УДК 007.52

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ СЛУЧАЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО ПРОЦЕССА[#]

А. А. Белов*, О. Г. Андрианова**

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва

*✉ a.a.belov@inbox.ru, **✉ andrianovaog@gmail.com

Аннотация. Решается задача вычисления уровня спектральной энтропии стационарного случайного процесса. Под спектральной энтропией (σ-энтропией) сигнала понимается скалярная величина, характеризующая окрашенность шума и определяющая класс сигналов, действующих на систему в зависимости от выбора полосы исследования. Предполагается, что случайный процесс задан либо в виде формирующего фильтра, на вход которого поступает белый шум с единичной ковариационной матрицей, либо в форме автокорреляционной функции. Получено аналитическое решение задачи вычисления уровня спектральной энтропии случайного стационарного процесса по известной математической модели формирующего фильтра в виде лог-детерминантной функции, зависящей от передаточной матрицы и грамиана наблюдаемости фильтра. Предложен алгоритм вычисления σ-энтропии для стационарных случайных процессов с известной автокорреляционной функцией. Метод сводится к восстановлению математической модели формирующего фильтра с использованием факторизации его спектральной плотности. Приведен численный пример расчета спектральной энтропии для возмущения, описывающего скорости порывов ветра, действующих на летательный аппарат.

Ключевые слова: спектральная энтропия, стационарный случайный процесс, спектральная плотность, автокорреляционная функция, формирующий фильтр.

ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных характеристик системы автоматического управления является динамическая точность передачи или преобразования сигналов, которая определяется либо разностью, либо функционалом от разности между требуемым и действительным значениями сигнала во времени.

Всякая система автоматического управления должна передавать или преобразовывать требуемым образом не один определенный сигнал управления, а целую совокупность таких сигналов, причем характер изменения каждого из этих сигналов заранее полностью предугадать невозможно. Это приводит к необходимости изучать статистические характеристики всей совокупности сигналов, представляющие собой случайные функции времени. При исследовании динамической точности необходимо учитывать характеристики самой системы, например, разброс параметров от образца к образцу в пределах допуска или их изменение случайным образом в тех или иных пределах в процессе эксплуатации, включая, конечно, и случайное изменение структуры системы [1, 2].

С другой стороны, при синтезе замкнутых систем управления возникает необходимость подавления случайных внешних возмущений, действующих на систему, а именно задания желаемой динамической точности замкнутой системы. Наиболее распространенным способом задания подаваемого на вход случайного воздействия является белый шум. Однако известно, что белый шум является физически нереализуемым случайным процессом. Наиболее близкими к реальным процессам, действующим на систему, являются так называемые окрашенные случайные процессы [1, 3–5].

[#] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00306, https://rscf.ru/project/23-21-00306/.

В задачах анализа и синтеза систем управления такие процессы могут быть реализованы в рамках решения задачи о формирующем фильтре. При этом формирующий фильтр, как правило, представляется как линейная стационарная система, на вход которой поступает гауссовский белый шум, а на выходе получается сигнал с требуемыми статистическими характеристиками. Подобный класс случайных сигналов позволяет моделировать движение замкнутой системы в присутствии шумов, близких к реальным случайным процессам.

В задачах σ-энтропийного анализа и управления множества всех возможных случайных процессов, действующих на исследуемую систему, задаются скалярной неотрицательной величиной, называемой спектральной энтропией (σ-энтропией) сигнала [6, 7]. Однако при исследовании систем возникает вопрос о том, каким образом определить требуемое для дальнейшего исследования значение спектральной энтропии случайного сигнала. В случае, если статистические характеристики случайного возмущения заданы в форме формирующего фильтра, на вход которого поступает гауссовский белый шум, такая задача может быть решена аналитически.

Таким образом, можно поставить следующую задачу: необходимо определить уровень спектральной энтропии случайного сигнала, формируемого из гауссовского белого шума с помощью линейного стационарного фильтра. Структура работы следующая. В § 1 рассмотрены постановка задачи и основные теоретические положения, связанные с σ-энтропийной теорией. В § 2 приводится аналитическое решение задачи вычисления уровня спектральной энтропии по известной математической модели формирующего фильтра или известной автокорреляционной функции стационарного случайного процесса. В § 3 рассмотрен численный пример.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается классический формирующий фильтр в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), \\ w(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – состояние формирующего фильтра; $w(t) \in \mathbb{R}^m$ – выход формирующего фильтра; $v(t) \in \mathbb{R}^m$ – гауссовский белый шум с нулевым средним и единичной матрицей интенсивности; A, B, C – постоянные действительные матрицы соответствующих размерностей. Предполагается, что система (1) является минимально-фазовой.

Напомним, что для случайного стационарного процесса $w(t)$ спектральная энтропия определяется выражением [6]

$$\mathfrak{S}(w) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega) \ln\det \frac{4\pi m \omega_0 S_w(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{tr} S_w(\lambda) d\lambda} d\omega, \tag{2}$$

где $S_w(\omega)$ – спектральная плотность сигнала $w(t)$; m – размерность случайного процесса; ω, λ – переменные интегрирования; $\varphi(\omega)$ – масштабирующая функция, имеющая вид

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0^2 + \omega^2}. \tag{3}$$

Параметр ω_0 имеет размерность частоты и выбирается разработчиком исходя из диапазона частот, для которых ведется исследование случайного процесса. Если рассматривается влияние случайного процесса на линейную систему управления, то, как правило, значение этого параметра должно в несколько раз превосходить ширину полосы пропускания самой системы.

Тогда задачу вычисления спектральной энтропии можно сформулировать следующим образом.

Пусть на формирующий фильтр, заданный выражением (1), поступает гауссовский белый шум с единичной ковариационной матрицей. Для масштабирующей функции (3) требуется найти формулы для вычисления спектральной энтропии $\mathfrak{S}(w)$, определяемой выражением (2).

Для того, чтобы решить поставленную задачу, воспользуемся следующими известными результатами [8, 9].

Лемма 1 (интегральная формула Коши). *Пусть D – область на комплексной плоскости с кусочно-гладкой или спрямляемой границей $\Gamma = \partial D$, функция $f(z)$ голоморфна в $\overline{D}$, а z_0 – точка внутри области D. Тогда справедлива следующая формула Коши*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \tag{4}$$

Лемма 2 (о модуле логарифма детерминанта). *Для передаточной матрицы* $G \in RH^{\infty}$ *справедливо равенство*

$$\ln\det\left(G^*(i\omega)G(i\omega)\right) = 2\ln\left|\det G(i\omega)\right|,$$

где $G^*(i\omega)$ *означает эрмитово сопряжение матрицы* G.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Для получения основного результата найдем спектральную плотность сигнала $w(t)$ на выходе формирующего фильтра (1). Она определяется выражением

$$S_w(\omega) = G^*\left(i\omega\right)G\left(i\omega\right)S_v\left(\omega\right),$$

где $S_v\left(\omega\right)$ – спектральная плотность белого шума $v(t)$, $G\left(i\omega\right) = C\left(\left(i\omega\right)I - A\right)^{-1}B$ – передаточная функция формирующего фильтра.

Так как по условию задачи белый шум $v(t)$ имеет единичную ковариационную матрицу, то

$$S_v\left(\omega\right) = I_m.$$

Тогда

$$S_w(\omega) = G^*\left(i\omega\right)G\left(i\omega\right).$$

Задача вычисления спектральной энтропии формирующего фильтра (1) сводится к вычислению интеграла (2).

Прежде чем преобразовать выражение (2), напомним, что для матрицы $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и действительного скаляра α справедливо тождество $\det\left(\alpha\cdot T\right) = \alpha^m \det T$. Отметим также, что для $\alpha > 0$ справедливо выражение $\ln\alpha^m = m\ln\alpha$.

Тогда выражение (2) может быть преобразовано к следующему виду:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\ln\det\frac{4\pi m\omega_0 S_w(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{tr}S_w(\lambda)d\lambda}d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\ln\det S_w(\omega)d\omega + \qquad (5)$$

$$+\frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\ln\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{tr}S_w(\lambda)d\lambda}{4\pi m\omega_0}d\omega.$$

Выпишем каждое слагаемое выражения (5) по отдельности и преобразуем их.

$$\frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\ln\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{tr}S_w(\lambda)d\lambda}{4\pi m\omega_0}d\omega =$$

$$= \frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\ln\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{tr}\left(G^*(i\lambda)G(i\lambda)\right)d\lambda}{4\pi m\omega_0}d\omega =$$

$$= \frac{m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\ln\frac{2\pi\|G\|_2^2}{4\pi m\omega_0}d\omega = \frac{m}{2}\ln\left(\frac{\|G\|_2^2}{2m\omega_0}\right),$$

где $\|G\|_2^2$ – квадрат H_2-нормы передаточной функции $G(s)$ (s – переменная преобразования Лапласа), который вычисляется по формуле

$$\|G\|_2^2 = \mathrm{tr}\left(B^{\mathrm{T}}PB\right),$$

где грамиан наблюдаемости P является решением уравнения Ляпунова

$$A^{\mathrm{T}}P + PA + C^{\mathrm{T}}C = 0.$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\ln\det S_w(\omega)d\omega =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\ln\det\left(G^*(i\omega)G(i\omega)\right)d\omega =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\ln\left|\det G(i\omega)\right|d\omega.$$

Вычислим значение последнего интеграла. Для этого рассмотрим подынтегральную функцию $f\left(z\right) = \dfrac{\omega_0}{\omega_0^2+z^2}\ln\left|\det G(z)\right|$ и проинтегрируем ее по замкнутому контуру Γ, состоящему из полуокружности радиуса R с центром в начале координат и диаметра этой полуокружности, лежащего на вещественной оси. Искомый интеграл будет найден при $R\to\infty$. Получим

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\ln\left|\det G(i\omega)\right|d\omega =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma}\frac{\omega_0}{\omega_0^2+z^2}\ln\left|\det G(z)\right|dz\right].$$

Функция $f\left(z\right)$ имеет полюса в точках $\pm i\omega_0$ и является аналитической внутри всей области, ограниченной кривой Γ.

Следовательно, имеем

$$f\left(z\right)=\frac{\omega_0}{\omega_0^2+z^2}\ln\left|\det G(z)\right|=$$
$$=\frac{\omega_0\ln\left|\det G(z)\right|}{\left(z-i\omega_0\right)\left(z+i\omega_0\right)}=\frac{f_1\left(z\right)}{z-i\omega_0},$$

где $f_1\left(z\right)=\dfrac{\omega_0\ln\left|\det G(z)\right|}{z+i\omega_0}$.

Тогда интеграл может быть записан в виде

$$-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\frac{\omega_0}{\omega_0^2+z^2}\ln\left|\det G(z)\right|dz=-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\frac{f_1\left(z\right)}{z-i\omega_0}dz.$$

Так как функция $f_1\left(z\right)$ является аналитической внутри замкнутого контура Γ, к ней применима интегральная формула Коши (4). Имеем

$$-\frac{1}{\pi}\int_\Gamma\frac{\omega_0}{\omega_0^2+z^2}\ln\left|\det G(z)\right|dz=$$
$$=-\frac{1}{\pi}2\pi i\;f_1\left(\omega_0\right)=-2i\frac{\omega_0\ln\left|\det G(\omega_0)\right|}{2i\omega_0}=$$
$$=-\ln\left|\det G(\omega_0)\right|.$$

Учитывая, что система (1) является минимально-фазовой, окончательно получаем

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}\ln\left|\det G(i\omega)\right|d\omega=-\ln\det G(\omega_0),$$

где $G(\omega_0)=C\left(\omega_0 I-A\right)^{-1}B.$

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 1. *Спектральная плотность случайной стационарной последовательности* $w\left(t\right)$, *формируемой посредством фильтра вида* (1) *из гауссовского белого шума* $v\left(t\right)$ *с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей, определяется выражением*

$$\mathfrak{S}(w)=-\ln\det\frac{\sqrt{2m\omega_0}G\left(\omega_0\right)}{\sqrt{\operatorname{tr}\left(B^{\mathrm{T}}PB\right)}},\qquad(6)$$

где $G(\omega_0)=C\left(\omega_0 I-A\right)^{-1}B$, *а* P *является решением уравнения Ляпунова*

$$A^{\mathrm{T}}P+PA+C^{\mathrm{T}}C=0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С учетом рассмотренных выше выкладок получаем, что

$$\mathfrak{S}(w)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\omega)\ln\det\frac{4\pi m\omega_0 S_w(\omega)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\operatorname{tr}S_w(\lambda)d\lambda}d\omega=$$
$$=-\ln\det G(\omega_0)+\frac{m}{2}\ln\left(\frac{\operatorname{tr}\left(B^{\mathrm{T}}PB\right)}{2m\omega_0}\right)=$$
$$=-\left[\ln\det G(\omega_0)-\ln\left(\frac{\operatorname{tr}\left(B^{\mathrm{T}}PB\right)}{2m\omega_0}\right)^{\frac{m}{2}}\right].$$

Из последнего выражения напрямую следует выражение (6), что завершает доказательство. ♦

Рассмотренная выше теорема дает методику определения спектральной энтропии стационарного случайного сигнала для случая, когда математическая модель фильтра является известной. Однако данный результат можно применять также и в случае, когда известны или экспериментально определены статистические характеристики действующего на систему случайного возмущения, например, его автокорреляционная функция. Для этого необходимо решить задачу определения формирующего фильтра. Приведем один из методов решения такой задачи для одномерного случая [1].

Пусть известно аналитическое выражение для автокорреляционной функции стационарного сигнала $R_w\left(\tau\right)$, тогда его спектральная плотность может быть найдена из соотношения

$$S_w(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_w(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}d\tau.$$

Как известно, при прохождении случайного стационарного сигнала через линейную устойчивую стационарную систему (в качестве которой в данном случае выступает формирующий фильтр) имеет место следующее соотношение, определяющее спектральную плотность установившегося случайного процесса на выходе системы:

$$S_w(\omega)=\left|W_{\text{фф}}\left(i\omega\right)\right|^2S_v(\omega),$$

где $S_w(\omega)$ – спектральная плотность выхода; $S_v(\omega)$ – спектральная плотность входа; $W_{\text{фф}}\left(i\omega\right)$ – передаточная функция системы. Поскольку в качестве входного сигнала рассматривается гауссовский белый шум, то $S_v(\omega)=1$.

Таким образом,

$$S_w(\omega)=\left|W_{\text{фф}}\left(i\omega\right)\right|^2,$$

т. е. квадрат АЧХ формирующего фильтра должен совпадать (с точностью до постоянного множителя) со спектральной плотностью сигнала, подлежащего формированию.

Для дальнейших рассуждений важно отметить, что спектральная плотность стационарного случайного процесса является действительной четной неотрицательной функцией ω при действительных значениях ω.

Так как рассматривается случай дробно-рациональной спектральной плотности, то

$$S_w(\omega) = \frac{Q(\omega)}{R(\omega)},$$

где $Q(\omega)$ и $R(\omega)$ – многочлены с действительными коэффициентами, содержащие только четные степени ω (это следует из четности спектральной плотности).

Для действительных значений ω спектральная плотность $S_w(\omega)$ может быть представлена в виде

$$S_w(\omega) = \frac{B(i\omega)B(-i\omega)}{A(i\omega)A(-i\omega)} =$$

$$= W_{\text{фф}}(i\omega)W_{\text{фф}}(-i\omega) = \left|W_{\text{фф}}(i\omega)\right|^2.$$

Очевидно, что функция $W_{\text{фф}}(i\omega)$ обладает всеми свойствами, которыми должна обладать передаточная функция устойчивой линейной стационарной минимально-фазовой системы.

Отсюда следует

$$W_{\text{фф}}(i\omega) = \frac{B(i\omega)}{A(i\omega)}.$$

Таким образом, разложив спектральную плотность формируемого сигнала на комплексно-сопряженные множители, легко определить передаточную функцию формирующего фильтра. После нахождения передаточной функции формирующего фильтра необходимо представить систему в пространстве состояний, воспользовавшись, например, канонической формой Фробениуса, а затем применить теорему 1.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим задачу вычисления спектральной энтропии внешних возмущений, действующих на летящую ракету, наводящуюся на цель [1]. Ракета, находящаяся в атмосфере, подвергается различным видам воздушных течений, например, постоянным ветрам, восходящим и нисходящим потокам, порывам ветра, завихрениям и т. д. Порывы ветра увеличивают перегрузки. В достаточно ограниченной области пространства и времени ветер можно считать процессом стационарным в пространстве и времени. Возмущающие моменты, связанные с изменением подъемной силы, являются функциями величины и направления скорости порывов ветра. Однако величину отклонения ракеты определяют лишь скорости порывов ветров. Автокорреляционная функция скоростей порывов ветра, действующих на летательный аппарат приближенно равна [1, 3]

$$R_w(\tau) = \gamma e^{-\alpha\tau},$$

где γ и α – постоянные величины. Спектральная плотность, соответствующая корреляционной функции, будет иметь вид

$$S_w(\omega) = \frac{2\gamma\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Факторизуя последнее выражение, получим

$$S_w(\omega) = \frac{\sqrt{2\gamma\alpha}}{\alpha + i\omega} \cdot \frac{\sqrt{2\gamma\alpha}}{\alpha - i\omega},$$

откуда передаточная функция формирующего фильтра, моделирующего скорости порывов ветра, равна

$$W_{\text{фф}}(i\omega) = \frac{B_{\text{фф}}(i\omega)}{A_{\text{фф}}(i\omega)} = \frac{\sqrt{2\gamma\alpha}}{\alpha + i\omega}.$$

Последнее выражение в пространстве состояний может быть записано в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + v(t), \\ w(t) = \sqrt{2\gamma\alpha}\, x(t). \end{cases}$$

Размерность случайного процесса $m = 1$. Воспользуемся теоремой 1 для вычисления спектральной энтропии случайного процесса. Тогда

$$G(\omega_0) = C(\omega_0 I - A)^{-1} B = \frac{\sqrt{2\gamma\alpha}}{\omega_0 + \alpha}, \ \ P = \gamma.$$

Таким образом, спектральная энтропия процесса может быть вычислена аналитически в виде

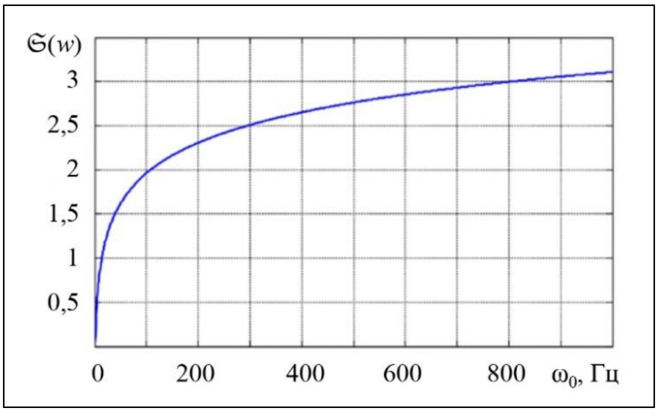
$$\mathfrak{S}(w) = -\ln\det \frac{\sqrt{2m\omega_0}\, G(\omega_0)}{\sqrt{\operatorname{tr}\left(B^{\mathrm{T}} P B\right)}} =$$

$$= -\ln \frac{\sqrt{2m\omega_0}\sqrt{2\gamma\alpha}}{\sqrt{\gamma}\,(\omega_0 + \alpha)} = -\ln \frac{2\sqrt{\alpha\omega_0}}{\omega_0 + \alpha}.$$

Отметим, что при $\omega_0 \to \infty$ выражение, стоящее под логарифмом, стремится к нулю, а следовательно, спектральная энтропия стремится к бесконечности. Выбор частоты ω_0 определяет полосу исследуемого спектра.

Зависимость величины спектральной энтропии от параметра ω_0 при $\alpha = 0{,}5$ представлена на рисунке.

Таким образом, полученный в работе результат может быть применен на практике в рамках σ-энтропийного подхода в задачах анализа и синтеза линейных систем управления, подвергающихся действию внешних стационарных шумов. ♦



Уровень спектральной энтропии в зависимости от выбора частоты ω_0

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был предложен метод вычисления спектральной энтропии стационарного случайного процесса по известной математической модели формирующего фильтра или по известной автокорреляционной функции случайного процесса. Для известной математической модели формирующего фильтра предполагается, что на его вход поступает гауссовский белый шум с единичной ковариационной матрицей. Если же случайный процесс задан автокорреляционной функцией, то в работе предлагается алгоритм построения математической модели формирующего фильтра с использованием преобразования Фурье для получения спектральной плотности случайного процесса и дальнейшей ее факторизации.

Предложенный результат может быть использован для анализа и синтеза линейных стационарных систем управления, находящихся под влиянием случайных возмущений, с применением σ-энтропийного подхода, предложенного в работе [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Методы* классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд. перераб и доп. Т. 2: Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 640 с. [*Metody* klassicheskoi i sovremennoi teorii avtomaticheskogo upravleniya: Uchebnik v 5-i tt.; 2-e izd. pererab. i dop. T. 2: Statisticheskaya dinamika i identifikatsiya sistem avtomaticheskogo upravleniya / Pod red. K.A. Pupkova, N.D. Yegupova. – M.: Izdatelstvo MGTU im. N.E. Baumana, 2004. – 640 s. (In Russian)]
2. *Wang, S., Wu, Z., Wu, Z.-G.* Trajectory Tracking and Disturbance Rejection Control of Random Linear Systems // Journal of the Franklin Institute. – 2022. – Vol. 359, no. 9. – P. 4433–4448.
3. *Кочетков В.Т., Половко А.М., Пономарев В.М.* Теория систем управления и самонаведения ракет. – М.: Наука, 1964. – 536 с. [*Kochetkov, V.T., Polovko, A.M., Ponomarev, V.M.* Teoriya sistem upravleniya i samonavedeniya raket. – M.: Nauka, 1964. – 536 s. (In Russian)]
4. *Burlibaşa, A., Ceangă, E.* Rotationally Sampled Spectrum Approach for Simulation of Wind Speed Turbulence in Large Wind Turbines // Applied Energy. – 2013. – Vol. 111. – P. 624–635.
5. *Wang, C., Wang, X., Ju, P.*, et al. Survey on Stochastic Analysis Methods for Power Systems // Autom. Electr. Power Syst. – 2022. – Vol. 46. – P. 184–199.
6. *Boichenko, V.A., Belov, A.A., Andrianova, O.G.* State-Space Solution to Spectral Entropy Analysis and Optimal State-Feedback Control for Continuous-Time Linear Systems // Mathematics. – 2024. – Vol. 22, no. 12. – Art. no. 3604. – DOI: https://doi.org/10.3390/math12223604
7. *Boichenko, V., Belov, A.* On σ-entropy Analysis of Linear Stochastic Systems in State Space // Syst. Theor. Control Comput. J. – 2021. – Vol. 1, no. 1. – P. 30–35.
8. *Rudin, W.* Real and Complex Analysis. – New York: McGraw-Hill, 1986. – 416 p.
9. *Mustafa, D., Glover, K.* Minimum Entropy H∞ Control. – Heidelberg–Berlin: Springer, 1990. – 144 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 06.12.2024,
после доработки 23.12.2024.
Принята к публикации 23.12.2024.

Белов Алексей Анатольевич – д-р физ.-мат. наук,
✉ a.a.belov@inbox.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3126-0206

Андрианова Ольга Геннадьевна – канд. физ.-мат. наук,
✉ andrianovaog@gmail.com
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8407-1046

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва

CALCULATING THE SPECTRAL ENTROPY OF A STATIONARY RANDOM PROCESS

A. A. Belov* and O. G. Andrianova**

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*✉ a.a.belov@inbox.ru, **✉ andrianovaog@gmail.com

Abstract. The problem of calculating the spectral entropy of a stationary random process is solved. The spectral entropy (σ-entropy) of a signal is understood as a scalar value characterizing the noise color; it describes the class of signals affecting a system depending on the band under study. By assumption, the random process is defined by a shaping filter, with the Gaussian white noise with a unit covariance matrix supplied at its input, or by an autocorrelation function. The spectral entropy of the stationary random process is analytically derived using a known mathematical model of the shaping filter in the form of a log-determinant function that depends on the transfer matrix and the observability Gramian of the filter. An algorithm for calculating the σ-entropy of stationary random processes with a known autocorrelation function is proposed. The method reduces to reconstructing the mathematical model of the shaping filter using its spectral density factorization. A numerical example is provided: spectral entropy is calculated for a disturbance describing the velocity of wind gusts that affect an aircraft.

Keywords: spectral entropy, stationary random process, spectral density, autocorrelation function, shaping filter.

Acknowledgments. This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 23-21-00306.