INTEGRATION OF EDUCATION. Vol. 28, no. 1. 2024

ISSN 1991-9468 (Print), 2308-1058 (Online) http://edumag.mrsu.ru

АКАДЕМИЧЕСКАЯ ИНТЕГРАЦИЯ / ACADEMIC INTEGRATION

УДК 378.1:514.116

doi: 10.15507/1991-9468.114.028.202401.111-124

Оригинальная статья

Теория APOS в изучении математики (на примере тригонометрии)

Н. К. Туктамышов, Т. Ю. Горская✉

Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Российская Федерация

✉ *gorskaya0304@mail.ru*

Аннотация

Введение. Теория APOS – одна из наиболее известных теорий, позволяющая изучать процесс структуризации понятия в сознании студента, созданная для исследования ментальных процессов и выявления трудностей, которые испытывают обучающиеся в ходе изучения математических понятий. Несмотря на многочисленные исследования по методике преподавания математики, в последние годы публикации по проблеме понимания студентами математических понятий малочисленны; практически нет работ, посвященных изучению формирования ментальных структур в ходе усвоения обучающимися математических понятий. Цель исследования – на примере тригонометрических функций проанализировать процесс усвоения математических понятий и представить результаты исследования в соответствии со стадиями теории APOS.

Материалы и методы. В выборку исследования вошли 102 студента-первокурсника Института строительства Казанского государственного архитектурно-строительного университета. Для изучения восприятия студентами математических понятий использована теория APOS, которая позволила увидеть детали формирования математических понятий на каждой стадии, а также определить характерные ошибки и провести их классификацию. Эмпирическая база исследования включает результаты письменного опроса, проведенного среди студентов. Сопоставлялись количественные характеристики каждой стадии APOS.

Результаты исследования. Показана результативность применения теории APOS, разработан опросник, позволивший изучить процесс структуризации математического понятия на примере тригонометрической функции в сознании студента. В рамках теории APOS выявлены отличия в уровнях понимания тригонометрии, что позволило провести классификацию ошибок, допускаемых студентами. Установлено, что в процессе изучения понятия функции большинство студентов допускали концептуальные ошибки. Результаты продемонстрировали важность исследования ментальных структур, возникающих в ходе познавательного процесса, для определения интеллектуальных резервов обучающихся.

Обсуждение и заключение. Полученные выводы вносят вклад в развитие научных представлений о процессе структуризации математических понятий в сознании обучающегося и в методы исследования ментальных структур абстрактных понятий. Материалы статьи будут полезны вузовским преподавателям, школьным учителям в освоении современных образовательных технологий в области математики и других дисциплинах.

Ключевые слова: математика, функция, тригонометрия, действие, процесс, объект, схема

Благодарности: авторы выражают благодарность профессору Г. И. Кирилловой за полезное обсуждение работы.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Туктамышов Н. К., Горская Т. Ю. Теория APOS в изучении математики (на примере тригонометрии) // Интеграция образования. 2024. Т. 28, № 1. С. 111–124. https://doi.org/10.15507/1991-9468.114.028.202401.111-124

Original article

APOS Theory in Learning Mathematics (Using Trigonometry as an Example)

N. K. Tuktamyshov, T. Yu. Gorskaya ✉
Kazan State University of Architecture and Engineering, Kazan, Russian Federation
✉ *gorskaya0304@mail.ru*

Abstract

Introduction. One of the most well-known theories that allows us to study the process of structuring a concept in the mind of a student is the APOS theory, specially created for the study of mental processes in mathematical education and worthy of application in other disciplines. Despite numerous studies on methods of teaching mathematics, in recent years there have been few publications on the problem of students' understanding of mathematical concepts; there are practically no works devoted to the study of the formation of mental structures in the course of students' assimilation of mathematical concepts. The aim of the article is to analyze the process of mastering mathematical concepts using the example of trigonometric functions and present the results of the study in accordance with the stages of the APOS theory.

Materials and Methods. The study sample included 102 first-year students of the Institute of Construction Engineering under Kazan State University of Architecture and Civil Engineering. The APOS theory was used to study students' perception of mathematical concepts, which allowed us to see the details of mathematical concepts formation at each stage of the APOS theory, as well as to identify characteristic errors and classify them. The empirical basis of the study includes the results of a written survey conducted among students. The quantitative characteristics of each stage of APOS were compared.

Results. The effectiveness of the application of the APOS theory was shown, a questionnaire was developed which allowed studying the process of mathematical concept structurization in the student's mind. Within the APOS theory framework, differences in levels of understanding of trigonometry were identified, which allowed for the classification of errors made by students. It was found that most of the students who participated in the experiment made conceptual errors in learning the concept of function. The results demonstrated the importance of investigating the mental structures that emerge during the cognitive process to determine the intellectual reserves of learners.

Discussion and Conclusion. The results of the study contribute to the development of scientific understanding of the process of structuring mathematical concepts in the minds of learners and methods for studying the mental structures of abstract concepts. The materials will be useful for university teachers, school teachers in the development of mathematics, as well as in the study of other disciplines.

Keywords: mathematics, function, trigonometry, action, process, object, scheme

Acknowledgments: The authors are grateful to Prof. G. I. Kirillova for helpful discussion of the paper.

Conflict of interests: The authors declare no conflict of interest.

For citation: Tuktamyshov N.K., Gorskaya T.Yu. APOS Theory in Learning Mathematics (Using Trigonometry as an Example). *Integration of Education*. 2024;28(1):111–124. https://doi.org/10.15507/1991-9468.114.028.202401.111-124

Введение

Виды человеческой деятельности, а особенно образовательная, связаны с пониманием/взаимопониманием в ходе коммуникации. В связи с этим представляется актуальной разработка средств и методов, позволяющих оценить степень понимания сообщаемой информации обучающемуся.

Педагогами и психологами предпринимаются различные попытки для объяснения ментальных структур, возникающих у студентов в процессе обучения. Такие исследования представляют ценность не только в специальных областях, но и в более широком контексте.

Теория APOS, стоящая на позициях конструктивизма и базирующаяся на работах Ж. Пиаже[1], была разработана Э. Дубинским для понимания процесса структурирования абстрактных математических понятий [1]. Она впервые была апробирована на исследовании понятия смежных классов в теории групп [2], затем получила развитие в когнитивном анализе понятия функции [3], линейной алгебре [4] и других разделах математики. Теорию APOS также использовались в теории моделирования и экономике [4], однако в исследовании собственно тригонометрических функций она не применялась. Целью теории APOS является выявление структуризации математической концепции в сознании человека. В соответствии с теорией считается, что в процессе обучения обучающиеся строят ментальные структуры, которые порождаются на базе рефлектирующей абстракции [1]: Действие (Action), Процесс (Process), Объект (Object), Схема (Scheme). Основная идея настоящей работы – применение теории APOS к исследованию формирования ментальных структур обучающихся при изучении математики (на примере тригонометрических функций).

Понятие функции вызывает большие трудности в освоении студентами [5], поскольку включает в себя много других определений. Особую сложность представляют тригонометрические функции, так как тригонометрия интегрирует алгебраические, геометрические и графические рассуждения [6], необходимые при обучении в высшей школе как при изучении самой математики, так и дисциплин естественно-научного цикла (физики, механики, сопромата, электротехники и др.). Интерес к изучению тригонометрических функций с использованием теории APOS вызван, с одной стороны, недостаточным знанием студентами этих функций, с другой – их широким применением в инженерном деле (в расчетах фундаментов, ветровых нагрузок на здания и сооружения, в исследованиях газовых и жидких потоков).

Преподавание тригонометрии в России имеет давние исторические корни[2]. Большинство работ, посвященных данной теме, направлено на развитие и создание различных методов решения обучающимися типовых тригонометрических уравнений [7], неравенств[3] и задач олимпиадного уровня [8; 9]. Имеются работы российских [10] и зарубежных исследователей [6], ориентированные на преподавателей математики, в которых обсуждаются методические проблемы, связанные с анализом тригонометрических функций на единичной окружности и координатной плоскости. Во многих из них основное внимание уделяется внешнему плану восприятия учебного материала обучающимися, в том числе и математических понятий: рассматриваются разные методы решения задач, совершенствуются рабочие программы по математике и др. Однако наряду с проведенными исследованиями в этой области важным остается изучение структур, которые формируются в сознании обучающегося в процессе его изучения математического понятия. Одной из теорий, позволяющей изучать процесс структуризации математического понятия в сознании студента, является теория APOS.

Таким образом, с одной стороны, продолжается интенсивное наращивание, вызванное широкими и разносторонними

[1] Пиаже Ж. Психогенез знаний и его эпистемологическое значение // Семиотика. М. : Радуга, 1983. С. 90–101. URL: https://platona.net/load/knigi_po_filosofii/filosofija_jazyka/semiotika/32-1-0-4352 (дата обращения: 11.05.2023).

[2] Саввина О. А., Паршина А. Н. Методическое наследие математика и офицера П. А. Баранова // Эвристическое обучение математике : V Междунар. науч.-метод. конф. Донецк : Изд-во Донецкого национального университета. 2021. С. 63–66. EDN: LXWJFS

[3] Микаелян А. К., Игнатушина И. В. Методические особенности знакомства с тригонометрической окружностью в курсе математики средней школы // Психология и педагогика XXI века: актуальные вопросы, достижения и инновации : сборник статей III Всерос. студенческой науч.-практ. конф. с междунар. участием. Орехово-Зуево, 2022. С. 469–474. EDN: ALTQTE

приложениями тригонометрических функций, исследований методической направленности, с другой – отмечается наличие серьезных и возрастающих проблем с пониманием студентами тригонометрических функций. В рамках нашего исследования продуктивным средством для разрешения данного несоотвествия является использование теории APOS.

Цель исследования состоит в изучении процесса овладения студентами математических понятий (на примере тригонометрических функций) в рамках теории APOS. Гипотеза данного исследования состоит в том, что использование теории APOS позволяет количественно и качественно определить уровень знаний студентов, выявить и оценить характер ошибок, совершаемых студентами в ходе обучения. Для достижения указанной цели необходимо решение следующих задач:

– оценить восприятие студентами тригонометрической функции и анализ ментальных трудностей, возникающих при этом;

– выявить причины ошибок, допускаемых студентами при работе с тригонометрическими функциями.

Обзор литературы

С помощью APOS (Action, Process, Object, Schema) воспроизводятся стадии освоения обучающимся математического понятия.

Теория APOS развивается и используется в основном в трех направлениях:

1) сбор и анализ данных – для тестирования структур, формирующихся в сознании обучающихся после применения или обучения математическому понятию [2];

2) анализ структуры самого математического понятия в ходе обучения [11];

3) разработка эффективных методов обучения, тесно связанных с математическими концепциями [12], в частности методика ACE (так называемый цикл ACE (действие-дискуссии в классе-упражнения)) [2].

Применение теории APOS в обучении математике подробно описывают О. Сефик и соавторы. По их мнению, теория APOS может быть использована для организации учебной деятельности, а также применена для анализа данных, позволяющих выявить ментальные структуры, возникающие в сознании студентов после изучения математических понятий [13].

В настоящей статье на примере тригонометрических функций проводится анализ процесса усвоения математики.

Современные исследования по обучению тригонометрии можно рассматривать с нескольких позиций: ориентированные на изучение сложных с математической точки зрения тем тригонометрии; направленные на совершенствование и создание новых методов и форм эффективного обучения; связанные с изучением интеграции методов и форм обучения с ментальными структурами обучающихся [14].

Тригонометрические функции могут вводиться в практику обучения тремя способами: через соотношения в прямоугольном треугольнике, использование единичной окружности, степенные ряды, т. е. аналитически. Такая множественность влияет на понимание тригонометрических функций. Например, Д. Камбер и Д. Такаси рассматривают проблемы, связанные с пониманием тригонометрических функций как соотношений сторон прямоугольного треугольника [15], а индонезийские ученые [10] – в случае задания на единичном круге.

Во многих зарубежных вузах тригонометрия входит в образовательные программы в качестве раздела математического анализа [16], требующего интеграции фундаментальных понятий математического анализа и свойств тригонометрических функций [16; 17], что позволяет на основе изучения успеваемости студентов по тригонометрии оценивать успехи в усвоении дифференциального исчисления [18].

С эпистемологической позиции о преодолении препятствий в обучении тригонометрии выступают Ч. Л. Макнун с коллегами [6]. Предложено большое число активных и интерактивных методов обучения [19], использования различных частных методик[4].

[4] Методические подходы знакомства обучающихся с тригонометрической окружностью в средней школе / А. К. Микаелян [и др.] // Трансформация мировой науки и образования в эпоху перемен: стратегии, инструменты развития : материалы III междунар. науч.-практ. конф. В 2-х ч. Ч. 1. Ростов-на-Дону, 2022. С. 278–283. EDN: SJTESE

Особый интерес вызывает работа K. Вебера, в которой исследователь, опираясь на идеи Д. Талла [20], предлагает рассматривать тригонометрические функции с трех позиций: процесса, объекта и символа, репрезентирующего процесс или объект, что, по словам автора, позволило студентам лучше понять тригонометрические функции [21]. Здесь же доказана эффективность изучения тригонометрии в рамках практических занятий (в отличие от лекционных).

Предлагаемое исследование, опираясь на теорию APOS, проводится в рамках третьей позиции – изучение ментальных структур студента, возникающих в процессе обучения.

Несмотря на значительное количество публикаций методической направленности, малочисленны публикации, посвященные проблемам понимания студентами математических понятий и концепций. Практически нет работ, в которых проводится анализ ментальных процессов, происходящих в сознании студентов. Авторы впервые в рамках теории APOS исследуют процесс структуризации математических понятий и проводят классификацию ошибок в случае тригонометрических функций.

Материалы и методы

В качестве теоретической основы исследования выбрана теория APOS, которая базируется на представлении о рефлектирующей абстракции[5] [1]. Рефлектирующая абстракция делает упор на общие свойства действий, не зависящие от математических объектов, с которым совершаются действия.

Теория APOS фокусируется на построении моделей, объясняющих ментальные процессы обучающегося при попытке понять ту или иную математическую концепцию. И. Арнон и соавторы утверждают, что «APOS – это теория того, как математические понятия могут быть выучены» [12].

Рассмотрим каждый этап овладения понятиями в теории APOS.

1. Действие (Action) – это стадия, на которой каждый шаг процесса обучения четко представляется студентом и направляется внешними инструкциями. «Действие – это трансформация какого-либо объекта, воспринимаемая индивидом как принципиально внешняя и как требующая выполнения пошаговой инструкции (заданной эксплицитно или же воспроизводимой по памяти) о том, как производить соответствующие операции»[6]. Действия основаны на правилах и алгоритмах, отрабатываемых многократно, но связанных с конкретными объектами. Для случая тригонометрических функций это предполагает, что студент должен знать понятие функции, уметь отличать тригонометрические функции от других видов, вычислять значение тригонометрической функции в определенной точке.

2. Процесс (Process) – стадия, на которой происходит повторение действий и их осмысление; студент переходит от опоры на внешние подсказки к внутреннему контролю. Данная стадия характеризуется способностью представлять себе выполнение шагов без необходимости осуществлять их эксплицитно, пропускать шаги, а также обращать их вспять. Обучающийся может отражать во внутреннем плане сами действия без привязки к конкретным математическим объектам. Реализация этой стадии состоит в интериоризации действий в процедуры, которые учащиеся могут выполнять без посторонней помощи или обобщать действия, выполняемые на конкретных объектах, в процессы, которые действительны для любого объекта того же типа. Процессы помогают студентам абстрагироваться от конкретных реализаций, взять под контроль само действие безотносительно внешнего объекта и тем самым сделать гибким использование действий. Это предполагает умение пользоваться определенным алгоритмом решения со стандартными действиями и формулами. Так, поиск значения функции синуса для заданного угла может быть сведен к определению значения по единичному кругу, где значения синуса распределены

[5] Пиаже Ж. Психогенез знаний и его эпистемологическое значение.

[6] Шварц А. Ю. Роль чувственных представлений в овладении математическими понятиями : дис. … канд. психол. наук. 2011. 259 с. URL: https://www.dissercat.com/content/rol-chuvstvennykh-predstavlenii-v-ovladenii-matematicheskimi-ponyatiyami (дата обращения: 11.05.2023).

на вертикальной оси. Перечисленные операции на этой стадии студент выполняет без посторонней помощи.

3. Объект (Object) – это стадия, в ходе которой обучающийся осознает процесс как целостность, к которому можно применить новые действия. Данный этап предусматривает умение студента вычленить подклассы в пределах заданного концепта. В этом случае происходит инкапсуляция процесса. Следует заметить, что такое понятие как «объект», возникшее на основе процесса, предполагает возврат к стадии процесса в случае необходимости[7], т. е. объект де-инкапсулирован. Такая возможность двигаться в разных направлениях составляет существенный аспект математической деятельности[8]. Для тригонометрических функций это свидетельствует о том, что студент может определить, например, интервалы возрастания и убывания функций.

4. Схема (Schema) – это стадия, включающая упорядоченное множество связей в сознании студента между различными действиями, процессами и объектами, которые предполагается использовать при решении данной конкретной проблемы или построении новых знаний.

В качестве основных использовались следующие методы:

– системный подход – анализ научно-педагогических публикаций по проблематике исследования – выявление и обобщение теоретических основ проблемы исследования;

– контент-анализ результатов, полученных с помощью опроса, – анализ взаимосвязей между этапами теории APOS; направлен на изучение процесса понимания студентами тригонометрических функций;

– статистическая обработка с группировкой данных – исследование в ходе изучения студентами тригонометрических функций ментальных структур в их сознании, выявление закономерностей и извлечение выводов.

Данная работа включает в себя сбор и анализ результатов опроса с последующими их разбором и классификацией ошибок студентов на стадиях теории APOS, а также рекомендации по их исправлению.

В качестве базы эмпирического этапа исследования выбран Казанский государственный архитектурно-строительный университет. В опросе приняли участие студенты четырех групп первого курса направления подготовки «Строительство»: 1 группа – 26 чел., 2 – 26, 3 и 4 – по 25 чел. Для анализа мы не делаем различий между группами, принимаем их как единую выборку численностью 102 участника. Все участники на момент проведения исследования были проинформированы о цели исследования и выразили готовность к участию в нем.

Исследование проводилось по следующим этапам:

1. Теоретический – уточнение концептуальных вопросов исследования, научное обоснование и разработка основных разделов опросника, с помощью которого возможно, согласно теории APOS, определить насколько студенты готовы к пониманию математических объектов, а равно и оценить стадии его понимания. Применяемые методы: системный анализ литературы по данной тематике, статистический метод обработки данных.

2. Экспериментальный – опрос, в ходе которого респондентами выполнялись задания опросника, созданного на предыдущем этапе исследования. При обработке тестов выявлялись ошибки, определялся их характер и стадия APOS, на которой находится студент (согласно его понимания математического понятия). Ниже приведен перечень вопросов.

1. Напишите своими словами, что такое функция.

2. Опишите своими словами функцию $\sin x$.

3. Напишите, чему равно: $\sin\frac{\pi}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}$, $\sin 30°$, $\sin 180°$?

4. Отметьте на единичном круге решение уравнений: $\sin x = 0{,}5$, $\sin x = 1$, $\sin x = 1{,}5$.

5. Существуют ли $x \in R$, решения неравенства $\sin x \geq \frac{1}{2}$? Если нет, объясните почему.

---

[7] Там же. С. 89.
[8] Там же. С. 89.

6. Для каких значений x функция синус убывает, почему?

7. Постройте график функции $y = a \cdot \sin x$. Как изменится график функции при различных значениях параметра a?

8. На графике функции $y = a \cdot \sin x$ изобразите график функции $y = a \cdot \sin 3x$.

9. Напишите в порядке возрастания числа: $\sin 115°$, $\sin 250°$, $\sin 370°$.

10. Чему равно число $\sin\frac{3\pi}{2}$? Ответ поясните.

11. Чему равно $\sin^2 x + \cos^2 x$ и почему?

12. Что больше sin 23° или sin 37°? Ответ поясните.

13. Что означает периодичность функции $\sin x$ и какой у нее период? Какой период функции $\sin 2x$?

14. Верна ли формула $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$? Если нет, напишите правильную формулу.

Использование в вопроснике только одной функции $y = \sin x$ (за исключением 11-го вопроса) обусловлено тем, что оно позволяет осуществить сквозной анализ усвоения этой функции как типичной тригонометрической функции; в случае других тригонометрических функций теория APOS применяется аналогично.

3. Обработка, систематизация и интерпретация полученных данных: статистические методы, группировка, контент-анализ.

Результаты исследования

Приведенные выше вопросы соответствуют стадиям теории APOS. Задания 1 и 2 опросника относятся к так называемой стадии Pre-action [16]. Они позволяют обнаружить студентов, не готовых к восприятию понятия тригонометрической функции в силу отсутствия у них основополагающих знаний.

Как показал анализ ответов на эти вопросы, на стадии Pre-action находится 10 студентов, не справившихся с заданиями. Заметим, что на подготовительных курсах вуза вопросы 1 и 2 задавались и школьникам, ответы которых примерно совпадают с ответами студентов-первокурсников (не справились с заданием 5 чел. из 43). Вопросы 3, 9, 10, 12 отражают стадию действия; 4, 6, 14 – процесса; 5, 11, 13 – объекта; 7, 8 – схемы. По каждой стадии теории APOS составим таблицы.

Как видно из таблицы 1, основная часть студентов эту стадию успешно преодолевает; в среднем 85,3 % обучающихся полностью справились с заданиями. Однако ответы на 10-й вопрос показали, что некоторые из них справляются с вычислением соответствующих значений, но пояснить не могут. Эта стадия преодолевается с помощью преподавателя, и студенты формально выполняют такие задания. В ответах пользуются тригонометрическим кругом. На этой стадии студенты в основном производят только заранее известные алгоритмические действия, но при этом совершают ошибки, например, забывая писать скобки. Так, в выражении $\sin\frac{3\pi}{2} - 2\pi$ надо писать $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\pi\right)$ и далее, а в строке $\sin -\frac{\pi}{2}$ надо писать $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. Пренебрежение скобками – одна из наиболее частых ошибок.

Т а б л и ц а 1. **Итоговые показатели по этапу «Действие» в теории APOS**
T a b l e 1. **Final figures for the Action in APOS theory stage**

Номер вопроса / Question number	Полный корректный ответ / Full correct answer	Неполный, частично правильный ответ / Incomplete, partially correct answer	Ошибочный ответ / Wrong answer	Нет ответа / No answer
3	100	1	0	1
9	79	1	20	2
10	67	28	2	5
12	102	0	0	0
Средние значения, % / Average values, %	85,3	7,4	5,4	1,9

Источник: здесь и далее в статье все таблицы составлены авторами.
Source: Hereinafter in the article all tables are compiled by the authors.

В одной из работ указано, что поскольку $\sin 2\pi$ – периодическая функция, то $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, но это неверно.

Полученные результаты по стадии «Процесс» продемонстрированы в таблице 2. Студенты могут представить решение (в основном на единичном круге), достаточно легко ориентируются в показе значений функций, однако затрудняются в учете периодичности функции. Наименьшее число правильных ответов было дано на 6-й вопрос: они путали интервалы убывания с интервалами, где функция имеет отрицательные значения. Большинство обучающихся использовали на этой стадии единичный круг, что затруднило нахождение интервалов монотонности. В среднем по данной стадии полный ответ дали 63,8 % студентов.

Как видно из таблицы 3, задания стадии «Объект» решили в среднем 29,4 % студентов. Остальные студенты плохо представляют себе свойства функций, особенно возрастание, убывание и периодичность. Например, определяя период функции $\sin 2x$, ими допускались следующие ошибки: одни писали, что у $\sin 2x$ период вдвое больше, чем у $\sin x$, другие – вообще не указали периоды. Так, неполный частичный правильный ответ на 13-й вопрос соответствует тому, что студенты дали только определение периодичности либо указали периоды функций синуса.

17 из 102 студентов полностью владеют теоретическим и практическим материалами по свойствам тригонометрических функций и их графиков; 66 чел. не могут представить преобразование графика синуса тройного аргумента [1]. Таким образом, в среднем только 22,5 % студентов способны к реализации этапа «Схема», согласно теории APOS (табл. 4).

Динамику распределения правильных, ошибочных, неполных и работ без ответа по соответствующим стадиям проиллюстрируем на следующей диаграмме (рисунок), полученной на основании сводной таблицы 5.

Рисунок демонстрирует тот факт, что переход от стадии к стадии средний процент полностью решенных заданий снижается, а процент ошибок в среднем увеличивается (небольшое исключение на стадии «Схема», но это корректируется ростом нерешенных задач).

Т а б л и ц а 2. **Итоговые показатели по этапу «Процесс» в теории APOS**
T a b l e 2. **Final figures for the Process stage in APOS theory**

Номер вопроса / Question number	Полный корректный ответ / Full correct answer	Неполный, частично правильный ответ / Incomplete, partially correct answer	Ошибочный ответ / Wrong answer	Нет ответа / No answer
4	86	9	7	0
6	43	23	16	20
14	66	14	5	17
Средние значения, % / Average values, %	63,8	15,0	9,1	12,1

Т а б л и ц а 3. **Итоговые показатели по этапу «Объект» в теории APOS**
T a b l e 3. **Final Figures for the Object Stage in APOS Theory**

Номер вопроса / Question number	Полный корректный ответ / Full correct answer	Неполный, частично правильный ответ / Incomplete, partially correct answer	Ошибочный ответ / Wrong answer	Нет ответа / No answer
5	37	51	7	7
11	17	82	0	3
13	36	34	12	20
Средние значения, % / Average values, %	29,4	54,6	6,2	9,8

Таблица 4. **Итоговые показатели по этапу «Схема» в теории APOS**
Table 4. **Total figures for the Scheme stage in the APOS theory**

Номер вопроса / Question number	Полный корректный ответ / Full correct answer	Неполный, частично правильный ответ / Incomplete, partially correct answer	Ошибочный ответ / Wrong answer	Нет ответа / No answer
7	29	23	8	42
8	17	10	9	66
Средние значения, % / Average values, %	22,5	16,2	8,3	53,0

Таблица 5. **Сводная таблица средних значений результатов по каждому этапу, %**
Table 5. **Summary table of average results for each stage, %**

Этапы / Stages	Действие / Action	Процесс / Process	Объект / Object	Схема / Schema	Средние значения / Average values
Решенные задания / Solved tasks	85,3	64,0	29,4	22,5	51,000
Неполностью выполнено / Incomplete	7,3	15,0	54,6	16,2	23,275
Решено с ошибками / Solved with errors	5,4	9,0	6,2	8,3	7,225
Не решено / Unsolved	2,0	12,0	9,8	53,0	19,200

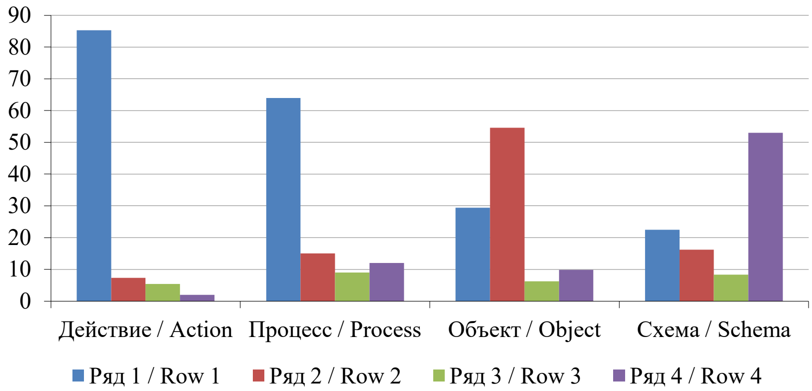

Рисунок. Распределение средних результатов по каждой стадии APOS
Figure. Distribution of average results for each APOS stage

Примечания: ряд 1 – полностью решенные задания; ряд 2 – решено частично; ряд 3 – решенные с ошибками; ряд 4 – нерешенные.
Notes: Row 1 – completely solved tasks; row 2 – partially solved; row 3 – solved with errors; row 4 – unsolved.

Источник: составлено авторами.
Source: Compiled by the authors.

Наибольшее число частично решенных заданий, судя по среднему проценту, наблюдается на стадии «Объект». В основном это связано с демонстрацией функции синуса на тригонометрическом круге, по которой не видны промежутки убывания или возрастания функции. Вместе с тем студенты, владеющие знанием графического представления синуса в виде синусоиды, хорошо справляются с заданиями данной стадии.

Допускаемые ошибки на основе APOS анализа можно классифицировать как концептуальные и процессуальные [13]. К концептуальным относятся следующие ошибки: непонимание понятия функции, желание работать только с взаимно-однозначными функциями и тождествами, неумение распознавать свойства сложных тригонометрических функций на основе знаний свойств основных элементарных тригонометрических функций, перенесение свойств линейной функции на тригонометрические (например, $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$); к процессуальным – неумение делать упрощения в формулах, ошибки в знаках и др. В комментариях к таблице 2 приведены примеры процессуальных ошибок.

На основании результатов, представленных в таблицах 3 и 4, можно утверждать, что около 70 % опрошенных совершают концептуальные ошибки. На стадиях «Действие» и «Процесс» совершаются в основном процессуальные ошибки, поскольку обучение осуществляется по инструкции.

Обсуждение и заключение

Поэтапное исследование познавательного процесса, на что ориентирована теория APOS, позволяет выяснить причины тех или иных действий учащихся, степень понимания, хотя на проблему понимания в математике есть различные точки зрения[9]. Объединение общих взглядов на природу математических концептов и когнитивной теории APOS позволяет осознать связь между математической деятельностью и математическим мышлением[10]. Теория APOS способствуют выявлению потенциала обучающегося, а также конкретизации формы помощи студенту. Разработка методических материалов по математике вызывает определенные трудности, а понимание процесса структуризации понятия в сознании студента помогает выстраивать эффективную методическую работу [22; 23]. В процессе обучения преподаватели и обучающиеся часто испытывают затруднения в коммуникации [24], связанные с проблемами понимания преподавателями механизмов структуризации понятия в сознании обучающегося. Теория APOS дает продуктивную возможность преодоления таких препятствий.

Анализ ответов студентов показал, что большинство из них (99 % с учетом неполных ответов) в ходе изучения тригонометрических функций находятся на стадии «Действие», что демонстрирует слабость самостоятельного и критического мышления у современных студентов. По результатам экспериментов выявлено, что причиной ошибок являются непонимание студентами сути определения функции, формальное понимание свойств тригонометрических функций, отсутствие связи между математическим символом и его визуальным представлением (подтверждает результаты, полученные в работе [25]). В школьной программе много внимания уделяется тригонометрии на единичной окружности, что наносит некоторый ущерб пониманию тригонометрических функций как соответствий и их графическому представлению. Слабый уровень знаний студентов этого раздела математики приводит к необходимости дополнительных занятий по тригонометрии для студентов первого курса, так как тригонометрические функции используются в математическом анализе, уравнениях математической физики и других разделах дисциплин, входящих в обязательную часть обучения. Полученные теоретические и экспериментальные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. Изучение усвоения тригонометрических функций с использованием теории APOS подтвердило эффективность его применения, позволило выявить трудности, возникающие перед обучающимися, и детализировать понимание студентами этих функций. Выводы, касающиеся снижения числа студентов, владеющих математикой, при движении от стадии к стадии подтверждают результаты других работ [16].

2. Ошибки студентов носят концептуальный и процессуальный характер. Как правило, концептуальные ошибки

[9] Kuzniak A., Nechache A. Understanding Mathematical Work and Mathematical Thinking Through Individuals' Actions Analyses: A Networking Approach // Proceedings of the CERME12. Italy : Bozen-Bolzano, 2022. P. 2986–2994. URL: https://hal.science/hal-03749271/document (дата обращения: 11.05.2023); Tuktamyshov N. Mathematical Picture of the World and Understanding // Proceedings of the CERME12. Italy : Bozen-Bolzano, 2022. P. 3032–3036. URL: https://hal.science/hal-03749363/document (дата обращения: 11.05.2023).

[10] Kuzniak A., Nechache A. Understanding Mathematical Work and Mathematical Thinking Through Individuals' Actions Analyses: A Networking Approach.

совершаются на стадиях «Объект» и «Схема», процессуальные – на стадиях «Действие» и «Процесс». Используемая теория позволяет выделить ошибки в наглядном виде и дает возможность провести соответствующие методические мероприятия, направленные на устранение препятствий с учетом индивидуальности обучающегося.

3. Практическая значимость исследования заключается в том, что в работе показано, как APOS позволяет количественно и качественно определить уровень компетентности каждого студента в данной области математики. Последнее дает возможность сделать обучение более релевантным как для преподавателей, так и для студентов и в комплексе с другими методами может успешно применяться для улучшения образовательного процесса в целом.

Материалы статьи могут быть интересны учителям математики и преподавателям вузов с целью детального изучения когнитивной деятельности обучающихся и классификации ошибок с последующими рекомендациями методического характера. Выбор других разделов математики как предметов использования теории APOS предполагается в дальнейших исследованиях авторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dubinsky E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking // Dordrecht Advanced Mathematical Thinking / ed. by D. Tall. Dordrecht : Springer, 2002. Vol. 11. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

2. Dubinsky E., Mcdonald M. A. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research // The Teaching and Learning of Mathematics at University Level / ed. by D. Holton [et al.]. New ICMI Study Series. Dordrecht : Springer, 2001. Vol. 7. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

3. Development of the Process Conception of Function / D. Breidenbach [et al.] // Educational Studies in Mathematics. 1992. Vol. 23. P. 247–285. https://doi.org/10.1007/BF02309532

4. Trigueros M., Possani E. Using an Economics Model for Teaching Linear Algebra // Linear Algebra and Its Applications. 2013. Vol. 438, issue 4. P. 1779–1792. https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.009

5. Walde G. Difficulties of Concept of Function: The Case of General Secondary School Students of Ethiopia // International Journal of Scientific & Engineering Research. 2017. Vol. 8, issue 4. https://doi.org/10.14299/ijser.2017.04.002

6. Maknun C. L., Rosjanuardi R., Jupri A. Didactical Design on Drawing and Analyzing Trigonometric Functions Graph through a Unit Circle Approach // International Electronic Journal of Mathematics Education. 2020. Vol. 15, issue 3. Article no. em0614. https://doi.org/10.29333/iejme/9275

7. Егорова Е. А. Необходимость поиска адекватных путей обучения учащихся решению тригонометрических уравнений // Актуальные проблемы современного образования. 2021. № 8. С. 140–146. EDN: CJOOCD

8. Черемисина М. И., Томина У. В., Спиридонова А. А. Методика решения тригонометрических уравнений с параметрами // Педагогическое образование. 2022. Т. 3, № 11. С. 34–40. URL: https://po-journal.ru/wp-content/uploads/2023/01/ped-obrazovanie-t-3-11-2022.pdf (дата обращения: 11.05.2023).

9. Афанасьев А. Н. Тригонометрия и решение задач по геометрии // Математическое образование. 2022. Вып. 1. С. 12–20. URL: https://www.mathnet.ru/links/995ae2412357d0b8aceba15c409f3ea9/mo795.pdf (дата обращения: 11.05.2023).

10. Maknun C. L., Rosjanuardi R., Jupri A. Epistemological Obstacle in Trigonometry // Mathematics Teaching Research Journal. 2022. Vol. 14, no. 2. P. 5–25. https://doi.org/10.1063/5.0102638

11. Trigueros M., Martínez-Planell R. Geometrical Representations in the Learning of Two-Variable Functions // Educational Studies in Mathematics. 2010. Vol. 73. P. 3–19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

12. APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education / ed. by I. Arnon [et al.]. New York : Springer, 2014. 254 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

13. Şefik Ö., Erdem Uzun Ö., Dost Ş. Content Analysis of the APOS Theory Studies on Mathematics Education Conducted in Turkey and Internationally: A Meta-Synthesis Study // Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi. 2021. Vol. 15, issue 2. P. 404–428. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.1020526

14. Громова Е. В., Сафуанов И. С. Применение компьютерной математической программы GEOGEBRA в обучении понятию функции // Образование и наука. 2014. № 4. С. 113–131. https://doi.org/10.17853/1994-5639-2014-4-113-131

15. Kamber D., Takaci D. On Problematic Aspects in Learning Trigonometry // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2018. Vol. 49, issue 2. P. 161–175. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1357846

16. Siyepu S. W. Analysis of Errors in Derivatives of Trigonometric Functions // International Journal of STEM Education. 2015. Vol. 2. Article no. 16. https://doi.org/10.1186/s40594-015-0029-5

17. Nordlander M. C. Lifting the Understanding of Trigonometric Limits from Procedural Towards Conceptual // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2022. Vol. 53, issue 11. P. 2973–2986. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1927226

18. Hurdle Z. B., Mogilski W. The impact of prerequisites for undergraduate calculus I performance // International Electronic Journal of Mathematics Education. 2022. Vol. 17, issue 3. Article no. em0696. https://doi.org/10.29333/iejme/12146

19. Хохлова К. Е., Фрундин В. Н. Применение активных и интерактивных методов обучения при изучении тригонометрии в старших классах профильной школы // Sciences of Europe. 2018. Vol. 4, no. 28. С. 52–55. URL: https://www.europe-science.com/wp-content/uploads/2020/10/VOL-4-No-28-2018.pdf (дата обращения: 11.05.2023).

20. Gray E. M., Tall D. O. Duality, Ambiguity, and Flexibility: A “Proceptual” View of Simple Arithmetic // Journal for Research in Mathematics Education. 1994. Vol. 25, no. 2. P. 116–140. https://doi.org/10.2307/749505

21. Weber K. Students’ Understanding of Trigonometric Functions // Mathematics Education Research Journal. 2005. Vol. 17. P. 91–112. https://doi.org/10.1007/BF03217423

22. Павлова Л. В. Методика преподавания элементарной математики при подготовке учителя математики в вузе // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 1 (42). С. 74–89. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_1_74

23. Tanu Wijaya T., Ying Z., Purnama A. Using Hawgent Dynamic Mathematic Software in Teaching Trigonometry // International Journal of Emerging Technologies in Learning (iJET). 2020. Vol. 15, no. 10. P. 215–222. https://doi.org/10.3991/ijet.v15i10.13099

24. Azizi H., Herman T. Critical Thinking and Communication Skills of 10th Grade Students in Trigonometry // Journal of Physics: Conference Series. 2020. Vol. 1469. Article no. 012161. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1469/1/012161

25. Туктамышов Н. К., Горская Т. Ю. О роли визуализации в обучении математике (на примере понятия функции) // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. Сер.: Педагогика, психология. 2022. № 3 (50). С. 51–58. https://doi.org/10.18323/2221-5662-2022-3-51-58

Поступила 13.06.2023; одобрена после рецензирования 02.10.2023; принята к публикации 09.10.2023.

Об авторах:

Туктамышов Наил Кадырович, доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики Казанского государственного архитектурно-строительного университета (420043, Российская Федерация, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4679-0701**, **Scopus ID: 56181288100**, **Researcher ID: L-2998-2018**, nail1954@gmail.com

Горская Татьяна Юрьевна, кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики Казанского государственного архитектурно-строительного университета (420043, Российская Федерация, г. Казань, ул. Зеленая, д. 1), **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7136-8388**, **Scopus ID: 57163473900**, **Researcher ID: L-2152-2018**, gorskaya0304@mail.ru

Заявленный вклад авторов:

Н. К. Туктамышов – концепция исследования; теоретическое обоснование исследования; формулировка и описание методологических и теоретических проблем; написание теоретической части статьи.

Т. Ю. Горская – проведение опроса (сбор данных) в Казанском государственном архитектурно-строительном университете; статистический анализ данных; обобщение информации; визуализация данных в тексте; написание эмпирической части статьи.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

REFERENCES

1. Dubinsky E. Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In: Tall D. (ed) Advanced Mathematical Thinking. Mathematics Education Library. Dordrecht: Springer; 2002. Vol. 11. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

2. Dubinsky E., Mcdonald M.A. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In: Holton D., Artigue M., Kirchgräber U., Hillel J., Niss M., Schoenfeld A. (eds) The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. New ICMI Study Series. Dordrecht: Springer; 2001. Vol. 7. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

3. Breidenbach D., Dubinsky E., Hawks J., Nichols D. Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*. 1992;23:247–285. https://doi.org/10.1007/BF02309532

4. Trigueros M., Possani E. Using an Economics Model for Teaching Linear Algebra. *Linear Algebra and Its Applications*. 2013;438(4):1779–1792. https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.04.009

5. Walde G. Difficulties of Concept of Function: The Case of General Secondary School Students of Ethiopia. *International Journal of Scientific & Engineering Research.* 2017;8(4). https://doi.org/10.14299/ijser.2017.04.002

6. Maknun C.L., Rosjanuardi R., Jupri A. Didactical Design on Drawing and Analyzing Trigonometric Functions Graph through a Unit Circle Approach. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. 2020;15(3):em0614. https://doi.org/10.29333/iejme/9275

7. Egorova E.A. The Necessity of Searching for Adequate Ways of Learning Students in Solution of Trigonometric Equations. *Aktualnye problemy sovremennogo obrazovaniya*. 2021;(8):140–146. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: CJOOCD

8. Cheremisina M.I., Tomina U.V., Spiridonova A.A. Method of Solving Trigonometric Equations with Parameters. *Pedagogical Education*. 2022;3(11):34–40. (In Russ., abstract in Eng.) Available at: https://po-journal.ru/wp-content/uploads/2023/01/ped-obrazovanie-t-3-11-2022.pdf (accessed 11.05.2023).

9. Afanasyev A.N. [Trigonometry and Solving Problems in Geometry]. *Mathematics Education.* 2022;(1):12–20. (In Russ.) Available at: https://www.mathnet.ru/links/995ae2412357d0b8aceba15c409f3ea9/mo795.pdf (accessed 11.05.2023).

10. Maknun C.L., Rosjanuardi R., Jupri A. Epistemological Obstacle in Trigonometry. *Mathematics Teaching Research Journal*. 2022;14(2):5–25. https://doi.org/10.1063/5.0102638

11. Trigueros M., Martínez-Planell R. Geometrical Representations in the Learning of Two-Variable Functions. *Educational Studies in Mathematics*. 2010;73:3–19. https://doi.org/10.1007/s10649-009-9201-5

12. Arnon I., Cottrill J., Dubinsky E., Oktaç A., Fuentes S.R., Trigueros M., et al. APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education. New York: Springer; 2014. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6

13. Şefik Ö., Erdem Uzun Ö., Dost Ş. Content Analysis of the APOS Theory Studies on Mathematics Education Conducted in Turkey and Internationally: A Meta-Synthesis Study. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi*. 2021;15(2):404–428. https://doi.org/10.17522/balikesirnef.1020526

14. Gromova Y.V., Safuanov I.S. Implementation of Geogebra Courseware in Teaching the Concept of Mathematical Function. *The Education and Science Journal*. 2014;(4):113–131. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.17853/1994-5639-2014-4-113-131

15. Kamber D., Takaci D. On Problematic Aspects in Learning Trigonometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2018;49(2):161–175. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1357846

16. Siyepu S.W. Analysis of Errors in Derivatives of Trigonometric Functions. *International Journal of STEM Education*. 2015;2:16. https://doi.org/10.1186/s40594-015-0029-5

17. Nordlander M.C. Lifting the Understanding of Trigonometric Limits From Procedural Towards Conceptual. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2022;53(11):2973–2986. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1927226

18. Hurdle Z. B., Mogilski W. The Impact of Prerequisites for Undergraduate Calculus I Performance. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. 2022;17(3):em0696. https://doi.org/10.29333/iejme/12146

19. Khokhlova K.E., Frundin V.N. Application of Active and Interactive Teaching Methods in the Study of Trigonometry in High School Profile. *Sciences of Europe*. 2018;4(28):52–55. (In Russ., abstract in Eng.) Available at: https://www.europe-science.com/wp-content/uploads/2020/10/VOL-4-No-28-2018.pdf (accessed 11.05.2023).

20. Gray E.M., Tall D.O. Duality, Ambiguity, and Flexibility: A "Proceptual" View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1994;25(2):116–140. https://doi.org/10.2307/749505

21. Weber K. Students' Understanding of Trigonometric Functions. *Mathematics Education Research Journal*. 2005;17:91–112. https://doi.org/10.1007/BF03217423

22. Pavlova L.V. Methods of Teaching Elementary Mathematics in Preparation a Mathematics Teacher at a University. *Bulletin of Syktyvkar University. Series 1: Mathematics. Mechanics. Informatics.* 2022;(1):74–89. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2022_1_74

23. Tanu Wijaya T., Ying Z., Purnama A. Using Hawgent Dynamic Mathematic Software in Teaching Trigonometry. *International Journal of Emerging Technologies in Learning* (*iJET*). 2020;15(10):215–222. https://doi.org/10.3991/ijet.v15i10.13099

24. Azizi H., Herman T. Critical Thinking and Communication Skills of 10th Grade Students in Trigonometry. *Journal of Physics: Conference Series*. 2020;1469:012161. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1469/1/012161

25. Tuktamyshov N.K., Gorskaya T.Yu. On the Role of Visualization in Teaching Mathematics (Using an Example of the Concept of Function). *Science Vector of Togliatti State University. Series: Pedagogy, Psychology*. 2022;(3):51–58. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.18323/2221-5662-2022-3-51-58

Submitted 13.06.2023; revised 02.10.2023; accepted 09.10.2023.

About the authors:

Nail K. Tuktamyshov, Dr.Sci. (Ped.), Professor of the Chair of Higher Mathematics, Kazan State University of Architecture and Engineering (1 Zelenaya St., Kazan 420043, Russian Federation), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4679-0701**, **Scopus ID: 56181288100**, **Researcher ID: L-2998-2018**, nail1954@gmail.com

Tatiana Yu. Gorskaya, Cand.Sci. (Engr.), Associate Professor of the Chair of Higher Mathematics, Kazan State University of Architecture and Engineering (1 Zelenaya St., Kazan 420043, Russian Federation), **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7136-8388**, **Scopus ID: 57163473900**, **Researcher ID: L-2152-2018**, gorskaya0304@mail.ru

Authors' contribution:

N. K. Tuktamyshov – research concept; theoretical justification of the research; formulation and description of methodological and theoretical problems; writing the theoretical part of the article.

T. Yu. Gorskaya – conducting a survey (data collection) at Kazan State University of Architecture and Civil Engineering; statistical analysis of data; generalization of information; visualization of data in the text; writing the empirical part of the article.

All authors have read and approved the final manuscript.