

СИНТЕЗ СИСТЕМЫ СЛЕЖЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЗВЕННОГО БЕЗДАТЧИКОВОГО МАНИПУЛЯТОРА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ НЕГЛАДКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ¹

А.С. Антипов, Д.В. Краснов

Аннотация. В качестве объекта управления выступает однозвенный манипулятор, эластично сочлененный с двигателем постоянного тока и функционирующий в условиях неопределенности и неполных измерений переменных состояния. Поставлена задача синтеза разрывного закона управления в форме обратной связи, обеспечивающего отслеживание заданного сигнала угловым положением манипулятора. Особенности объекта таковы: угловое положение и скорость манипулятора недоступны для измерений, датчики расположены только на приводе; параметрические и внешние возмущения, воздействующие на манипулятор, являются негладкими и не могут быть непосредственно подавлены с помощью управления, воздействующего на исполнительное устройство. Для решения поставленной задачи применяется блочный подход, в рамках которого разработана декомпозиционная процедура синтеза нелинейных локальных связей, обеспечивающих инвариантность регулируемой переменной по отношению к неопределенностям, не согласованным с управляющим воздействием. Для оценивания углового положения и скорости манипулятора, необходимых для синтеза обратной связи, разработан редуцированный наблюдатель состояния. Для оценивания значений переменных состояния в этом наблюдателе реализован принцип восстановления внешних возмущений по их воздействию на объект управления, не требующий построения динамической модели внешних воздействий. И в задаче управления, и в задаче наблюдения были использованы S -образные ограниченные непрерывные локальные связи – гладкие (сигмоидальные) и негладкие (кусочно-линейные) соответственно, которые подавляли ограниченные возмущения, действующие с ними по одному каналу. Разработанные алгоритмы не требуют идентификации в реальном времени параметрических и внешних возмущений, но обеспечивают стабилизацию ошибок наблюдения и слежения с некоторой точностью. Эффективность разработанной динамической обратной связи подтверждена результатами численного моделирования.

Ключевые слова: электромеханическая система, слежение, инвариантность, блочный подход, редуцированный наблюдатель состояния, S -образные функции.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается простейшая электромеханическая система – однозвенный бездатчиковый манипулятор, эластично сочлененный с двигателем постоянного тока (ДПТ) и функционирующий в условиях параметрических и внешних возмущений. Базовая задача состоит в управлении угловым положением манипулятора – стабилизации его на заданном уровне или отслеживании допустимого задающего воздействия. Несмотря на кажущуюся

простоту, рассматриваемый объект имеет все признаки сложной системы автоматического управления. А именно: описывается динамической моделью пятого порядка с нелинейностью и неопределенными параметрами, имеет неполный комплект датчиков, находится под воздействием внешних возмущений. В настоящее время в рамках различных подходов разработано множество эффективных алгоритмов управления механическими и электромеханическими системами [см., например, работы 1–5]. Однако, как правило, при решении таких задач учитывается конкретный тип неопределенностей (либо параметрические неопределенности, либо внешние возмущения определенного класса, либо неполные измерения), а не их ком-

¹ Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 20-01-00363-А).

плексе. Во многих исследованиях математическая модель состоит только из механической системы (динамика исполнительных устройств не учитывается), при этом проблема подавления несогласованных возмущений, действующих по разным каналам с управлением, остается открытой [6].

В предыдущей работе авторов [7] однозвенный бездатчиковый манипулятор, эластично сочлененный с ДПТ, рассматривался с учетом указанного комплекса неопределенностей в предположении, что задающее воздействие, параметрические и внешние возмущения являются гладкими функциями времени. Это позволило представить модель объекта управления в каноническом виде «вход – выход» относительно смешанных переменных (линейных комбинаций от переменных состояния, внешних воздействий и их производных) и решить на ее основе и задачу наблюдения, и задачу слежения. Проблема оценивания значения неизмеряемой регулируемой переменной, необходимого для синтеза обратной связи в наблюдателе смешанных переменных, решалась путем использования дополнительного контура подсистемы наблюдения. Однако в процессе эксплуатации на механический объект часто воздействуют негладкие возмущения – ударные нагрузки, силы сухого трения [8]. Эти возмущения нельзя дифференцировать и они не могут быть непосредственно подавлены или скомпенсированы посредством управления, действующего на электропривод. В данной работе рассматривается именно этот случай негладких и несогласованных внешних и параметрических возмущений, а также случай кусочно-непрерывных задающих воздействий, что является препятствием для применения типовых методов управления, в частности метода линеаризации обратной связью [9, 10]. Описание модели объекта управления и постановка задачи приведены в § 1.

Для синтеза системы слежения в указанных условиях представляется целесообразным применение блочного подхода, в рамках которого переменные состояния используются как фиктивные управления в виде функций определенного класса, к которым предъявляется требование гладкости [11, 12]. При этом возмущения будут согласованы с фиктивными управлениями и могут быть подавлены с заданной точностью. Исходная система преобразуется к системе, записанной относительно ошибки слежения и невязок между реальными и сформированными фиктивными управлениями (инвариантными локальными связями), дифференцирование внешних сигналов не выполняется. Истинное разрывное управление, действующее на исполнительное устройство, обеспечивает после-

довательную сходимость невязок в заданные окрестности нуля и, как следствие, выполнение цели управления – стабилизации ошибки слежения. Стабилизирующие фиктивные управления предлагается сформировать в виде гладких и ограниченных сигма-функций, чтобы избежать в начале переходных процессов всплесков, характерных для систем с линейными обратными связями с большими коэффициентами [11, 13], которые традиционно используются для подавления внешних возмущений. В статье [12] была разработана процедура синтеза сигмоидальных локальных связей для нелинейного одноканального объекта в предположении, что функции от переменных состояния в правых частях дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы, всюду ограничены. Научная новизна данного исследования состоит в разработке процедуры блочного синтеза и выбора параметров сигмоидальных фиктивных управлений для почти линейной системы пятого порядка в условиях действия негладких внешних возмущений (с производными, терпящими разрыв). Особенность объекта состоит в том, что с теоретической точки зрения в уравнениях системы линейные комбинации переменных состояния не являются ограниченными. Для достижения цели управления требуется обеспечить, чтобы значения внутренних переменных в процессе регулирования принадлежали конкретным диапазонам. Процедура синтеза базового закона управления с учетом указанных особенностей объекта управления приведена в § 2.

В § 3 представлено решение задачи наблюдения для случая, когда угловое положение и скорость манипулятора, требуемые для синтеза обратной связи, не могут быть измерены (например, из-за агрессивной среды, вибрации и т. п. [14]), и датчики установлены только на приводе. Построен редуцированный наблюдатель состояния, в котором для оценивания переменных состояния реализован принцип восстановления внешних возмущений по их воздействию на объект управления, не требующий использования динамической модели восстанавливаемых сигналов [15, 16]. Согласно этому принципу оцениваемая переменная трактуется как внешнее возмущение. При этом получение ее оценки осуществляется с помощью обратной связи в наблюдателе (корректирующего воздействия). Данный подход позволил построить робастный наблюдатель состояния без использования уравнений системы с неопределенными параметрами. Разработана декомпозиционная процедура синтеза кусочно-линейных обратных связей, обеспечивающих решение задачи наблюдения с



заданной точностью в условиях действия на механическую подсистему параметрических и внешних возмущений. Благодаря использованию S -образных инвариантных обратных связей (гладких – в задаче слежения, кусочно-гладких – в задаче наблюдения) в процессах наблюдения и управления не требуется дополнительно идентифицировать неопределенные параметры и внешние возмущения, достаточно знать диапазоны их изменения. Параметры регулятора не требуют перенастройки при произвольном изменении неопределенностей в допустимых интервалах. Этот вывод проиллюстрирован результатами численного моделирования, приведенными в § 4.

1. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая модель однозвенного жесткого манипулятора с поворотным шарниром, упруго соединенного с валом ДПТ, описывается дифференциальными уравнениями [7, 17]

$$\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -a_{21}x_1 - a_2 \sin(x_1) + b_2x_3 + f(t), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4, \dot{x}_4 = -a_{41}x_1 - a_{43}x_3 - a_{44}x_4 + b_4x_5, \\ \dot{x}_5 &= -a_{54}x_4 - a_{55}x_5 + b_5u. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнениями (1) описывается динамика манипулятора, уравнениями (2) – динамика ДПТ с постоянными магнитами [6], $a_{41} = -a_{43} < 0$, значения остальных конструктивных коэффициентов положительные:

$$\begin{aligned} b_2 &= a_{21} = k_l / J_l, \quad a_2 = \bar{m}gh / J_l, \quad a_{43} = k_l / J_m, \\ a_{44} &= d / J_m, \quad b_4 = k_m / J_m, \\ a_{54} &= c / L, \quad a_{55} = R / L, \quad b_5 = 1 / L. \end{aligned}$$

Описание переменных $x = (x_1, \dots, x_5)^T$ и параметров системы (1), (2) приведено в табл. 1.

В системе (1), (2) выходной регулируемой переменной является угловое положение звена манипулятора $x_1(t)$, напряжение питания якорной цепи ДПТ u рассматривается как разрывное управление. Ставится задача синтеза динамической обратной связи, обеспечивающей отслеживание выходной переменной $x_1(t)$ заданного сигнала $g(t)$ в следующих предположениях:

- за точку отсчета $x_1(t) = 0$ принято нижнее вертикальное положение звена манипулятора, которое является устойчивым, максимальная угловая скорость звена манипулятора ограничена:

$$|x_1(t)| \leq \pi, \quad |x_2(t)| \leq X_2, \quad t \geq 0, \quad X_2 = \text{const} > 0; \quad (3)$$

- начальные значения переменных состояния находятся в известных диапазонах:

$$|x_i(0)| \leq X_{i,0} = \text{const} > 0, \quad i = \overline{1,5}; \quad (4)$$

- датчики расположены только на исполнительном устройстве, значения переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$ не измеряются, значения переменных $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$ измеряются, шумы в измерениях отсутствуют;

- текущие значения задающего воздействия $g(t)$ известны, его производная $\dot{g}(t)$ полагается негладкой неизвестной функцией времени, ограниченной известной константой:

$$|g(t)| \leq G_0 < \pi; \quad |\dot{g}(t)| \leq G_1, \quad t \geq 0; \quad (5)$$

$$G_0, G_1 = \text{const} > 0;$$

- значения параметров k_l , J_m , d , k_m и, следовательно, a_{43} , a_{44} , b_4 известны, параметры $\bar{m}$, h , J_l , c , R , L и, следовательно, $b_2 = a_{21}$, a_2 , a_{54} , a_{55} , b_5 точно не определены и могут изменяться в процессе эксплуатации в известных диапазонах:

$$a_{21,\min} \leq a_{21}(t) \leq a_{21,\max}, \quad a_{2,\min} \leq a_2(t) \leq a_{2,\max};$$

$$a_{5j,\min} \leq a_{5j}(t) \leq a_{5j,\max}, \quad j = 4, 5;$$

$$b_{5,\min} \leq b_5(t) \leq b_{5,\max}, \quad t \geq 0; \quad (6)$$

Таблица 1

Описание переменных и параметров объекта управления

Обозначение	Описание, единица измерения	Обозначение	Описание, единица измерения
x_1	угловое положение манипулятора, рад	$\bar{g}$	ускорение свободного падения, 9,8 м/с ²
x_2	угловая скорость манипулятора, рад/с	k_l	жесткость передаточного механизма, Н·м/рад
x_3	угловое положение вала ДПТ, рад	J_l	момент инерции манипулятора, кг·м ²
x_4	угловая скорость вала ДПТ, рад/с	k_m	коэффициент передачи, Н·м/А
x_5	ток якоря ДПТ, А	J_m	момент инерции ДПТ, кг·м ²
$f(t)$	неконтролируемое возмущение, Н/(кг·м)	d	коэффициент демпфирования, кг·м ² /с
u	напряжение питания якорной цепи ДПТ, В	c	коэффициент противо-ЭДС ДПТ, В·с/рад
h	длина манипулятора, м	L	индуктивность якоря ДПТ, Гн
$\bar{m}$	масса манипулятора, кг	R	сопротивление якоря ДПТ, Ом

• $f(t)$ – неизвестная негладкая функция времени, ограниченная по модулю известной константой:

$$|f(t)| \leq F = \text{const} > 0, t \geq 0. \quad (7)$$

В контуре обратной связи предполагается использование только наблюдателя неизмеряемых переменных состояния, идентификаторы неизвестных параметров и генераторы внешних воздействий в построения не вводятся. В этих условиях стабилизация ошибки слежения $e_1(t) = x_1(t) - g(t) \in R$ возможна лишь с некоторой точностью. Цель управления – обеспечить в замкнутой системе выполнение условия

$$|e_1(t)| \leq \Delta_1, t \geq t_1, \quad (8)$$

где $\Delta_1 > 0$, $t_1 > 0$ – заданные точность стабилизации и время ее достижения соответственно.

2. БАЗОВЫЙ ЗАКОН УПРАВЛЕНИЯ

Вначале сформируем в системе (1), (2) закон управления, используя заданный сигнал $g(t)$ и все переменные состояния, а потом спроектируем наблюдатель для оценивания неизмеряемых переменных состояния. Для синтеза обратной связи применим блочный принцип управления [11, 12].

Система (1), (2) представляет собой блочную форму управляемости [11]. Это означает, что истинное управление входит аддитивно с ненулевым множителем только в последнее уравнение; в правой части каждого i -го уравнения (блока), $i = \overline{1,4}$, могут присутствовать функции только от переменных состояния $x_1, \dots, x_i$, а переменная следующего $i+1$ -го уравнения входит аддитивно с ненулевым множителем. Такой вид позволяет в каждом i -м уравнении рассматривать переменную x_{i+1} как фиктивное управление и последовательно (сверху вниз) формировать локальные связи в каждом уравнении, которые в последнем блоке будут обеспечены с помощью истинного управления. Тот факт, что первое уравнение записано относительно именно регулируемой переменной, позволяет рассматривать систему (1), (2) как треугольную (по составу аргументов функций в каждом уравнении за исключением фиктивных управлений) форму «вход – выход» и решать на ее основе задачу слежения.

Для того чтобы подавить параметрические и внешние возмущения, действующие по одним и тем же каналам с фиктивными управлениями, сформируем локальные связи в виде ограниченных

S-образных сигма-функций с двумя настраиваемыми параметрами [12]:

$$x_i^* = -m_{i-1}\sigma(k_{i-1}e_{i-1}), k_{i-1}, m_{i-1} = \text{const} > 0, i = \overline{2,5}, \quad (9)$$

где $\sigma(k_{i-1}e_{i-1}) = 2 / (1 + \exp(-k_{i-1}e_{i-1})) - 1$ – нечетная и ограниченная сигма-функция; $|\sigma(k_{i-1}e_{i-1})| < 1$, $e_i \in R$ ($i = \overline{2,5}$) – невязки между переменными x_i и желаемыми фиктивными управлениями x_i^* (9):

$$e_i = x_i - x_i^* = x_i + m_{i-1}\sigma(k_{i-1}e_{i-1}), i = \overline{2,5}. \quad (10)$$

Истинное управление (напряжение питания ДПТ) естественно принять в виде разрывной функции [6]

$$u = -m_5 \text{sign}(e_5), m_5 = \text{const} > 0,$$

$$\text{sign}(e_5) = \begin{cases} +1, & e_5 > 0, \\ -1, & e_5 < 0, \end{cases} \quad (11)$$

при $e_5 = 0$ значение функции знака не определено, но ограничено отрезком $[-1; 1]$. Замкнутая система (1), (2), (11), записанная относительно ошибки слежения и невязок (10), имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 - m_1\sigma(k_1e_1) - \dot{g}, \\ \dot{e}_i &= b_i(e_{i+1} - m_i\sigma(k_ie_i)) - \\ &- \sum_{j=1}^i a_{ij}e_j + f_i + \Lambda_{i-1}, i = \overline{2,3,4}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\dot{e}_5 = -a_{54}e_4 - a_{55}e_5 + f_5 + \Lambda_4 - b_5m_5\text{sign}(e_5),$$

где $b_3 = 1$, элементы a_{ij} , указанные в формуле (12), но отсутствующие в системе (1), (2), равны нулю, Λ_{i-1} – полные производные фиктивных управлений (9)

$$\begin{aligned} \Lambda_{i-1} &= \frac{d}{dt} m_{i-1}\sigma(k_{i-1}e_{i-1}) = \\ &= 0,5m_{i-1}k_{i-1} \times (1 - \sigma^2(k_{i-1}e_{i-1}))\dot{e}_{i-1}, i = \overline{2,5}; \\ f_2 &= -a_{21}g - a_{22}\sin(e_1 + g) + f(t), f_3 = 0, \\ f_4 &= a_{43}(m_2\sigma(k_2e_2) + g) + a_{44}m_3\sigma(k_3e_3), \\ f_5 &= a_{54}m_3\sigma(k_3e_3) + a_{55}m_4\sigma(k_4e_4). \end{aligned} \quad (13)$$

В силу формул (5)–(7) значения f_i ограничены, их оценки зависят от амплитуд фиктивных управлений:

$$\begin{aligned} |f_2(t)| &\leq a_{21,\max}G_0 + a_{2,\max} + F = F_2, \\ |f_4(t)| &\leq a_{43}(m_2 + G_0) + a_{44}m_3 = F_4, \\ |f_5(t)| &\leq a_{54,\max}m_3 + a_{55,\max}m_4 = F_5. \end{aligned} \quad (14)$$

Поставленная задача (8) сводится к задаче стабилизации системы (12). При этом задача синтеза управления одноканальной системой пятого порядка декомпозируется на пять последовательно решаемых элементарных подзадач синтеза – выбора параметров истинного и фиктивных управлений, обеспечивающих инвариантность с заданной точностью по отношению к имеющимся неопреде-



ленностям. Амплитуду разрывного управления (11) нужно выбрать так, чтобы обеспечить в системе (12) возникновение за конечное время $0 < t_5 < t_1$ скользящего режима на поверхности $e_5 = 0$. Согласно блочному принципу управления параметры фиктивных управлений (9) следует выбрать так, чтобы организовать последовательную сходимость невязок в некоторые окрестности нуля:

$$\begin{aligned} |e_5(t)| \leq \Delta_5, t \geq t_5 > 0 \Rightarrow |e_4(t)| \leq \Delta_4, \\ t \geq t_4 > t_5 \Rightarrow \dots \Rightarrow |e_1(t)| \leq \Delta_1, t \geq t_1 > t_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где Δ_1 и t_1 заданы выражением (8) а $\Delta_i = \text{const} > 0$, $i = \overline{2, 5}$, назначаются произвольно. В первом неравенстве (15) отражен тот факт, что в реальных системах из-за различного рода неидеальностей скользящий режим возникает в некотором пограничном слое поверхности переключения [6].

Сигма-функцию можно оценить снизу кусочно-линейной функцией

$$\begin{aligned} 0,8|\text{sat}(k_i e_i)| \leq |\sigma(k_i e_i)| < 1, \\ \text{sat}(k_i e_i) = \begin{cases} \text{sign}(e_i), |e_i| > 2,2 / k_i, \\ k_i e_i / 2,2, |e_i| \leq 2,2 / k_i, i = \overline{1, 4}, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

где $\sigma(\pm 2,2) \approx \pm 0,8$, $e_i = \pm 2,2 / k_i$ – точки разделения $\sigma(k_i e_i)$ на почти линейную и почти постоянную функции [12]. От выбора значения k_i – коэффициента усиления в аргументе сигма-функции – зависит точность стабилизации соответствующей невязки. Зафиксируем обратно пропорциональную зависимость между коэффициентами усиления и точностью стабилизации невязок: $|e_i| \leq 2,2 / k_i = \Delta_i, i = \overline{1, 4}$. Тогда при выбранных значениях коэффициентов усиления

$$k_i \geq 2,2 / \Delta_i, i = \overline{1, 4}, \quad (17)$$

обеспечивающих желаемую точность стабилизации, задача синтеза сводится к выбору амплитуд m_i , $i = \overline{1, 5}$, посредством которого достигается последовательная сходимость невязок в соответствующие окрестности нуля (15). Достаточные условия, гарантирующие $|e_i| \leq \Delta_i$, имеют вид: $e_i \dot{e}_i < 0$ при $|e_i| > \Delta_i, i = \overline{1, 5}$ [6, 12]. Отсюда получим нижнюю оценку для выбора амплитуды в i -м ($i = \overline{1, 4}$) блоке при условии, что во всех следующих блоках $j = i + 1, i + 2, \dots, 5$, невязки уже сошлись в заданные окрестности нуля $|e_j| \leq \Delta_j$ (15). С учетом формул (5), (14)–(17) имеем:

$$\begin{aligned} 0,8m_1 > G_1 + \Delta_2 \Rightarrow e_1 \dot{e}_1 = e_1(e_2 - m_1 \sigma(k_1 e_1) - \dot{g}) \leq \\ \leq |e_1|(\Delta_2 + G_1 - 0,8m_1) < 0, \\ 0,8b_{i,\min} m_i > b_{i,\min} \Delta_{i+1} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij,\max} |e_j| + \\ + F_i + |\Lambda_{i-1}| \Rightarrow e_i \dot{e}_i = e_i(b_i(e_{i+1} - m_i \sigma(k_i e_i)) - \\ - \sum_{j=1}^i a_{ij} e_j + f_i + \Lambda_{i-1}) \leq \\ \leq |e_i|(b_{i,\min}(\Delta_{i+1} - 0,8m_i) - a_{ij,\min} |e_j|) + \\ \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij,\max} |e_j| + F_i + |\Lambda_{i-1}| < 0, i = 2, 3, 4; \\ b_{5,\min} m_5 > a_{54,\max} |e_4| + F_5 + |\Lambda_4| \Rightarrow e_5 \dot{e}_5 = \\ = e_5(-a_{54} e_4 - a_{55} e_5 + f_5 + \Lambda_4 - b_5 m_5 \text{sign}(e_5)) \leq \\ \leq |e_5|(a_{54,\max} |e_4| - a_{55,\min} |e_5| + \\ + F_5 + |\Lambda_4| - b_{5,\min} m_5) < 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для реализации достаточных условий (18) требуется оценить диапазоны изменения значений переменных системы (12) и их производных в процессе регулирования с учетом заданного времени стабилизации ошибки слежения (8). Соответствующая процедура и итоговые неравенства для выбора амплитуд m_i ($i = \overline{1, 5}$) представлены в Приложении. Процедура опирается на консервативные оценки и доказывает существование решений неравенств (18). Принимаемые значения коэффициентов усиления (17) и амплитуд можно скорректировать в меньшую сторону по результатам имитационного моделирования.

В системе с неполным комплектом датчиков в законе управления (11) вместе с измеряемыми переменными $g(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$, $x_5(t)$ будут использованы оценки $\hat{x}_1(t)$, $\hat{x}_2(t)$ неизмеряемых переменных состояния $x_1(t)$, $x_2(t)$. В § 3 рассматривается задача синтеза наблюдателя состояния, который в условиях параметрической неопределенности объекта управления обеспечивает заданные точность и время оценивания:

$$|x_i(t) - \hat{x}_i(t)| \leq \delta_i, i = 1, 2, t \geq T, 0 < T < t_5. \quad (19)$$

В системе с динамической обратной связью закон управления (11) будет реализован в виде

$$u = -m_5 \text{sign}(\hat{e}_5), \quad (20)$$

где ошибка слежения и невязки (10) формируются по измеряемым и оценочным сигналам:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 = \hat{x}_1 - g, \hat{e}_2 = \hat{x}_2 + m_1 \sigma(k_1 \hat{e}_1), \hat{e}_3 = x_3 + m_2 \sigma(k_2 \hat{e}_2), \\ \hat{e}_4 = x_4 + m_3 \sigma(k_3 \hat{e}_3), \hat{e}_5 = x_5 + m_4 \sigma(k_4 \hat{e}_4). \end{aligned}$$

В замкнутой системе (1), (2) с динамической обратной связью (20) в качестве неидеальностей выступают ошибки оценивания (19), что приводит к появлению в скользящем режиме пограничного слоя

$$|\hat{e}_5 - e_5| = m_4 |\sigma(k_4 \hat{e}_4) - \sigma(k_4 e_4)| \leq \Delta_5. \quad (21)$$

Из (21) и S -образной формы сигма-функции следует, что наибольшее отклонение достигается в окрестности нуля, а на бесконечности влияние ошибок оценивания будет практически незаметно. С учетом первого приближения $\sigma(kx) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 0,5kx$ можно дать следующую оценку отклонению (21):

$$\begin{aligned} |\sigma(k_4 \hat{e}_4) - \sigma(k_4 e_4)| &\approx 0,5k_4 |\hat{e}_4 - e_4| \approx \\ &\approx 0,5k_4 m_3 |\sigma(k_3 \hat{e}_3) - \sigma(k_3 e_3)| \approx 0,5^2 k_4 m_3 k_3 |\hat{e}_3 - e_3| \approx \\ &\approx 0,5^2 k_4 m_3 k_3 m_2 |\sigma(k_2 \hat{e}_2) - \sigma(k_2 e_2)| \approx \\ &\approx 0,5^3 k_4 m_3 k_3 m_2 k_2 |\hat{e}_2 - e_2| \approx \\ &\approx 0,5^3 k_4 m_3 k_3 m_2 k_2 |\delta_2 + m_1 |\sigma(k_1 \hat{e}_1) - \sigma(k_1 e_1)| \approx \\ &\approx 0,5^3 k_4 m_3 k_3 m_2 k_2 (\delta_2 + 0,5m_1 k_1 \delta_1). \end{aligned}$$

Из данного выражения с учетом принятых значений параметров регулятора и величины пограничного слоя Δ_5 , учитываемой при его настройке, следуют ограничения на ошибки оценивания, которые нужно обеспечить при решении задачи наблюдения:

$$\delta_2 + 0,5m_1 k_1 \delta_1 \leq \frac{8\Delta_5}{m_4 k_4 m_3 k_3 m_2 k_2}. \quad (22)$$

3. НАБЛЮДАТЕЛЬ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПЕРЕМЕННЫХ МЕХАНИЧЕСКОЙ ПОДСИСТЕМЫ

Система (1), (2) является наблюдаемой относительно измерений $x_3(t)$, $x_4(t)$ $x_5(t)$, однако наблюдатель состояния полного порядка невозможно синтезировать из-за наличия параметрических неопределенностей в модели и действия на объект неконтролируемых внешних возмущений. Для восстановления значений неизмеряемых переменных $x_1(t)$, $x_2(t)$ воспользуемся процедурой оценивания внешних возмущений без построения динамического генератора возмущений [7, 15, 16] и будем строить наблюдатель пониженного порядка (редуцированный наблюдатель). В этом случае искомые оценки $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ могут быть получены только с заданной точностью (19), (22).

Согласно данной процедуре оценивания для построения редуцированного наблюдателя примем

за основу четвертое и первое уравнения исходной системы (1), (2), которые не зависят от значений неопределенных параметров и включают в себя неизмеряемые переменные с ненулевыми множителями:

$$\dot{x}_4 = -a_{43}(x_3 - x_1) - a_{44}x_4 + a_{45}x_5, \quad \dot{x}_1 = x_2. \quad (23)$$

Редуцированный наблюдатель строится на основе системы (23) с учетом измеряемых сигналов:

$$\dot{z}_1 = -a_{43}(x_3 - z_2) - a_{44}x_4 + a_{45}x_5 + v_1, \quad \dot{z}_2 = v_2, \quad (24)$$

где z_1 , z_2 – переменные состояния наблюдателя, v_1 , v_2 – его корректирующие воздействия.

Введем ошибки наблюдения $\varepsilon_1 = x_4 - z_1$, $\varepsilon_2 = x_1 - z_2$, относительно которых с учетом формул (23), (24) получим систему

$$\dot{\varepsilon}_1 = a_{43}\varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = x_2 - v_2. \quad (25)$$

В силу имеющихся измерений значений параметра x_4 текущие значения ошибки $\varepsilon_1(t)$ известны, ошибки $\varepsilon_2(t)$ – неизвестны. Примем следующие начальные значения в наблюдателе (24) и, соответственно, в виртуальной системе (25):

$$\begin{aligned} z_1(0) = x_4(0) &\Rightarrow \varepsilon_1(0) = 0; \\ z_2(0) = 0 &\Rightarrow \varepsilon_2(0) = x_1(0), \quad |\varepsilon_2(0)| \leq \pi. \end{aligned} \quad (26)$$

Цель – сформировать корректирующие воздействия v_1 , v_2 так, чтобы обеспечить стабилизацию ошибок наблюдения и их производных с заданной точностью и за заданное время (19), (22). Для этого используем кусочно-линейные корректирующие воздействия [7, 15, 16]:

$$\begin{aligned} v_1 &= p_1 \text{sat}(l_1 \varepsilon_1), \quad v_2 = p_2 \text{sat}(l_2 v_1), \quad l_i, p_i = \text{const} > 0, \\ \text{sat}(l_i \varepsilon_i) &= \begin{cases} \text{sign}(\varepsilon_i), & |\varepsilon_i| > 1/l_i, \\ l_i \varepsilon_i, & |\varepsilon_i| \leq 1/l_i. \end{cases} \end{aligned} \quad (27)$$

Функции (27) так же, как и сигма-функции, имеют S -образную форму и по два настраиваемых параметра. Они более просты в реализации, но не являются гладкими. Однако последний факт не является критичным, так как в задаче наблюдения корректирующие воздействия не несут физического смысла и могут быть негладкими – в отличие от фиктивных управлений, в качестве которых принимаются переменные состояния (10) (а к ним, в свою очередь, предъявляется требование гладкости).

Лемма. Если в системе (25)–(27) внешний сигнал $x_2(t)$ ограничен условием (3), то для любых $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$, $T > 0$ найдутся положительные



действительные числа $\bar{p}_i, \bar{l}_i$ такие, что при любых $p_i > \bar{p}_i, l_i \geq \bar{l}_i, i=1,2$, будет обеспечено выполнение неравенств

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(t)| &= |x_1(t) - z_2(t)| \leq \delta_1, \\ |x_2(t) - v_2(t)| &\leq \delta_2, t \geq T. \end{aligned} \quad (28)$$

Доказательство леммы приведено в Приложении. Из выражений (19), (28) следует, что в качестве искомых оценок неизмеряемых переменных принимаются переменная состояния и корректирующее воздействие второго уравнения редуцированного наблюдателя (24): $\hat{x}_1(t) = z_2(t), \hat{x}_2(t) = v_2(t)$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для проверки работоспособности разработанного метода синтеза динамической обратной связи было проведено численное моделирование в среде MATLAB-Simulink замкнутой системы (1), (2), (20), (24) при начальных значениях $x_i(0) = 0, i = \overline{1, 5}$. Ставилась задача обеспечения достижения следующих значений целевых показателей (8):

$$\Delta_1 = 0,04 \text{ рад}, t_1 = 2 \text{ с}. \quad (29)$$

С учетом значений (29), а также значений и диапазонов изменения параметров и внешних воздействий

$$\begin{aligned} k_1 &= 0,2, J_m = 0,01, d = 0,045, k_m = 0,3; \\ \bar{m} &\in [0,18; 0,25], h \in [0,2; 0,3], \\ J_l &\in [0,0072; 0,0225], c \in [0,25; 0,33], \\ R &\in [3,8; 4,2], L \in [0,006; 0,013]; \\ |g^{(i)}(t)| &\leq 0,2, i = \overline{0,1}; |f(t)| \leq 0,1 \end{aligned} \quad (30)$$

на основе неравенств (17), (П.9)–(П.13) (см. Приложение) были приняты следующие значения коэффициентов обратной связи:

$$\begin{aligned} k_1 &= 80, k_2 = 25, k_3 = 5, k_4 = 8; \\ m_1 &= 0,3, m_2 = 0,7, m_3 = 10, m_4 = 40, m_5 = 90. \end{aligned} \quad (31)$$

В силу выражений (19), (22) были определены значения целевых показателей для решения задачи наблюдения: $\delta_1 = 0,0008$ рад, $\delta_2 = 0,002$ рад/с, $T = 0,1$ с. В наблюдателе (24) с учетом ограничения $|x_2(t)| \leq 5 = X_2$ рад/с (3) на основе неравенств

(П.22), (П.26) (см. Приложение) приняты следующие значения коэффициентов коррекции (27):

$$l_1 = 155, l_2 = 150; p_1 = 60, p_2 = 40. \quad (32)$$

Проведено два численных эксперимента с одинаковыми коэффициентами регулятора (31) и наблюдателя (32), но с разными параметрами объекта и внешними воздействиями из диапазонов (30). В первом эксперименте в качестве значений неопределенных параметров объекта принимались левые границы отрезков (30) и внешние воздействия $g(t) = 0,05|\sin t| + 0,15\cos(0,5t), f = 0,05$. Во втором эксперименте в качестве значений параметров объекта принимались правые границы отрезков (30) и внешние воздействия $g(t) = 0,18|\cos(t)|, f(t) = 0,05t, t \in [0; 2]$ – пилообразная функция с главным периодом 2 с. Обратим внимание на то, что в обоих экспериментах задающие воздействия – кусочно-гладкие функции, производные которых имеют разрывы первого рода. В целях сравнения моделирование выполнялось и для системы со статической обратной связью (11) в предположении, что все переменные состояния измеряются, и для системы с динамической обратной связью (20), в которой оценки неизмеряемых переменных $\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)$ были получены с помощью наблюдателя (24), (27). При интегрировании использовался метод Эйлера с постоянным шагом 10^{-5} .

На рис. 1–4 представлены результаты моделирования первого эксперимента. Для системы (1), (2) с динамической обратной связью (20), (24), (27) представлены: на рис. 1 – графики заданного сигнала $g(t)$ и углового положения манипулятора $x_1(t)$; на рис. 2 – график ошибки слежения $e_{1d}(t) = x_1(t) - g(t)$; на рис. 3 – графики $\alpha_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t), \alpha_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ – отклонений оценок $\hat{x}_1(t) = z_2(t), \hat{x}_2(t) = v_2(t)$, полученных с помощью наблюдателя (24), (27), от значений переменных $x_1(t), x_2(t)$. На рис. 4 показан график $e_{1d}(t) - e_{1c}(t)$ – отклонения $e_{1d}(t)$ от ошибки слежения $e_{1c}(t)$ в системе со статической обратной связью (11). На рис. 5–8 показаны аналогичные графики для эксперимента 2.

В табл. 2 для обоих экспериментов и законов управления приведены показатели качества: время регулирования t^* : $|e_1(t)| \leq 0,04, t \geq t^*$; перерегулирование $e_{1\max} \geq |e_1(t)|, t \geq 0$; достигаемая точность слежения $\bar{\Delta}_1 \geq |x_1(t) - g(t)|$ в установившемся режиме при $t \geq 10$ с.

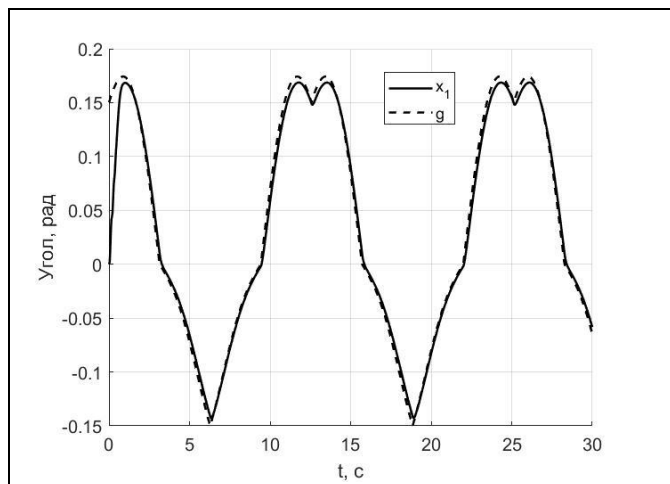


Рис. 1. Графики изменения значений переменных $g(t)$, $x_1(t)$ для эксперимента 1

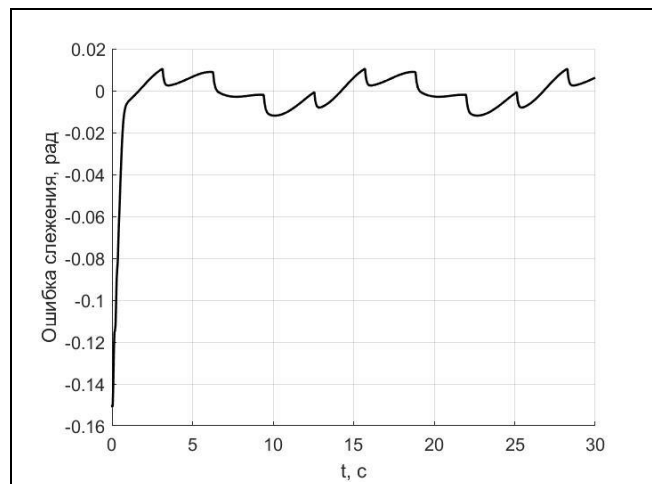


Рис. 2. График изменения ошибки слежения $e_{1a}(t)$ для эксперимента 1

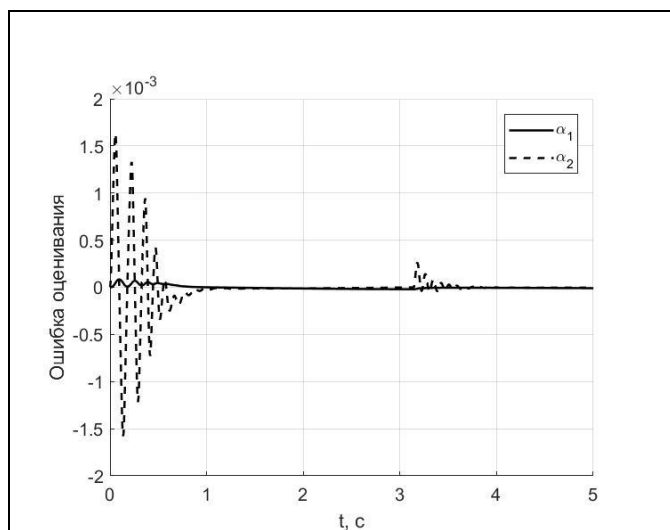


Рис. 3. Графики изменения отклонений $a_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$, $a_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ для эксперимента 1

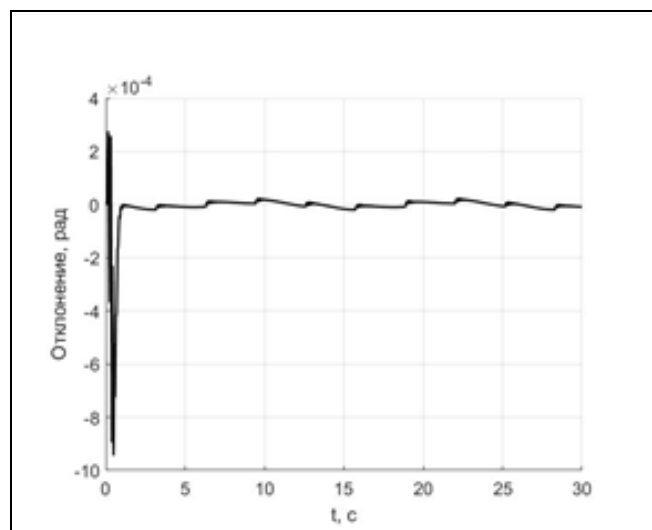


Рис. 4. График изменения отклонения $e_{1d}(t) - e_{1c}(t)$ для эксперимента 1

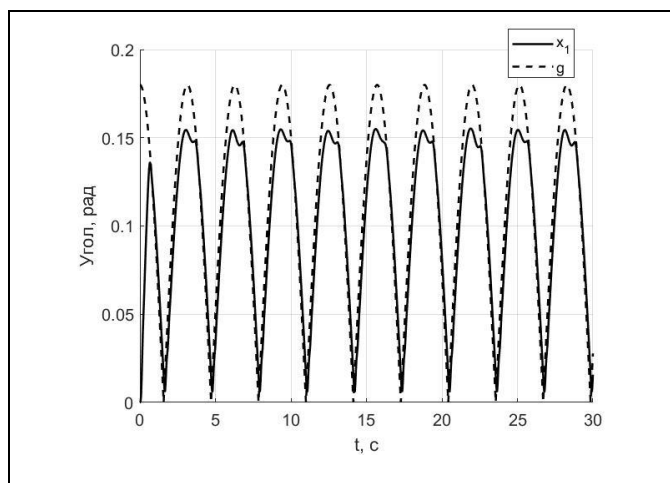


Рис. 5. Графики изменения значений переменных $g(t)$, $x_1(t)$ для эксперимента 2

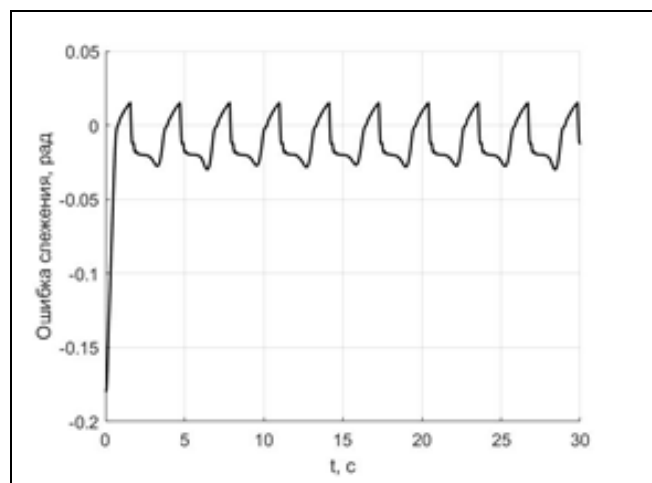


Рис. 6. График изменения ошибки слежения $e_{1a}(t)$ для эксперимента 2

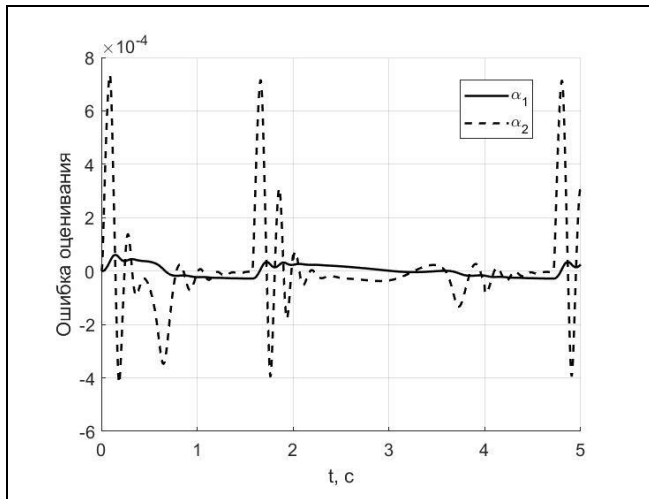


Рис. 7. Графики изменения отклонений $\alpha_1(t) = x_1(t) - \hat{x}_1(t)$, $\alpha_2(t) = x_2(t) - \hat{x}_2(t)$ для эксперимента 2

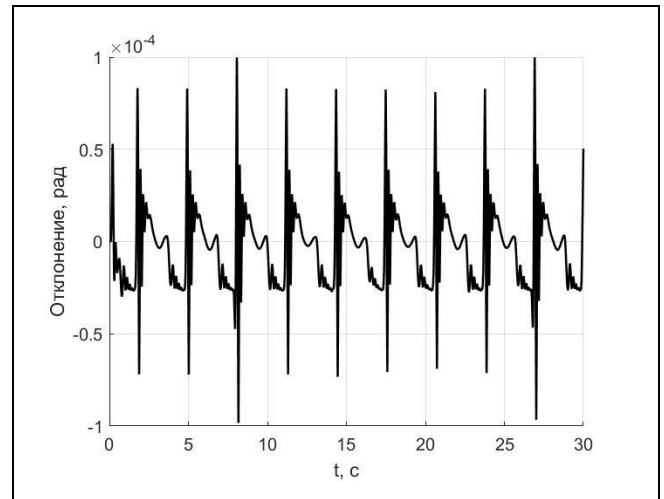


Рис. 8. График изменения ошибки $e_{1d}(t) - e_{1c}(t)$ для эксперимента 2

Таблица 2

Значения показателей качества регулирования

Наименование показателя, единица измерения	Статическая обратная связь (11)	Динамическая обратная связь (20), (24), (27)
Эксперимент 1		
t^* , с	0,5380	0,5408
$e_{1\max}$, рад	0,1510	0,1510
Δ_1 , рад	0,0119	0,0119
Эксперимент 2		
t^* , с	0,5146	0,5147
$e_{1\max}$, рад	0,18	0,18
Δ_1 , рад	0,0299	0,0299

Из рис. 1–8 и табл. 2 следует, что целевые значения показателей (29) достигаются во всех экспериментах. Ввод редуцированного наблюдателя (24), (27) в контур обратной связи не привел к существенному ухудшению качества регулирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель настоящей работы заключалась в обеспечении отслеживания угловым положением однозвенного манипулятора заданного сигнала в условиях действия негладких внешних воздействий в случае, когда датчики установлены только на приводе. Эта цель была достигнута путем применения блочной процедуры синтеза обратной связи с сигмоидальными фиктивными управлениями, которые настраивались для «худших» допустимых значений неопределенных параметров и внешних возмущений. Для оценки углового положения и

скорости манипулятора спроектирован редуцированный наблюдатель состояния, построение которого не требует точного знания параметров механической подсистемы. Результаты численного моделирования подтвердили работоспособность разработанных систем слежения и наблюдения. Показано, что при использовании динамической обратной связи с редуцированным наблюдателем значения показателей качества замкнутой системы сопоставимы со значениями показателей системы с полными измерениями.

В дальнейшем планируется распространить процедуру блочного синтеза сигмоидальных фиктивных управлений на линейные объекты со многими входами и выходами, а также исследовать работоспособность редуцированного наблюдателя при наличии шумов в измерениях.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Процедура (выбора амплитуд истинного (11) и фиктивных (9) управлений). Вначале оценим значения переменных состояния системы (12). В силу формул (3)–(5) и (10) для области их начальных значений имеем оценки

$$|e_1(0)| \leq X_{1,0} + G_0, |e_i(0)| \leq X_{i,0} + m_{i-1}, i = \overline{2,5}. \quad (\text{П.1})$$

В общем случае $|e_i(0)| > \Delta_i, i = \overline{1,5}$, в системе (12) монотонный переходный процесс гарантирован только для переменной последнего блока $e_5(t)$. В худшем расчетном случае значения переменных $e_i(t), i = \overline{1,4}$ растут по модулю до тех пор, пока все переменные $e_j(t), j = \overline{5,4}, \dots, i+1$ не достигнут заданных окрестностей (15), т. е.

$$|e_5(t)| \leq |e_5(0)| = e_{5,\max}, |e_i(t)| \leq |e_i(t_{i+1})| = e_{i,\max}, i = \overline{4,1}. \quad (\text{П.2})$$

С учетом того, что в системе (1), (2) и, следовательно, в системе (12) $a_{ii} = 0$, $i = \overline{1, 3}$, $a_{44} > 0$, в силу выражений (18) и (П.1), (П.2) можно дать следующие оценки переменных состояния и их производных:

$$\begin{aligned} e_{1,\max} &\leq X_{1,0} + G_0 + (e_{2,\max} - \Delta_2)t_2, \\ e_{i,\max} &\leq X_{i,0} + m_{i-1} + b_{i,\max}(e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1})t_{i+1}, i = 2, 3, \\ e_{4,\max} &\leq X_{4,0} + m_3 + b_4(e_{5,\max} - \Delta_5)(1 - \exp(-a_{44}t_5)) / a_{44}, \\ e_{5,\max} &\leq X_{5,0} + m_4; \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

$$\begin{aligned} |\dot{e}_i(t)| &< b_{i,\max}(2m_i + e_{i+1,\max} - \Delta_{i+1}), t \in [0; t_{i+1}), \\ |\dot{e}_i(t)| &< 2b_{i,\max}m_i, t \geq t_{i+1}, i = \overline{1, 3}, b_{1,\max} = b_{3,\max} = 1; \\ |\dot{e}_4(t)| &< b_4(2m_4 + e_{5,\max} - \Delta_5) + a_{44}e_{4,\max}, t \in [0; t_5), \\ |\dot{e}_4(t)| &< 2b_4m_4 + a_{44}e_{4,\max}, t \in [t_5; t_4), \\ |\dot{e}_4(t)| &< 2b_4m_4 + a_{44}\Delta_4, t \geq t_4. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

С учетом введенного разделения сигма-функции (16) для ее производной $\sigma'(k_i e_i) = 0,5k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i))$ имеем:

$$\begin{aligned} 0 < \sigma'(k_i e_i) &< 0,18k_i, t \in [0; t_i), |e_i(t)| > 2,2 / k_i, \\ 0,18k_i &\leq \sigma'(k_i e_i) \leq 0,5k_i, t \geq t_i, |e_i(t)| \leq 2,2 / k_i, \\ i &= \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

На максимальные по модулю значения невязок, зависящих от времени (П.3), введем ограничения

$$e_{1,\max} \leq 2\pi, e_{i+1,\max} \leq 3m_i + \Delta_{i+1}, i = \overline{1, 3}, \quad (\text{П.6})$$

тогда выражения (П.3) примут вид

$$\begin{aligned} e_{1,\max} &\leq X_{1,0} + G_0 + 3m_1 t_2 \leq 2\pi, \\ e_{i,\max} &\leq X_{i,0} + m_{i-1} + 3b_{i,\max}m_i t_{i+1} \leq 3m_{i-1} + \Delta_i, i = 2, 3, \\ e_{4,\max} &\leq X_{4,0} + m_3 + b_4(X_{5,0} + m_4 - \Delta_5) \times \\ &\times (1 - \exp(-a_{44}t_5)) / a_{44} \leq 3m_3 + \Delta_4. \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

В силу формул (П.4)–(П.7) для производных фиктивных управлений (13) получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} |\Lambda_i(t)| &= m_i \frac{k_i(1 - \sigma^2(k_i e_i))}{2} |\dot{e}_i| \leq k_i m_i^2 b_{i,\max}, i = \overline{1, 3}, \\ |\Lambda_4(t)| &\leq k_4 m_4^2 b_4 + 0,5k_4 m_4 a_{44} e_{4,\max}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Для того чтобы обеспечить выполнение неравенств (П.6), амплитуды $m_i, i = \overline{1, 4}$, должны быть ограничены сверху. Примем для удобства $0 < \Delta_i = X_{i,0}$, $i = \overline{2, 5}$, тогда из правых неравенств (П.7) получим

$$\begin{aligned} m_1 &\leq m_{1,\max} = \frac{2\pi - X_{1,0} + G_0}{3t_2}, m_i \leq m_{i,\max} = \frac{2m_{i-1}}{3b_{i,\max}t_{i+1}}, \\ i &= 2, 3, m_4 \leq m_{4,\max} = \frac{2m_3 a_{44}}{b_4(1 - \exp(-a_{44}t_5))}. \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

Очевидно, что верхние границы для выбора амплитуд (П.9) можно сделать сколь угодно большими путем

уменьшения значений $t_i, i = \overline{2, 5}$, с соблюдением иерархии $0 < t_5 < t_4 < \dots < t_2 < t_1$.

Формализуем процедуру последовательного выбора амплитуд $m_i, i = \overline{1, 5}$, которые обеспечат в замкнутой системе (12) выполнение условий (15) и, следовательно, цели управления (8) при заданных значениях Δ_1, t_1 , принятых значениях $\Delta_i = X_{i,0}, i = \overline{2, 5}$, и выбранных на их основе значениях коэффициентов усиления (17). Амплитуды нужно выбрать так, чтобы обеспечить сходимость невязок $e_i(t), i = \overline{5, 1}$, на интервалах $[t_{i+1}; t_i], t_6 = 0$, в заданные окрестности нуля с учетом выражений (18) и (П.7)–(П.9). Варьируемыми параметрами являются моменты времени $t_i, i = \overline{2, 5}$.

Шаг 1. С учетом выражения (П.7) и интервала сходимости $[t_2; t_1]$ первое неравенство (18) можно представить в виде

$$\begin{aligned} 0,8m_1 &\geq \frac{X_{1,0} + G_0 + 3m_1 t_2 - \Delta_1}{t_1 - t_2} + G_1 + X_{2,0} \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 &\geq m_{1,\min} = \frac{X_{1,0} + G_0 - \Delta_1 + (G_1 + X_{2,0})(t_1 - t_2)}{0,8t_1 - 3,8t_2}. \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

Из неравенства (П.10) следует ограничение на выбор $0 < t_2 < t_1$: $0,8t_1 - 3,8t_2 > 0 \Rightarrow t_2 < 0,2t_1$. Фиксируем значения t_2^*, m_1^* :

$$\begin{aligned} 0 < t_2^* &< 0,2t_1 : m_{1,\min}(t_2^*) < m_{1,\max}(t_2^*); \\ m_1^* &\in [m_{1,\min}(t_2^*); m_{1,\max}(t_2^*)] \end{aligned}$$

и переходим на следующий шаг процедуры.

Шаг i ($i = 2, 3$). С учетом выражений (П.7), (П.8) и интервала сходимости $[t_{i+1}; t_i^*]$ i -е неравенство (18) примет вид

$$\begin{aligned} 0,8b_{i,\min}m_i &\geq \frac{m_{i-1}^* + 3b_{i,\max}m_i t_{i+1}}{t_i^* - t_{i+1}} + b_{i,\min}X_{i+1,0} + \\ &+ \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij,\max}e_{j,\max}(m_j^*) + F_i + k_{i-1}(m_{i-1}^*)^2 b_{i-1,\max} \Rightarrow \\ &m_{i-1}^* + (b_{i,\min}X_{i+1,0} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij,\max}e_{j,\max}(m_j^*)) \\ \Rightarrow m_i &\geq m_{i,\min} = \frac{m_{i-1}^* + (b_{i,\min}X_{i+1,0} + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij,\max}e_{j,\max}(m_j^*))}{0,8b_{i,\min}t_i^* - (0,8b_{i,\min} + 3b_{i,\max})t_{i+1}} + \\ &+ \frac{F_i + k_{i-1}(m_{i-1}^*)^2 b_{i-1,\max}(t_i^* - t_{i+1})}{0,8b_{i,\min}t_i^* - (0,8b_{i,\min} + 3b_{i,\max})t_{i+1}}, i = 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Из неравенства (П.11) следует ограничение на выбор значения t_{i+1} : $0,8b_{i,\min}t_i^* - (0,8b_{i,\min} + 3b_{i,\max})t_{i+1} > 0 \Rightarrow t_{i+1} < 0,2b_{i,\min}t_i^* / b_{i,\max}, i = 2, 3, b_{3,\min} = b_{3,\max} = 1$. Фиксируем значения t_{i+1}^*, m_i^* :

$$\begin{aligned} t_{i+1}^* &< 0,2b_{i,\min}t_i^* / b_{i,\max} : m_{i,\min}(t_{i+1}^*) < m_{i,\max}(t_{i+1}^*); \\ m_i^* &\in [m_{i,\min}(t_{i+1}^*); m_{i,\max}(t_{i+1}^*)] \end{aligned}$$

и переходим на следующий шаг процедуры.



Шаг 4. С учетом выражений (П.7), (П.8) и интервала сходимости $[t_5^*; t_4^*]$ четвертое неравенство (18) примет вид

$$\begin{aligned} 0,8b_4m_4 &\geq \frac{m_3^* + b_4m_4(1 - \exp(-a_{44}t_5^*))}{t_4^* - t_5^*} + \\ &+ b_4X_{5,0} + a_{41}e_{1,\max} + a_{43}e_{3,\max} + F_4 + k_3(m_3^*)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow m_4 &\geq m_{4,\min} = \frac{m_3^* + [b_4X_{5,0} + a_{41}(X_{1,0} + G_0 + 3m_1^*t_2^*)]}{b_4(0,8(t_4^* - t_5^*) - (1 - \exp(-a_{44}t_5^*)) / a_{44})} + \\ &+ \frac{a_{43}(X_{3,0} + m_2^* + 3m_3^*t_4^*) + F_4 + k_3(m_3^*)^2(t_4^* - t_5^*)}{b_4(0,8(t_4^* - t_5^*) - (1 - \exp(-a_{44}t_5^*)) / a_{44})}. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Из неравенства (П.12) следует ограничение на выбор значения t_5^* : $0,8t_5^* + (1 - \exp(-a_{44}t_5^*)) / a_{44} < 0,8t_4^*$. Фиксируем значения t_5^* , m_4^* :

$$\begin{aligned} t_5^* + 1,25(1 - \exp(-a_{44}t_5^*)) / a_{44} < t_4^* : m_{4,\min}(t_5^*) < m_{4,\max}(t_5^*); \\ m_4^* &\in [m_{4,\min}(t_5^*); m_{4,\max}(t_5^*)] \end{aligned}$$

и переходим на последний шаг процедуры.

Шаг 5. С учетом выражений (14), (П.7), (П.8) и интервала сходимости $[0; t_5^*]$ последнее неравенство (18) примет вид

$$\begin{aligned} b_{5,\min}m_5 &\geq \frac{X_{5,0} + m_4^*}{t_5^*} + a_{54,\max}m_3^* + a_{55,\max}m_4^* + \\ &+ k_4(m_4^*)^2b_4 + (a_{54,\max} + 0,5k_4m_4^*a_{44}) \times \\ &\times (X_{4,0} + m_3^* + b_4m_4^*)(1 - \exp(-a_{44}t_5^*)) / a_{44}. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

Процедура выбора амплитуд завершена. ♦

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. При решении задачи управления переменные замкнутой системы (12) сходились в некоторую окрестность нуля последовательно «снизу вверх» (15), т. е. сначала обеспечивалась сходимость e_5 , затем e_4 и так, пока не была достигнута цель управления – сходимость e_1 . При решении задачи наблюдения в системе (25), напротив, устанавливается порядок сходимости ошибок наблюдения и их производных в окрестности нуля «сверху вниз», а именно

$$|\varepsilon_1(t)| \leq 1/l_1, t \geq 0; \quad (\text{П.14})$$

$$|a_{43}\varepsilon_2(t) - v_1(t)| = |\gamma_1(t)| \leq a_{43}\beta_2, t \geq t_{01}; \quad (\text{П.15})$$

$$|\varepsilon_2(t)| \leq \beta_2 + 1/(a_{43}l_2), t \geq t_{02}, \quad 0 < t_{01} < t_{02} < T < t_5^*, \quad (\text{П.16})$$

где $\beta_2 = \text{const} > 0$.

Неравенства (П.14), (П.16) и время попадания аргументов корректирующих воздействий (27) в окрестности нуля, где корректирующие воздействия описываются линейными функциями без насыщения (далее – линейные зоны), обеспечиваются выбором соответствующих значений амплитуд p_1 , p_2 . Неравенство (П.15), второе неравенство (28), а также заданная точность оценивания (19) достигаются путем выбора значений коэффициентов усиления l_1 , l_2 . Формализуем достаточные условия для выбора значений параметров корректиру-

ющих воздействий (27), обеспечивающих указанные требования.

Сначала рассмотрим настройку амплитуд. В силу выражения (26) $\varepsilon_1(0) = 0 \leq 1/l_1$, т. е. переменная $\varepsilon_1(t)$ изначально находится в линейной зоне. В ней первое уравнение системы (25), (27) имеет вид $\dot{\varepsilon}_1 = a_{43}\varepsilon_2 - p_1l_1\varepsilon_1$. На основе того вида, который оно принимает вне линейной зоны, $\dot{\varepsilon}_1 = a_{43}\varepsilon_2 - p_1\text{sign}(\varepsilon_1)$, получим достаточные условия для выбора значения p_1 , обеспечивающие выполнение неравенства (П.14):

$$\begin{aligned} p_1 > a_{43}|\varepsilon_2| \Rightarrow \varepsilon_1\dot{\varepsilon}_1 &= \varepsilon_1(a_{43}\varepsilon_2 - p_1\text{sign}(\varepsilon_1)) \leq \\ &\leq |\varepsilon_1|(a_{43}|\varepsilon_2| - p_1) < 0. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Во втором уравнении системы (25), (27) равенство $\text{sign}(v_2(t)) = \text{sign}(\varepsilon_2(t))$ гарантировано вне области $|\varepsilon_2(t)| \leq \beta_2$ при $t \geq t_{01}$ после выполнения условия (П.15). Для худшего расчетного случая согласно выражениям (П.15), (П.16) имеем:

$$\dot{\varepsilon}_2 = \begin{cases} x_2 + p_2\text{sign}(\varepsilon_2), & t \in [0; t_{01}), \\ x_2 - p_2\text{sign}(\varepsilon_2), & t \in [t_{01}; t_{02}), \\ x_2 - p_2l_2(a_{43}\varepsilon_2(t) \pm \gamma_1), & t \geq t_{02}. \end{cases} \quad (\text{П.18})$$

С учетом выражения (3) максимальное по модулю значение переменной $\varepsilon_2(t)$ достигается при $t = t_{01}$, а именно:

$$|\varepsilon_2(t)| \leq |\varepsilon_2(t_1)| \leq \pi + (X_2 + p_2)t_{01} = E_2, t \geq 0. \quad (\text{П.19})$$

Достаточные условия выбора значения p_2 аналогичны (П.17). В силу (П.19) получим неравенство для выбора значения p_2 , обеспечивающего сходимость в линейную зону (П.16) на интервале $[t_{01}; t_{02}]$:

$$\begin{aligned} p_2 &\geq \frac{\pi + (X_2 + p_2)t_{01} - \delta_1}{t_{02} - t_{01}} + X_2 \Rightarrow \\ \Rightarrow p_2 &\geq \frac{\pi + X_2t_{02} - \delta_1}{t_{02} - 2t_{01}}. \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Из выражения (П.20) следует ограничение $t_{02} > 2t_{01}$, которое нужно учитывать при назначении интервалов времени. Примем, например,

$$t_{02} - 2t_{01} = T - t_{02} = t_{01} \Rightarrow t_{01} = T/4. \quad (\text{П.21})$$

Объединяя выражения (П.17), (П.19)–(П.21), получим итоговые неравенства для последовательного выбора амплитуд корректирующих воздействий (27), обеспечивающих выполнение условий (П.14), (П.16) за заданное время:

$$\begin{aligned} p_2 &\geq \bar{p}_2 = \frac{4(\pi - \delta_1)}{T} + 3X_2, \\ p_1 &> \bar{p}_1 = a_{43}(\pi + (X_2 + p_2)T/4). \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

Далее рассмотрим настройку коэффициентов усиления корректирующих воздействий (27), гарантирующих выполнение условий (П.15), (28). Для этого составим и проанализируем оценки решений системы (25), (27) в линейных зонах (первого уравнения – на интервале

$[0; t_{01}]$; второго уравнения – на интервале $[t_{02}; t_{02} + t_{01} = T]$). На основе третьего уравнения (П.18), а также выражений (П.19), (П.21) имеем:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_1(t_1)| &\leq \frac{a_{43}E_2}{p_1l_1} + \frac{p_1 - a_{43}E_2}{p_1l_1} e^{-p_1l_1t_{01}} \Rightarrow \\ \Rightarrow p_1l_1|\varepsilon_1(t_1)| - a_{43}E_2 &\leq (p_1 - a_{43}E_2)e^{-p_1l_1t_{01}}, \quad (\text{П.23}) \\ |a_{43}\varepsilon_2(t) - v_1(t)| &\leq a_{43}\beta_2, \quad t \geq t_{01} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (p_1 - a_{43}E_2)e^{-p_1l_1T/4} &\leq a_{43}\beta_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\varepsilon_2(T)| &\leq \frac{X_2}{p_2l_2a_{43}} + \beta_2 + \frac{p_2 - X_2}{p_2l_2a_{43}} e^{-p_2l_2a_{43}t_{01}} \leq \delta_1, \\ p_2l_2a_{43}(|\varepsilon_2(T)| - \beta_2) - X_2 &\leq (p_2 - X_2)e^{-p_2l_2a_{43}t_{01}}, \quad (\text{П.24}) \\ |x_2(t) - v_2(t)| &\leq \delta_2, t \geq T \Leftrightarrow (p_2 - X_2)e^{-p_2l_2a_{43}T/4} \leq \delta_2. \end{aligned}$$

Из выражений (П.23), (П.24) следует, что ошибки наблюдения при $t \geq T$ сходятся в следующие окрестности нуля:

$$|\varepsilon_1(t)| \leq \frac{a_{43}(E_2 + \beta_2)}{p_1l_1}; \quad |\varepsilon_2(t)| \leq \frac{X_2 + \delta_2}{p_2l_2a_{43}} + \beta_2 \leq \delta_1. \quad (\text{П.25})$$

Примем, например, $\beta_2 = \delta_1/2$. Из (П.23)–(П.25) заключаем, что заданная точность (19) обеспечивается, если при зафиксированных амплитудах (П.22) коэффициенты усиления удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} l_1 &\geq \bar{l}_1 = \frac{4}{p_1T} \ln \frac{2(p_1 - a_{43}E_2)}{a_{43}\delta_1}; \\ l_2 &\geq \bar{l}_2 = \frac{1}{p_2a_{43}} \max \left\{ \frac{2(X_2 + \delta_2)}{\delta_1}; \frac{4}{T} \ln \frac{p_2 - X_2}{\delta_2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

Таким образом, существуют такие $\bar{p}_i > 0$ (П.22), $\bar{l}_i > 0$ (П.26), что при любых $p_i > \bar{p}_i$, $l_i \geq \bar{l}_i$, $i = 1, 2$, условия леммы (28) выполняются. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Spong, M., Hutchinson S., Vidyasagar M.* Robot Modeling and Control. – New York: Wiley, 2005. – 496 p.
2. *Angeles, J.* Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods and Algorithms. Third Edition. – New York: Springer, 2007. – 573 p.
3. *Голубев А.Е.* Стабилизация однозвеного манипулятора при неполном измерении состояния: обратная связь по угловой координате звена манипулятора // Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. Наука и образование. – 2012. – № 11. – С. 395–412. [*Golubev, A.E.* Single-Link Manipulator Output Feedback Control: Manipulator Link Angular Coordinate Feedback // Scientific Periodical of the Bauman MSTU. Science and Education. – 2020. – No. 11. – P. 395–412. (In Russian)]
4. *Ананьевский И.М.* Управление механическими системами с неопределенными параметрами посредством малых сил // ПММ. 2010. – Т. 74, вып. 1. – С. 133–150. [*Anan'evskii, I.M.* Control of Mechanical Systems with Uncertain Parameters by Means of Small Forces // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 2010. – No. 74. – P. 95–107.]
5. *Varghese E.S., Vincent A.K., Bagyaveereswaran V.* Optimal Control of Inverted Pendulum System Using PID Controller, LQR and MPC // IOP Conference Series Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol. 263, no. 5. – 15 p.
6. *Utkin, V.I., Guldner, J., Shi, J.* Sliding Mode Control in Electromechanical Systems. – New York: CRC Press, 2009. – 485 p.
7. *Краснов Д.В., Антипов А.С.* Синтез двухконтурного наблюдателя в задаче управления однозвеном манипулятором в условиях неопределенности // Проблемы управления. – 2021. – № 4. – С. 27–39. [*Krasnov, D.V., Antipov, A.S.* Designing a Double-Loop Observer to Control a Single-Link Manipulator under Uncertainty // Control Sciences. – 2021. – No. 4. – P. 23–33.]
8. *Feng, H., Qiao, W., Yin, C., et al.* Identification and Compensation of Nonlinear Friction for a Electro-Hydraulic system // Mechanism and Machine Theory. – 2019. – Vol. 141. – P. 1–13.
9. *Пестерев А.В., Рапопорт Л.Б., Ткачев С.Б.* Каноническое представление нестационарной задачи путевой стабилизации // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2015. – Т. 54, № 4. – С. 160–176. [*Pesterev, A.V., Rapoport, L.B., Tkachev, S.B.* Canonical Representation of a Nonstationary Path Following Problem // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2015. – Vol. 54, no. 4. – P. 656–670.]
10. *Уткин В.А., Уткин А.В.* Задача слежения в линейных системах с параметрическими неопределенностями при неустойчивой нулевой динамике // Автоматика и телемеханика. – 2014. – № 9. – С. 62–81. [*Utkin, V.A., Utkin, A.V.* Problem of Tracking in Linear Systems with Parametric Uncertainties under Unstable Zero Dynamics // Automation and Remote Control. – 2014. – Vol. 75, no. 9. – P. 1577–1592.]
11. *Краснова С.А., Сиротина Т.Г., Уткин В.А.* Структурный подход к робастному управлению // Автоматика и телемеханика. – 2011. – № 8. – С. 65–95. [*Krasnova, S.A., Sirotnina, T.G., Utkin, V.A.* A Structural Approach to Robust Control // Automation and Remote Control. – 2011. – Vol. 72, no. 8. – P. 1639–1666.]
12. *Антупов А.С., Краснова С.А., Уткин В.А.* Синтез инвариантных нелинейных одноканальных систем слежения с сигмоидальными обратными связями с обеспечением заданной точности слежения // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 1. – С. 40–66. [*Antipov, A.S., Krasnova, S.A., Utkin, V.A.* Synthesis of Invariant Nonlinear Single-Channel Sigmoid Feedback Tracking Systems Ensuring Given Tracking Accuracy // Automation and Remote Control. – 2022. – Vol. 83, iss. 1. – P. 32–53.]
13. *Tsympkin Y., Polyak B.* High-Gain Robust Control // European J. Control. – 1999. – Vol. 5. – P. 3–9.
14. *Бусурин В.И., Ёин Н.В., Жеглов М.А.* Анализ влияния линейного ускорения на характеристики кольцевого оптоэлектронного преобразователя угловой скорости и его компенсация // Автометрия. – 2019. – № 3. – С. 120–128. [*Busurin, V.I., Win, Y.N., Zhiglov, M.A.* Effect of Linear Acceleration on the Characteristics of an Optoelectronic Ring Transducer of Angular Velocity and its Compensation // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2019. – Vol. 55, no. 3. – P. 309–316.]
15. *Краснова С.А.* Оценивание внешних возмущений на основе виртуальных динамических моделей // Управление



- большими системами. – 2018. – Вып. 76. – С. 6–25. [Krasnova, S.A. Estimating the Derivatives of External Perturbations Based on Virtual Dynamic Models // Automation and Remote Control. – 2020. – Vol. 81, no. 5. – P. 897–910.]
16. Кокунько Ю.Г., Краснов Д.В., Уткин А.В. Два метода синтеза наблюдателей состояния и возмущений для беспилотного летательного аппарата // Проблемы управления. – 2020. – № 1. – С. 3–16. [Kokunko, Yu.G., Krasnov, D.V., Utkin, A.V. Two Methods for Synthesis of State and Disturbance Observers for an Unmanned Aerial Vehicle // Automation and Remote Control. – 2021. – Vol. 82, no. 8. – P. 1426–1441.]
17. Spong, M. Modeling and control of elastic joint robots // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1987. – Vol. 109. – P. 310–319.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Л.Б. Рапопортом.

Поступила в редакцию 05.05.2022,
после доработки 28.06.2022.
Принята к публикации 29.06.2022.

Антипов Алексей Семенович – канд. техн. наук,
✉ scholess18@mail.ru,

Краснов Дмитрий Валентинович – научн. сотрудник,
✉ dim93kr@mail.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

TRACKING SYSTEM DESIGN FOR A SINGLE-LINK SENSORLESS MANIPULATOR UNDER NONSMOOTH DISTURBANCES

A.S. Antipov¹ and D.V. Krasnov²

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹✉ scholess18@mail.ru, ²✉ dim93kr@mail.ru

Abstract. The controlled plant is a single-link manipulator having an elastic connection to a DC motor and operating under uncertainty and incomplete measurements. The problem is to design a discontinuous feedback control for tracking a given reference signal of the plant's angular position. The angular position and velocity of the manipulator are not available for measurements; the sensors are located only on the drive; parametric and exogenous disturbances affecting the manipulator are nonsmooth and cannot be directly suppressed by control applied to the actuator. Within the block approach, a decomposition procedure is developed to design a nonlinear local feedback control. This control ensures the controlled variable's invariance with respect to uncertainties unmatched with the control action. A state observer of reduced order is constructed to estimate the angular position and velocity of the manipulator required for feedback design. The state variables in this observer are estimated using the principle of restoring exogenous disturbances by their action on the controlled plant. With this principle, a dynamic model of exogenous disturbances is not needed. In both problems (control and observation), S-shaped bounded continuous local feedbacks are used (smooth (sigmoidal) and nonsmooth (piecewise linear) local feedbacks, respectively). These local feedbacks suppress bounded disturbances acting with them through the same channel. The algorithms developed below do not require real-time identification of parametric and exogenous disturbances. However, they stabilize the observation and tracking errors with some accuracy. The effectiveness of the dynamic feedback is validated by the results of numerical simulation.

Keywords: electromechanical system, tracking, invariance, block approach, state observer of reduced order, S-shaped functions.

Funding. This work was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 20-01-00363-A.