

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 512.558

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-5-15

<https://elibrary.ru/buzlne>



**Конечные полумодули над трехэлементными
мультипликативно идемпотентными полукольцами**

**Евгений Михайлович Вечтомов¹, Андрей Александрович Петров²,
Александр Павлович Шкляев³**

^{1,2,3}Вятский государственный университет, г. Киров, Россия

¹e-mail: vecht@mail.ru

²e-mail: apetrov43@mail.ru

³e-mail: sascha.schlyaev@yandex.ru

Аннотация. Исследуется строение конечных полумодулей над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами. Основное внимание уделено случаю трехэлементных идемпотентных полуколец. Описаны полумодули, содержащие не более 6 элементов, над трехэлементными идемпотентными полукольцами.

Ключевые слова: полукольцо; мультипликативно идемпотентное полукольцо; полумодуль; конечный полумодуль; полурешетка; решетка; подходящая подполурешетка

Для цитирования: Вечтомов Е.М., Петров А.А., Шкляев А.П. Конечные полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 5–15. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-5-15. <https://elibrary.ru/buzlne>.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

Статья поступила в редакцию 30.08.2024; одобрена после рецензирования 15.09.2024; принята к публикации 03.10.2024.

MATHEMATICS

Research article

**Finite Semimodules Over Three-element
Multiplicatively Idempotent Semirings**

Eugeny M. Vechtomov¹, Andrey A. Petrov², Alexander P. Shklyaev³

^{1,2,3}Vyatka State University, Kirov, Russia

¹e-mail: vecht@mail.ru

²e-mail: apetrov43@mail.ru

³e-mail: sascha.schlyaev@yandex.ru



Эта работа © 2024 Вечтомов Е.М., Петров А.А., Шкляев А.П. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. In this paper we study the structure of finite semimodules over three-element multiplicatively idempotent semirings. The main attention is paid to the case of three-element idempotent semirings. Semimodules containing at most 6 elements over three-element idempotent semirings are described.

Keywords: *semiring; multiplicatively idempotent semiring; semimodule; finite semimodule; semilattice; lattice; suitable subsemilattice*

For citation: Vechtomov, E. M., Petrov, A. A. and Shklyayev, A. P. (2024), "Finite Semimodules Over Three-element Idempotent Semirings", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(66), pp. 5-15. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-5-15. <https://elibrary.ru/buzlne>.

Acknowledgments: the Russian Science Foundation, Project № 24-21-00117, supported the work.

The article was submitted 30.08.2024; approved after reviewing 15.09.2024; accepted for publication 03.10.2024

Введение. Основные понятия

Исследуются полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами. Статья примыкает к работам [1], [2]. Теория мультипликативно идемпотентных полуколец излагается в книге [3]. Ранее изучались гомологические свойства полумодулей над дистрибутивными решетками S , называемых S -полигонами [4], в частности над трехэлементной цепью [5]. Последние достижения в теории полигонов над полугруппами изложены в обзоре [6]. Обзорная статья [7] посвящена теории полумодулей над полукольцами.

Отметим, что базовую информацию о полукольцах и полумодулях можно найти в монографии [8], а по теории решеток – в книге [9].

Полукольцом (с нулем и единицей) называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с двумя бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ и элементами нуль 0 и единица 1 , удовлетворяющими следующим условиям:

- 1) $\langle S, +, 0 \rangle$ – коммутативный моноид;
- 2) $\langle S, \cdot, 1 \rangle$ – моноид;
- 3) 0 – мультипликативный нуль, то есть тождественно $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$;
- 4) умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон, то есть в S справедливы тождества $(x+y)z = xz+yz$ и $x(y+z) = xy+xz$.

Полукольцо S называется:

- *коммутативным*, если S удовлетворяет тождеству $xu=ux$;
- *мультипликативно идемпотентным*, если в S тождественно $xx=x$;
- *идемпотентным*, если S удовлетворяет тождествам $xx=x$ и $x+x=x$.

Полумодулем над полукольцом S или просто *S -полумодулем* (унитарным левым S -полумодулем) называется коммутативный моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ с нейтральным элементом нуль 0 вместе с отображением $S \times A \rightarrow A$, $(s, a) \rightarrow sa$, обладающим следующими свойствами (для любых $s, t \in S$ и $a, b \in A$):

- (1) $(s+t)a=sa+ta$;
- (2) $s(a+b)=sa+sb$;
- (3) $(st)a=s(ta)$;
- (4) $1 \cdot a=a$;
- (5) $0 \cdot a=0=s \cdot 0$.

Отметим, что в полукольцах и полумодулях нуль 0 обозначается одинаково.

Заметим также, что такие понятия как полугруппа, моноид, идеал, подполурешетка, подполумодуль определяются стандартно.

Отображение $\alpha: A \rightarrow B$ S -полумодуля A в S -полумодуль B называется S -гомоморфизмом, если α аддитивно и линейно, то есть $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$ и $\alpha(sx) = s\alpha(x)$ для любых $x, y \in A$ и $s \in S$. Если S -гомоморфизм α S -полумодулей является взаимно однозначным отображением (биекцией), то он называется S -изоморфизмом; при этом обратная биекция α^{-1} также будет S -изоморфизмом. Изоморфные S -полумодули имеют одни и те же абстрактные свойства.

Заметим, что класс всех S -полумодулей при фиксированном полукольце S образует категорию полумодулей, если в качестве ее морфизмов взять всевозможные S -гомоморфизмы.

Идемпотентная коммутативная полугруппа $\langle A, + \rangle$ называется *полурешеткой*. Эквивалентное «порядковое» определение: (верхняя) *полурешетка* – это упорядоченное множество $\langle A, \leq \rangle$, для любых элементов a и b которого существует точная верхняя грань $\sup(a, b)$. Эти определения связаны соотношениями: $a \leq b \Leftrightarrow a+b=b$ и $a+b=\sup(a, b)$. Нулем полурешетки $\langle A, + \rangle$ называется ее нейтральный элемент 0: $a+0=a$ для всех $a \in A$. В порядковом смысле 0 есть наименьший элемент полурешетки $\langle A, \leq \rangle$.

Решеткой называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$, такая, что $\langle S, + \rangle$ и $\langle S, \cdot \rangle$ – полурешетки, согласованные посредством законов поглощения $x+xy=x$ и $x(x+y)=x$. Эквивалентное "порядковое" определение: *решетка* – это упорядоченное множество $\langle A, \leq \rangle$, для любых элементов a и b которого существуют точная верхняя грань $\sup(a, b)$ и точная нижняя грань $\inf(a, b)$, то есть $\langle A, \leq \rangle$ является одновременно нижней и верхней полурешеткой. Имеют место соотношения: $a \leq b \Leftrightarrow ab=a$ и $ab=\inf(a, b)$.

Отметим, что решетки удобно рассматривать как алгебраические системы $\langle S, +, \cdot, \leq \rangle$ с согласованными друг с другом бинарными операциями сложения $+$, умножения $\cdot$ и отношением порядка $\leq$. В частности, в решетках неравенства можно почленно складывать и умножать: $a \leq b, c \leq d$ влекут $a+c \leq b+d, ac \leq bd$.

Решетка с тождеством $x(y+z)=xy+xz$, равносильно, с тождеством $x+yz=(x+y)(x+z)$, называется *дистрибутивной*.

Предварительные результаты

Приведем несколько предварительных соображений.

Лемма 1. *Коммутативный моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ будет S -полумодулем над некоторым мультипликативно идемпотентным полукольцом S тогда и только тогда, когда в A верно тождество $4x=2x$.*

Доказательство. В любом мультипликативно идемпотентном полукольце S имеем $4=1+1+1+1=(1+1)(1+1)=1+1=2$. Поэтому полумодули над таким полукольцом S удовлетворяют тождеству $4x=2x$. Обратно, если в коммутативном моноиде A верно тождество $4x=2x$, то A будет S -полумодулем для четырехэлементного полукольца $S=\{0, 1, 2, 3\}$ с равенством $3+1=2$.

Далее предполагается, что $A \equiv \langle A, +, 0 \rangle$ – коммутативный моноид с тождеством $4x=2x$.

С точностью до изоморфизма существует четыре трехэлементных мультипликативно идемпотентных полукольца:

- $S_1 = \{0 < e < 1\}$ – цепь;
- $S_2 = \{0, e, 1\}$ при $1+1=1$ и $e+1=e$;
- $S_3 = \{0, 1, 2\}$ при $3=1$;
- $S_4 = \{0, 1, 2\}$ при $3=2$.

Полукольца S_1, S_2 – идемпотентные ($2=1+1=1$), а полукольца S_3, S_4 не являются идемпотентными ($2 \neq 1$).

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2. *Коммутативный моноид A является S_1 -полумодулем и/или S_2 -полумодулем тогда и только тогда, когда A будет полурешеткой.*

Лемма 3. *Если A – конечная полурешетка с нулем, то $\langle A, \leq \rangle$ будет решеткой.*

Доказательство. Требуется доказать, что любые два элемента $a, b \in A$ имеют точную нижнюю грань $\inf(a, b)$. Рассмотрим множество B всех нижних граней множества $\{a, b\}$. Поскольку $0 \in B$, то B не пусто. Тогда $\inf(a, b)$ есть сумма всех элементов множества B . См. более общее утверждение [9, с. 44, лемма 14].

Возьмем S -полумодуль A над некоторым мультипликативно идемпотентным полукольцом S . Каждый элемент $e \in S$ индуцирует аддитивный эндоморфизм $e: A \rightarrow A, a \rightarrow ea$ при $a \in A$, такой, что $e(0)=0$ и $e(e(a))=e(a)$ для всех $a \in A$. При этом образ $e(A)$ служит множеством всех неподвижных элементов при действии эндоморфизма e . Отметим, что в случае дистрибутивной решетки S множество $e(A)$ названо в статье [10] фиксатором элемента $e \in S$.

Если элемент $e \in S$ коммутирует с каждым элементом из полукольца S , то эндоморфизм $e: A \rightarrow A$ будет S -гомоморфизмом. В случае коммутативного полукольца S отображение $\alpha: S \rightarrow \text{End } S$, сопоставляющее каждому элементу $e \in S$ S -гомоморфизм $e: S \rightarrow S$, является изоморфным вложением полукольца S в полукольцо $\text{End } S$ всех S -гомоморфизмов $S \rightarrow S$, рассматриваемое с операцией поточечного сложения и композицией S -гомоморфизмов.

Пусть A будет S_1 -полумодулем (S_2 -полумодулем). Структура полумодуля A полностью определяется действием элемента e на A , поскольку 0 действует как нулевой эндоморфизм и 1 как тождественный изоморфизм. Множество $e(A)$ будет подполурешеткой полурешетки A , содержащей 0 , такой, что $e(a) \leq a$ (соответственно, $a \leq e(a)$) для любого элемента $a \in A$. Легко видеть, что эндоморфизм $e: A \rightarrow A$ является *изотонным отображением*, то есть сохраняет порядок: $a \leq b \Rightarrow ea \leq eb$ для всех $a, b \in A$. Кроме того, $e(A)$ является подполумодулем S_1 -полумодуля (соответственно, S_2 -полумодуля) A .

Полумодули над полукольцом S_1

Подполурешетку B полурешетки A назовем S_i -подходящей, если A допускает структуру S_i -полумодуля ($i=1, 2$) и $B=e(A)$.

Теорема 1. *Подполурешетка $e(A)$ произвольного S_1 -полумодуля A однозначно определяет действие элемента e на A . При этом для любого элемента $a \in A$ элемент ea будет наибольшим элементом множества $\{x \in e(A): x \leq a\}$.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ и $B = \{x \in e(A) : x \leq a\}$. Имеем $ea \in B$, поскольку $ea \leq a$ и $e(ea) = ea$. Если $x \in e(A)$ и $x \leq a$, то $x = ex \leq ea$ в силу изотонности отображения e . Поэтому элемент ea будет наибольшим элементом множества B . Заметим, что первая часть теоремы 1 вытекает также из [10, замечание 1 к теореме 2].

Теорема 1 позволяют проверять, будет ли данная подполурешетка B полурешетки A с нулем S_1 -подходящей.

В случае произвольной конечной полурешетки A с нулем 0 ее подполурешетка B с 0 задает отображение $e: A \rightarrow A$ согласно теореме 1. Значит, подполурешетка B будет S_1 -подходящей тогда и только тогда, когда отображение e аддитивно.

Пример 1. Рассмотрим булеву решетку $A = \{0, a, b, s\}$ с наименьшим элементом 0 , наибольшим элементом s и одной парой несравнимых элементов a, b . S_1 -подходящими подполурешетками в B являются в точности следующие: $\{0\}$, A , $\{0, a\}$, $\{0, b\}$. В первом случае e действует как 0 (нулевой эндоморфизм), во втором случае – как 1 (тождественный изоморфизм), в третьем случае $e(b) = 0$ и $e(s) = a$, в четвертом случае $e(a) = 0$ и $e(s) = b$. Во всех случаях отображение e аддитивно. Получаем, с точностью до изоморфизма, три S_1 -полумодуля A .

Предложение 1. Идеалы любой конечной дистрибутивной решетки A являются S_1 -подходящими подполурешетками в ней.

Доказательство. Пусть B – идеал конечной дистрибутивной решетки A . Рассмотрим отображение $e: A \rightarrow A$, определенное по правилу теоремы 1 при $e(A) = B$. Очевидно, что e изотонно. Для проверки аддитивности отображения e возьмем элементы $a, b \in A$. Положим $c = e(a+b) \in B$. Имеем $e(a) + e(b) \leq e(a+b)$ и $ca, cb \in B$. Тогда, в силу дистрибутивности решетки A , $c = ce(a+b) \leq c(a+b) = ca + cb \leq e(a) + e(b)$. Значит, $e(a+b) = e(a) + e(b)$.

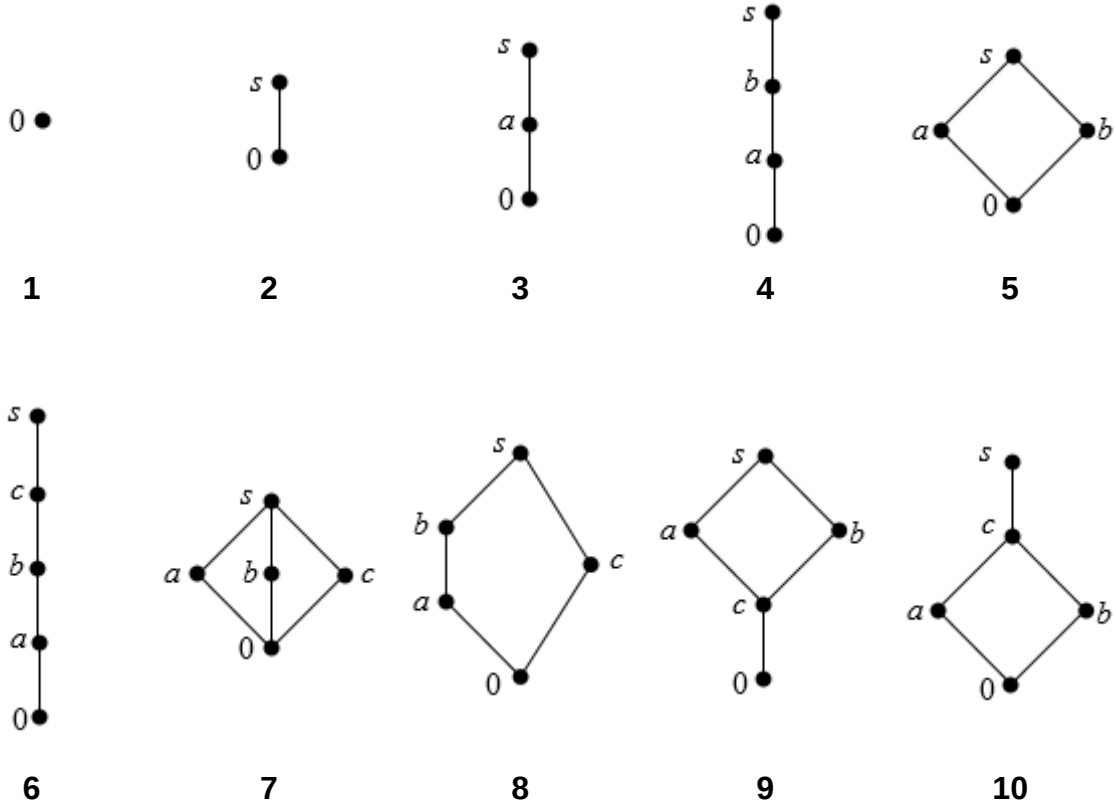
Предложение 2. Все подполурешетки с нулем конечной полурешетки A с нулем являются S_1 -подходящими тогда и только тогда, когда A – цепь.

Доказательство. $\Rightarrow$. Предположим, что в полурешетке A найдутся несравнимые элементы a, b . Положим $B = \{0, a+b\}$. По условию подполурешетка B будет S_1 -подходящей. Тогда $a+b = e(a+b) = e(a) + e(b) = 0 + 0 = 0$, противоречие. Значит, любые два элемента полурешетки A сравнимы, то есть A будет цепью.

$\Leftarrow$. Пусть A – конечная цепь с нулем 0 и B – ее подполурешетка с 0 . Зададим отображение $e: A \rightarrow A$ по правилу теоремы 1. Как уже отмечалось, такое отображение e является изотонным. Ясно, что изотонное отображение цепи в любую полурешетку аддитивно.

Следствие 1. Для любого натурального числа $n \geq 2$ n -элементная цепь допускает ровно 2^{n-1} структур S_1 -полумодуля. Значит, существует, с точностью до изоморфизма, 2^{n-1} S_1 -полумодулей, являющихся n -элементными цепями.

Подсчитаем число попарно неизоморфных S_1 -полумодулей A , имеющих не более 5 элементов. Их аддитивные моноиды $\langle A, +, 0 \rangle$ являются решетками, представленными на рисунке:



Диаграммы Хассе решеток мощности $n \leq 5$

Найдем для примера все неизоморфные S_1 -полумодули A , имеющие аддитивную структуру решетки **9**. Используя теорему 1, проверим, какие из ее подрешеток B с 0 могут выступать в качестве множества $e(A)$.

Рассмотрим все возможные случаи.

1) Пусть $|B|=1$, то есть $B=e(A)=\{0\}$. В этом случае e действует как нулевой эндоморфизм. Обозначим полученный полумодуль A_1 .

2) Пусть $|B|=2$.

2.1) Если $B=\{0, c\}$, то $e(\{a, b, s\})=c$ и легко проверить, что e аддитивно, то есть имеем полумодуль A_2 .

2.2) Пусть $B=\{0, a\}$. Здесь $e(\{b, c\})=0$, $e(s)=a$ и можно убедиться, что e аддитивно, получаем полумодуль A_3 . Ясно, что подрешетка $\{0, b\}$ задает полумодуль, изоморфный A_3 .

2.3) Пусть теперь $B=\{0, s\}$. Имеем $e(\{a, b, c\})=0$, и отображение e не является аддитивным, так как $e(a+b)=e(s)=s \neq 0=e(a)+e(b)$.

3) Пусть $|B|=3$.

3.1) Если $B=\{0, c, a\}$, то $e(b)=c$, $e(s)=a$, e аддитивно и имеем полумодуль A_4 , изоморфный полумодулю, получаемому в случае $B=\{0, c, b\}$.

3.2) При $B=\{0, c, s\}$, получаем $e(\{a, b\})=c$ и e не аддитивно, так как $e(a+b)=e(s)=s \neq c=e(a)+e(b)$.

3.3) В случае $B=\{0, a, s\}$, получаем $e(\{b, c\})=0$ и e не аддитивно, так как $e(a+b)=e(s)=s \neq a=e(a)+e(b)$. Аналогично при $B=\{0, b, s\}$.

4) Пусть $|B|=4$.

4.1) Если $B=\{0, c, a, s\}$, то $e(b)=c$, но $e(a+b)=e(s)=s \neq a+c=e(a)+e(b)$, то есть e не аддитивно. Аналогично при $B=\{0, c, b, s\}$.

4.2) Если $B=\{0, a, b, s\}$, то $e(c)=0$ и имеем полумодуль A_5 .

4) Пусть $|B|=5$, то есть $B=A$. Здесь e действует как тождественный эндоморфизм. Получаем полумодуль A_6 .

Таким образом, с точностью до изоморфизма существует ровно 6 S_1 -полумодулей, имеющих аддитивную структуру решетки A .

Предложение 3. *С точностью до изоморфизма существует ровно 53 S_1 -полумодуля порядка (мощности) ≤ 5 . Из них:*

- 1 одноэлементный;
- 2 двухэлементных;
- 4 трехэлементных;
- 11 четырехэлементных, из которых 8 имеют (аддитивную) структуру решетки 4 и 3 имеют структуру решетки 5;
- 35 пятиэлементных, из которых 16 имеют структуру решетки 6, 2 имеют структуру решетки 7, 5 имеют структуру решетки 8, 6 имеют структуру решетки 9 и 6 имеют структуру решетки 10.

Полумодули над полукольцом S_2

Исследуем структуру S_2 -подходящих подполурешеток полурешеток с нулем.

Теорема 2. *Подполурешетка $e(A)$ произвольного S_2 -полумодуля A однозначно определяет действие элемента e на A . При этом для любого элемента $a \in A$ элемент ea будет наименьшим элементом множества $\{x \in e(A): a \leq x\}$.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ и $B=\{x \in e(A): a \leq x\}$. Имеем $ea \in B$, так как $a \leq ea$ и $e(ea)=ea$. Если $x \in e(A)$ и $a \leq x$, то $ea \leq ex=x$. Поэтому элемент ea будет наименьшим элементом множества B .

Теорема 2 помогает убедиться в том, будет ли данная подполурешетка B полурешетки A с нулем S_2 -подходящей.

Пример 2. Рассмотрим цепь A , полученную из цепи $\mathbf{Q}$ рациональных чисел добавлением наименьшего 0 и наибольшего 1 элементов. Множество $e(A)=\mathbf{Z} \cup \{0, 1\}$ целых чисел с присоединенными элементами 0 и 1 является S_i -подходящей подцепью S_i -полумодуля A при $i=1, 2$.

Предложение 4. *Пусть A – конечная полурешетка с нулем 0 и наибольшим элементом s . Тогда подполурешетка B полурешетки A будет S_2 -подходящей в том и только в том случае, когда B является подрешеткой решетки A и содержит элементы 0 и s .*

Доказательство. Предположим, что подполурешетка B полурешетки A из условия предложения является S_2 -подходящей. По лемме 3 полурешетка A является решеткой. Имеем $B=e(A)$, $0 \in e(A)$ и $s \in e(A)$, так как $s \leq es$. Возьмем элементы $a, b \in B$ и покажем, что $ab=\inf(a, b) \in B$. Поскольку $ab \leq a=ea$, $ab \leq b=eb$ и $ab \leq e(ab)$, то $ab=e(ab) \in B$. Стало быть, B – подрешетка решетки A .

Обратно, пусть B – подрешетка конечной решетки A с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом s , содержащая 0 и s . Руководствуясь теоремой 2, определим отображение $e: A \rightarrow A$, для любого элемента $x \in A$ положив $ex=a_1 \dots a_k$, где

$\{a_1 \dots a_k\} = \{a \in B: x \leq a\}$. Отображение e изотонно и $x \leq e(x)$ для всех $x \in A$. Остается доказать аддитивность отображения e . Возьмем элементы $x, y \in A$. Имеем $e(x) + e(y) \leq e(x+y)$. С другой стороны, $x+y \leq e(x) + e(y) \in B$, откуда $e(x+y) \leq e(x) + e(y)$.

Пример 3. Пополним решетку A из примера 1 элементом s , таким, что $0 < s < a$ и $s < b$. В результате получим дистрибутивную решетку C , в которой верхняя подполурешетка A будет S_1 -подходящей, но не S_2 -подходящей в силу предложения 4. Цепь $B = \{0, s, s\}$ в решетке C , будучи S_2 -подходящей по предложению 4, не является S_1 -подходящей.

Предложение 5. Для того чтобы в конечной полурешетке A с нулем 0 и наибольшим элементом s все подполурешетки с 0 и s являлись S_2 -подходящими, необходимо и достаточно, чтобы решетка A обладала следующим свойством:

$$a+b=s \text{ и } ab=0 \text{ для любых несравнимых элементов } a, b \in A. \quad (*)$$

Доказательство. Пусть A – произвольная конечная полурешетка с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом s . По лемме 3 A – решетка. Легко видеть, что выполнение свойства $(*)$ равносильно тому, что либо A – цепь, либо множество $A \setminus \{0, s\}$ является дизъюнктивным объединением не менее чем двух цепей.

Необходимость. Предположим, что все подполурешетки полурешетки A , содержащие 0 и s , являются S_2 -подходящими. Тогда по предложению 4 все они будут подрешетками решетки A . Пусть $a, b \in A$ – несравнимые элементы. Если $a+b \neq s$ или $ab \neq 0$, то подполурешетка $\{0, a, b, s\}$ в A не является ее подрешеткой.

Достаточность вытекает из предложения 4, поскольку любое подмножество в A , содержащие 0 и s , образует подрешетку решетки A .

Следствие 2. Любое подмножество конечной полурешетки A с нулем 0 , наибольшим элементом s и свойством $(*)$, содержащее 0 и s , является S_2 -подходящей полурешеткой.

Следствие 3. Для любого натурального числа $n \geq 2$ всякая n -элементная полурешетка со свойством $(*)$ допускает ровно 2^{n-2} структур S_2 -полумодуля.

Следствие 4. Для любого натурального $n \geq 2$ n -элементная цепь допускает ровно 2^{n-2} структур S_2 -полумодуля. Значит, существует, с точностью до изоморфизма, 2^{n-2} S_2 -полумодулей, являющихся n -элементными цепями.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 суть необходимые условия на S_i -подходящую подполурешетку S_i -полумодуля ($i=1, 2$). Они позволяют проверять, будет ли данная подполурешетка полурешетки A (конечной или бесконечной) S_i -подходящей.

Замечание 2. Рассмотрим подробнее n -элементную ($n \geq 3$) полурешетку A со свойством $(*)$ с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом s . По лемме 3 A является решеткой. Очевидно, что в решетке A все подмножества, содержащие 0 и s , являются подрешетками, стало быть, по предложению 4 будут S_2 -подходящими подполурешетками.

В силу свойства $(*)$ упорядоченное множество $A \setminus \{0, s\}$, рассматриваемое с индуцированным порядком, является дизъюнктивным объединением n_1 одноэлементных максимальных цепей, n_2 двухэлементных максимальных цепей, ..., n_{n-2} $(n-2)$ -элементных максимальных цепей, таким, что $n_1 + 2n_2 + \dots + (n-2)n_{n-2} = n-2$. Некоторые из чисел n_i могут равняться 0. Значит, полурешетка A имеет ровно $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ автоморфизмов. Легко видеть, что данная полурешетка A имеет ровно один автоморфизм тогда и только тогда, когда все ненулевые числа среди чисел $n_1, n_2, \dots, n_{n-2}$ равны 1, другими словами, длины максимальных цепей в $A \setminus \{0, s\}$ попарно различны.

В этом случае существует, с точностью до изоморфизма, ровно 2^{n-2} S_2 -полумодулей A . При $n_1=n-2$ полурешетка A обладает ровно $(n-2)!$ автоморфизмами.

Предположим, что подмножество B полурешетки A , содержащее 0 и s , перемещается при действии автоморфизма α полурешетки A , $\alpha(B) \neq B$. Тогда S_2 -подходящие (полу)решетки B и $\alpha(B)$ порождают изоморфные неравные S_2 -полумодули A . Поэтому число попарно неизоморфных n -элементных S_2 -полумодулей A может быть значительно меньше числа 2^{n-2} из следствия 3. Например, в случае $n_1=n-2$ все k -элементные подмножества K множества $A \setminus \{0, s\}$ порождает одну-единственную, с точностью до изоморфизма, S_2 -подходящую (полу)решетку на A – ее подрешетку $K \cup \{0, s\}$, определяющую структуру S_2 -полумодуля A . Следовательно, существует, с точностью до изоморфизма, ровно $n-1$ S_2 -полумодуля A .

Найдем число попарно неизоморфных S_2 -полумодулей, имеющих не более 5 элементов.

Перечислим для примера все неизоморфные S_2 -полумодули A , имеющие структуру решетки **9**. По теореме 1 для этого достаточно указать, какие из ее подрешеток B с 0 могут выступать в качестве множества $e(A)$. В силу предложения 4 – это в точности все подрешетки в A , содержащие элементы 0 и s , то есть $\{0, s\}$, $\{0, c, s\}$, $\{0, a, s\}$, $\{0, b, s\}$, $\{0, c, a, s\}$, $\{0, c, b, s\}$ и A . Отметим, что подрешетки $\{0, b, s\}$ и $\{0, c, b, s\}$ задают полумодули, изоморфные полумодулям, задаваемым подрешетками $\{0, a, s\}$ и $\{0, c, a, s\}$, соответственно. Таким образом, с точностью до изоморфизма существует ровно 5 S_2 -полумодулей, имеющих структуру решетки A .

Предложение 6. *С точностью до изоморфизма существует ровно 41 S_2 -полумодуль порядка ≤ 5 . Из них:*

- 1 одноэлементный;
- 1 двухэлементный;
- 2 трехэлементных;
- 7 четырехэлементных, из которых 4 имеют структуру решетки **4** и 3 имеют структуру решетки **5**;
- 30 пятиэлементных, из которых 8 имеют структуру решетки **6**, 4 имеют структуру решетки **7**, 8 имеют структуру решетки **8**, 5 имеют структуру решетки **9** и 5 имеют структуру решетки **10**.

Замечание 3 Мы также нашли все шестиэлементные S_1 -полумодули и S_2 -полумодули, опираясь на диаграммы Хассе всех 15 шестиэлементных решеток. Сделали это, во-первых, "вручную", как в предложениях 3 и 6. Во-вторых, с помощью компьютерной программы. Получилось, с точностью до изоморфизма, 127 S_1 -полумодулей и 158 S_2 -полумодулей.

Полумодули над полукольцами S_3 и S_4

В полумодулях над каждым из полуколец S_3 и S_4 действие элемента 2 определяется однозначно: $x \mapsto 2x = x + x$.

Для полуколец S_3 и S_4 справедливы следующие утверждения:

Предложение 7. *Коммутативный моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ является S_3 -полумодулем тогда и только тогда, когда A удовлетворяет тождеству $3x = x$; при этом он допускает одну-единственную структуру S_3 -полумодуля.*

Доказательство. В полукольце $S_3 = \{0, 1, 2\}$ выполняется равенство $3=1$. Поэтому любой S_3 -полумодуль удовлетворяет тождеству $3x=x$. Если моноид A удовлетворяет тождеству $3x=x$, то элемент 2 действует по однозначно определенному правилу $x \mapsto 2x$, превращая тем самым моноид A в S_3 -полумодуль.

Предложение 8. *Коммутативный моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ является S_4 -полумодулем тогда и только тогда, когда A удовлетворяет тождеству $3x=2x$; при этом он допускает единственную структуру S_4 -полумодуля.*

Доказательство повторяет доказательство предложения 7.

Следствие 5. *Для любой мощности t мощность множества всех попарно неизоморфных S_3 -полумодулей (S_4 -полумодулей) мощности t равна мощности множества всех попарно неизоморфных коммутативных аддитивных моноидов с тождеством $3x=x$ (соответственно, $3x=2x$) мощности t .*

Замечание 4. Полученные в статье результаты, в частности теоремы 1 и 2, могут быть полезны при исследовании произвольных полумодулей над идемпотентными полукольцами.

Список источников

1. Вечтомов Е.М. О полумодулях над мультипликативно идемпотентными полукольцами // Междунар. науч. конф. "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". Казань: КФУ, 2024. С. 103–104.
2. Петров А.А. О коммутативных аддитивных полугруппах с тождеством $4x=2x$ // Междунар. науч. конф. "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". Казань: КФУ, 2024. С. 130–131.
3. Вечтомов Е.М., Петров А.А. Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением. Санкт-Петербург: Лань, 2022. 180 с.
4. Fofanova T.S. Polygons over distributive lattices // Universal Algebra / Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. Amsterdam: North-Holland, 1982. P. 289–292.
5. Фофанова Т.С. Об инъективных полигонах над цепями // Matematika Slovaca. 1978. Vol. 28, № 1. P. 21–32.
6. Кожухов И.Б., Михалёв А.В. Полигоны над полугруппами // Фундаментальная и прикладная математика. 2020. Т. 23, вып. 3. С. 141–199.
7. Ильин С.Н. О гомологической классификации полуколец // Итоги науки и техники. Серия. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 158. С. 3–22.
8. Golan J.S. Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.
9. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
10. Фофанова Т.С. Полигоны над дистрибутивными структурами // Сибирский математический журнал. 1971. Т. 12, № 5. С. 1158–1163.

References

1. Vechtomov, E. M. (2024), "On semimodules over multiplicatively idempotent semirings", *International Scientific Conference "Algebra and Mathematical Logic: theory and applications"*, KFU, Kazan, pp. 103–104.

2. Petrov, A. A. (2024), "On commutative additive semigroups with identity $4x=2x$ ", *International Scientific Conference "Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications"*, KFU, Kazan, pp. 130–131.
3. Vechtomov, E. M. and Petrov, A. A. (2022), "Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication", Lan, St. Petersburg, 180 p.
4. Fofanova, T. S. (1982), "Polygons over distributive lattices", *Universal Algebra / Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, North-Holland, Amsterdam, pp. 289–292.
5. Fofanova, T. S. (1978), "On injective polygons over chains", *Mathematika Slovaca*, Vol. 28, no. 1, pp. 21–32.
6. Kozhukhov, I. B. and Mikhalev, A. V. (2020), "Polygons over semigroups", *Fundamental and applied mathematics*, Vol. 23, Iss. 3, pp. 141–199.
7. Il'in, S. N. (2018), "On the homological classification of semirings", *Results of science and technology. Series. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews*, Vol. 158, pp. 3–22.
8. Golan, J. S. (1999), "Semirings and their applications", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 382 p.
9. Grätzer, G. (1982), "General lattice theory", Mir, M., 456 p.
10. Fofanova, T. S. (1971), "Polygons over distributive structures", *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 12, no. 5, pp. 1158–1163.

Информация об авторах:

Е. М. Вечтомов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36), AuthorID: 146598;

А. А. Петров – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36), AuthorID: 662310;

А. П. Шкляев – бакалавр четвертого года обучения по направлению "Математика и компьютерные науки", Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36).

Information about the authors:

E. M. Vechtomov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000), AuthorID: 146598;

A. A. Petrov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000), AuthorID: 662310;

A. P. Shklyayev – Bachelor of the Fourth Year of Study in the Field of Mathematics and Computer Science, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000).