболее простым способом является задание модели поля вихревых токов в виде постоянного вектора. Этот способ ненадежен, так как поле вихревых токов зависит от изменяющегося взаимного расположения передатчика и приемника поля.

Более сложный способ основан на учете изменяющейся геометрии установки. Для определения взаимного расположе-

ния приемника и передатчика переменного магнитного поля, а именно радиус-вектора и углов ориентации, решается обратная задача. Она заключается в определении параметров источника магнитного поля по параметрам поля, которое измеряется приемником [6, 7, 13].

Анализ проводился с использованием данных систем ЕМ4Н и ЭКВАТОР, широко используемых в современных исследованиях [1, 2].

Данные, полученные на этапе компенсации, являются входными данными для выполнения одномерной инверсии.

Вторая часть настоящей статьи посвящена сравнению результатов обработки данных, полученных тремя конфигурациями систем: четырехчастотная самолетная система ЕМ4Н, установленная на самолете АН-3; буксируемая вертолетом Eurocopter AS350 В3 модификация той же четырехчастотной системы; буксируемая вертолетом Eurocopter AS350 В3 система ЭКВАТОР, производящая измерения в частотной и временной областях. Для всех вариантов произведена инверсия данных. Испытания проведены Норильским филиалом Института им. А. П. Карпинского по одному профилю, расположенному в Норильском районе.

2. Постановка задачи компенсации аэроэлектроразведочных данных

Аэроэлектроразведочное оборудование систем с контролируемым источником [3] включает в себя передатчик и приемник (рис. 1).

С помощью петли передатчика создается первичное поле. На удалении большем, чем диаметр петли, такое поле эквивалентно полю магнитного диполя с вектором магнитного момента $\mathbf{M}$, который направлен перпендикулярно плоскости петли, а его модуль $|\mathbf{M}| = ISn$, где I – сила тока в петле в амперах; S – площадь петли в квадратных метрах; n – количество витков провода в петле. Приемник рассматриваемых в работе систем располагается в буксируемой гондole и регистрирует параметры вторичного поля. При измерении переменного поля необхо-

можно учитывать поле вихревых токов. Оно возникает в токопроводящих элементах конструкции петли передатчика и может быть описано моделью диполя с моментом $\Delta \mathbf{M}$. Это влияние является причиной возникновения помех $\Delta \mathbf{H}$, которая на практике значительно больше амплитуды аномальной составляющей поля. Вектор $\Delta \mathbf{M}$ считается постоянным в системе координат, связанной с петлей передатчика, что вытекает из предположения о геометрической устойчивости электропроводящих частей самолета или других элементов, на которых закреплена петля. Вектор $\Delta \mathbf{H}$, измеряемый приемником, не является постоянным в его системе координат, так как изменяется взаимное расположение передатчика и приемника.

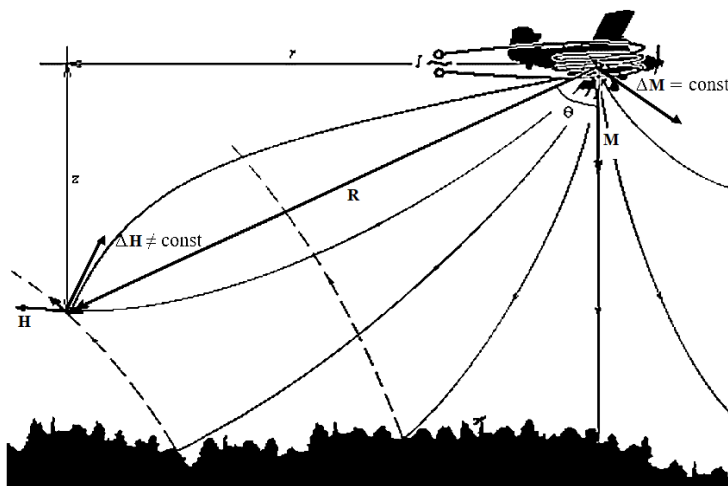


Рис. 1. Аэроэлектроразведочная система ЕМ4Н, самолетная модификация. $\mathbf{R}$ – радиус-вектор источник-приемник;

*$\mathbf{M}$ – вектор магнитного момента возбуждающего диполя;
 $\Delta \mathbf{M}$ – вектор магнитного момента наведенного поля; $\mathbf{H}$ – вектор напряженности поля возбуждающего диполя; $\Delta \mathbf{H}$ – вектор напряженности наведенного поля*

Очевидно, что влияние помех необходимо учитывать. Для этого проводится процедура компенсации, суть которой заклю-

чается в перемещении системы на большую высоту (500–700 м), где откликами от земли можно пренебречь, и в выполнении интенсивных эволюций, приводящих к существенным изменениям взаимного расположения передатчика и приемника. В процессе компенсации определяются параметры поля вихревых токов. Далее вносятся поправки в измерения поля на высоте съемки. Существуют различные подходы к методу компенсации. Если приемник совершает небольшие перемещения относительно передатчика, то можно принять допущение о постоянстве вектора наведенного поля $\Delta \mathbf{H}$ в системе координат, жестко связанной с приемником. Этот метод, основанный на вычитании постоянной составляющей, используется во многих современных системах и называется «nulling» (зануление).

Другой подход основан на учете изменчивости вектора $\Delta \mathbf{H}$. Для этого проводится анализ взаимного расположения передатчика и приемника, расстояние и угол между которыми постоянно меняются [15].

3. Методы компенсации с учетом изменения относительного положения передатчика и приемника

В данной работе рассматриваются электромагнитные системы, представляющие собой системы с контролируемым источником в виде горизонтальной петли с током. Нормальную составляющую поля можно представить через соотношение для точечного диполя. В работах [6, 7, 13] оно записано в системе координат приемника в матричной форме (1). Эта зависимость позволяет переписать соотношения для поля в виде

$$(1) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{4\pi |\mathbf{R}|^3} \left(3 \frac{\mathbf{R}\mathbf{R}^T}{|\mathbf{R}|^2} - \mathbf{I} \right) \mathbf{M} = \Omega(\mathbf{R})\mathbf{M},$$

где $\mathbf{H}$ — вектор магнитного поля; $\mathbf{R}$ — вектор положения приемника относительно передатчика; $\mathbf{M}$ — вектор магнитного момента диполя; $\mathbf{I}$ — единичная матрица 3×3 .

Согласно [1, 15], была выведена связь между измеряемым полем, генерируемым моментом и относительным положением передатчика и приемника. Она представлена матрицей $\Omega(r)$:

$$(2) \quad \Delta \mathbf{H} = \Omega(R) \Delta \mathbf{M}.$$

Компенсация с двумя дополнительными диполями.

В статьях [6, 7] показана возможность установки дополнительных петель на платформе передатчика, векторы дипольных магнитных моментов которых $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ позволяют определить базис и получить разложение вектора магнитного момента наведенной помехи $\Delta \mathbf{M}$ в этом базисе:

$$(3) \quad \Delta \mathbf{M} = k_0 \mathbf{M} + k_1 \mathbf{M}_1 + k_2 \mathbf{M}_2, \quad k_j \in \mathbf{R}.$$

Применяя (2), получим такое же представление вектора поля вихревых токов $\Delta \mathbf{H}$, при этом коэффициенты его линейного разложения в базисе векторов поля основного $\mathbf{H}$ и дополнительных диполей $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ будут такими же, как в выражении (3):

$$(4) \quad \Delta \mathbf{H} = k_0 \mathbf{H} + k_1 \mathbf{H}_1 + k_2 \mathbf{H}_2.$$

В отсутствие отклика вектор $\Delta \mathbf{H}$ должен быть равен 0. Это является основанием для постановки задачи оценивания коэффициентов k_0, k_1, k_2 методом наименьших квадратов. При этом необходимо учитывать, что измеряемый вектор $\mathbf{H}$ – это трехкомпонентный вектор амплитуды переменного магнитного поля определенной частоты ω . Каждая компонента этого вектора является комплексным числом. Если предположить, что ток в петле имеет форму $I(t) = I \cos(\omega t)$, то компоненты измеренного вектора поля будут иметь вид $\operatorname{Re} H_i \cos(\omega t) + \operatorname{Im} H_i \sin(\omega t)$, $i = 1, 2, 3$. Действительную часть комплексного вектора $\mathbf{H}$ также называют синфазной (т.е. совпадающей по фазе с первичным полем) компонентой, а мнимую – квадратурной. Таким образом, при реализации метода наименьших квадратов квадратурная составляющая поля минимизируется, а синфазная составляющая поля приводится к одному вектору, соответствующему полю на всех рабочих частотах диполя $\mathbf{M}$ (главный зондирующий диполь обычно возбуждает несколько гармоник).

Компенсация с одним дополнительным диполем.

Можно ли решить задачу компенсации, используя только один дополнительный диполь? В работе [9] отмечено, что решение есть. А именно, авторами предложен алгоритм решения задачи электромагнитного позиционирования вдоль поля двух диполей. В результате можно вывести следующие нелинейные выражения:

$$(5) \quad \mathbf{H}'_2 = \mathbf{F}_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}_1), \quad \mathbf{H}'_1 = \mathbf{F}_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}_2).$$

То есть мы можем заменить реально работающий диполь вектором, вычисленным, например, через векторное произведение двух имеющихся диполей:

$$(6) \quad \mathbf{H}'_2 = \Omega(\mathbf{R}) (\mathbf{M} \times \mathbf{M}_1), \quad \mathbf{H}'_1 = \Omega(\mathbf{R}) (\mathbf{M} \times \mathbf{M}_2).$$

Используя (5), можно перейти к линейной комбинации вектора поля вихревых токов, подставив полученную зависимость в выражение (4):

$$(7) \quad \Delta \mathbf{H} = k_0 \mathbf{H} + k_1 \mathbf{H}_1 + k_2 (\mathbf{F}_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}_1)),$$

$$(8) \quad \Delta \mathbf{H} = k_0 \mathbf{H} + k_1 (\mathbf{F}_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}_2)) + k_2 \mathbf{H}_2.$$

Перемещение носителя относительно профиля порождает колебательное движение приемника относительно передатчика, которое влияет на получаемые измерения. Для исключения колебательной составляющей из измерений учитывается относительное смещение. Важно, чтобы величина пространственного смещения приемника и передатчика не превышала 10 м. Это наблюдение позволяет надеяться, что зависимость (5) может быть линеаризована, при этом точность линейной аппроксимации будет достаточной для проведения компенсации. Тогда уравнения (7), (8) можно переписать в виде

$$(9) \quad \Delta \mathbf{H} = \rho_{01} \mathbf{H} + \rho_1 \mathbf{H}_1 = \rho_{02} \mathbf{H} + \rho_2 \mathbf{H}_2.$$

Следовательно, возможно использование только одного дополнительного диполя $\mathbf{M}_1$ или $\mathbf{M}_2$. Далее эта гипотеза проверяется на серии данных системы ЭКВАТОР и различных модификаций системы ЕМ4Н, полученных в ходе производственных полетов Норильского филиала ВСЕГЕИ им. А.П. Карпинского и АО «ГНПП «Аэрогеофизика».

4. Сравнение методов компенсации

Проведено сравнение различных способов компенсации для системы ЭКВАТОРА (рис. 3) и нескольких модификаций бортовой электромагнитной системы «ЕМ4Н»: с петлями, закрепленной на фюзеляже самолета Ан-3, и с петлями, буксируемой вертолетом Eurocopter AS350B3 (рис. 2).

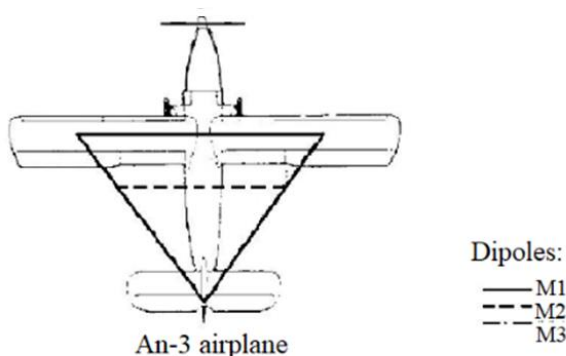


Рис. 2. Конструкция генераторных и компенсирующих петель самолетной модификации системы ЕМ4Н

В полете на большой высоте при отсутствии отклика с земли анализировались следующие статистические параметры сигналов, оставшихся после компенсации помех: среднеквадратическое отклонение и разность минимального и максимального значений. Результаты сравнения приведены в таблицах 1 и 2 и на рис. 4 и 5.

В таблицах приведены среднеквадратическое отклонение (СКО) и размах (максимум-минимум) для квадратурной составляющей поля. В идеальных условиях отсутствия помех оно должно быть равно нулю.

Значения приведены после компенсации систематического смещения приемника («nulling» (зануление), рис. 4б, рис. 5г), а также после определения геометрических параметров с ис-

пользованием первого (рис. 4а, рис. 5б), второго (рис. 5в) или двух (рис. 5а) дополнительных диполей.

В случае использования самолета второй дополнительный диполь отсутствовал (рис. 4).

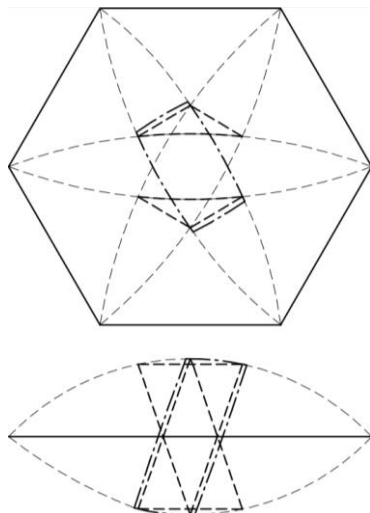


Рис. 3. Генераторная и компенсирующие петли буксируемой вертолетом системы ЕМ4Н и системы ЭКВАТОР

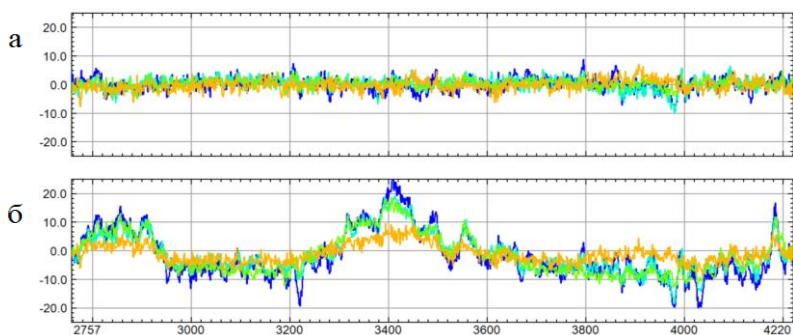


Рис. 4. Квадратурная составляющая для самолета Ан-3 на 4 частотах: а) после компенсации с использованием измерений параметров дополнительного диполя; б) зануление

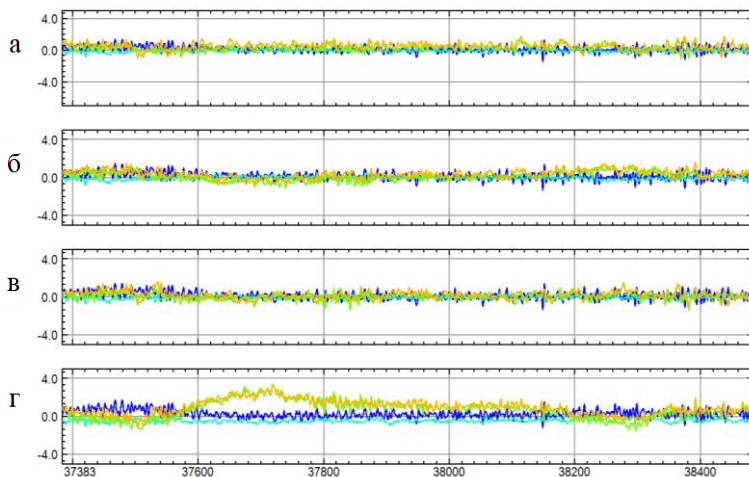


Рис. 5. Квадратурная составляющая для вертолета Ми-8 на 4 частотах: а) после компенсации с использованием измерений параметров двух дополнительных диполей; б) с использованием 1-го диполя; в) с использованием 2-го диполя; г) зануление

Таблица 1. Статистические характеристики различных методов компенсации на высоких частотах (8 кГц – ЕМ4Н, 6 кГц – ЭКВАТОР)

	зануление	1 ^й и 2 ^й диполи	1 ^й диполь	2 ^й диполь	improvement factor	
Самолет Ан-3	4,53		2,17		2,1	RMS
	41,92		15,04		2,8	max-min
Вертолетная буксируемая система	20,27	1,16	1,28	1,37	15,8	RMS
	92,88	8,14	8,10	9,34	11,5	max-min
ЭКВАТОР	11,04	1,15	1,17	1,42	9,44	RMS
	53,47	9,59	10,08	10,75	5,30	max-min

Таблица 2. Статистические характеристики различных методов компенсации на низких частотах (130 Гц – ЕМ4Н, 77 Гц – ЭКВАТОР)

	зануление	1 ^й и 2 ^й диполи	1 ^й диполь	2 ^й диполь	improvement factor	
Самолет Ан-3	12,61		2,52		5,0	RMS
	121,53		21,42		5,7	max-min
Вертолетная буксируемая система	1,73	1,44	1,46	1,46	1,2	RMS
	10,70	10,09	9,65	9,16	1,1	max-min
ЭКВАТОР	0,29	0,22	0,22	0,23	1,3	RMS
	1,84	1,56	1,59	1,71	1,1	max-min

Один из столбцов таблиц представляет собой коэффициент улучшения, выведенный как отношение соответствующих значений при использовании зануления и компенсации с помощью одного (первого) диполя.

Как видно из таблиц, наилучший результат компенсации дает подход, при котором учитывается перемещение приемника относительно источника поля. Это справедливо для ЭКВАТОР и всех конфигураций системы ЕМ4Н, в том числе для буксируемой системы, находящейся далеко от фюзеляжа вертолета. В таблице 2 мы видим, что наведенное поле на низкой частоте для такой системы практически отсутствует. Однако на высоких частотах оно существенно. Поэтому и для буксируемой системы при компенсации необходимо учитывать геометрию установки.

Еще один важный вывод: использование линейной модели поля вихревых токов как функции поля двух диполей так же эффективно, как и использование полного линейного разложения по трем диполям. Поэтому компенсацию можно осуществлять в поле двух диполей в линейной формулировке.

5. Построение модели среды, значимой для геологических и геофизических приложений

После проведения компенсации данные пригодны для дальнейшей обработки, в результате которой получают инфор-

мацию, значимую для геологических и геофизических приложений. Один из подходов состоит в построении модели среды, создающей поле, значения которого близки к значениям поля, полученным в результате компенсации.

Модель может обладать разной степенью детальности. Так, в наиболее общем случае среда представляется трехмерной сеткой, учитывающей особенности рельефа местности и неравномерность распределения сопротивлений. Однако при таком подходе обратная задача (определение параметров по результатам измерений вторичного поля) становится некорректной. Кроме того, объем вычислений растет пропорционально количеству узлов в сетке, в связи с чем время моделирования становится неприемлемо большим.

Более практичным подходом, в то же время предоставляющим удовлетворительную точность, является построение одномерной модели, подробнее описанной в следующем разделе.

6. Формулировка модели одномерной инверсии

Одномерная модель, также называемая горизонтально-слоистой [3], строится исходя из допущения, что параметры среды мало изменяются на масштабах расстояний, характерных для интервала зондирования. В связи с этим для каждой точки измерения вторичного поля подбираются значения удельных сопротивлений, неоднородные по глубине и однородные в горизонтальном направлении. После получения оценки для каждой точки зондирования модели объединяются, в результате чего и получается картина геоэлектрического разреза.

В настоящей работе модель среды состояла из 25 слоев с фиксированной толщиной, заданной формулой $d_i = 4 \cdot 1,1085^{i-1}$ м, $i = 1, \dots, 24$, $d_{25} = \infty$. Таким образом, вектор оцениваемых параметров состоял из удельных сопротивлений $\mathbf{x} = (\rho_1, \dots, \rho_{25})$.

Данные, используемые для инверсии, содержат действительную (синфазную) и мнимую (квадратурную) части вертикальной компоненты вторичного магнитного поля в частотной области и усредненные в нескольких временных интервалах

значения переходного процесса во временной области. Вектор измерений частотной области имеет вид

$$(10) \quad \mathbf{z}_\omega = (\text{Im } \omega_1, \dots, \text{Im } \omega_n, \text{Re } \omega_2 - \text{Re } \omega_3, \dots, \text{Re } \omega_{n-1}),$$

где $\text{Im } \omega_i$ и $\text{Re } \omega_i$ обозначают квадратурную и синфазную составляющие отклика для частоты ω_i . Соответствующие частоты для системы ЕМ4Н – 130, 521, 2083 и 8333 Гц, как в варианте с самолетом, так и в вертолетном варианте. Для системы ЭКВАТОР выбраны 25 частот из набора $77(2n - 1)$, $n = 1, \dots, 100$, отвечающих наилучшему соотношению сигнал – шум. Измерения во временной области состоят из значений производной магнитного поля $d\mathbf{B}/dt$, усредненных по фиксированным временным интервалам. Таким образом, вектор измерения равен

$$\mathbf{z}_t = a_1(d\mathbf{B}/dt), \dots, a_{14}(d\mathbf{B}/dt),$$

$$(11) \quad a_i = \sum_{k=k_i}^{k_{i+1}} \frac{d\mathbf{B}(t_k)/dt}{k_{i+1} - k_i}, \quad k_{i+1} \approx 1,62 \cdot k_i,$$

14 временных интервалов в диапазоне от 5 до 4420 мкс после выключения тока в петле выбираются по возможности равномерно в логарифмической шкале.

В общей форме уравнение измерений может быть записано в виде

$$(12) \quad \mathbf{z} = F(\mathbf{x}, \mathbf{M}, \mathbf{R}, h) + \mathbf{q},$$

где $\mathbf{x}$ – вектор оцениваемых параметров; $\mathbf{M}$ – вектор дипольного момента передатчика; $\mathbf{R}$ – радиус-вектор взаимного расположения передатчика и приемника; h – высота полета; $\mathbf{q}$ – случайный вектор шумов измерений, который моделируется белым шумом с ковариационной матрицей $\mathbf{Q}$, которую можно оценить при выполнении процедуры калибровки. Существенно нелинейная функция F описывает решение прямой задачи для заданного распределения удельных электрических сопротивлений [3].

Подходом к решению обратной задачи, т.е. оценки параметров по измерениям, был итерационный расширенный (обобщенный) фильтр Калмана [4]. В качестве модели динамической системы использовалась следующая:

$$(13) \quad \mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \mathbf{l},$$

где $\mathbf{l}$ – случайный вектор, который моделируется белым шумом с ковариационной матрицей $\mathbf{L}$ и характеризует изменчивость

модели при переходе от одной точки измерений к другой. Зада-
ется эмпирически.

7. Алгоритм обработки большого объема данных

Несмотря на существенное упрощение модели, объем вы-
числений, необходимых для обработки всего массива данных,
остается очень большим. Одна итерация нелинейного фильтра
Калмана на ПК с процессором Intel Core i7-13700H длится от
1 до 10 секунд. Для получения удовлетворительной точности
модели, как правило, необходимо от 5 до 15 итераций. При этом
часто реальные данные содержат несколько десятков тысяч то-
чек.

Для того чтобы произвести моделирование всего объема
данных за приемлемое время, необходимо применять алгорит-
мы параллельной обработки. В данной работе совместно при-
менялись два подхода: ускорение одной итерации фильтра Ка-
лмана и разбиение массива данных на независимые компоненты
(шардирование). Обработка данных производилась на shared-
nothing кластере, состоящем из одного управляющего узла
и 18 однопроцессорных вычислительных узлов, каждый из ко-
торых обладал 10–15 ядрами.

При оценивании параметров модели наиболее ресурсоза-
тратным шагом является вычисление параметров матрицы Яко-
би функции прямой задачи. Для этого необходимо смоделиро-
вать вторичное поле среды столько раз, сколько параметров
имеет модель (поскольку каждый параметр необходимо про-
варьировать). В данной работе эти вычисления проводились
в параллельном режиме. Решение прямой задачи для каждого
варьируемого параметра выполнялось в отдельном потоке
POSIX. Все потоки имели в качестве разделяемого ресурса ис-
ходные (до вариации) параметры модели и объект, вычисляю-
щий быстрое преобразование Фурье свертки двух сигналов (по-
следний шаг решения прямой задачи во временной области).
Для синхронизации доступа к разделяемым ресурсам использо-
вались мьютексы. Этот подход позволил одновременно задей-
ствовать все ядра процессора.

При обработке большого массива геофизической информации данные, полученные в разных вылетах, как правило, предполагают слабо зависимыми. В связи с этим при вычислениях их можно разбить на набор параллельных линий, каждую из которых можно обрабатывать независимо. В данной работе использовался подход, при котором управляющий узел кластера производит разбиение и распределяет линии по вычислительным узлам, приписывая узлу с наибольшей тактовой частотой процессора самую длинную линию. По окончании вычислений управляющий компьютер собирает результаты инверсии в один выходной файл.

Применение описанного подхода позволило ускорить обработку данных в 100–200 раз по сравнению с использованием одного ПК.

8. Результаты инверсии

Ниже показаны результаты инверсии данных, полученных после съемок вдоль одного и того же профиля в Норильском регионе разными системами (рис. 6).

На рис. 7 представлены результаты измерений аномалии магнитного поля Земли и результаты инверсии данных аэроэлектроразведки системой ЭКВАТОР. На среднем графике рис. 7 показана невязка, рассчитанная по формуле

$$(14) (\mathbf{z}_{\text{изм}} - \mathbf{z}_{\text{выч}})^T \mathbf{Q}^{-1} (\mathbf{z}_{\text{изм}} - \mathbf{z}_{\text{выч}}),$$

где $\mathbf{z}_{\text{изм}}$ соответствует вектору измерений, $\mathbf{z}_{\text{выч}} = F(\mathbf{x}, \dots)$ – результат решения прямой задачи с учетом текущей оценки вектора параметров $\mathbf{x}$. В нижней части представлен вертикальный разрез, построенный по оценкам удельных электрических сопротивлений. В качестве исходных данных для этих оценок использовались измерения во временной (рис. 9) и частотной (рис. 10) областях [11]. Видно, что положительная магнитная аномалия амплитудой около 30 нТл пространственно совпадает с телом с относительно высоким удельным электрическим сопротивлением, залегающем на глубине 150–200 м (рис. 7).



Рис. 6. Геологическая карта исследуемого региона и линия съемки (с востока на запад)

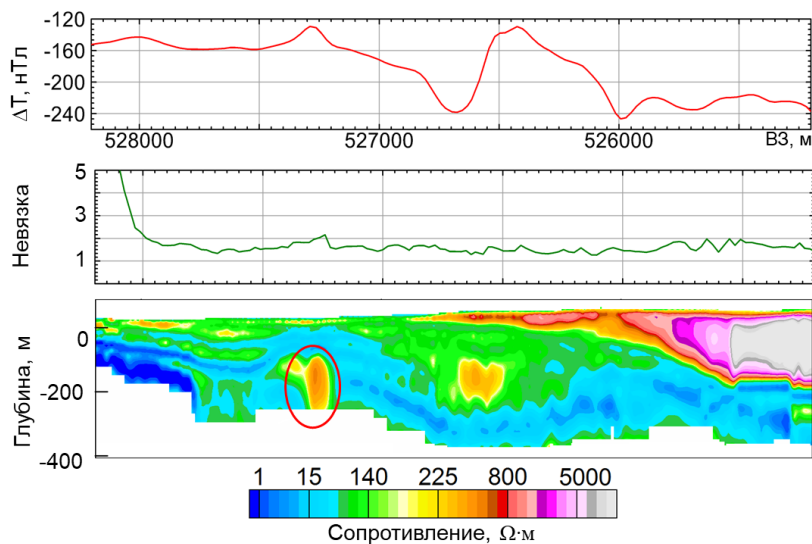


Рис. 7. Аномалия магнитного поля Земли, невязка и вертикальный разрез удельных электрических сопротивлений ($\Omega \cdot \text{м}$) по результатам комбинированной (в частотной и временной областях) инверсии

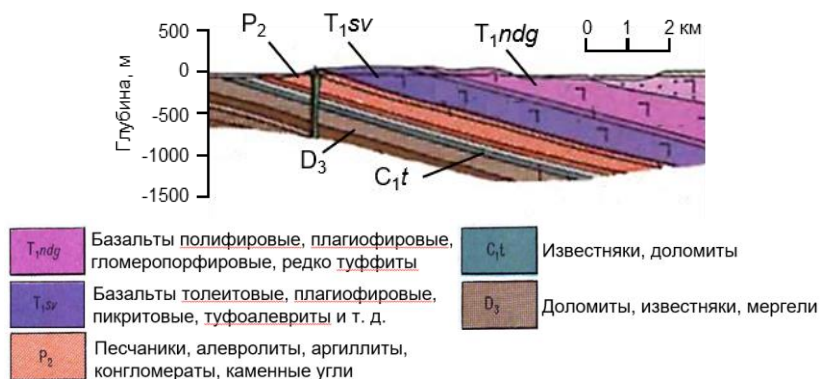


Рис. 8. Геологический разрез по данным бурения к северу от профиля съемки

Полученные структуры, представленные на рис. 7, соответствуют структурам, выявленным на геологическом разрезе в нескольких километрах севернее (рис. 8). Разрезы на рис. 7 и 8 имеют разную длину по горизонтали, но одинаковый коэффициент растяжения по вертикали, равный 2.

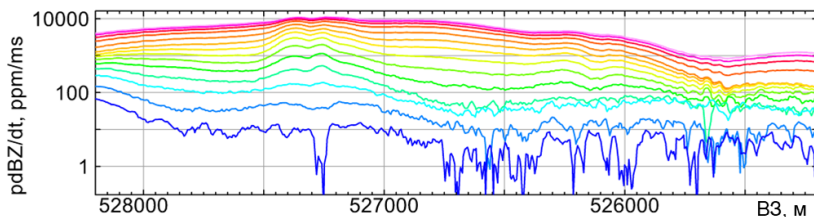


Рис. 9. Отклики во временной области

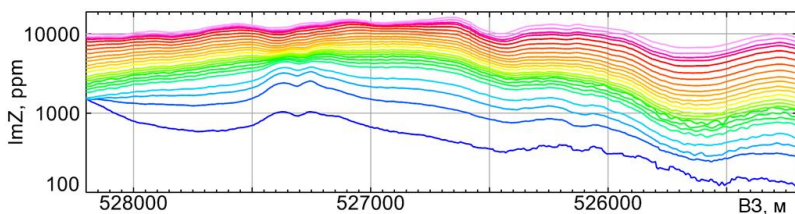


Рис.10. Отклики в частотной области

Рисунки 11–12 представляют результаты инверсии, где сверху показаны входные данные (отклики), в середине — невязка, а внизу — разрез удельных электрических сопротивлений.

На рис. 11 показаны результаты инверсии для самолетной конфигурации системы ЕМ4Н. Тело с высоким удельным сопротивлением, выделенное на рис. 7, на рис. 11 не видно. Глубинная часть профиля практически полностью отсутствует, а пространственное разрешение значительно хуже. Верхняя часть менее детализирована. Глубина исследования ниже из-за более высокой базовой частоты 130 Гц, в то время как у ЭКВАТОРа она составляет 77 Гц.

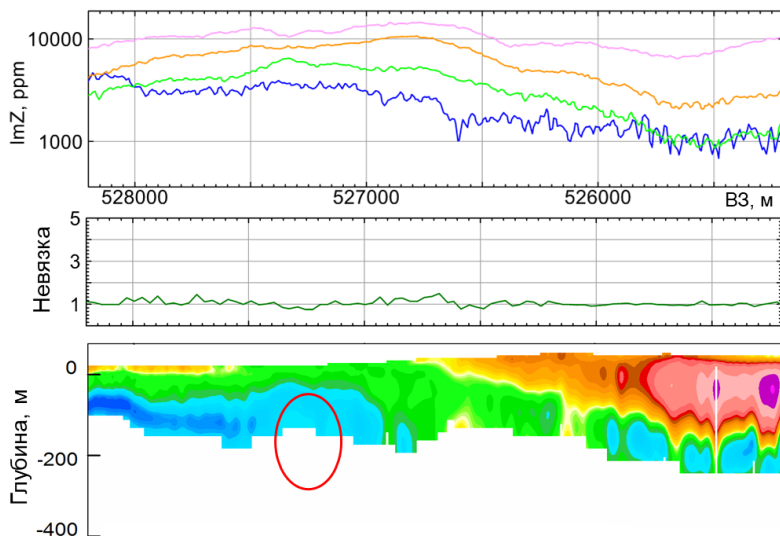


Рис. 11. Результаты инверсии самолетной системы EM4N

На рис. 12 показаны результаты инверсии, полученные для вертолетной конфигурации EM4N. Пространственное разрешение сравнимо с разрешением ЭКВАТОРа, видно верхнюю часть выделенного тела с высоким удельным сопротивлением. Но глубина исследования ниже из-за более высокой базовой частоты.

Рисунок 13 содержит условные обозначения ко всем кривым и разрезам на рис. 7, 9–12.

Также можно увидеть резкие контрасты удельных сопротивлений между верхними слоями – тонкий проводящий слой поверх изолятора. Вероятно, это можно объяснить эффектом вызванной поляризации [8], который возникает в условиях вечной мерзлоты. Опытный геофизик может увидеть это в правой части на графиках откликов во временной области (рис. 9).

Вертолетная система EM4N совершила полет в октябре 2023, при отрицательных температурах, система ЭКВАТОР – в сентябре 2015, а самолетная система EM4N – в августе 2012, обе при положительных температурах. Можно предположить, что полеты в разное время года соответствуют разной степени протайки в многолетнемерзлых породах.

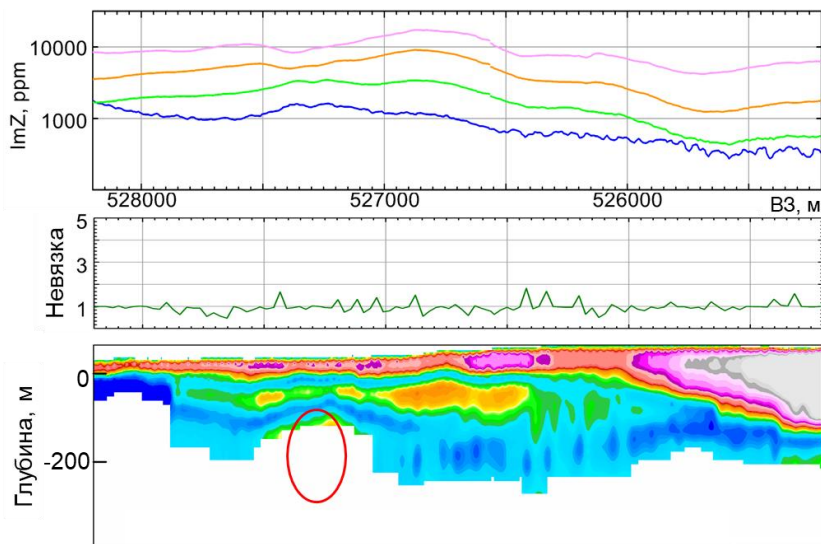


Рис. 12. Результаты инверсии данных вертолетной
модификации EM4H

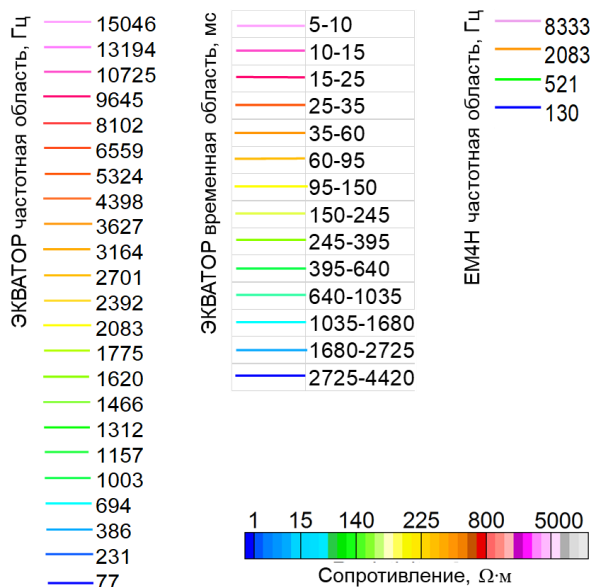


Рис. 13. Легенда сигналов и удельных сопротивлений

9. Выводы

Проведен анализ методов компенсации наведенной помехи. Описан алгоритм одномерной инверсии, пригодный для всех конфигураций электроразведочной системы ЕМ4Н и для системы ЭКВАТОР.

Показано, что наилучший результат компенсации дает подход, при котором учитывается перемещение приемника относительно источника поля. Это справедливо как для системы ЕМ4Н жестко закрепленной на фюзеляже самолета, так и для буксируемой системы, которая находится на значительном расстоянии от вертолета. Во втором случае наведенное поле на низкой частоте практически отсутствует, но становится существенным на высоких частотах.

По результатам инверсии электромагнитных данных для нескольких конфигураций аэроэлектроразведочной системы было продемонстрировано, что:

- Самое высокое пространственное разрешение и наибольшая глубина исследования соответствуют инверсии данных ЭКВАТОРа.
- Результаты для самолетной системы ЕМ4Н хорошо соответствуют геологическому строению профиля, но имеют низкую детальность.
- Результаты инверсии для вертолетной системы ЕМ4Н показывают сильный контраст сопротивлений верхних слоев. Это может быть связано с тем, что территория расположена в районе вечной мерзлоты, а сезонные различия в сборе данных привели к разному состоянию в верхней части разреза, что исказило результаты измерений.

Данные показали небольшое присутствие вызванной поляризации, влияние которой заметно в данных ЭКВАТОРа.

Требуется дальнейшее исследование причин количественных отличий в оценке сопротивлений верхней части разреза, полученных сопротивлений для буксируемого варианта системы ЕМ4Н.

Литература

1. ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В., ПОПОВИЧ В.В. *Низкочастотная индуктивная аэроэлектроразведочная система ЕМ-4Н* // Записки Горного института. – 2009. – Т. 183. – С. 224–227.
2. ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В., МОЙЛАНЕН Е.В. *Новая вертолетная электроразведочная система ЭКВАТОР для метода АМПП* // Приборы и системы разведочной геофизики. – 2010. – №02(32). – С. 27–29.
3. ЖДАНОВ М.С. *Электроразведка: Учебник для вузов.* – М.: Недра, 1986. – 316 с.
4. КАРШАКОВ Е.В., *Применение фильтра Калмана для решения обратных задач в аэроэлектроразведке* // EAGE Инженерная и рудная геофизика, 2018 г.
5. МОЙЛАНЕН Е.В. *Современные методы аэроэлектроразведки* // Физика Земли. – 2022. – №5. – С. 171–180.
6. ПАВЛОВ Б.В., ВОЛКОВИЦКИЙ А.К., КАРШАКОВ Е.В. *Низкочастотная электромагнитная система относительной навигации и ориентации* // Гироскопия и навигация. – 2010. – С. 3–15.
7. ТХОРЕНКО М.Ю., КАРШАКОВ Е.В., ПАВЛОВ Б.В. и др. *Алгоритм позиционирования подвижного объекта в низкочастотном электромагнитном поле* // Автоматика и телемеханика. – 2015. – №11. – С. 160–173.
8. ХЛЮСТОВ Д.К. *Моделирование эффекта индуктивно вызванной поляризации в частотных данных аэроэлектроразведки* // Управление большими системами. – 2025. – Вып. 114. – С. 108–121.
9. BARABANOVA L.P., BARABANOV O.O. *Effective solution of the problem of electromagnetic positioning based on two-axial radiator* // Journal of Mathematical Sciences. – 2021. – Vol. 255, No. 5. – P. 551–560.
10. HODGES G. *The power of frequency domain: When you should be using it* // Extended Abstracts of the 6th Int. AEM Conference & Exhibition, 2013. – 5 p.

11. KARSHAKOV E., MOILANEN E. *Combined interpretation of time domain and frequency domain data* // Proc. of 7th Int. Workshop on Airborne Electromagnetics, 2018.
12. LEGAULT J.M. *Airborne Electromagnetic Systems – State of the Art and Future Directions* // CSEG Recorder. – 2015. – Vol. 40, No. 6. – P. 38–49.
13. SMITH R. S. *Tracking the Transmitting-Receiving Offset in Fixed-Wing Transient EM Systems: Methodology and Application* // Exploration Geophysics. – 2001. – Vol. 32. – P.14–19.
14. TELFORD W., GELDART L., SHERIFF R. *Applied geophysics*. – Cambridge University Press, 1990.
15. VOVENKO T., MOILANEN E., VOLKOVITSKII A. et al. *New Abilities of Quadrature EM Systems* // Papers of the 13th SAGA Biennial and 6th Int. AEM Conf., Mpumalanga, South Africa, 2013. – P. 1–4.

COMPENSATION OF INTERFERENCE IN AIRBORNE ELECTROMAGNETIC SYSTEMS AND MODELING OF THE GEOLOGICAL ENVIRONMENT BY THE INVERSION METHOD IN THE PROCESSING OF AIRBORNE ELECTRICAL SURVEY DATA

Leo Vlasov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Engineer (leo_vlassov@yahoo.com).

Dmitry Kaplun, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Engineer (dvkaplun@yandex.ru).

Ekaterina Tretyakova, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Junior Researcher (ekaterina_tretikova@mail.ru).

Dmitrii Khliustov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Postgraduate Student (hlustov.d@gmail.com).

Abstract: Various methods of induced interference compensation for the EQUATOR system and several modifications of the EM4H onboard electromagnetic system were compared. Two modifications of the EM4H were investigated: the system with a transmitter loop mounted on the fuselage of the An-3 aircraft and the system with a loop towed by the Eurocopter AS350B3 helicopter. Two methods of modeling transmitter signal interference are considered: in the form of a stationary systematic component of measurements and in the form of a stationary field vector rigidly

*Программы и системы моделирования объектов,
средств и систем управления*

connected to the transmitter. To implement the second approach, two additional dipoles are used in EM4N and EQUATOR to determine the relative positions of the transmitter and receiver. The analysis was performed for data obtained during the flights at high altitudes with no response from the ground. The following statistical parameters of signals remaining after interference compensation were analyzed: standard deviation and the difference between the minimum and maximum values. It is shown that the best compensation result is obtained by an approach that takes into account the movement of the receiver relative to the field source (transmitter). The next step was to provide interpretation of data with the objective of estimating important geophysical characteristics. For each of studied systems Kalman filter algorithm was applied providing resistivity maps, which have been compared with respect to resolution.

Keywords: compensation, transmitter, receiver, magnetic dipole, airborne electromagnetics, one dimensional model, Kalman filter.

УДК 527.62+ 519.24
ББК 30в6

*Статья представлена к публикации
членом редакционной коллегии А.И. Алчиновым.*

*Поступила в редакцию 24.02.2025.
Опубликована 31.07.2025.*