

«Математика»

Научная статья

УДК 517.977.56

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-5-16

**Об одной задаче управления переменной структурой
с дробными производными Капуто****Жаля Билал кызы Ахмедова**

Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджан

Институт Систем управления НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

jaleahmadova23@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая в различных отрезках времени различными обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями дробного порядка. Применяя аналог метода приращений, доказано необходимое условие оптимальности первого порядка. В случае выпуклости областей управления доказано линеаризованное условие максимума, а при открытости областей управления получен аналог уравнения Эйлера.

Ключевые слова: задача оптимального управления; функционал качества; функция Гамильтона–Понтрягина; аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина; необходимое условие оптимальности; допустимое управление, линеаризованное условие максимума, аналог уравнения Эйлера

Для цитирования: Ахмедова Ж.Б. Об одной задаче управления переменной структурой с дробными производными Капуто // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 5–16. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-5-16.

Статья поступила в редакцию 08.04.2024; одобрена после рецензирования 25.05.2024; принята к публикации 11.06.2024.

«Mathematics»

Research article

**On one Control Problem of a Variable Structure
With Fractional Caputo Derivatives****Zhalya B. Ahmedova**

Baku State University, Baku, Azerbaijan

Institute of control system of the National academy of sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

jaleahmadova23@gmail.com

Abstract. We consider an optimal control problem with a variable structure, described in different time intervals by various ordinary nonlinear fractional differential equations. Using an analogue of the incremental method, a necessary condition for first-order optimality is proved. In the case of convex control domains, a linearized maximum condition is proved, and in the case of open control domains, an analogue of the Euler equation is obtained.

Keywords: optimal control problem; quality functionality; Hamilton-Pontryagin function; analogue of the maximum principle of L.S. Pontryagin; necessary condition for optimality; admissible control, linearized maximum condition, analogue of Euler's equation

For citation: Ahmedova, Zh. B. (2024), "On one Control Problem of a Variable Structure With Fractional Caputo Derivatives", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(65), pp. 5-16. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-5-16.



Эта работа © 2024 Ахмедова Ж.Б. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

The article was submitted 08.04.2024; approved after reviewing 25.05.2024; accepted for publication 11.06.2024.

Введение

Задачи оптимального управления, описываемые различными дифференциальными, интегро-дифференциальными уравнениями с переменной структурой, или же задачи оптимального управления многоэтапными процессами или же задачи оптимального управления, описываемые различными дифференциальными, интегро-дифференциальными уравнениями постоянной структурой, широко исследованы. В этом направлении можно отметить работы [1–4].

В работе [5] рассмотрена одна задача оптимального управления с переменной структурой, но многоточечным функционалом качества. При различных предположениях на параметры рассматриваемой задачи доказаны аналоги принципа максимума Л.С. Понтрягина, линеаризованного условия максимума и аналог уравнения Эйлера.

Многочисленные свойства дробных операторов вызвали в последние годы большой интерес к дробному исчислению, а также к широкому кругу приложений, связанных моделированием областей подобных физических проблем. В последние годы особенно широко применяются дробные производные Римана–Лиувилля и Капуто. Простота применения этих производных привлекла внимание многих ученых. К настоящему времени задачи оптимального управления, описываемые различными дифференциальными уравнениями с дробными производными, интенсивно исследуются (см. например, [6, 7]).

В работах, например [6–9], изучены различные задачи оптимального управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с дробными производными.

В работе [10] исследована задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто, где функционал качества является многоточечным функционалом. Установлен аналог принципа максимума Понтрягина.

В предлагаемой работе рассмотрена дробная задача оптимального управления с переменной структурой, описываемой двумя системами дифференциальных уравнений.

Получен аналог принципа максимума Понтрягина.

В случае выпуклых областей управления доказан линеаризованный принцип максимума, а в случае открытости областей управления получен аналог уравнения Эйлера.

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается системой нелинейных уравнений:

$${}^{C_0}D_t^\alpha x = f(t, x, u), t \in T_1 = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$${}^{C_1}D_t^\alpha y = g(t, y, v), t \in T_2 = [t_1, t_2] \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

$$y(t_1) = G(x(t_1)), \quad (4)$$

где

$${}^{C_0}D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{1 + \alpha - n}} d\tau,$$

$$n = [\alpha] + 1, \alpha \in R_+$$

левая дробная производная Капуто [9, 11, 12].

Здесь $\alpha \in [0, 1]$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)'$ – состояния управляемого объекта, $x(t) \in C^n([t_0, t_1])$, $y(t) \in C^n([t_1, t_2])$, x_0 – заданный постоянный вектор, $f(t, x, u) \left((g(t, y, v)) \right)$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x (y), $G(x)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая m -мерная вектор-функция, $u(t)$ и $v(t)$ – соответственно r и q -мерные кусочно-непрерывные (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор-функции, управляющих воздействий, принимающие свои значения из заданных непустых и ограниченных множеств U и V , т.е.

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, t \in T_1, \\ v(t) &\in V \subset R^q, t \in T_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Требуется минимизировать следующий функционал качества:

$$J(u, v) = \varphi_1(x(t_1)) + \varphi_2(y(t_2)), \quad (6)$$

определенный на решениях задачи (1)–(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ – заданные непрерывно-дифференцируемые скалярные функции.

Пару $(u^o(t), v^o(t))$, удовлетворяющую вышеприведенным свойствам, назовем допустимым управлением.

2. Вычисление приращения функционала качества

Пусть $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – некоторый фиксированный, а $(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta y(t))$ – произвольный допустимые процессы.

Тогда приращение функционала качества записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^o, v^o) &= J(\bar{u}, \bar{v}) - J(u^o, v^o) = \\ &= [\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1))] + \\ &\quad + [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))]. \end{aligned} \quad (7)$$

Ясно, что $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ является решением следующей задачи:

$${}_t^C D_t^\alpha \Delta x(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x^o(t), u^o(t)), \quad (8)$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \quad (9)$$

$${}_t^C D_t^\alpha \Delta y(t) = g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t, y^o(t), v^o(t)), \quad (10)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1)). \quad (11)$$

Пусть $\psi(t)$ и $p(t)$ пока произвольные n и m -мерные, соответственно, вектор-функции.

Умножая обе стороны уравнений (8) и (10) скалярно на $\psi(t)$ и $p(t)$, соответственно, и интегрируя обе стороны полученных соотношений по t от t_0 до t_1 и от t_1 до t_2 соответственно, введя аналоги функции Гамильтона–Понтрягина следующим образом:

$$H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u),$$

$$M(t, y, v, p) = p' g(t, y, v),$$

далее, применяя формулу интегрирования по частям для интегралов Римана–Лиувилля [8, 9], а также учитывая условие (9), получим

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) {}_t^C D_t^\alpha \Delta x(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t) \Delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t) \Delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ &\quad - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) - \\ &\quad - {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_0) \Delta x(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ &\quad - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) - \\ &\quad - {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_0) \Delta x(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ &\quad - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) - \\ &\quad - {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_0) \Delta x(t_0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t) \Delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ &+ {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_0) \Delta x(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ &+ {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ &\quad - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} p'(t) {}_t^C D_t^\alpha \Delta y(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} {}_t^C D_{t_2}^\alpha p'(t) \Delta y(t) dt + \\ &+ {}_t^C D_{t_2}^{1-\alpha} p(t_2) \Delta y(t_2) + {}_t^C D_{t_2}^{1-\alpha} p(t_1) \Delta y(t_1) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} {}_t^C D_{t_2}^\alpha p'(t) \Delta y(t) dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_2) \Delta y(t_2) + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_1) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ &\quad - M(t, y^o(t), v^o(t), p(t))] dt. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (12), (13) из формулы приращения (7) получим, что

$$\begin{aligned} \Delta J(u, v) &= [\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1))] + \\ &+ [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))] + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) - \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ &\quad - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] dt + \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} {}_t^C D_{t_2}^\alpha p'(t) \Delta y(t) dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_2) \Delta y(t_2) + \end{aligned}$$

$$+ {}_t I_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_1) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t))] dt. \quad (14)$$

Используя формулу Тейлора, получим, что

$$\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) = \varphi'_x(x^o(t_1)) \Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|), \quad (15)$$

$$\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2)) = \varphi'_y(y^o(t_2)) \Delta y(t_2) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned} & H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) = \\ & = H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) + \\ & + H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) = \\ & = H'_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) \Delta x(t) + o_3(\|\Delta x(t)\|) + H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ & - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) = \\ & = H'_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) \Delta x(t) + H'_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) \Delta x(t) - \\ & - H'_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) \Delta x(t) + \\ & + H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) + \\ & + o_3(\|\Delta x(t)\|), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) = \\ & = M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) + M(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ & - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) = \\ & = M'_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) \Delta y(t) + o_4(\|\Delta y(t)\|) + \\ & + M(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) = \\ & = M'_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) \Delta y(t) + M'_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) \Delta y(t) - \\ & - M'_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) \Delta y(t) + \\ & + M(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) + \\ & + o_4(\|\Delta y(t)\|). \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\| =$

$\sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, а $o(\alpha)$, есть величина более высокого порядка чем α , т. е. $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Тогда формулу приращения (14) можно записать как

$$\begin{aligned} & \Delta J(u, v) = \varphi'_x(x^o(t_1)) \Delta x(t_1) + \varphi'_y(y^o(t_2)) \Delta y(t_2) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + \\ & + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) + \int_{t_0}^{t_1} {}_t D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ & + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))] dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [H_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))] \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x(t)\|) dt + \int_{t_1}^{t_2} {}_t D_{t_2}^\alpha p'(t) \Delta y(t) dt + \\ & + {}_t I_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_2) \Delta y(t_2) + {}_t I_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_1) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t))] dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} M'_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) \Delta y(t) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta y(t)\|) dt - \int_{t_1}^{t_2} [M_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - M_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t))] \Delta y(t) dt. \quad (19) \end{aligned}$$

Ведем обозначение:

$$N(p(t_1), x) = p'(t_1) G(x).$$

Используя формулу Тейлора, имеем

$$N(p(t_1), \bar{x}(t_1)) - N(p(t_1), x^0(t_1)) = N'_x(p(t_1), x^0(t_1))\Delta x(t_1) + o_5(\|\Delta x(t_1)\|).$$

Предположим, что векторы функций $\psi(t)$ и $p(t)$ являются решениями следующей системы уравнений:

$${}_t^c D_{t_1}^\alpha \psi(t) = -H_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)), \quad (20)$$

$${}_t I_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) + N'_x(p(t_1), x^0(t_1)), \quad (21)$$

$${}_t^c D_{t_2}^\alpha p(t) = -M_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t)), \quad (22)$$

$${}_t I_{t_2}^{1-\alpha} p(t_2) = -\varphi_y(y(t_2)). \quad (23)$$

Задачу (20)–(23) назовем сопряженной системой для рассматриваемой задачи.

Учитывая систему (20)–(23) из (19), получим, что

$$\begin{aligned} \Delta J(u, v) = & - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ & - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))] dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ & - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t))] dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [H_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ & - H_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))] \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} [M_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ & - M_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t))] \Delta y(t) dt + \\ & + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x(t)\|) dt - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta y(t)\|) dt - \\ & - o_5(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{u}} H[t, \psi] & \equiv H(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ & - H(t, x(t), u(t), \psi(t)), \\ \Delta_{\bar{v}} M[t, p] & \equiv M(t, y(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ & - M(t, y(t), v(t), p(t)). \end{aligned}$$

Тогда приращение функционала качества может быть представлено в виде

$$J(u(t) + \Delta u(t), v(t) + \Delta v(t)) -$$

$$\begin{aligned} & -J(u(t), v(t)) = \\ & = - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H[t, \psi] dt - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}} M[t, p] dt + \\ & + \eta_1(\Delta u, \Delta v) + \eta_2(\Delta u, \Delta v). \quad (24) \end{aligned}$$

Здесь $\eta_1(\Delta u, \Delta v)$ и $\eta_2(\Delta u, \Delta v)$ остаток формулы приращения, т.е.

$$\begin{aligned} \eta_1(\Delta u, \Delta v) = & - \int_{t_0}^{t_1} [H_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ & - H_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))] \Delta x(t) dt + \\ & + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x(t)\|) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2(\Delta u, \Delta v) = & - \int_{t_1}^{t_2} [M_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ & - M_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t))] \Delta y(t) dt + \\ & + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta y(t)\|) dt - \\ & - o_5(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned}$$

Пусть $\Delta u(t) \neq 0, \Delta v(t) = 0$. Тогда получим

$${}_t^c D_t^\alpha \Delta x(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x^0(t), u^0(t)), \quad (25)$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \quad (26)$$

$${}_t^c D_t^\alpha \Delta y(t) = g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t, y^0(t), v^0(t)), \quad (27)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)). \quad (28)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Delta x(t) & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \\ & \times \int_{t_0}^t \frac{f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - f(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau))}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} [f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - \\ & - f(\tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) + \\ & + f(\tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) - f(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau))] d\tau = \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} [f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - \end{aligned}$$

$$-f(\tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau))]d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times \Delta_{\bar{u}} f(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau))d\tau, \quad (29)$$

$$\Delta y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \\ \times \int_{t_1}^t \frac{g(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - g(\tau, y^0(\tau), v^0(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \\ + G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} [g(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - \\ - g(\tau, y^0(\tau), \bar{v}(\tau)) + \\ + g(\tau, y^0(\tau), \bar{v}(\tau)) - g(\tau, y^0(\tau), v^0(\tau))]d\tau + \\ + G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} [g(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - \\ - g(\tau, y^0(\tau), \bar{v}(\tau))]d\tau + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \Delta_{\bar{v}} g(\tau, y^0(\tau), v^0(\tau))d\tau \\ + G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)). \quad (30)$$

Так как, в силу сделанных предположений, функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет условию Липшица по x , то, переходя к норме в (29), получаем, что

$$\|\Delta x(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times \|f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - f(\tau, x(\tau), \bar{u}(\tau))\|d\tau + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|\Delta_{\bar{u}} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\|d\tau \\ \leq L_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|\Delta x(\tau)\|d\tau + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times \|\Delta_{\bar{u}} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\|d\tau, \quad (31)$$

где $L_1 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

А из (30) получаем, что

$$\|\Delta y(t)\| \leq L_2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|\Delta y(\tau)\|d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times \|\Delta_{\bar{v}} g(\tau, y^0(\tau), v^0(\tau))\|d\tau + \\ + L_3 \|\Delta x(t_1)\|, \quad (32)$$

где $L_2, L_3 = \text{const} > 0$ некоторые постоянные. Применяя к неравенству (31) аналог леммы Гронуолла–Беллмана [13], приходим к оценке

$$\|\Delta x(t)\| \leq L_4 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times \|\Delta_{\bar{u}} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\|d\tau. \quad (33)$$

Аналогично из (32) получим

$$\|\Delta y(t)\| \leq \\ \leq L_5 \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} [\|\Delta y(\tau)\| + \right. \\ \left. + \|\Delta v(\tau)\|]d\tau + \|\Delta x(t_1)\| \right], \quad (34)$$

где $L_4, L_5 = \text{const} > 0$ некоторые постоянные.

Теперь пусть $\Delta u(t) = 0$, а $\Delta v(t) \neq 0$. При этом получим, что $\Delta x(t) = 0$, а $\Delta y(t)$ является решением задачи

$${}_t^c D_t^\alpha \Delta y(t) = g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - \\ - g(t, y(t), v(t)), \quad (35)$$

$$\Delta y(t_1) = 0. \quad (36)$$

По аналогии с доказательством оценки (34) доказывается справедливость оценки

$$\|\Delta y(t)\| \leq \\ \leq L_6 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|\Delta_{\bar{v}} g[\tau]\|d\tau \quad (37)$$

где $L_6 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

3. Основной результат

Пусть $\theta \in [t_0, t_1)$ произвольная точка непрерывности управляющей функции $u(t)$, $w_1 \in U$ – произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$.

Специальное приращение управляющей функции $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u(t; \varepsilon) = \begin{cases} w_1 - u(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in T_1 \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} \quad (38)$$

Пусть $(\Delta x(t; \varepsilon), \Delta y(t; \varepsilon))$ – специальное приращение траектории, отвечающее специальному приращению (38) управляющей функции $u(t)$.

Тогда из оценок (33), (34) следует, что

$$\begin{aligned}\|\Delta x(t; \varepsilon)\| &\leq L_7 \varepsilon, t \in T_1, \\ \|\Delta y(t; \varepsilon)\| &\leq L_8 \varepsilon, t \in T_2,\end{aligned}\quad (39)$$

где $L_7, L_8 = \text{const}$ некоторые положительные постоянные.

Принимая во внимание формулу (38) и оценки (39), из формулы приращения (24) получаем, что

$$\begin{aligned}J(u(t) + \Delta u(t; \varepsilon), v(t)) - J(u(t), v(t)) = \\ = -\varepsilon \Delta_{w_1} H[\theta, \psi] + o(\varepsilon).\end{aligned}\quad (40)$$

Теперь специальное приращение управляющей функции $v(t)$ определим по формуле

$$\begin{aligned}\Delta v(t; \mu) = \\ = \begin{cases} w_2 - v(t), & t \in [\xi, \xi + \mu), \\ 0, & t \in T_2 \setminus [\xi, \xi + \mu). \end{cases}\end{aligned}\quad (41)$$

Здесь $w_2 \in V$ — произвольный вектор, $\xi \in [t_1, t_2]$ произвольная точка непрерывности управляющей функции $v(t)$, а $\mu > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\xi + \mu < t_2$.

Ясно, что в этом случае специальное приращение $\Delta x(t; \mu)$ траектории $x(t)$ равно нулю, а для $\Delta y(t; \mu)$, т.е. для специального приращения траектории $y(t)$, отвечающее приращению (41) в силу оценки (37) имеет место оценка

$$\|\Delta y(t; \mu)\| \leq L_9 \mu, t \in T_2, \quad (42)$$

где $L_9 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

Учитывая формулу (41) и оценку (42), из формулы приращения (24) получаем, что

$$\begin{aligned}J(u(t), v(t) + \Delta v(t; \mu)) - J(u(t), v(t)) = \\ = -\mu \Delta_{w_2} M[\xi, p] + o(\mu).\end{aligned}\quad (43)$$

Из разложений (40), (43) следует

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u(t), v(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\begin{aligned}\max_{w_1 \in U} H(\theta, x(\theta), w_1, \psi(\theta)) = \\ = H(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)), \\ \max_{w_2 \in V} M(\xi, y(\xi), w_2, p(\xi)) = \\ = M(\xi, y(\xi), v(\xi), p(\xi))\end{aligned}$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $\xi \in [t_1, t_2]$ соответственно.

Теперь предположим, что множества U, V выпуклы, а $f(t, x, u), g(t, y, v)$ имеют непрерывные производные также по u, v соответственно.

Здесь и в дальнейшем мы используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H[t, \psi]}{\partial u} &= \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u}, \\ \frac{\partial M[t, p]}{\partial v} &= \frac{\partial M(t, y(t), v(t), p(t))}{\partial v}.\end{aligned}$$

Тогда, по аналогии с доказательством формулы приращения (24), доказывается, что

$$\begin{aligned}J(\bar{u}, v) - J(u, v) = \\ = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H[t, \psi]}{\partial u} \Delta u(t) dt + \eta_3(\Delta u, \Delta v),\end{aligned}\quad (44)$$

$$\begin{aligned}J(u, \bar{v}) - J(u, v) = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial M[t, p]}{\partial v} \Delta v(t) dt + \eta_4(\Delta u, \Delta v).\end{aligned}\quad (45)$$

Здесь $\eta_3(\Delta u, \Delta v)$ и $\eta_4(\Delta u, \Delta v)$ являются остаточными членами формулы приращения функционала, т.е.

$$\begin{aligned}\eta_3(\Delta u, \Delta v) = \\ = - \int_{t_0}^{t_1} [H_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ - H_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))]' \Delta x(t) dt + \\ + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x(t)\|) dt, \\ \eta_4(\Delta u, \Delta v) = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} [M_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ - M_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t))]' \Delta y(t) dt + \\ + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta y(t)\|) dt - \\ - o_5(\|\Delta x(t_1)\|).\end{aligned}$$

Далее из оценок (31) и (32) получаем, что

$$\begin{aligned}\|\Delta x(t)\| &\leq L_{10} \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u(t)\| dt, \\ \|\Delta y(t)\| &\leq L_{11} \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta v(t)\| dt,\end{aligned}\quad (46)$$

где $L_i = \text{const} > 0, i = 10, 11$ некоторые постоянные.

А из оценки (37) получаем, что

$$\|\Delta y(t)\| \leq L_{12} \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta v(t)\| dt, \quad (47)$$

где $L_{12} = \text{const} > 0$ – некоторая постоянная.

Пусть $w_1(t) \in U$ – произвольная допустимая управляющая функция, а $\varepsilon \in [0,1]$ – произвольное число.

Тогда специальное приращение управляющей функции $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u(t; \varepsilon) = \varepsilon[w_1(t) - u(t)], t \in T_1. \quad (48)$$

Через $(\Delta x(t; \varepsilon), \Delta y(t; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение траектории $(x(t), y(t))$, отвечающее специальному приращению (48) управляющей функции $u(t)$.

Тогда, учитывая оценки (46) и формулу (44) из частичной формулы приращения, получаем, что

$$\begin{aligned} J(u(t) + \Delta u(t; \varepsilon), v(t)) - J(u(t), v(t)) &= \\ &= -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H[t, \psi]}{\partial u} [w_1(t) - u(t)] dt + \\ &\quad + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (49)$$

Если специальное приращение $\Delta v(t; \mu)$ допустимой управляющей функции $v(t)$ определим по формуле

$$\Delta v(t; \mu) = \mu[w_2(t) - v(t)],$$

где $\mu \in [0,1]$ произвольное число, а $w_2(t) \in V$ произвольная допустимая управляющая функция, то, учитывая также оценку (47) из формулы приращения (45), получаем, что

$$\begin{aligned} J(u(t), v(t) + \Delta v(t; \mu)) - J(u(t), v(t)) &= \\ &= -\mu \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial M[t, p]}{\partial v} [w_2(t) - v(t)] dt + \\ &\quad + o(\mu). \end{aligned} \quad (50)$$

С помощью разложений (49) и (50) доказывается

Теорема 2 (линеаризованный принцип максимума).

Если множества U и V открыты, а вектор-функции $f(t, x, u)$ и $g(t, y, v)$ непрерывно-дифференцируемы по (x, u) и (y, v) соответственно, то для оптимальности допустимого управления $(u(t), v(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H[t, \psi]}{\partial u} [w_1(t) - u(t)] dt &\leq 0, \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial M[t, p]}{\partial v} [w_2(t) - v(t)] dt &\leq 0 \end{aligned}$$

выполнялись для всех $w_1(t) \in U, t \in T_1$ и $w_2(t) \in V, t \in T_2$ соответственно.

Предположим, что множества U и V являются открытыми множествами.

В этом случае, используя формулы приращения (44) и (45), в случае открытости областей управления U и V получается аналог уравнения Эйлера, а также аналог условия Лежандра–Клебша.

Для этого вычислим первую вариацию функционала качества.

Пусть ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t) \in R^r, t \in T_1$ произвольная r -мерная дискретная и ограниченная вектор-функция (вариация управляющей функции $u(t)$). Специальное приращение управляющих функций $u(t)$ и $v(t)$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u(t; \varepsilon) = \varepsilon \delta u(t), \\ \Delta v(t; \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (51)$$

Далее из формул (9), (11) получим, что

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \left[\frac{f_x(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \Delta x(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \Delta u(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \right] d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \times \\ &\quad \times o_6(\|\Delta x(\tau)\| + \|\Delta u(\tau)\|) d\tau, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t) &= \\ &= G_x(x^o(t_1)) \Delta x(t_1) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t \frac{g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \Delta y(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t - \tau)^{\alpha-1} o_7(\|\Delta y(\tau)\|) d\tau + \\ &\quad + o_8(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned} \quad (53)$$

Через $(\Delta x(t; \varepsilon), \Delta y(t; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение траектории $(x(t), y(t))$, отвечающее специальному приращению (51), и определим их следующим образом:

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon; t), \quad (54)$$

$$\Delta y_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta y(t) + o(\varepsilon; t). \quad (55)$$

Здесь $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$ вариации траекторий (см., например, [14]), которые являются решениями, соответственно, следующих задач,

$$\begin{aligned} & \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon, t) = \\ &= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \left[\frac{f_x(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \Delta x(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \Delta u(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \right] d\tau + \\ & \quad + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \times \\ & \quad \times o_6(\|\Delta x(\tau)\| + \|\Delta u(\tau)\|) d\tau + o(\varepsilon, t), \\ & \varepsilon \delta y(t) + o(\varepsilon, t) = \varepsilon G_x(x^o(t_1)) \delta x(t_1) + \\ & + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t \frac{g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \Delta y(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau + \\ & + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t - \tau)^{\alpha-1} o_7(\|\Delta y(\tau)\|) d\tau + \\ & + o_8(\|\Delta x(t_1)\|) + o(\varepsilon, t). \end{aligned}$$

Разделив обе стороны этих соотношений на $o(\varepsilon, t)$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим, что вектор-функции $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$ удовлетворяют соответственно соотношениям

$$\delta x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \left[\frac{f_x(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta x(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} + \right. \\ \left. + \frac{f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta u(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \right] d\tau, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & \delta y(t) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t \frac{g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \delta y(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau + \\ & + G_x(x^o(t_1)) \delta x(t_1). \end{aligned} \quad (57)$$

Из интегральных уравнений (56) и (57) получаем, что $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$ является решением следующих линейных неоднородных дифференциальных систем уравнений дробного порядка:

$${}^C D_t^\alpha \delta x(t) = f_x(t, x^o(t), u^o(t)) \delta x(t) + f_u(t, x^o(t), u^o(t)) \delta u(t), \quad (58)$$

$$\delta x(t_0) = 0. \quad (59)$$

$${}^C D_t^\alpha \delta y(t) = G_x(x^o(t_1)) \delta x(t_1) + g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \delta y(\tau), \quad (60)$$

$$\delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1)). \quad (61)$$

Уравнения (56) и (57) и задачи Коши (58)–(59) и (60)–(61) называются *уравнениями в вариациях для рассматриваемой задачи*.

А теперь, используя разложения (54) и (55) из формулы приращения (24), получим, что

$$\begin{aligned} & J(u^o(t) + \varepsilon \delta u(t), v^o(t)) - J(u^o(t), v^o(t)) = \\ &= -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} H'_u(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) dt + \\ & \quad + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (62)$$

А теперь специальное приращение допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u(t; \mu) = 0, \\ \Delta v(t; \mu) = \mu \delta v(t), t \in T_2. \end{cases} \quad (63)$$

Здесь μ – достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta v(t) \in R^q$, $t \in T_2$ произвольная q -мерная дискретная и ограниченная вектор-функция (вариация управляющей функции $v(t)$).

Далее через $(\Delta x_\mu(t), \Delta y_\mu(t))$ обозначим специальное приращение траектории $(x^o(t), y^o(t))$, отвечающее специальному приращению (63) допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$.

Ясно, что в этом случае $\Delta x_\mu(t) = 0$, а специальное приращение $\Delta y_\mu(t)$ траектории $y^o(t)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \Delta y_\mu(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \\ & \times \int_{t_1}^t (t - s)^{\alpha-1} [g_y(t, s, y^o(s), v^o(s)) \Delta y_\mu(s) + \\ & + g_v(t, s, y^o(s), v^o(s)) \Delta v(s; \mu)] ds + o(\varepsilon; \mu). \end{aligned}$$

Используя выше использованные рассуждения, имеем

$$\Delta y_\mu(t) = \mu \delta z(t) + o(t; \mu), \quad (64)$$

где $\delta z(t)$ является решением следующего вариационного уравнения:

$$\delta z(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} [g_y(t, s, y^o(s), v^o(s)) \delta y_\mu(s) + g_v(t, s, y^o(s), v^o(s)) \delta v(s; \mu)] ds. \quad (65)$$

Используя формулы (64), (65) из формулы приращения функционала (24) получим

$$\begin{aligned} & J(u(t), v(t) + \Delta v(t; \mu)) - J(u(t), v(t)) = \\ & = -\mu \int_{t_1}^{t_2} M'_u(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \delta v(t) dt + \\ & \quad + o(\mu). \end{aligned} \quad (66)$$

Из разложений (62), (66) следует, что первые вариации функционала качества (6) имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} & \delta^1 J(u^o, v^o; \delta u) = \\ & = - \int_{t_0}^{t_1} H'_u(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) dt, \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} & \delta^1 J(u^o, v^o, \delta v) = \\ & = - \left[\int_{t_1}^{t_2} M'_u(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \delta v(t) dt. \right] \end{aligned} \quad (68)$$

Учитывая основной результат вариационного исчисления (см., например, [14, 15]), получаем, что для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы соотношения

$$\delta^1 J(u, v; \delta u) = 0, \quad (69)$$

$$\delta^1 J(u, v; \delta v) = 0, \quad (70)$$

выполнялись для всех δu и δv соответственно.

Тождества (69) и (70) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого порядка.

Используя произвольность δu и δv , из тождеств (69) и (70), получаем справедливость условия оптимальности первого порядка, типа аналога уравнения Эйлера [14, 15].

Теорема 3 (аналог уравнения Эйлера). Если множества U и V открыты, то для оптимальности допустимого управления $(u(t), v(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\frac{\partial H[\theta, \psi]}{\partial u} = 0, \quad (71)$$

$$\frac{\partial M[\xi, p]}{\partial v} = 0, \quad (72)$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $\xi \in [t_1, t_2]$ соответственно.

Каждое допустимое управление, которое является решением уравнения Эйлера, называется *классической экстремалью*. Как

видно уравнения Эйлера (71)–(72), конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности при сделанных предположениях и являются необходимым условием оптимальности первого порядка.

Заключение

В статье рассматривается одна двухэтапная (с переменной структурой) задача оптимального управления, описываемая в различных отрезках времени различными обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями дробным производным Капуто.

С помощью модифицированного варианта метода приращений, в рассматриваемой задаче построена формула приращения первого порядка минимизируемого функционала, учитывая его особенности и с помощью специальной вариации управления $(u^o(t), v^o(t))$ вычислена его первая вариация и, используя ее, доказано необходимое условие оптимальности первого порядка.

В случае выпуклости областей управления для рассматриваемой задачи управления доказано линеаризованное условие максимума, а при открытости областей управления получен аналог уравнения Эйлера.

Список источников

1. Мансимов К.Б., Рзаева В.Г. Квазиособые управления в задачах оптимального управления, описываемых гиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1(48). С. 13–20.
2. Габелко К.Н. Оптимизация многоступенчатых процессов. Аннотация дисс. на конкурс уч. канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 1975. 17 с.
3. Масталиев Р.О. О задаче оптимального управления линейной системой с переменной структурой // Владикавказский математический журнал. 2016. Вып. 1. С. 63–70.
4. Муслумов В.Б. Условия оптимальности в одной системе с распределенными параметрами: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 2006. 21 с.
5. Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б. Об одной задаче оптимального управления с переменной структурой // Вестник Бакинского гос. университета. Серия физико-математических наук. 2022. № 3. С. 5–16.

6. Постнов С.С. Исследование задач оптимального управления динамическими системами дробного порядка методом моментов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2015. 26 с.
7. Bahaa G.M. Fractional optimal control problem for differential system with delay argument // *Advances in Difference Equations*. 2017. № 1. P. 32–51.
8. Agrawal O.P. A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems. *Nonlinear Dynamics*. 2004. № 38. P. 323–337.
9. Ali H.M., Pereira F.L., Gama S.M. A. A new approach to the Pontryagin maximum principle for nonlinear fractional optimal control problems // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2016. № 39. P. 3640–3649.
10. Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б. Аналог принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и многоточечным критерием качества // *Вестник Пермского университета. 2022. Математика. Механика. Информатика. Вып. 3(58). С. 5–10.*
11. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993. 780 p.
12. Ахмедова Ж.Б. Принцип максимума Понтрягина для одной нелинейной дробной задачи оптимального управления // *Математический вестник Вятского государственного университета*. 2021. № 1(20). С. 5–11.
13. Lin S.Y. Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations // *Journal of Inequalities and Applications*. 2013. No 1.
14. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011. 256 с.
15. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2018. 384 с.
2. Gabelko, K.N. (1975), "Optimization of multistage processes", *Abstract of the dissertation for the degree of Candidate of Phys.-Mat. Sciences*. Irkutsk, 17 p.
3. Mastaliev, R.O. (2016), "On the problem of optimal control of a linear system with a variable structure" *Vladikavkaz Mathematical Journal*, no. 1, pp. 63-70.
4. Muslumov, V.B. (2006), "Optimality conditions in one system with distributed parameters", *Abstract of dissertation for the degree of Candidate of Phys.-Mat. Sciences*, Baku, 2006, 21 p.
5. Mansimov, K.B. and Ahmedova, J.B. (2022), "About one task of optimal control with a variable structure", *Bulletin of Baku State University, series of physical and mathematical sciences*, no. 3, pp. 5-16.
6. Postnov, S.S. (2015), "Research of the optimum control tasks of the dynamic systems of the fractional order by the method of moments", *Author's abstract of the dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences*, Moscow, 26 p.
7. Bahaa, G.M. (2017), "Fractional optimal control problem for differential system with delay argument", *Advances in Difference Equations*, no. 1, pp. 32-51.
8. Agrawal, O.P. (2004), "A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems", *Nonlinear Dynamics*, no. 38, pp. 323–337.
9. Ali H.M., Pereira F.L. and Gama S.M. (2016), "A new approach to the Pontryagin maximum principle for nonlinear fractional optimal control problems", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, no. 39, pp. 3640-3649.
10. Mansimov, K.B. and Akhmedova, J.B. (2022) "Analog of Pontryagin's maximum principle in the problem of optimal control of the system of differential equations with fractional Caputo derivative and multipoint quality criterion", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(58). pp. 5-10.
11. Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev O.I. (1993), *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland.
12. Akhmedova, J.B. (2021), "Pontryagin's maximum principle for one nonlinear fractional optimal control problem", *Mathematical Bulletin of Vyatka State University*, no. 1(20), pp. 5-11.

References

13. Lin, S.Y. (2013), "Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations", *Journal of Inequalities and Applications*, 549, no. 1.
14. Gabasov, R. and Kirillova, F.M. (2011), "Osobyе optimal'nye upravleniya" [Special optimal controls], Librocom, Moscow, Russia.
15. Alekseev, V.M., Tikhomirov, V.M. and Fomin, S.V. (2018), "Optimalnoe upravlenie" [*Optimal control*]. Fizmatlit, Moscow, Russia.

Информация об авторе:

Ж. Б. Ахмедова – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики факультета прикладной математики и кибернетики Бакинского государственного университета (1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23), AuthorID: 1229288.

Information about the author:

Zhalya B. Ahmedova – Candidate of Sciences (Physical and Mathematical), Associate Professor of the Mathematical Cybernetics Department, the Applied Mathematics and Cybernetics Faculty, Baku State University (23, Z. Khalilov St., Baku, Azerbaijan, 1148), AuthorID: 1229288.