

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 532.64, 514.86

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-6-20

<https://elibrary.ru/KJFXIA>**Влияние насыщения краевого угла на динамику капли
в неоднородном переменном электрическом поле****Алексей Анатольевич Алабужев¹, Марина Анатольевна Пьянкова²**¹Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия^{1,2}Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия²МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия¹alabuzhev@mail.ru²ya.kashina-marina@yandex.ru

Аннотация. В данной статье предложена теоретическая модель электросмачивания на диэлектрической подложке с учетом насыщения динамического краевого угла от электрического напряжения. В качестве примера рассматриваются вынужденные колебания капли электролита, помещенной между двумя параллельными твердыми поверхностями в переменном электрическом поле. В состоянии механического равновесия капля имеет форму круглого цилиндра, ось симметрии которого перпендикулярна пластинам. Скорости линий контакта на обеих поверхностях зависят от внешней периодической силы электрического поля и отклонения краевого угла от его равновесного значения. Для описания неоднородности поверхности предполагается, что коэффициент пропорциональности является функцией координат. Эта функция индивидуальна для каждой поверхности. Показано, что это приводит к возбуждению дополнительных азимутальных мод, в отличие от случая однородных поверхностей. Внешнее переменное электрическое поле тоже является пространственно-неоднородным, так как в экспериментах сложно добиться однородного поля при конечных размерах проводника. Обнаружено, что неоднородность пластин изменяет значение угла насыщения. Продемонстрировано качественное согласие с экспериментами.

Ключевые слова: вынужденные колебания; движение линии контакта; электросмачивание; динамический краевой угол; насыщение краевого угла; неоднородная поверхность

Для цитирования: Алабужев А.А., Пьянкова М.А. Влияние насыщения краевого угла на динамику капли в неоднородном переменном электрическом поле // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 6–20. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-6-20. <https://elibrary.ru/KJFXIA>.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00379.

Статья поступила в редакцию 17.10.2024; одобрена после рецензирования 29.11.2024; принята к публикации 05.12.2024.



Эта работа © 2024 Алабужев А.А., Пьянкова М.А. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MECHANICS

Research article

The Contact Angle Saturation Influence on a Drop Dynamics in a Non-uniform Alternating Electric Field

Aleksey. A. Alabuzhev¹, Marina. A. Pyankova²

¹Perm State University, Perm, Russia

^{1,2}Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

²MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

¹alabuzhev@mail.ru

²ya.kashina-marina@yandex.ru

Abstract. A theoretical model of electrowetting on a dielectric substrate is proposed taking into account the saturation of the dynamic contact angle from the electric voltage in this article. As an example, forced oscillations of an electrolyte droplet placed between two parallel solid surfaces in an alternating electric field are considered. In the state of mechanical equilibrium, the droplet has the shape of a round cylinder whose symmetry axis is perpendicular to the plates. The velocities of the contact lines on both surfaces depend on the external periodic force of the electric field and the deviation of the contact angle from its equilibrium value. To describe the surface inhomogeneity, it is assumed that the proportionality coefficient is a function of coordinates. This function is individual for each surface. It is shown that this leads to the excitation of additional azimuthal modes, in contrast to the case of homogeneous surfaces. The external alternating electric field is also spatially inhomogeneous, since it is difficult to achieve a uniform field in experiments with finite conductor sizes. It is found that the inhomogeneity of the plates changes the value of the saturation angle. Qualitative agreement with experiments was demonstrated.

Keywords: forced oscillations; contact line motion; electrowetting; dynamic contact angle; contact angle saturation; heterogeneous surface

For citation: Alabuzhev, A.A., Pyankova, M.A. (2024), "The Contact Angle Saturation Influence on a Drop Dynamics in a Non-uniform Alternating Electric Field", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 6-20. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-6-20. <https://elibrary.ru/KJFXIA>.

Acknowledgments: the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 24-21-00379.

The article was submitted 17.10.2024; approved after reviewing 29.11.2024; accepted for publication 05.12.2024

Введение

С активным развитием изучения течений на микромасштабах и созданием микрожидкостных устройств (microfluidic devices) процессы электросмачивания (ЭС, electrowetting) [1–3] и электросмачивания на диэлектрической подложке (ЭСНД, electrowetting-on-dielectric) [4–6] – изменение сил поверхностного натяжения под воздействием электрического поля (тока), стали активно использоваться как методы контроля и управления микро- и наножидкостными объектами (капли, пузырьки, частицы). Вторым методом, благодаря нанесению диэлектрического слоя на поверхность проводящей пластины, позволяет, во-первых, варьировать свойства (смачивание, шероховатость) такой поверхности в широких пределах. Во-вторых, позволяет отделить жидкость от контакта с металлом, что актуально для агрессивных или биологических жидкостей.

Применение ЭСНД демонстрируется на цифровых (капельных) микрожидкостных устройствах для биоанализа (лаборатория на чипе) [7–10].

Фактически такие устройства представляют собой плоский конденсатор, внутри которого помещена либо одна капля жидкости, либо группа таких капель. Соответственно, геометрия задачи в таких системах описывается как капиллярный жидкий мостик. Такой конденсатор характеризуется электроемкостью на единицу площади подложки C , величиной прикладываемого напряжения электрического тока V и физическими параметрами диэлектрика – относительной проницаемостью ε и толщиной диэлектрического слоя d . Разрабатываются различные перспективные устройства, например электронные жидкие линзы с переменным фокусом [11, 12], которые представляют собой каплю жидкости, помещенную на поверхность раздела двух жидких сред. В экспериментах по изучению электросмачивания обычно используется капля (пузырек) на подложке (жидкой или твердой). Это может быть капля электролита (например, водный раствор хлорида калия KCl концентрации $10^{-3} - 1$ М и электропроводностью $10^{-2} - 10$ Ом $^{-1}$ м $^{-1}$) объемом 1 мкл на диэлектрической (к примеру, тефлоновой) подложке толщиной $\sim 0,1$ мм, окруженная воздухом. Такие капли – хорошо известные испытательные стенды, которые используются для анализа различных явлений, связанных, главным образом, с силами поверхностного натяжения.

К примеру, исследование [10] экспериментально подтверждает, что процесс перемешивания в капле может быть улучшен путем воздействия на каплю на резонансных и на чередующихся частотах с использованием устройства ЭСНД с параллельными пластинами. Установлено, что время перемешивания в резонансной капле значительно короче, чем в нерезонансной. В случае приведения капли в движение путем чередования двух резонансных частот эффективность перемешивания значительно повышается при определенной продолжительности чередования этих частот.

Без электрического поля равновесный краевой угол ϑ_0 описывается условием Юнга [1–6]:

$$\cos \vartheta_0 = \frac{\sigma_{ip} - \sigma_{cp}}{\sigma_{ic}}, \quad (1)$$

где σ_{ip} – межфазное поверхностное натяжение между подложкой и окружающей средой, σ_{cp} – межфазное поверхностное натяжение между жидкостью капли и подложкой, σ_{ic} – межфазное поверхностное натяжение на поверхности капли с окружающей средой. Для описания влияния электрического поля при ЭСНД используется модель Липпмана [1–6], которая с условием Юнга (1) дает условия для вычисления краевого угла ϑ при ЭСНД [1–6]:

$$\cos(\vartheta) = \cos(\vartheta_0) + E_w, \quad E_w = \frac{C}{2\sigma_{ic}} V^2, \quad C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{d}, \quad (2)$$

где E_w – электрокапиллярное число (отношение электрической силы к силе поверхностного натяжения), ε_0 – коэффициент диэлектрической проницаемости вакуума. Характерное определение электрокапиллярного числа в экспериментах $E_w \approx 10^{-5} V^2$, типичные напряжения составляют $\sim 10-100$ В и достигают 1 кВ.

Таким образом, типичные значения $E_w \sim 10^{-3}..10$. Отметим, что для электрокапиллярного числа E_w в формуле значения ограничены $E_w \leq 1$.

Условие Юнга–Липпмана (Юнга–Дюпре) (2) хорошо определяет значение краевого угла при малых напряжениях, т. е. $E_w \ll 1$, но, во-первых, не учитывает при высоких

напряжениях эффект насыщения краевого угла (значение краевого угла не меняется с увеличением электрического напряжения). Кроме того, насыщение краевого угла может достигаться и при относительно низких напряжениях, когда формально $E_w \ll 1$. Во-вторых, предельный переход от переменного напряжения к постоянному (т. е. $\omega \rightarrow 0$) приводит к бесконечному значению отклонения боковой поверхности капли от ее равновесного значения. В-третьих, в некоторых экспериментах для высоких значений частоты (~ 10 МГц) переменного электрического поля также обнаружен эффект насыщения. Хотя последнее наблюдение нуждается в дополнительных проверках (возможно, из-за высоких частот было сложно фиксировать изменение краевого угла), проблема построения теоретической модели для описания изменения краевого угла при электросмачивании является до сих пор нерешенной.

Качественно переменный электрический ток не меняет условие (2). Внешнее переменное поле, изменяющееся по закону $\cos(\omega t)$ (ω – частота электрического поля, t – время), перераспределяет заряды на поверхности капли, что приводит к изменению поверхностного натяжения и, следовательно, для очень быстрых релаксационных процессов (т. е. время изменения наведенного заряда меньше периода вибраций и поверхностные силы успевают меняться) на линии контакта, краевой угол будет меняться по закону $\cos(2\omega t)$ согласно закону Липпмана (2). Отметим, что колебания поверхности капли на удвоенной частоте электрического поля подтверждены экспериментально [1–6]. На основе линейного условия Хокинга [13] для движения линии контакта в работе [14] была предложена следующая модель:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \Lambda \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + a \cos(2\omega t) \right), \quad (3)$$

где ζ – функция отклонения поверхности от равновесного значения, Λ – параметр смачивания (параметр Хокинга), z – координата, ось которой перпендикулярна подложке, по которой движется линия контакта, a – эффективная амплитуда электрического поля. Параметр смачивания является феноменологическим параметром, имеющим размерность скорости. Второе слагаемое (3) описывает воздействие внешнего электрического поля на краевой угол ϑ (2): $\cos \vartheta = E_w = \tilde{E}_w V^2$ при условии $\cos \vartheta_0 = 0$. Это позволяет определить отклонение краевого угла в (3) за счет электрического поля:

$$\zeta_z \sim \operatorname{ctg} \vartheta = \frac{E_w}{\sqrt{1 - E_w^2}} = \frac{\tilde{E}_w V^2}{\sqrt{1 - \tilde{E}_w^2 V^4}} \approx \tilde{E}_w V^2 + O(V^6) \approx \tilde{E}_w V^2 \sim V^2.$$

Используя приведенную выше модель для постоянного тока, можно сделать обобщение на случай переменного электрического поля [1–6]: постоянный потенциал V меняем на переменный $U = U_0 \cos(\omega t)$. Следовательно, теперь $\zeta_z \sim \operatorname{ctg} \vartheta \approx \tilde{E}_w U^2 \approx \tilde{E}_w U_0^2 \cos(2\omega t)$. Другими словами, граничное условие (3) определяет скорость движения линии контакта за счет изменения краевого угла и внешнего периодического воздействия на нее с амплитудой $a = \tilde{E}_w U_0^2$. Это условие было обобщено на случай пространственно-неоднородного электрического поля [15] и неоднородных поверхностей пластин [16] аналогично работам [17, 18] с вибрационным воздействием.

Выше отмечалось, что в экспериментах был обнаружен эффект насыщения краевого угла, при котором краевой угол не меняется с дальнейшим повышением потенциала. Условие Юнга–Липпмана (2) и модифицированное условие Хокинга (3) не описывают насыщение краевого угла. Поэтому модель (3) нуждается в дальнейшей доработке.

В данной статье предлагается дополнить модель (3) эффектом насыщения краевого угла, в отличие от упомянутых выше работ, использующих условия (2) [1–6] или (3) [14–16]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \Lambda \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\cos \vartheta_s L(a)}{\sqrt{1 - (\cos \vartheta_s L(a))^2}} \cos(2\omega t) \right), \quad (4)$$

$$\cos(\vartheta) = \cos(\vartheta_s) L(a), \quad L(a) = \coth(3x) - \frac{1}{3x},$$

где ϑ_s – угол насыщения, $L(a)$ – функция Ланжевена. Функция Ланжевена выбрана исходя из теории поляризации диэлектриков Дебая аналогично модели намагничения парамагнетиков Ланжевена–Дебая [19, 20]: $\langle P \rangle = P_0 L(\beta)$, где $\langle P \rangle$ – компонента суммарного дипольного момента диэлектрика, параллельная напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, $P_0 = np$ – суммарный дипольный момент полностью поляризованного диэлектрика (поляризация насыщения), p – электрический дипольный момент одной молекулы диэлектрика, n – количество дипольных молекул, $\beta = pE/(kT)$ – эффективная поляризуемость молекулы, k – постоянная Больцмана, T – температура.

1. Постановка задачи

Постановка задачи напоминает постановку работ [14–16]. В замкнутом сосуде круглой цилиндрической формы, заполненного несжимаемой жидкостью плотности ρ_e^* , помещена капля несжимаемой жидкости с плотностью ρ_i^* (рис. 1).

Снаружи к проводящим торцам сосуда, покрытым изнутри слоем диэлектрика, прикладывается переменное напряжение, имеющее частоту ω^* , что позволяет возбуждать внутри сосуда переменное электрическое поле.

Другими словами, сосуд представляет собой плоский конденсатор, внутри которого находятся две жидкости с деформируемой поверхностью раздела (рис. 1). Внешнее поле действует на линию контакта как периодическая сила с амплитудой a^* и частотой $2\omega^*$. Это принципиально отличается от вибрационного воздействия, при котором внешняя сила действует на всю систему в целом. В результате динамика линии описывается модифицированным граничным условием (4) с учетом насыщения краевого угла.

Использование приближения идеальной (невязкой несжимаемой) жидкости также накладывает ограничения на физические параметры. Для несжимаемой жидкости характерные скорости пульсационного течения много меньше скорости звука c^* : $\omega^* L^* \ll c^*$. Например, для капли воды $L^* \sim 1$ мм скорость звука $c^* = 1500$ м/с, т. е. верхний предел для частот вибраций $\omega^* \ll 10^6$ рад/с. Для использования приближения невязкой жидкости толщина вязкого пограничного слоя $\delta^* = \sqrt{\nu^* / \omega^*}$ для жидкости с коэффициентом кинематической вязкости ν^* много меньше, чем характерный размер L^* : $\delta^* \ll L^*$.

Для капли воды $L^* \sim 1$ мм и $\nu^* \sim 10^{-6}$ м²/с нижний предел частот $\omega^* \gg 1$ рад/с. Таким образом, диапазон частот составляет $1 \ll \omega^* \ll 10^6$ рад/с для капли воды размером 1 мм в воздухе, что соответствует размерам капель, используемых в микрожидкостных устройствах, упомянутых выше.

Расстояние между торцами (крышкой и дном сосуда) равно h^* . Предполагается, что сосуд настолько велик по сравнению с характерными размерами капли, что влияние его боковой стенки на движение капли не учитывается. В состоянии механического равновесия капля имеет форму круглого цилиндра с прямым краевым углом радиуса R_0^* и высотой h^* . Равновесный прямой краевой угол представляет собой оправданное приближение, так как это позволяет упростить не только решение задачи, но и сохранить все возможные эффекты, наблюдаемые для реальной капли. Отметим, что в работе [21] проводилось сравнение поведения капли, представляющей собой фигуру вращения (т. е. равновесный краевой угол отличен от прямого) с цилиндрической каплей. Например, было показано, что наибольшие значения частот собственных колебаний достигаются при прямом краевом угле, т. е. отличия только количественные. Трансляционные вынужденные колебания такой капли (с непрямым краевым углом) качественно совпадают с колебаниями цилиндрической капли [22].

Эффективное граничное условие Хокинга [13] характеризует диссипацию энергии в системе, которая связана со взаимодействием с подложкой линии контакта при движении последней. Эта диссипация не связана с молекулярной вязкостью жидкости, что позволяет добавить затухание свободных колебаний даже для невязкой жидкости. Диссипация мала либо в случае закрепленной (малоподвижной) линии контакта, либо при слабом взаимодействии ее с подложкой [13–18, 23, 24]. В первом случае декремент затухания свободных колебаний пропорционален Λ^2 и возможно рассмотрение случая малой вязкости, т. е. введение тонкого пограничного слоя на поверхности подложки [24]. Во втором случае декремент затухания пропорционален Λ^{-1} . Следовательно, благодаря наличию диссипации течение жидкостей можно рассматривать как потенциальное, несмотря на наличие деформируемой поверхности раздела – боковой поверхности капли.

Подобные решения использовались и в работах [14–18, 23, 24] (см. также библиографию этих работ). Все это позволяет использовать потенциал скорости $\mathbf{v}^* = \nabla \phi^*$ ($\mathbf{v}^*$ – скорость течения жидкости, ϕ^* – потенциал скорости) в соответствии с кинематической теоремой Кельвина о циркуляции.

Поверхность раздела (боковая поверхность капли) – деформируемая и описывается функцией $r^* = R_0^* + \zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$ в цилиндрической системе координат r^*, α, z^* (рис. 1). Учитывается сила поверхностного натяжения с коэффициентом σ^* . Азимутальный угол α отсчитывается от оси x .

Рассматривая равновесную форму капли как круглый цилиндр, пренебрегаем влиянием силы тяжести на форму капли. Другими словами, отношение силы тяжести к силе поверхностного натяжения (число Бонда или число Этвеша) мало: $|\rho_i^* - \rho_e^*| g^* L^{*2} \ll \sigma^*$, где g^* – ускорение свободного падения, L^* – характерный пространственный размер. Для большинства микрожидкостных устройств это приближение также справедливо (капля воды размером $L^* \sim 1$ мм в воздухе).

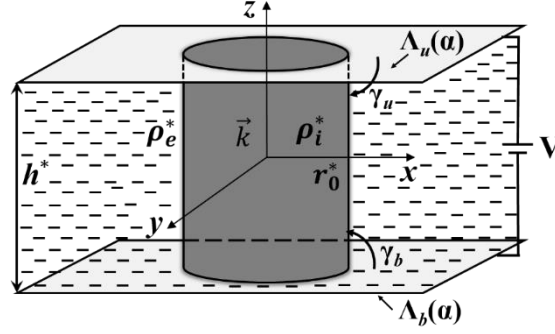


Рис. 1. Геометрия задачи

Введем следующие единицы обезразмеривания задачи: время t^* – $\sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3} / \sigma}$, координаты $r^* = R^*$ и $z^* = h^*$, амплитуда $\zeta^* = A^*$, скорость $\mathbf{v}^* = A^* \sqrt{\sigma / ((\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3})}$, потенциал $\varphi^* = A^* \sqrt{\sigma / ((\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3})}$, плотность $\rho^* = \rho_e^* + \rho_i^*$, давление $p^* = A^* \sigma / R_0^{*2}$.

В дальнейшем безразмерные переменные будут обозначаться теми же переменными без символа *. В результате обезразмеривания задача будет характеризоваться следующими безразмерными параметрами: амплитуда колебаний – $\varepsilon = A^* / R_0^*$, геометрический параметр – $b = R_0^* / h^*$, плотность внешней жидкости – $\rho_e = \rho_e^* / (\rho_e^* + \rho_i^*)$, плотность жидкости в капле – $\rho_i = \rho_i^* / (\rho_e^* + \rho_i^*)$ (последние два параметра связаны соотношением $\rho_i + \rho_e = 1$), параметр смачивания (параметр Хокинга) – $\lambda = \Lambda^* b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^* / \sigma}$, амплитуда внешнего воздействия – $a = 0.5 A^* C \sigma^{-3/2} \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3}}$, частота внешнего воздействия – $\omega = \omega^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^{*3} / \sigma}$.

Рассматриваются только малоамплитудные (линейные) колебания, линеаризованные по малой безразмерной амплитуде вибраций ε , а граничные условия сносятся с безразмерной подвижной границы раздела $r = 1 + \varepsilon \zeta(\alpha, z, t)$ на невозмущенную поверхность $r = 1$ (см., например, [18, 23]).

Безразмерные уравнения и граничные условия в линейном приближении имеют следующий вид:

$$p_j = -\rho_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}, \quad \Delta \varphi_j = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = e, i, \quad (5)$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad p_e - p_i = \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad (6)$$

$$r = 1, \quad z = \pm \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \Lambda_{u,b}(\alpha) \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\cos(\vartheta_s) L(a)}{\sqrt{1 - (\cos(\vartheta_s) L(a))^2}} f(\alpha) \cos(2\omega t) \right), \quad (7)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

где $\Lambda_{u,b}(\alpha)$ – безразмерный параметр смачивания на верхней ($z=1/2$) и нижней ($z=-1/2$) пластинах соответственно, ϑ_s – значение краевого угла насыщения, $L(\alpha)$ – функция Ланжевена, a – эффективная амплитуда внешнего воздействия, $f(\alpha)$ – функция пространственной неоднородности электрического поля (в случае однородного электрического поля $f(\alpha)=1$).

2. Вынужденные колебания

Насыщение краевого угла важно только для вынужденных колебаний, поэтому ниже будем рассматривать только их. Собственные колебания такой капли рассмотрены ранее как для случая одинаковых [23] и разных [15] однородных поверхностей пластин, так и одинаковых [17] и разных [24] неоднородных.

Исследуем вынужденные колебания капли жидкости, определяемые внешней однородной периодической силой, действующей только на линию контакта (7). Отметим еще раз, что благодаря диссипации энергии будут существовать только вынужденные колебания с частотой 2ω . Если внешнее переменное электрическое поле пространственно-однородное (т. е. $f(\alpha)=1$), то возбуждается только осесимметричная мода колебаний. Поверхность пластин однородная при $\Lambda_{u,b}(\alpha)=\lambda_{u,b}$. Если же поверхность неоднородная (например, $\Lambda_{u,b}(\alpha)=\lambda_{u,b}|\cos(\alpha)|$ в [16] или $\Lambda_{u,b}(\alpha)=\lambda_{u,b}|\sin(k\cos(\alpha))|$ в [24]), то будут возбуждаться дополнительные гармоники из-за взаимодействия линии контакта с поверхностью. Неоднородность поверхности пластин описывает не только шероховатость поверхности, но и смачиваемость жидкостью.

Если сравнивать выражения для внешней силы с насыщением (7) и без (3), то при малых значениях эффективной амплитуды a решения будут совпадать. С дальнейшим увеличением a в случае без насыщения амплитуда внешнего воздействия будет нарастать по линейному закону, тогда как в случае с насыщением (7) – будет выходить на некоторое предельное значение.

Будем использовать разложение в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа (5) для решения линейной краевой задачи (5)–(8). Спектр этих функций определяется вторым слагаемым (7), так как именно эта сила вызывает колебания. Функции $\Lambda_{u,b}(\alpha)$, рассматриваемые в [16] и [24], неотрицательные и четные относительно угла α , поэтому будем раскладывать решение задачи (5)–(8) по $\cos(2m\alpha)$, $m=0,1,2,\dots$

С учетом граничных условий (8) решения для потенциала скорости можно представить в следующем виде:

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left(i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) + a_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)i}(r) \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (9)$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left(i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(b_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) + b_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)e}(r) \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (10)$$

где $R_{mk}^{(0)e}(r) = K_m(2k\pi br)$, $R_{mk}^{(0)i}(r) = I_m(2k\pi br)$, $R_{mk}^{(1)e}(r) = K_m((2k+1)\pi br)$, $R_{m0}^{(0)e}(r) = r^{-m}$,

$R_{mk}^{(1)i}(r) = I_m((2k+1)\pi br)$, $R_{m0}^{(0)i}(r) = r^m$, I_m и K_m – модифицированные функции Бесселя.

Функции $\sin((2k+1)\pi z)$ и $\cos(2k\pi z)$ описывают стоячие волны на поверхности раздела. Их суммы указывают на существование бегущих капиллярных волн на боковой поверхности капли [13–24].

Кинематическое условие на поверхности раздела и баланс нормальных напряжений (7) определяют функцию отклонения поверхности:

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left(\left(\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_{mk}^{(1)} \sin((2k+1)\pi z) + c_{mk}^{(0)} \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + d_0^{(0)} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(d_m^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) + d_m^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i2\omega t} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя решения (9)–(11) в уравнения (7)–(10), получим систему для нахождения неизвестных амплитуд a_{jmk} , b_{jmk} , c_{jmk} , d_{j0} и d_{jm} :

$$\begin{aligned} 2i\omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(c_{mk}^{(0)} \pm c_{mk}^{(1)} \right) + \delta_{m0} \left(d_0^{(0)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \pm d_0^{(1)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \right. \\ \left. + \delta_{m1} \left(\frac{1}{4} d_1^{(0)} \pm \frac{1}{2} d_1^{(1)} \right) + \delta_{mn} \left(d_n^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \pm d_n^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \right) \right) = \\ = \mp \left(B_{mn} \left(\frac{\delta_{n0}}{b} \left(\mp d_0^{(0)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) + d_0^{(1)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \delta_{n1} \left(\pm d_1^{(0)} + d_1^{(1)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_{nl} \frac{\sqrt{l^2-1}}{b} \left(\pm d_l^{(0)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) + d_l^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) \right) \right) + C_m L(a) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$b_{m0}^{(0)} = -a_{m0}^{(0)}, \quad b_{mk}^{(0)} = a_{mk}^{(0)} \frac{R_{mkr}^{(0)i}(1)}{R_{mkr}^{(0)e}(1)}, \quad b_{mk}^{(1)} = a_{mk}^{(1)} \frac{R_{mkr}^{(1)i}(1)}{R_{mkr}^{(1)e}(1)}, \quad m a_{mk}^{(0)} = c_{m0}^{(0)} + g_{m0}^{(0)} d_m^{(0)},$$

$$a_{mk}^{(0)} R_{mkr}^{(0)i}(1) = c_{mk}^{(0)} + g_{mk}^{(0)} d_m^{(0)}, \quad a_{mk}^{(1)} R_{mkr}^{(1)i}(1) = c_{mk}^{(1)} + g_{mk}^{(1)} d_m^{(1)}, \quad c_{10}^{(0)} = -f_{10}^{(0)} d_1^{(0)} - \frac{b^2}{2\omega^2} d_1^{(0)},$$

$$c_{00}^{(0)} = -g_{00}^{(0)} d_0^{(0)}, \quad c_{m0}^{(0)} = \frac{4\omega^2 g_{m0}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{m0}^{(0)2} - 4\omega^2}, \quad c_{mk}^{(0)} = \frac{4\omega^2 g_{mk}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{mk}^{(0)2} - 4\omega^2}, \quad c_{mk}^{(1)} = \frac{4\omega^2 g_{mk}^{(1)} d_m^{(1)}}{\Omega_{mk}^{(1)2} - 4\omega^2},$$

$$\Omega_{m0}^{(0)2} = m(m^2 - 1), \quad \Omega_{mk}^{(0)2} = \frac{m^2 - 1 + (2\pi kb)^2}{\rho_i \frac{R_{mk}^{(0)i}(1)}{R_{mkr}^{(0)i}(1)} - \rho_e \frac{R_{mk}^{(0)e}(1)}{R_{mkr}^{(0)e}(1)}}, \quad \Omega_{mk}^{(1)2} = \frac{m^2 - 1 + (2k+1)^2 \pi^2 b^2}{\rho_i \frac{R_{mk}^{(1)i}(1)}{R_{mkr}^{(1)i}(1)} - \rho_e \frac{R_{mk}^{(1)e}(1)}{R_{mkr}^{(1)e}(1)}},$$

$$R_{mkr}^{(0)i}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(0)i}(r), \quad R_{mkr}^{(1)i}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(1)i}(r), \quad R_{mkr}^{(0)e}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(0)e}(r), \quad R_{mkr}^{(1)e}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(1)e}(r),$$

$$g_{0k}^{(1)} = \frac{1}{\|\cos(2\pi kz)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} \sin\left(\frac{z}{b}\right) \cos(2\pi kz) dz, \quad g_{0k}^{(0)} = \frac{1}{\|\cos(2\pi kz)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} \cos\left(\frac{z}{b}\right) \cos(2\pi kz) dz,$$

$$g_{mk}^{(0)} = \frac{1}{\|\cos(2\pi kz)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{b} z\right) \cos(2\pi kz) dz,$$

$$g_{mk}^{(1)} = \frac{1}{\|\sin((2k+1)\pi z)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{b} z\right) \sin((2k+1)\pi z) dz,$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda_{u,b}(\alpha) \cos(2n\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha,$$

$$C_m = \frac{1}{\|\cos(2m\alpha)\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda_{u,b}(\alpha) f(\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha,$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $\Omega_{mk}^{(0)}$ и $\Omega_{mk}^{(1)}$ – частоты собственных колебаний капли со свободной линией контакта ($\lambda \rightarrow 0$).

Линейную систему (12) можно решить аналитически, но из-за ее громоздкости она решалась численно с параметрами $m = 4..10$ и $N = 20$. Частоты основных азимутальных мод собственных колебаний Ω_{m0}^2 растут как m^3 , частоты гармоник колебаний формы Ω_{mn}^2 – $n^3 b^3$. Для проверки точности вычислений были проведены дополнительные расчеты при $N = 10$ (относительная погрешность $\sim 5\%$ в сравнении с $N = 20$) и $N = 50$ (относительная погрешность $\sim 1\%$).

Для примера рассмотрим неоднородную поверхность пластины $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\cos(\alpha)|$, благодаря которой возбуждаются как осесимметричная, так и четные азимутальные моды. Отметим, что применяемый метод можно использовать для любого типа функции неоднородности, которая допускает разложение в ряд Фурье.

Удобно ввести дополнительные обозначения для амплитуд колебаний поверхности в характерных точках: $\zeta_0 = |\zeta(0, 0, 0)|$, $\zeta_q = |\zeta(0, 0.25, 0)|$, $\zeta_u = |\zeta(0, 0.5, 0)|$, $\zeta_b = |\zeta(0, -0.5, 0)|$, γ_u (γ_b) – краевой угол между верхней (нижней) пластиной и боковой поверхностью капли для $\alpha = 0$.

Выше упоминалось об экспериментальном изучении возможности перемешивания двух жидкостей в капле при воздействии переменного электрического поля в прототипе лаборатории-на-чипе [10]. Было показано, что на резонансных частотах время перемешивания уменьшается в несколько раз. Это может быть полезно при создании лекарств или ускорении химической реакции. В ходе экспериментов были определены значения частот собственных колебаний капли: 34, 66, 99, 131 и 165 Гц. Авторы экспериментальной работы не исследовали, какой гармонике колебаний формы капли соответствуют эти частоты.

Сравним значения резонансных частот и амплитуду колебаний [10] со значениями частот и амплитуды для аналогичных физических параметров, получаемых при решении системы (12). Отметим, что для нашей модельной задачи значения частот собственных колебаний могут зависеть от равновесного краевого угла [17, 18], хотя качественно динамика капли не меняется. Для сильно сплюснутой капли $b \gg 1$, представляющей собой фигуру вращения (т. е. равновесный краевой угол отличен от прямого) подобно [10], наибольшие значения частот собственных колебаний получались для случая прямого равновесного краевого угла [23]. Этот эффект наиболее сильно проявлялся для низких частот. Следовательно, возможно завышение значений теоретических частот по сравнению с экспериментальными для первых гармоник, так как в эксперименте равновесный краевой угол отличался от прямого.

Приведенная средняя экспериментальная амплитуда колебаний [10] и теоретическая амплитуда колебаний из решения (9)–(11) продемонстрированы на рис. 2 для случая $B_{m,n} = \lambda_{u,b} \delta_{m,n}$, $C = \lambda_{u,b} (0.1, 0.1, 0.7, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$ при $m = 0, 1, \dots, 6$ (12). Из сравнения графиков следует, что получается хорошее качественное согласие теоретических и экспериментальных результатов (даже без учета угла насыщения), если учесть завышенные теоретические значения частот. Отметим, что выбор функции неоднородностей поверхностей и параметра смачивания является произвольным, так как они не определялись в эксперименте. Более того, возможно, что параметры смачивания $\lambda_{u,b}$ зависят от напряжения. Например, была продемонстрирована подобная зависимость при экспериментальном измерении коэффициента трения в [25].

На рис. 3 показаны зависимости амплитуд колебания и угла отклонения в зависимости от амплитуды внешней силы для случая без насыщения и краевым углом насыщения $\gamma_s = 60^\circ$. Отметим, что по причине неоднородности поверхности не всегда достигается краевой угол насыщения при малых и конечных значениях параметра смачивания $\lambda_{u,b}$ из-за сильного взаимодействия с подложкой и слабой подвижности линии контакта (рис. 3а,б). При больших значениях параметра λ сила взаимодействия с подложкой мала, и неоднородность поверхности слабо влияет на динамику капли (рис. 3в). В этом случае краевой угол достигает угла насыщения. Другими словами, неоднородность может вызывать ограничение значения краевого угла, но этот эффект не связан с насыщением краевого угла при повышении электрического напряжения. Амплитуда колебаний линии контакта также ограничена в случае насыщения краевого угла, тогда как без насыщения она увеличивается с ростом амплитуды внешней силы (рис. 3г-е).

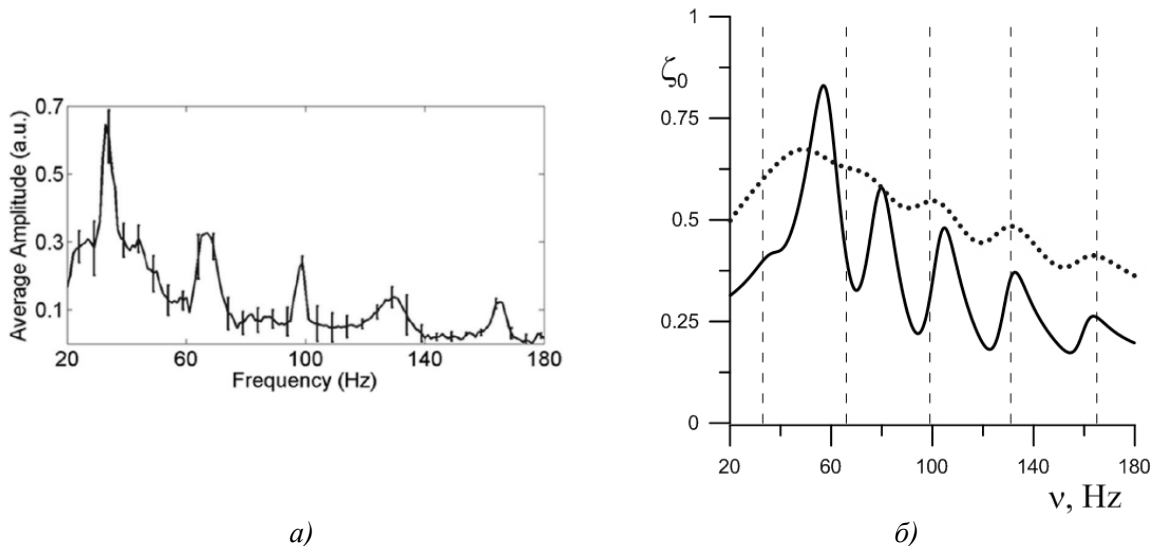


Рис. 2. Относительная амплитуда (fig. 3. [10]) (а) и амплитуда ζ_0 (б) от ω ($b = 2.55$, $\rho_i = 1$, $\lambda_b = 100$). (б) $\lambda_u = 0.5$ – сплошная линия, $\lambda_u = 2$ – пунктирная.

Вертикальными линиями обозначены значения резонансных частот в эксперименте [10]

Заключение

В данной работе предложена теоретическая модель, учитывающая насыщение краевого угла в переменном электрическом поле на основе рассмотренной ранее модели [14–16] без насыщения.

Модель допускает аналитическое описание пространственной неоднородности как поверхности подложки, так и электрического поля. Кроме того, предложенная модель не только описывает насыщение краевого угла с увеличением напряжения, но и ограничение амплитуды колебаний поверхности капли, что соответствует реальной ситуации: амплитуда ограничена с увеличением напряжения до электрического пробоя слоя диэлектрика.

В качестве примера рассматривались вынужденные колебания капли несжимаемой жидкости, окруженной жидкостью другой плотности и зажатой между двумя твердыми параллельными пластинами с индивидуальными неоднородностями поверхности в пространственно-неоднородном переменном электрическом поле. Показано качественное согласие с результатами эксперимента [10] по определению резонансных частот капли даже без учета насыщения краевого угла при низких напряжениях.

Продемонстрировано, что неоднородность также может ограничивать значение отклонения краевого угла даже в модели без насыщения. Кроме того, возможно, что параметр Хокинга также зависит от электрического поля (например, из-за поляризации диэлектрического слоя), и его значение может различаться при разных амплитудах внешней силы. Необходимы дальнейшие исследования и сравнения значений этого параметра при наличии и отсутствии электрического поля. Например, работы по определению этого параметра смачивания в экспериментах с вибрациями и слиянию капель можно посмотреть в [18]. Отметим, что значение краевого угла насыщения также является феноменологическим параметром и для конкретной конфигурации и набора параметров определяется экспериментально. Поэтому работа с предложенной моделью (4) еще далека до завершения. В дальнейшем ее планируется использовать и для капли на подложке, так как для такой геометрии имеется большое количество экспериментальных данных.

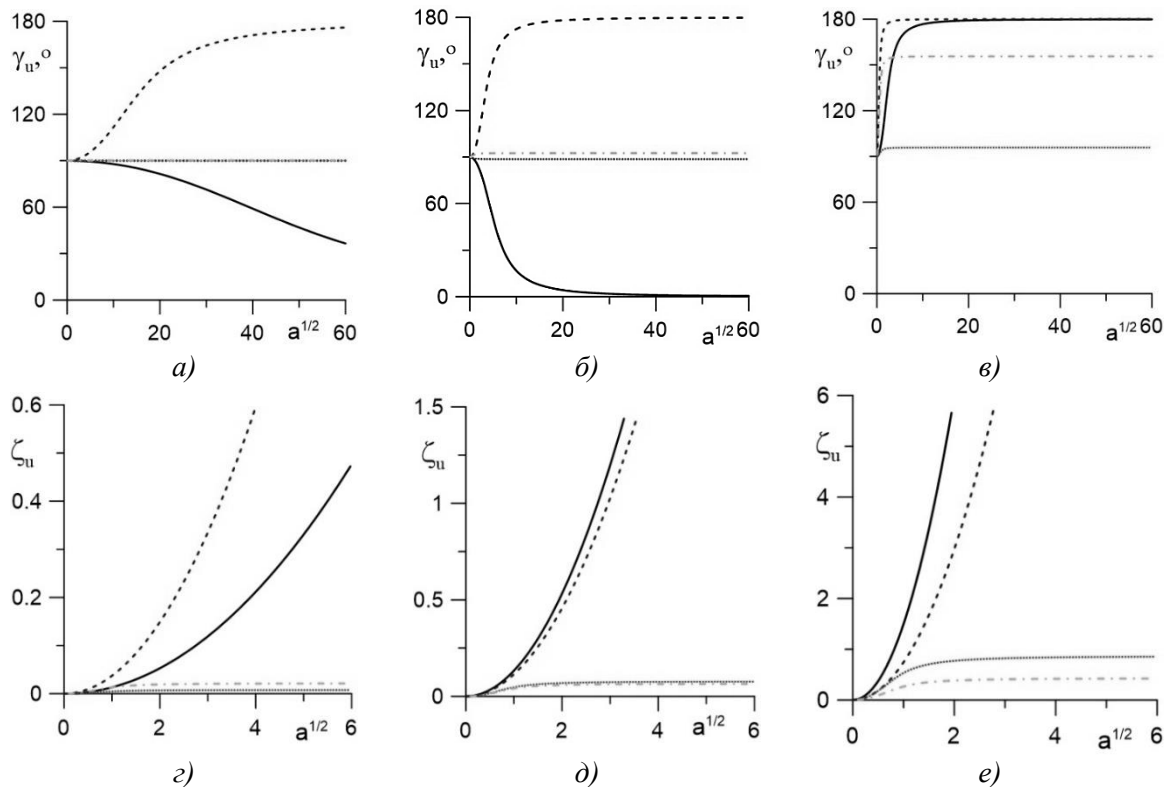


Рис. 3. Краевой угол (а-в) и амплитуда линии контакта (г-е) от $\sqrt{a}$ ($b=1$, $\rho_i=0.7$, $\Lambda_{u,b}(\alpha)=\lambda_{u,b}|\cos\alpha|$). $\omega=2.5$ – сплошная (без насыщения) и пунктирная (с насыщением) линия, $\omega=6$ – штриховая (без насыщения) и штрихпунктирная (с насыщением) линия; (а, г) $\lambda_u=\lambda_b=0.1$, (б, д) $\lambda_u=\lambda_b=1$, (в, е) $\lambda_u=\lambda_b=10$

Список источников

1. Mugele F., Baret J.-C. Electrowetting: from basics to applications // J. Phys.: Condens. Matter. 2005. Vol. 17(28). P. 705–774. DOI: 10.1088/0953-8984/17/28/R01.
2. Chen L., Bonaccorso E. Electrowetting - From statics to dynamics // Adv. Colloid Interface Sci. 2014 Vol. 210. P. 2–12. DOI: 10.1016/j.cis.2013.09.007.
3. Zhao Y.-P., Wang Y. Fundamentals and Applications of Electrowetting: A Critical Review // Rev. Adhesion Adhesives 2013. Vol. 1 P. 114–174. DOI: 10.7569/RAA.2013.097304.
4. Chung S.K., Rhee K., Cho S.K. Bubble actuation by electrowetting-on-dielectric (EWOD) and its applications: A review // Int. J. Precis. Eng. Manuf. 2010. Vol. 11. P. 991–1006. DOI: 10.1007/s12541-010-0121-1.
5. Royal M. W., Jokerst N.M., Fair R.B. Droplet-Based Sensing: Optical Microresonator Sensors Embedded in Digital Electrowetting Microfluidics Systems // IEEE Sensors Journal 2013. Vol. 13. P. 4733–4742. DOI: 10.1109/JSEN.2013.2273828.
6. Nelson W.C., Kim C.-J. Droplet actuation by electrowetting-on-dielectric (EWOD): a review // J. Adhes. Sci. Technol. 2012. Vol. 26. P. 1747–1771. DOI: 10.1163/156856111X599562.
7. Hua Z., Rouse J.L., Eckhardt A.E., etc. Multiplexed real-time polymerase chain reaction on a digital microfluidic platform // Anal. Chem. 2010. Vol. 82 P. 2310–2316. DOI: 10.1021/ac902510u.
8. Li J., Kim C.-J. Current commercialization status of electrowetting-on-dielectric (EWOD) digital microfluidics // Lab Chip. 2020. Vol. 20. P. 1705–1712. DOI: 10.1039/D0LC00144A.
9. Li J., Wang Y., Chen H., Wan J. Electrowetting-on-dielectrics for manipulation of oil drops and gas bubbles in aqueous-shell compound drops // Lab Chip. 2014. Vol. 14 P. 4334–4337. DOI: 10.1039/C4LC00977K.
10. Lee C.-P., Chen H.-C., Lai M.-F. Electrowetting on dielectric driven droplet resonance and mixing enhancement in parallel-plate configuration // Biomicrofluidics. 2012. Vol. 6(1): 012814. DOI: 10.1063/1.3673258.
11. Kuiper S., Hendriks B.H.W. Variable-focus liquid lens for miniature cameras // Appl. Phys. Lett. 2004. Vol. 85. P. 1128–1130. DOI: 10.1063/1.1779954.
12. Li C., Jiang H. Fabrication and characterization of flexible electrowetting // Micromachines 2014. Vol. 5 P. 432–441. DOI: 10.3390/mi5030432.
13. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 179. P. 253–266. DOI: 10.1017/S0022112087001514.
14. Алабужев А.А., Кашина М.А. Влияние различия свойств поверхностей на осесимметричные колебания сжатой капли в переменном электрическом поле // Изв. Вузов. Радиофизика. 2018. Т. 61, № 8–9. С. 662–676. DOI: 10.1007/s11141-019-09919-4.
15. Алабужев А.А., Кашина М.А. Динамика зажатой капли в неоднородном электрическом поле // Вестник Пермского университета. Физика. 2019. № 4. С. 33–43. DOI: 10.17072/1994-3598-2019-4-33-4.
16. Kashina M.A., Alabuzhev A.A. The Forced Oscillations of an Oblate Drop Sandwiched Between Different Inhomogeneous Surfaces under AC Vibrational Force // Microgravity Sci. Technol. 2021. Vol. 33: 35. DOI: 10.1007/s12217-021-09886-4.
17. Alabuzhev A.A. Influence of heterogeneous plates on the axisymmetrical oscillations of a cylindrical drop // Microgravity Sci. Technol. 2018. Vol. 30(1–2). P. 25–32. DOI: 10.1007/s12217-017-9571-8.
18. Pyankova M.A., Alabuzhev A.A. Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the cramped drop // Phys. Fluids. 2022. Vol. 34: 092015. DOI: 10.1063/5.0101011.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. 2-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 621 с.
20. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 788 с.
21. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на колебания сжатой капли // ПМТФ. 2012. Т.53, № 1. С. 1-12. DOI: 10.1134/S0021894412010026.

22. Алабужев А.А., Пьянкова М.А. Динамика зажатой капли в поле трансляционных вибраций // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16, № 1. С. 78–88. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.6.
23. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли// ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 78-86. DOI: 10.1007/s10808-007-0088-6.
24. Алабужев А.А. Пьянкова М.А. Влияние пространственной неоднородности подложек и электрического поля на динамику зажатой капли // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 2. С. 56–65. DOI: 10.17072/1994-3598-2022-2-56-65.
25. Wang Q., Li L., Gu J., etc. Manipulation of a Nonconductive Droplet in an Aqueous Fluid with AC Electric Fields: Droplet Dewetting, Oscillation, and Detachment // *Langmuir*. 2021. Vol. 37 (41). P. 12098–1221. DOI: 10.1021/acs.langmuir.1c01934.

References

1. Mugele, F. and Baret, J.-C. (2005), "Electrowetting: from basics to applications", *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 17(28), pp. 705–774. DOI: 10.1088/0953-8984/17/28/R01.
2. Chen, L., and Bonaccorso, E. (2014), "Electrowetting - From statics to dynamics", *Advances in Colloid and Interface Science*, vol. 210, pp. 2–12. DOI: 10.1016/j.cis.2013.09.007.
3. Zhao, Y.-P. and Wang, Y. (2013), "Fundamentals and Applications of Electrowetting: A Critical Review", *Reviews of Adhesion and Adhesives*, vol. 1, pp. 114–174. DOI: 10.7569/RAA.2013.097304.
4. Chung, S.K., Rhee, K. and Cho, S.K. (2010), "Bubble actuation by electrowetting-on-dielectric (EWOD) and its applications: A review", *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, vol. 11, pp. 991–1006. DOI: 10.1007/s12541-010-0121-1.
5. Royal, M. W., Jokerst, N.M. and Fair, R.B. (2013), "Droplet-Based Sensing: Optical Microresonator Sensors Embedded in Digital Electrowetting Microfluidics Systems", *IEEE Sensors Journal*, vol. 13, pp. 4733–4742. DOI: 10.1109/JSEN.2013.2273828.
6. Nelson, W.C. and Kim, C.-J. (2012), "Droplet actuation by electrowetting-ondielectric (EWOD): a review", *Journal of Adhesion Science and Technology*, vol. 26, pp. 1747–1771. DOI: 10.1163/156856111X599562.
7. Hua, Z., Rouse, J.L., Eckhardt, A.E., etc. (2010) "Multiplexed real-time polymerase chain reaction on a digital microfluidic platform", *Analytical Chemistry*, vol. 82, pp. 2310–2316. DOI: 10.1021/ac902510u.
8. Li, J. and Kim, C.-J. (2020), "Current commercialization status of electrowetting-on-dielectric (EWOD) digital microfluidics", *Lab Chip*, vol. 20, pp. 1705–1712. DOI: 10.1039/D0LC00144A
9. Li, J., Wang, Y., Chen, H. and Wan, J. (2014) "Electrowetting-on-dielectrics for manipulation of oil drops and gas bubbles in aqueous-shell compound drops", *Lab Chip*, vol. 14, pp. 4334–4337. DOI: 10.1039/C4LC00977K.
10. Lee, C.-P., Chen, H.-C. and Lai, M.-F. (2012), "Electrowetting on dielectric driven droplet resonance and mixing enhancement in parallel-plate configuration", *Biomicrofluidics*, vol. 6(1), 012814. DOI: 10.1063/1.3673258.
11. Kuiper, S. and Hendriks, B.H.W. (2004), "Variable-focus liquid lens for miniature cameras", *Applied Physics Letters*, vol. 85, pp. 1128–1130. DOI: 10.1063/1.1779954.
12. Li, C. and Jiang, H. (2014) "Fabrication and characterization of flexible electrowetting", *Micromachines*, vol. 5, pp. 432–441. DOI: 10.3390/mi5030432.
13. Hocking, L.M. (1987), "The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 179, pp. 253–266. DOI: 10.1017/S0022112087001514.
14. Alabuzhev, A.A. and Kashina, M.A. (2019), "Influence of Surface Properties on Axisymmetric Oscillations of an Oblate Drop in an AC Electric Field", *Radiophysics and Quantum Electronics*, vol. 61, pp. 589–602. DOI: 10.1007/s11141-019-09919-4.

15. Alabuzhev, A. A. and Kashina, M. A. (2019), "Dynamics of a drop under the influence of an inhomogeneous electric field", *Bulletin of Perm University. Physics*, no. 4, pp. 33–43. DOI: 10.17072/1994-3598-2019-4-33-4.
16. Kashina, M.A. and Alabuzhev, A. A. (2021), "The Forced Oscillations of an Oblate Drop Sandwiched Between Different Inhomogeneous Surfaces under AC Vibrational Force", *Microgravity Science and Technology*, vol. 33, 35. DOI: 10.1007/s12217-021-09886-4.
17. Alabuzhev, A.A. (2018), "Influence of heterogeneous plates on the axisymmetrical oscillations of a cylindrical drop", *Microgravity Science and Technology*, vol. 30(1–2), pp. 25–32. DOI: 10.1007/s12217-017-9571-8.
18. Pyankova, M.A. and Alabuzhev, A.A. (2022), "Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the cramped drop", *Physics of Fluids*, vol. 34, 092015. DOI: 10.1063/5.0101011.
19. Landau, L.D., Lifshitz, E.M. and Pitaevskii L.P. (1995), *Course of Theoretical Physics. Volume 8. Electrodynamics of Continuous Media*, Elsevier Science, Amsterdam, Netherlands.
20. Kittel, C. (2005), *Introduction to Solid State Physics*, Wiley, Hoboken, NJ, USA.
21. Alabuzhev, A.A., Lyubimov, D.V. (2012), "Effect of the contact-line dynamics on the oscillations of a compressed droplet", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 53, pp. 9–19. DOI: 10.1134/S0021894412010026.
22. Alabuzhev, A. A., Pyankova, M. A. (2023). Dynamics of a clamped drop under translational vibrations. *Computational Continuum Mechanics*, vol. 16(1), pp. 78-88. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.6.
23. Alabuzhev, A.A. and Lyubimov, D.V. (2007), "Effect of the contact-line dynamics on the natural oscillations of a cylindrical droplet", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 48, pp. 686–693. DOI: 10.1007/s10808-007-0088-6.
24. Alabuzhev, A. A. and Pyankova, M. A. (2022), "Influence of surface properties on the dynamics of a clamped drop in an inhomogeneous electric field", *Bulletin of Perm University. Physics*, no. 2, pp. 56–65. DOI: 10.17072/1994-3598-2022-2-56-65.
25. Wang, Q., Li, L., Gu, J., etc. (2021), "Manipulation of a Nonconductive Droplet in an Aqueous Fluid with AC Electric Fields: Droplet Dewetting, Oscillation, and Detachment", *Langmuir*, vol. 37 (41), pp. 12098–1221. DOI: 10.1021/acs.langmuir.1c01934.

Информация об авторах:

А. А. Алабужев – кандидат физико-математических наук, доцент, с. н. с. лаборатории Вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1); профессор кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет (614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID: 17106;

М. А. Пьянкова – кандидат физико-математических наук, б/з, м.н.с. лаборатории вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1); ассистент кафедры компьютерного дизайна, МИРЭА – Российский технологический университет (105275, ЦФО, Россия, г. Москва, 5-я улица Соколиной Горы, д. 22), AuthorID: 833254.

Information about the authors:

A. A. Alabuzhev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1, Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013); Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614990; AuthorID: 17106;

M. A. Pyankova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Engineer, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1, Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), assistant, Department of Computer Design, MIREA – Russian Technological University (22, 5th St. of Sokolinaya Gora, Moscow, Russia, 105275), AuthorID: 833254.