

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 532.685, 532.5.013.4

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-46-64

<https://elibrary.ru/NYENHWX>**Параметрическое возбуждение концентрационной конвекции
в замкнутой области пористой среды
при наличии иммобилизации частиц примеси****Борис Сергеевич Марышев¹, Людмила Сергеевна Клименко²**^{1,2}Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия^{1,2}Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия¹bmaryshev@mail.ru²lyudmilaklimenko@gmail.com

Аннотация. Проведено математическое моделирование изучения влияния модуляции потока жидкости на концентрационную конвекцию в замкнутой области пористой среды с учетом иммобилизации примеси на стенках пор. Транспорт примеси с учетом эффекта иммобилизации (осаждения) частиц примеси на стенках пор моделируется в рамках ММ под-хода, фильтрация смеси в замкнутой области рассматривается в приближении Дарси–Бус-синеска. В результате, получено точное решение поставленной задачи, настоящее решение описывает одномерную фильтрацию в горизонтальном направлении через рассматриваемую замкнутую область пористой среды. В линейном приближении решена задача устойчивости полученного точного решения. Метод решения задачи устойчивости разработан на основе подхода Галеркина. Построены нейтральные кривые в пространстве параметров задачи, исследована синхронизация возмущений с внешней модуляцией потока. Описана возможность управления возбужденными конвективными режимами за счет модуляции внешнего потока жидкости (прокачки).

Ключевые слова: *фильтрация; транспорт в пористой среде; конвекция; иммобилизация; модулированный поток; параметрическое возбуждение неустойчивости; метод Галеркина; управление конвективными течениями*

Для цитирования: *Марышев Б.С., Клименко Л.С. Параметрическое возбуждение концентрационной конвекции в замкнутой области пористой среды при наличии иммобилизации частиц примеси // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 46-64. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-46-64. <https://elibrary.ru/NYENHWX>.*

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (бюджетная тема № 121031700169-1).

Статья поступила в редакцию 25.10.2024; одобрена после рецензирования 06.12.2024; принята к публикации 12.12.2024.



Эта работа © 2024 Марышев Б.С., Клименко Л.С. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MECHANICS

Research article

Parametric Excitation of Concentration Convection in a Closed Region of a Porous Medium in the Presence of Solute Particle Immobilisation

Boris. S. Maryshev¹, Lyudmila. S. Klimenko²

^{1,2}Perm State University, Perm, Russia

^{1,2}Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

¹bmaryshev@mail.ru

²lyudmilaklimenko@gmail.com

Abstract. Mathematical modelling of the effect of fluid flow modulation on concentration convection in a closed region of a porous medium taking into account the immobilisation of impurity on pore walls has been carried out. Transport of impurity taking into account the effect of immobilisation (deposition) of impurity particles on pore walls is modelled in the framework of MIM approach, filtration of mixture in a closed region is considered in the Darcy-Boussinesq approximation. As a result, an exact solution of the problem has been obtained; the present solution describes one-dimensional filtration in the horizontal direction through the considered closed region of the porous medium. The stability problem of the obtained exact solution is solved in linear approximation. The method of solving the stability problem is developed on the basis of the Galerkin approach. Neutral curves in the parameter space of the problem are constructed, and the synchronisation of perturbations with external flow modulation is studied. The possibility of controlling excited convective modes by modulating the external fluid flow (pumping) is described.

Keywords: *filtration; transport in porous media; convection; immobilisation; modulated flow; parametric instability excitation; Galerkin method; control of convective flows*

For citation: Maryshev, B.S., Klimenko, L.S. (2024), "Parametric Excitation of Concentration Convection in a Closed Region of a Porous Medium in the Presence of Solute Particle Immobilisation", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 46-64. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-46-64. <https://elibrary.ru/NYEHWX>.

Acknowledgments: the work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (budget topic № 121031700169-1).

The article was submitted 25.10.2024; approved after reviewing 06.12.2024; accepted for publication 12.12.2024.

Введение

Изучение транспортных процессов в пористых средах представляет интерес, как с фундаментальной, так и прикладной точки зрения. Это связано с тем фактом, что, несмотря на свою сложность (случайность и нерегулярность структуры пористого скелета), современные математические подходы в рамках механики сплошной среды позволяют с помощью численных методов решить огромный пласт задач. Кроме того, полученные фундаментальные решения находят свое практическое применение в широком спектре приложений. Так, например, фильтрационные процессы в пористых средах являются актуальными при добыче нефти и газа, находящихся в осадочных горных породах. А широко используемые в промышленности и быту фильтрационные системы могут быть спрогнозированы с помощью математического моделирования.

Первые исследования неустойчивости, связанные с возникновением тепловой конвекции, были проведены для пористого горизонтального слоя.

Данная задача в литературе называется классической задачей Хортона–Роджерса–Лэпвуда (ХРЛ) [1, 2]. Основному состоянию соответствует постоянный равновесный градиент температуры поперек слоя, течение при этом отсутствует. Неустойчивость возникает пороговым образом, при достижении определенного уровня нагрева между стенками, что характеризуется безразмерным числом Рэлея–Дарси. Этот параметр связан с действием сил плавучести. В работе [1] было показано, что конвекция в таком слое возникает монотонным образом при пороговом значении числа Рэлея–Дарси ($\sim 4\pi^2$).

Было исследовано влияние навязанного потока жидкости вдоль слоя (прокачки) на возникновение конвекции в рамках задачи ХРЛ [3]. В этом случае в системе появляется еще один управляющий параметр – число Пекле. В работах [3] был рассмотрен случай стационарной прокачки, показано, что порог возникновения устойчивости не меняется. Однако теперь режим возникновения конвекции сменяется на колебательный, при этом частота возникающих колебаний линейным образом зависит от числа Пекле (скорости потока).

Настоящие результаты были подтверждены экспериментально [4] в ходе изучения конвекции в замкнутой длинной области пористой среды (соотношение длины к ширине $3 \setminus 1$). Этот результат был также проанализирован с помощью аналитических и численных методов в работах [5, 6]. Было обнаружено, что для малых значений интенсивности прокачки и достаточно узких областей конвекция все же возникает монотонным образом, при этом интенсивность теплопереноса пропорциональна квадрату числа Пекле. Таким образом, в замкнутых полостях имеет место переход от монотонного конвективного течения к колебательному в зависимости от размеров области и числа Пекле. Изучению такого перехода посвящена работа [7], в которой обсуждаются критерии такого перехода и приведены карты существования колебательного режима в зависимости от параметров задачи.

Современный подход к изучению конвекции в пористой среде связан с учетом иммобилизации (осаждения) частиц примеси на стенках пористого скелета. Так, в ряде экспериментов [8–10] было продемонстрировано, что транспорт примеси является более сложным и не подчиняется классической линейной модели "диффузии–адвекции" (ADE – advection diffusion equation) [11]. Для учета взаимодействия частиц примеси со скелетом была предложена сплошносредная МИМ модель (mobile/immobile media) [12]. Согласно этой модели предполагается, что примесь состоит из двух фаз: мобильной (подвижной) и немобильной (адсорбированной). Переход примеси из одной фазы в другую описывается с помощью дополнительного уравнения, учитывающего механизм взаимодействия примеси со стенкой. Подробное описание приведено в следующем разделе.

В рамках МИМ модели было исследовано влияния параметров сорбции на колебательный режим конвекции. Были рассмотрены различные модели (линейная, фрактальная, нелинейная) [13–15], а также произведен учет снижения проницаемости и возможной закупорки среды в результате осаждения примеси на стенках пор [16]. Было показано, что в целом учет иммобилизации частиц примеси приводит к повышению устойчивости основного течения и затуханию колебательной динамики системы.

В рамках настоящей работы планируется исследовать возможность управления конвективным течением при помощи модулированного во времени внешнего потока.

Возможность управления конвективным течением за счет периодического внешнего воздействия является широко изученной задачей, востребованной во многих технологических процессах. Так, влияние модуляции температуры на границах на порог возникновения тепловой конвекции в горизонтальном слое однородной жидкости изучалось в [17–18]. Было показано, что модуляция вызывает тепловые волны, которые диффузно распространяются между границами слоя. В работах [19] и [20] теоретически и экспериментально изучена тепловая конвекция для ситуации, в которой движущая сила периодически изменяется во времени. Это изменение может происходить из-за изменений температуры на границах или из-за вертикальных вибраций, вызывающих изменение силы тяготения. Было получено, что в целом модуляция приводит к стабилизации основного состояния.

Если в отсутствии модуляции конвекция возбуждается колебательным образом, добавление модуляции приводит к более сложным системам уравнений и расширяет спектр возможного отклика. В таких системах следует ожидать появления трех типов отклика: синхронного, субгармонического и квазипериодического. Подобное поведение встречается в неоднородных системах под действием переменных воздействий различной природы: переменных тепловых полей [21], электрических полей [22] или вибраций [23].

В настоящей работе получены и проанализированы описанные типы отклика под действием модуляции приложенного давления. Ожидается, что такой тип модуляции может быть легко воспроизведен в экспериментальных и технологических условиях.

1. Модель транспорта примеси в пористой среде с учетом иммобилизации

Транспорт через пористую среду зачастую осложняется взаимодействием примеси с твердой матрицей среды. Такое взаимодействие может иметь различную природу: химическую [24], бактериальную [25], механическое затыкание узких мест [26] и наиболее общий эффект – физическая сорбция [27], обеспечиваемая силами Ван-дер-Ваальса [28]. Все перечисленные выше взаимодействия приводят к тому, что взаимодействующая примесь перестает двигаться. Транспортный процесс замедляется и не может быть описан на основе стандартной модели адвекции-диффузии (ADE) [11]. Экспериментально показано [8–10], что наблюдается более медленный процесс, чем предсказывает (ADE). Наиболее продуктивным представляется подход к описанию в рамках концепции мобильно-немобильной среды (mobile/immobile media (MIM)) [12]. Так, примесь может быть разделена на две компоненты: мобильную (подвижную) и немобильную (связанную). Мобильная перемещается в среде с потоком несущей жидкости или благодаря диффузии. Немобильная примесь перемещаться не может, она не участвует в транспорте напрямую, но мобильная примесь может переходить в немобильное состояние и наоборот.

Таким образом, опосредованное влияние все же есть. Кинетика иммобилизации примеси обычно описывается специальным кинетическим уравнением, конкретный вид уравнения определяется механизмом взаимодействия. Так, в случае малой концентрации примеси применима линейная MIM модель [13].

Для несжимаемой смеси транспортные уравнения в рамках выбранной модели могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(Q/\phi + C) &= -\mathbf{u} \cdot \nabla C + D\Delta C, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= \alpha(C - K_d C), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

где C , Q – объемные концентрации мобильной и немобильной компонент соответственно, $\mathbf{u}$ – вектор скорости фильтрации, α – коэффициент переноса примеси, K_d – коэффициент распределения примеси, ϕ – пористость среды. Стоит заметить, что характерные значения концентраций C и Q в рамках выбранной модели должны быть существенно меньше пористости среды ϕ . Таким образом, иммобилизация примеси не оказывает существенного влияния на характеристики среды (пористость и проницаемость).

В качестве закона фильтрации будем использовать известную модель Дарси–Буссинеска [29]:

$$\mathbf{u} = -\frac{\kappa}{\eta} \nabla P + \rho_l \beta_c C \mathbf{g}, \quad (1.2)$$

где κ – проницаемость среды, η – кинематическая вязкость, ρ_l – плотность несущей жидкости, P – отклонение давления от гидростатического распределения, β_c – коэффициент концентрационного расширения, $\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения.

2. Постановка задачи

В настоящей работе решается задача о возникновении концентрационной конвекции в прямоугольной области пористой среды, при заданном вертикальном перепаде концентрации, модуляции фильтрационного потока и учете взаимодействия примеси с твердой матрицей среды. Схема задачи представлена на рис. 1.

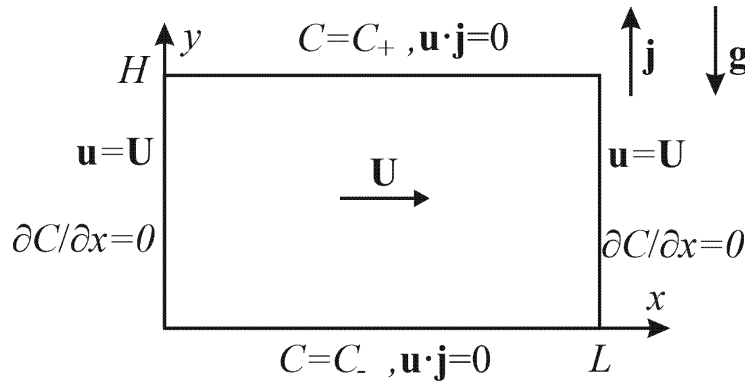


Рис. 1. Схема задачи

Как известно [29], наличие вертикального перепада концентрации тяжелой примеси ($C_+ > C_-$) создает неустойчивую стратификацию в поле тяжести, что приводит к возникновению конвективного течения. Ранее в работе [7] нами было исследовано возникновение конвекции в отсутствие модуляции потока. Было показано, что конвекция может возникать как монотонным, так и колебательным образом, в зависимости от параметров задачи. При этом в узких областях наблюдается монотонная мода неустойчивости, а в длинных – колебательная мода. Наличие собственных колебаний обычно дает возможность управлять конвективным течением при помощи модуляции потока.

Поэтому в рассмотренной задаче на границе задается условие на модулированный поток в рамках модели (1.1)–(1.2). Будем предполагать, что область ориентирована горизонтально в поле сил тяжести, горизонтальные границы считаются не проницаемыми для жидкости, на вертикальных границах задана скорость фильтрации, а для концентрации использовано условие свободного протекания (отсутствует только диффузионный поток, т.е., например, установлена мембрана):

$$\begin{aligned} C|_{y=H} = C_+, \quad C|_{y=0} = C_-, \quad w|_{y=0,H} = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x=0,L} = 0, \quad u|_{x=0,L} = U = U_0 + U_a \sin \Omega t, \quad w|_{x=0,L} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь использованы обозначения: $\mathbf{j}$ – единичный вектор, направленный вверх, U – заданная скорость горизонтального потока, U_0 – средняя скорость потока, U_a – амплитуда модуляции скорости, Ω – частота модуляции. Обезразмерим задачу (1.1), (1.2), (2.1), для этого используем следующие масштабы расстояния, времени, давления, фильтрационной скорости, мобильной и немобильной концентраций, соответственно:

$$\begin{aligned} [L] = H, \quad [t] = \frac{H^2}{D}, \quad [p] = \frac{U\eta H}{\kappa}, \quad [u, w] = \frac{\phi D}{H}, \quad [C] = C_+ - C_- = C_0, \\ [Q] = \phi C_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В безразмерной форме задача может быть записана как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(Q + C) &= -\mathbf{u} \cdot \nabla C + \Delta C, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= aC - bQ, \quad \text{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} &= -Pe \nabla P - Rp C \mathbf{j}, \quad \mathbf{u} = (u, w), \\ C|_{y=1} &= 1, \quad C|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=0,1} = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial x}\bigg|_{x=0,l} &= 0, \quad u|_{x=0,l} = Pe + A \sin \omega t, \quad w|_{x=0,l} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Задача (2.3) содержит семь безразмерных параметров: число Релея–Дарси, характеризующее действие сил плавучести: $Rp = \kappa \rho_l \beta_c g H C_0 / (\phi \eta D)$, число Пекле, характеризующее интенсивность внешней фильтрации: $Pe = \phi U_0 H / D$, безразмерные параметры адсорбции и десорбции, соответственно: $a = \alpha H^2 / (D \phi)$ и $b = \alpha K_d H^2 / D$, геометрический параметр: $l = L / H$, амплитуда и частота модуляции скорости внешней фильтрации: $A = \phi U_a H / D$ и $\omega = \Omega H^2 / D$. Она допускает решение, описывающее режим однородной горизонтальной фильтрации, аналогичное [13,15,16].

Решение может быть записано в форме:

$$\begin{aligned} C = C_1(y) = y, \quad Q = Q_1(y) = \frac{a}{b} y, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = (Pe + A \sin \omega t, 0), \\ P = P_1(x, y) = -\left(1 + \frac{A}{Pe} \sin \omega t\right) x - \frac{Rp}{Pe} \frac{y^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нижний индекс "1" означает, что решение соответствует одномерному режиму горизонтальной фильтрации. Это решение может быть неустойчиво по отношению к двумерным возмущениям, поскольку оно задает неустойчивую стратификацию. Конвективное течение возникает как вследствие такой неустойчивости. Рассмотрим малые, двумерные возмущения полученного решения (2.4):

$$\begin{aligned} C - C_1 = c \ll 1, \quad Q - Q_1 = q \ll 1, \quad P - P_1 = p \ll 1, \\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| \ll \max\{Pe, A\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где ψ – функция тока для возмущений фильтрационной скорости. Подставим возмущения (2.5) в задачу (2.3) и линеаризуем ее.

В результате получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= Rp \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = ac - bq, \\ \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} &= -(Pe + A \sin \omega t) \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}, \\ c|_{y=0,1} &= 0, \quad \psi|_{y=0,1} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0,l} = 0, \quad \psi|_{x=0,l} = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Задача (2.6) описывает возникновение конвективного течения, метод ее решения представлен в следующем параграфе.

3. Метод решения задачи устойчивости

Симметрия задачи (2.6) относительно вертикальной координаты (y) позволяет искать решение в следующей, нормальной форме:

$$\begin{aligned} c &= \bar{c}(x, t) \sin(\pi y), \\ q &= \bar{q}(x, t) \sin(\pi y), \\ \psi &= \bar{\psi}(x, t) \sin(\pi y). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.6) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} - \pi^2 \bar{\psi} &= Rp \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}, \\ \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} &= -f(t) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - \pi^2 \bar{c} - a\bar{c} + b\bar{q}, \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial t} &= a\bar{c} + b\bar{q}, \\ \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \Big|_{x=0,l} &= 0, \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \Big|_{x=0,l} = 0, \quad \bar{\psi}_{x=0,l} = 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $f(t) = Pe + A \sin \omega t$. Для поиска полей концентрации и функции тока воспользуемся методом Галеркина в модификации Канторовича+ [30]. В качестве базиса выберем тригонометрические функции, поскольку в отсутствие внешнего потока они являются точным решением задачи. Тогда для искомых полей имеем:

$$\begin{aligned} \bar{c} &= \sum_{n=1}^N c_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad \bar{q} = \sum_{n=1}^N q_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \\ \bar{\psi} &= \sum_{n=1}^N \psi_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя в (3.2) находим

$$\begin{aligned}
 \pi^2 \sum_{n=1}^N \psi_n \left(\frac{n^2}{l^2} + 1 \right) \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right) &= \pi R p \sum_{n=1}^N \frac{n}{l} c_n \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right), \\
 \sum_{n=1}^N \frac{dq_n}{dt} \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) &= a \sum_{n=1}^N c_n \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) - b \sum_{n=1}^N q_n \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right), \\
 \sum_{n=1}^N \frac{dc_n}{dt} \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) &= \pi f(t) \sum_{n=1}^N \frac{n}{l} c_n \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right) + \pi \sum_{n=1}^N \frac{n}{l} \psi_n \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) \\
 -\pi^2 \sum_{n=1}^N c_n \left(\frac{n^2}{l^2} + 1 + \frac{a}{\pi^2} \right) \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) &+ b \sum_{n=1}^N q_n \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Заметим, что первое уравнение системы (3.4) эквивалентно следующему соотношению:

$$\psi_n = \frac{Rp}{\pi} \frac{nl}{n^2 + l^2} c_n. \tag{3.5}$$

С учетом соотношения (3.5) уравнения (3.4) могут быть упрощены:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \frac{dc_n}{dt} \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) + \sum_{n=1}^N \left[\pi^2 \left(\frac{n^2}{l^2} + 1 \right) + a - \frac{Rpn^2}{n^2 + l^2} \right] c_n \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) &= \\
 = \pi f(t) \sum_{n=1}^N \frac{n}{l} c_n \sin \left(\frac{\pi n x}{l} \right) + b \sum_{n=1}^N q_n \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right), \\
 \sum_{n=1}^N \frac{dq_n}{dt} \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right) &= \sum_{n=1}^N (ac_n - bq_n) \cos \left(\frac{\pi n x}{l} \right).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Согласно процедуре метода Галеркина [30], помножим каждое из уравнений (3.6) на $\cos(\pi n x/l)$ и проинтегрируем по координате x вдоль длины рассматриваемой области (т.е. на отрезке $x \in [0, l]$), в результате получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{dc_k}{dt} + B_k c_k - bq_k - \sum_{n=1}^N G_{k,n} c_n &= 0, \quad \frac{dq_k}{dt} = ac_k - bq_k, \quad k = 1..N, \\
 B_k &= a + \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + 1 \right) - \frac{Rpk^2}{k^2 + l^2}, \\
 G_{k,n} &= \begin{cases} 0, & k = n, \\ \frac{f(t)}{l} [(-1)^{k+n} - 1] \frac{2n^2}{k^2 - n^2}, & k \neq n. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Задача (3.7) представляет собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для функций (c_n, q_n) , определяющих поведение возмущений основного состояния (2.4). Поскольку решается задача устойчивости, основной интерес представляет поведение возмущений на больших временах (рост или затухание). Поскольку коэффициенты уравнений (3.7) периодичны по времени, то, согласно теории Флоке [31], достаточно проследить за общим решением за один период модуляции. Поскольку система (3.7) имеет размерность $2N$, то решение может быть представлено в виде вектора:

$$\mathbf{S} = (c_1, c_2, \dots, c_N, q_1, q_2, \dots, q_N). \tag{3.8}$$

Начальное условие для системы (3.7) может быть выбрано произвольным образом, представим начальный вектор $\mathbf{S}(t=0)$ в виде разложения по декартовому базису в $2N$ – мерном пространстве, а именно:

$$\mathbf{S}(t=0) = \sum_{i=1}^{2N} H_i \mathbf{R}_i(t=0), \quad (\mathbf{R}_i(t=0))_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i, j = 1..2N \quad (3.9)$$

где H_i – произвольные коэффициенты, $\mathbf{R}_i(t=0)$ – базисный вектор с номером i в евклидовом пространстве размерности $2N$, индекс j – номер компоненты вектора, $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера. Согласно теории Флоке [24], предположим, что имеет место соотношение:

$$\mathbf{S}\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) = \mu \mathbf{S}(t=0), \quad (3.10)$$

где μ – мультипликатор решения за период внешней модуляции. Для уравнения (3.10) с учетом разложения (3.9) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) &= \sum_{i=1}^{2N} H_i \mathbf{R}_i\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) = \mu \sum_{i=1}^{2N} H_i \mathbf{R}_i(t=0), \\ \left(\mathbf{R}_i\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)_j &= F_{i,j} \Rightarrow \sum_{i=1}^{2N} H_i F_{i,j} = \mu \sum_{i=1}^{2N} H_i \delta_{i,j}, \quad j = 1..2N. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Мультипликатор определяется решением задачи (3.11), поскольку коэффициенты H_i произвольны, мультипликатор может быть найден как корень уравнения:

$$\begin{vmatrix} F_{1,1} - \mu & F_{1,2} & \dots & F_{1,2N} \\ F_{2,1} & F_{2,2} - \mu & \dots & F_{2,2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{2N,1} & F_{2N,2} & \dots & F_{2N,2N} - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) имеет $2N$ корней, которые в общем виде являются комплексными числами. При этом из (3.10) очевидно, что для роста возмущений необходимо $|\mu_{max}| > 1$, а для затухания $|\mu_{max}| < 1$, где μ_{max} – максимальный по модулю корень уравнения (3.12). Граница устойчивости определяется соотношением $|\mu_{max}| = 1$ характерным для нейтральных возмущений. Наложение на задачу (3.7) дополнительного условия $|\mu_{max}| = 1$ позволяет определить значения одного из параметров как критическое, обычно среди параметров выбирают число Релея–Дарси, как параметр ответственный за возникновение конвективного течения.

Таким образом, решение задачи устойчивости свелось к решению системы дифференциальных уравнений (3.7) на одном периоде модуляции, для $2N$ различных начальных условий в форме (3.9). После чего из полученных решений составляется матрица $\mathbf{F}$, для которой находится максимальное собственное число. Система (3.7) решалась численно с помощью метода Рунге–Кутты–Мерсона 4-го порядка точности [32], нахождение собственных значений матрицы осуществляется с помощью QR-алгоритма [33] совмещенного с преобразованием Хаусхолдера [34] для исходной матрицы.

Результаты сходимости метода в зависимости от числа функций N в разложении (3.3) представлены в приложении, в расчетах использовано значение $N=40$.

В следующем параграфе представлены и обсуждены результаты решения в виде зависимостей критического значения числа Релея–Дарси от других параметров задачи.

4. Результаты

Конвективное течение, как говорилось выше, возбуждается при достижении числом Релея–Дарси некоторого критического значения, соответствующего условию $|\mu_{\max}|=1$. При этом возможно несколько случаев, во-первых, мультипликатор может быть действительным числом или комплексным. Если мультипликатор действительный, может быть два случая: $\mu_{\max}=1$ и $\mu_{\max}=-1$. В первом случае ($\mu_{\max}=1$), частота возмущений совпадает с частотой внешней модуляции. Такие возмущения принято [31] называть синхронными. Во втором случае ($\mu_{\max}=-1$), частота возмущений в два раза меньше частоты модуляции, возмущения принято называть субгармоническими. В случае же если мультипликатор комплексный возмущения обычно называются квазипериодическими.

На рис. 2 приведена зависимость критического значения числа Релея–Дарси от длины области (параметр l), различными типами линий показаны разные типы возмущений.

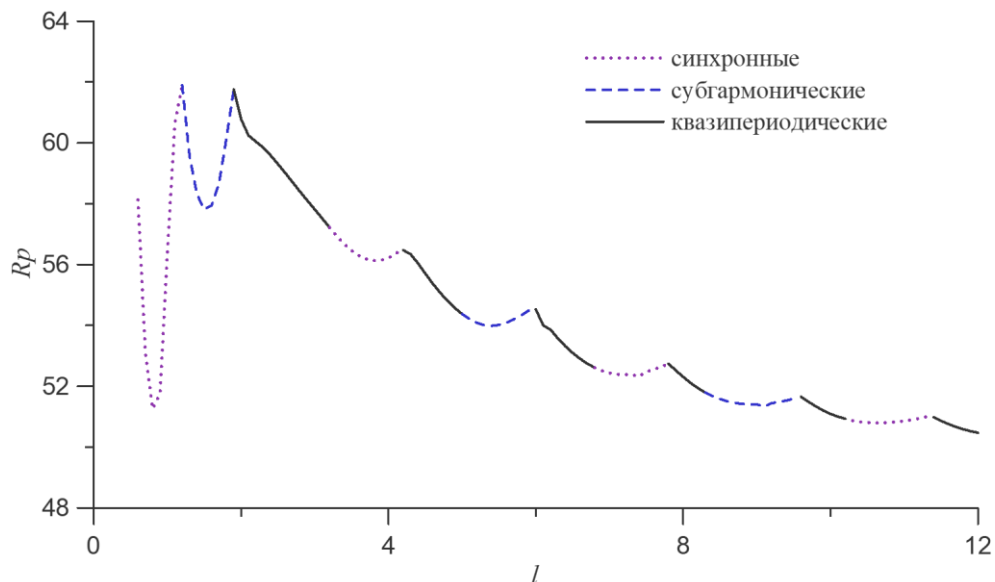


Рис. 2. Зависимость критического значения числа Релея–Дарси (R_p) от параметра l , различные типы возмущений выделены разными линиями (указано в легенде). Значения остальных параметров задачи: $a=8$, $b=4$, $Pe=7$, $A=7$, $\omega=5$

Рисунок 2 демонстрирует, что для узких полостей возможен только синхронный с внешней модуляцией режим возбуждения конвекции, что связано с отсутствием колебательной моды неустойчивости в отсутствие модуляции [7]. При увеличении длины рабочей области возникает субгармоническая неустойчивость, характерная для систем с параметрическим возбуждением типа уравнения Матье [31]. Заметим, что уравнение Матье является простейшей системой, в которой наблюдается параметрический резонанс. В рамках такой системы не наблюдается квазипериодический отклик системы. Мы же исследуем отклик сложной распределенной гидродинамической системы, в таких системах картина намного сложнее как это можно видеть, в том числе из работ [19–23]. По мере увеличения длины рабочей области, наблюдаются различные типы возмущений, в целом график выглядит как набор характерных для параметрического возбуждения резонансных мешков.

В нижней части мешка (вблизи локального минимума) всегда наблюдается область синхронизации отклика с модуляцией, это связано с возможностью уложить в область целое число конвективных ячеек. Для очень длинных областей $l \gg 10$ "мешки" становятся очень "мелкими", и зависимость выходит на асимптоту характерную для бесконечного слоя (для параметров использованных при расчете (рис. 2) $\lim_{l \rightarrow \infty} Rp \approx 46.2$, см. [13]).

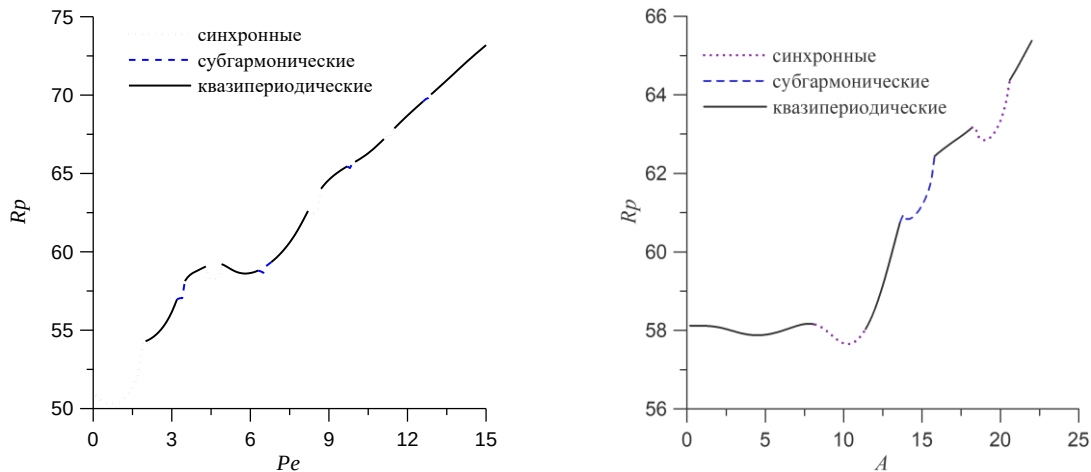


Рис. 3. Зависимости критического значения числа Релея–Дарси (Rp) от числа Пекле (слева для $A=7$) и от амплитуды модуляции (справа для $Pe=7$), различные типы возмущений выделены разными линиями (указано в легенде). Значения остальных параметров задачи: $a=8$, $b=4$, $\omega=5$, $l=3$

На рис. 3 показаны зависимости критических значений числа Релея–Дарси от числа Пекле и амплитуды модуляции. Видно, что в обоих случаях имеется тенденция к стабилизации течения (росту Rp) с увеличением интенсивности прокачки, что является известным фактом [3, 7, 13]. При малых числах Пекле наблюдается синхронный отклик, поскольку собственная частота мала (она пропорциональна Pe см. [3, 13]). С ростом числа Пекле наиболее часто наблюдается квазипериодический отклик, но присутствуют "мешки", характерные для синхронизации возмущений. Изменение амплитуды модуляции тоже приводит к обнаружению областей синхронизации. Именно существование таких областей параметров позволяет эффективно управлять потоком с помощью модуляции, благодаря сильной зависимости критических параметров от параметров модуляции. К сожалению, добавление нескольких кривых на один рисунок при выделении различных типов возмущений сильно перегружает его деталями. Демонстрация даже основных эффектов, наблюдаемых при вариации параметров системы с помощью одиноких кривых, на рисунке приведет к необоснованному увеличению объема статьи. Поэтому, ниже, на приведенных рисунках, тип возмущения выделяться не будет, хотя и стоит иметь в виду, что на кривых существует множество локальных минимумов, связанных с областями синхронизации.

На рис. 4 представлены зависимости критического числа Релея–Дарси от длины рабочей области при различных значениях параметров сорбции, видно, что с увеличением адсорбционных свойств среды (рост параметра a или уменьшение параметра b),

происходит повышение устойчивости, связанное с уменьшением неоднородности плотности среды, благодаря переходу части примеси в немобильное состояние. При малых длинах области кривые практически совпадают, что связано с синхронным откликом, который всегда наблюдается в узких областях. Именно поэтому вариация параметров сорбции (иммобилизации) дает столь малый эффект для узких полостей, в длинных полостях кривые расходятся, но видно, что ростом l они стремятся к постоянному значению, характерному для бесконечного слоя (см. работу [13]).

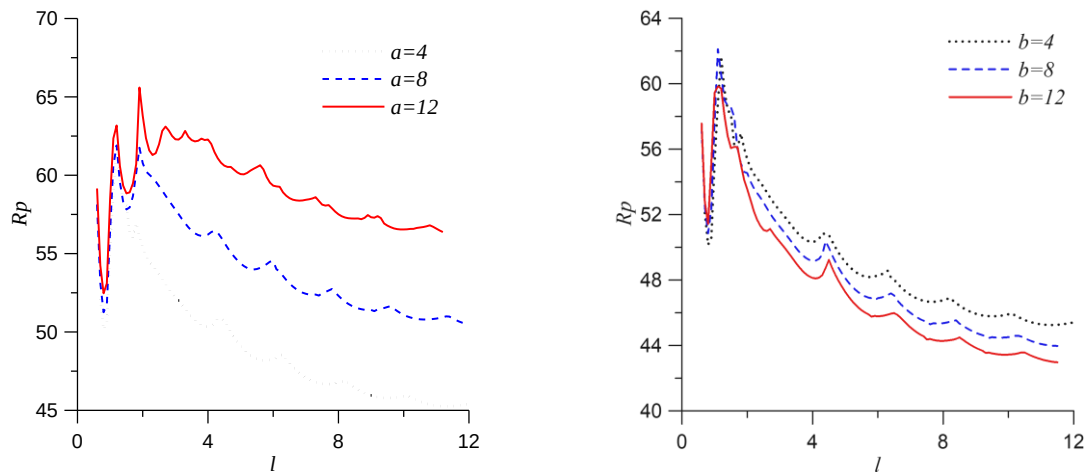


Рис. 4. Зависимости критического значения числа Релея–Дарси (R_p) от параметра l . Слева для различных значений параметра адсорбции ($b=4$, значения a указаны в легенде), справа для различных значений параметра десорбции ($a=8$, значения b указаны в легенде). Значения остальных параметров задачи: $Pe=7$, $A=7$, $\omega=5$, $l=3$

Рисунок 5 содержит зависимости критического значения числа Релея–Дарси от параметров модуляции (A и ω) для различных длин рабочей области. В случае малых l наблюдается монотонная зависимость, соответствующая синхронному отклику. С ростом длины рабочей области наблюдаются области синхронизации, и в целом происходит дестабилизация. Увеличение частоты модуляции так же приводит в целом к дестабилизации, а вот рост амплитуды, наоборот, к стабилизации за счет увеличения интенсивности прокачки (основного течения).

На рис. 6 представлены зависимости критического значения числа Релея–Дарси от средней интенсивности прокачки – числа Пекле. Опять же для малых l наблюдается монотонная зависимость и синхронный отклик. В целом, с ростом числа Пекле происходит стабилизация по тем же причинам, что и с ростом амплитуды. Видно (см. рис. 6 справа) что вариация длины области при длинных рабочих областях слабо влияет на кривую, это свидетельствует о наличии асимптоты горизонтального слоя (см. [13]).

Приведем оценки размерных параметров, используемых в описанных выше расчетах. Так, для области с $H \gg 10$ см и $\phi \sim 0.5$, используемые в расчетах безразмерные параметры $\omega = 5$ и $Pe = 7$ при условии, что $D \sim 5 \cdot 10^{-7}$ см²/с, соответствуют размерным частоте $\Omega \sim 2.5 \cdot 10^{-4}$ 1/с и скорости прокачки $U_0 \sim 7 \cdot 10^{-5}$ см/с.

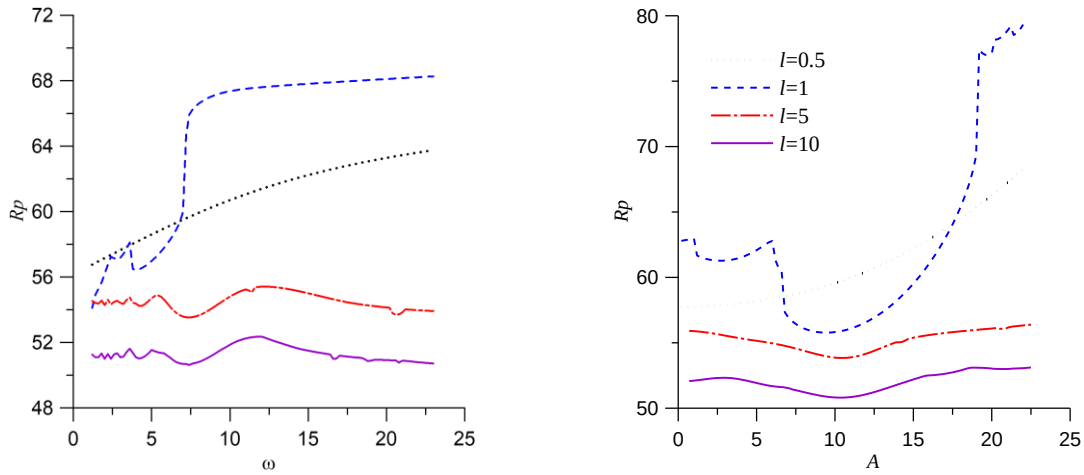


Рис. 5. Зависимости критического значения числа Релея–Дарси (R_p) от частоты ($A=7$ слева) и амплитуды ($\omega=5$ справа) модуляции для различных длин области (значения параметра l указаны в легенде). Значения остальных параметров задачи: $Pe=7$, $a=8$, $b=4$

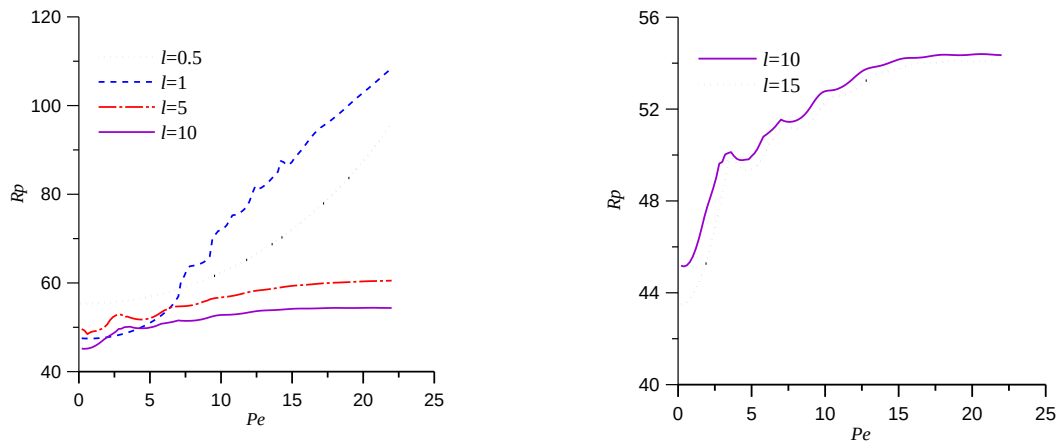


Рис. 6. Зависимости критического значения числа Релея–Дарси (R_p) от числа Пекле, при различных длинах области (значения параметра l указаны в легенде) Значения остальных параметров задачи: $\omega=5$, $A=7$, $a=8$, $b=4$

Безразмерные параметры иммобилизации $a = 8$ и $b = 4$ соответствуют $K_d \sim 1$ и $\alpha \sim 2 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с}$, что является типичным для многих материалов. Например, в эксперименте, где рассматривался транспорт натриевой соли в пористой среде, состоящей из стеклянных шариков [35], была получена следующая оценка параметров: $\alpha \sim 8 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с}$, $K_d \sim 2.5$.

В работе [36] изучался процесс насыщения пористой матрицы, состоящей из углеродного волокна, частицами $ZnBr_2$, соответствие моделирования экспериментальным результатам было получено при $\alpha \sim 10^{-4} \text{ 1/с}$, $K_d \sim 0.9$.

Основным приложением теории, развитой в настоящей работе, предполагается технология создания композитных материалов с заданной структурой примеси.

Заключение

Исследовано влияние модуляции потока на концентрационную конвекцию в замкнутой области пористой среды с учетом иммобилизации примеси. Рассмотрена прямоугольная область. Транспорт примеси с учетом эффекта иммобилизации (осаждения) частиц примеси на стенках пор моделируется в рамках МММ подхода, фильтрация в рамках приближения Дарси–Буссинеска. Получено точное решение задачи, описывающее одномерную фильтрацию в горизонтальном направлении. Получены уравнения, описывающие эволюцию малых возмущений режима горизонтальной фильтрации. На основе подхода Галеркина разработан численный метод решения полученных уравнений. В результате получены и обсуждены нейтральные кривые в пространстве параметров задачи. Показано, что возбуждаются возмущения трех типов по отношению к модуляции, синхронные субгармонические и квазипериодические. Показано, что в узких областях наблюдаются только синхронный отклик. Продемонстрировано, что существуют многочисленные области синхронизации, всегда соответствующие локальному минимуму нейтральной кривой, что дает возможность управлять возбуждением конвективного течения с помощью вариации параметров модуляции. Исследование зависимости критических параметров от иммобилизации показало, что увеличение адсорбирующих свойств среды приводит к стабилизации режима горизонтальной фильтрации. Увеличение интенсивности прокачки приводит к тому же эффекту. Показано, что в пределе длинных областей для нейтральных кривых существуют асимптоты, соответствующие бесконечному горизонтальному слою [13].

Приложение: исследование сходимости метода

Как известно, при применении методов типа Галеркина [30] сходимость достигается по мере увеличения числа базисных функций в разложении типа (3.3). Для исследования вопроса сходимости, были построены нейтральные кривые для зависимости Критического числа Релея–Дарси от числа Пекле (см. рис. 7). Видно, что с ростом числа базисных функций кривые все меньше отличаются, при этом самое большое отличие соответствует значениям числа Пекле $Pe \approx 20$. Для более точного исследования вопроса была построена зависимость критического числа Релея от числа N функций в разложении (3.3) (см. рис. 8, слева), а также значение ошибки по отношению к значению при $N=50$ (см. рис. 8, справа) т.е. $\varepsilon = (Rp(N) - Rp(N=50)) / Rp(N=50)$.

Видно, что для принятой точности по мультипликатору $|\mu_{max}| - 1 \leq 10^{-4}$, полученное критического значения числа Релея–Дарси остается постоянным для $N > 37$. Основываясь на этом критерии все расчеты были проведены для $N=40$.

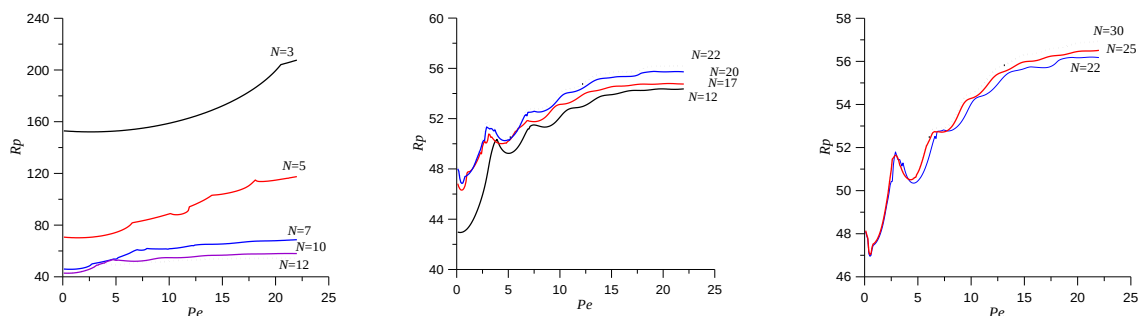


Рис. 7. Зависимости критического значения числа Релея–Дарси (Rp) от числа Пекле, при разном количестве функций в разложении (3.3). Значения параметров задачи: $l=10$, $\omega=5$, $A=7$, $a=8$, $b=4$

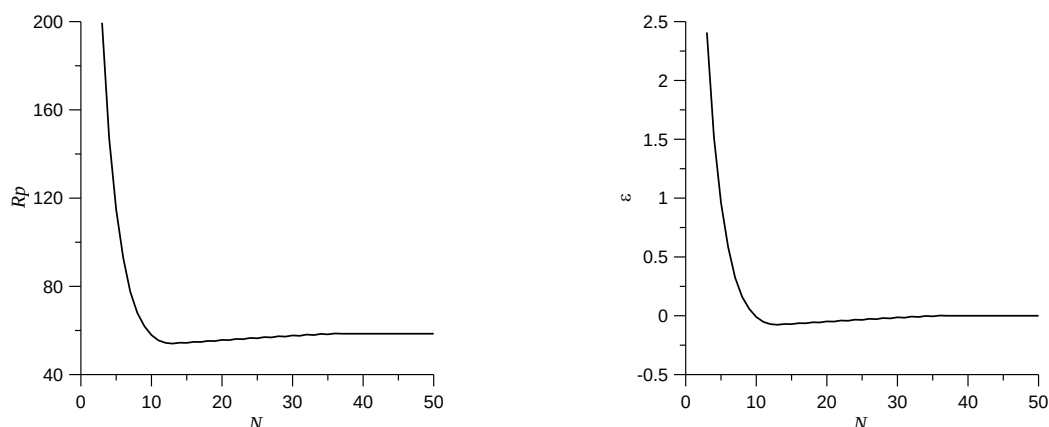


Рис. 8. Зависимость критического значения числа Релея–Дарси (R_p , слева) зависимости ошибки (ω , справа) от числа функций (N) в разложении (3.3). Значения остальных параметров задачи: $Pe=20$, $\omega=5$, $A=7$, $a=8$, $b=4$

Список источников

1. Horton C.W., Rogers Jr F.T. Convection currents in a porous medium // Journal of Applied Physics. 1945. Vol. 16, № 6. P. 367–370.
2. Lapwood E.R. Convection of a fluid in a porous medium // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge University Press, 1948. Vol. 44, № 4. P. 508–521.
3. Prats M. The effect of horizontal fluid flow on thermally induced convection currents in porous mediums // Journal of geophysical research. 1966. Vol. 71, № 20. P. 4835–4838.
4. Combarous M.A., Bia P. Combined free and forced convection in porous media // SPE Journal. 1971. Vol. 11, № 4. P. 399–405. URL: <https://doi.org/10.2118/3192-PA> (дата обращения: 20.10.2024).
5. Haajizadeh M., Tien C. L. Combined natural and forced convection in a horizontal porous channel // Int. J. Heat Mass Transf. 1984. Vol. 27, № 6. P. 799–813. URL: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(84\)90001-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90001-2) (дата обращения: 20.10.2024).
6. Chou F. C., Chung P. Y. Effect of stagnant conductivity on non-Darcian mixed convection in horizontal square packed channels // Numer. Heat Transf.; A: Appl. 1995. Vol. 27, № 2. P. 195–209.
7. Марышев Б. С. Концентрационная конвекция в замкнутой области пористой среды при заданном вертикальном перепаде концентрации и учете иммобилизации примеси // Вычислительная механика сплошных сред. 2024. Т. 17, № 1. С. 60–74.
8. Bromly M., Hinz C. Non-Fickian transport in homogeneous unsaturated repacked sand // Water Resour. Res. 2004. Vol. 40. W07402. URL: <https://doi.org/10.1029/2003WR002579> (дата обращения: 20.10.2024).
9. Gouze P. et al. Non-Fickian dispersion in porous media: 1. Multiscale measurements using single-well injection withdrawal tracer tests // Water Resour. Res. 2008. Vol. 44. W06426. URL: <https://doi.org/10.1029/2007WR006278> (дата обращения: 20.10.2024).
10. Wissocq A., Beaucaire C., Latrille C. Application of the multi-site ion exchanger model to the sorption of Sr and Cs on natural clayey sandstone // Appl. Geochemistry. 2018. Vol. 93. P. 167–177. URL: <https://doi.org/10.1016/j.apgeochem.2017.12.010> (дата обращения: 20.10.2024).

11. *Einstein A.* On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat // *Annalen der physic.* 1905. Vol. 17. P. 549–560. URL: <https://doi.org/10.1002/andp.19053220806> (дата обращения: 20.10.2024).
12. *Deans H.A.* A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media // *SPE Journal.* 1963. Vol. 3, № 1. P. 49–52. URL: <https://doi.org/10.2118/493-PA> (дата обращения: 20.10.2024).
13. *Maryshev B. S.* The effect of sorption on linear stability for the solutal Horton–Rogers–Lapwood problem // *Transport in Porous Media.* 2015. Vol. 109, № 3. P. 747–764.
14. *Klimenko L. S., Maryshev B. S.* Effect of solute immobilization on the stability problem within the fractional model in the solute analog of the Horton-Rogers-Lapwood problem // *The European Physical Journal E.* 2017. Vol. 40. P. 1–7.
15. *Maryshev B.* A Non-linear model for solute transport, accounting for sub-diffusive concentration decline and sorption saturation // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena.* 2016. Vol. 11, № 3. P. 179–190.
16. *Клименко Л.С., Кольцова И.А.* Уточнение модели концентрационной конвекции в пористой среде с учетом иммобилизации примеси и слабой закупорки // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика.* 2023. № 4. С. 35–44.
17. *Venezian G.* Effect of modulation on the onset of thermal convection // *Journal of Fluid Mechanics.* 1969. Т. 35, № 2. С. 243–254.
18. *Rosenblat S., Tanaka G. A.* Modulation of thermal convection instability // *Physics of Fluids.* 1971. Т. 14, № 7. С. 1319–1322.
19. *Ahlers G., Hohenberg P. C., Lücke M.* Thermal convection under external modulation of the driving force. I. The Lorenz model // *Physical Review A.* 1985. Т. 32, № 6. С. 3493.
20. *Ahlers G., Hohenberg P. C., Lücke M.* Thermal convection under external modulation of the driving force. II. Experiments // *Physical review. A, General Physics.* 1985. Т. 32, № 6. С. 3519–3534.
21. *Smorodin B. L., Lücke M.* Binary-fluid-mixture convection with low-frequency modulated heating, *Physical Review E* 2010, 82, 016310.
22. *Сморodin Б.Л., Тараут А.В.* Параметрическая конвекция слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле // *Изв. РАН. МЖГ.* 2010. № 1. С. 3–11.
23. *Smorodin B. I., Myznikova J. C.* Legros, Evolution of convective patterns in a binary-mixture layer subjected to a periodical change of the gravity field, *Physics of fluids*, 2008, 20, 094102.
24. *Veldsink J. W. et al.* The use of the dusty-gas model for the description of mass transport with chemical reaction in porous media // *Chem. Eng. J.* 1995. Vol. 57, № 2. P. 115–126. URL: [https://doi.org/10.1016/0923-0467\(94\)02929-6](https://doi.org/10.1016/0923-0467(94)02929-6) (дата обращения: 20.10.2024).
25. *Vandevivere P.* Bacterial clogging of porous media: a new modelling approach // *Biofouling.* 1995. Vol. 8, № 4. P. 281–291. <https://doi.org/10.1080/08927019509378281>
26. *Zhou S. S. et al.* Permeability analysis of hydrate-bearing porous media considering the effect of phase transition and mechanical strain during the shear process // *SPE Journal.* 2022. Vol. 27, № 1. P. 422–433. URL: <https://doi.org/10.2118/206736-PA> (дата обращения: 20.10.2024).
27. *Johnson P. R., Elimelech M.* Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption // *Langmuir.* 1995. Vol. 11, № 3. P. 801–812. URL: <https://doi.org/10.1021/la00003a023> (дата обращения: 20.10.2024).
28. *Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М.* Поверхностные силы. М: Наука, 1985. 398 с.

29. Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media. New York: Springer, 2017. 988p.
30. Kantorovich L.V., Krylov V.I., Benster C.D., Weiss G. Approximate Methods of Higher Analysis // Phys. Today. 1960. Vol. 13, № 1. P. 74–76. URL: <https://doi.org/10.1063/1.3056800> (дата обращения: 20.10.2024).
31. Nayfeh A. H. Perturbation methods. New Jersey: John Wiley & Sons. 2008. 429 p.
32. Merson R.H. An operational method for the study of integration processes // Proc. Symp. Data Processing. 1957. Vol. 1. P. 110–125.
33. Parlett B. N. The QR algorithm // Computing in science & engineering. 2000. Vol. 2, № 1, P. 38–42.
34. Rotella F., Zambettakis I. Block Householder transformation for parallel QR factorization // Applied mathematics letters. 1999. Vol. 12, № 4. P. 29–34.
35. Maryshev B.S., Khabin M.R., Evgrafova A.V. Identification of transport parameters for the solute filtration through porous media with clogging // Journal of Porous Media. 2023. T. 26, № 6. P. 31–53
36. Demin V.A., Maryshev B.S., Menshikov A.I. Dynamics of an admixture front during the pumping of a nanofluid through a porous medium // Journal of Porous Media. 2021. T. 24, № 6. P. 53–67.

References

1. Horton, C. W., Rogers Jr, F. T. (1945), "Convection currents in a porous medium", *Journal of Applied Physics*, vol. 16, no. 6, pp. 367-370.
2. Lapwood, E. R (1948), "Convection of a fluid in a porous medium", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Cambridge University Press, vol. 44, no. 4, pp. 508-521.
3. Prats, M.(1966), "The effect of horizontal fluid flow on thermally induced convection currents in porous mediums", *Journal of geophysical research*, vol. 71, no. 20, pp. 4835-4838.
4. Combarous, M. A., Bia, P. (1971), "Combined free and forced convection in porous media", *SPE Journal*, vol. 11, no. 4, pp. 399-405.
5. Haajizadeh, M., Tien, C. L. (1984), "Combined natural and forced convection in a horizontal porous channel", *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 27, no. 6, pp. 799-813.
6. Chou, F. C., Chung, P. Y. (1955), "Effect of stagnant conductivity on non-Darcian mixed convection in horizontal square packed channels", *Numer. Heat Transf.; A: Appl.*, vol. 27, no. 2, pp. 195-209.
7. Maryshev, B. S. (2024), "Concentration convection in a closed porous domain at a given vertical concentration difference and when accounting for impurity immobilization" *Computational Continuum Mechanics*, vol.17, no. 1, pp. 60-74.
8. Bromly, M., Hinz, C. (2004), "Non-Fickian transport in homogeneous unsaturated re-packed sand", *Water Resour. Res.*, vol. 40, W07402.
9. Gouze, P. et al. (2008), "Non-Fickian dispersion in porous media: 1. Multiscale measurements using single-well injection withdrawal tracer tests", *Water Resour. Res.*, vol. 44, W06426.
10. Wissocq, A., Beaucaire, C., Latrille, C. (2018) "Application of the multi-site ion exchanger model to the sorption of Sr and Cs on natural clayey sandstone", *Appl. Geochemistry*, vol. 93, pp. 167-177.
11. Einstein, A. (1905), "On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat", *Annalen der physic*, vol. 17, pp. 549-560.
12. Deans, H. A. (1963) "A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media", *SPE Journal*, vol. 3, pp. 49-52.
13. Maryshev, B. S. (2015), "The effect of sorption on linear stability for the solutal Horton–Rogers–Lapwood problem", *Transport in Porous Media*, vol. 109, no. 3, pp. 747-764.

14. Klimenko, L. S., Maryshev, B. S. (2017), "Effect of solute immobilization on the stability problem within the fractional model in the solute analog of the Horton-Rogers-Lapwood problem", *The European Physical Journal E*, vol. 40, pp. 1-7.
15. Maryshev, B. (2016), "A Non-linear model for solute transport, accounting for sub-diffusive concentration decline and sorption saturation", *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, vol. 11, no. 3, pp. 179-190.
16. Klimenko L. S., Koltsova I. A. (2023) "Refinement of the model of concentration convection in a porous medium taking into account immobilization of impurity and weak clogging", *Bulletin of Perm University. Physics*, no. 4, pp. 35–44.
17. Venezian G. (1969) "Effect of modulation on the onset of thermal convection" *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 35, no. 2, pp. 243-254.
18. Rosenblat S., Tanaka G. A. (1971) "Modulation of thermal convection instability" *Physics of Fluids*, vol. 14, no. 7, pp. 1319-1322.
19. Ahlers G., Hohenberg P. C., Lücke M. (1985) "Thermal convection under external modulation of the driving force. I. The Lorenz model" *Physical Review A*, vol. 32, no. 6, p. 3493.
20. Ahlers G., Hohenberg P. C., Lücke M. (1985) "Thermal convection under external modulation of the driving force. II. Experiments" *Physical review. A, General Physics*, vol. 32, no. 6, pp. 3519-3534.
21. Smorodin B. L., Lücke M. (2010) "Binary-fluid-mixture convection with low-frequency modulated heating", *Physical Review E*, vol.82, p. 016310.
22. Smorodin B. L., Taraut A. V. (2010) "Parametric convection of a low-conducting liquid in an alternating electric field", *Fluid Dynamics*, vol. 45, no. 1, pp. 1-9.
23. Smorodin B. L., Myznikova B. I., Legros J. C. (2008) "Evolution of convective patterns in a binary-mixture layer subjected to a periodical change of the gravity field", *Physics of fluids*, vol. 20, p. 094102.
24. Veldsink, J. W. et al. (1995), "The use of the dusty-gas model for the description of mass transport with chemical reaction in porous media", *Chem. Eng. Journal*, vol. 57, no. 2, pp. 115-126.
25. Vandevivere, P. (1995), "Bacterial clogging of porous media: a new modelling approach", *Biofouling*, vol. 8, no. 4, pp. 281-291.
26. Zhou ,S. S. et al. (2022), "Permeability analysis of hydrate-bearing porous media considering the effect of phase transition and mechanical strain during the shear process", *SPE Journal*, vol. 27, no. 1, pp. 422-433.
27. Johnson, P. R., Elimelech, M. (1995), "Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption", *Langmuir*, vol. 11, no. 3, pp. 801-812.
28. Deryagin B. V., Churaev N. V., Muller V. M. Surface forces. Moscow: Nauka, 1985. 398 p. (In Russian: Deryagin B. V., Charaev N. V., Muler V. M. *Poverhnostnye Sily Moskva: Nauka*).
29. Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media. New York: Springer, 2017. 988 p.
30. Kantorovich L.V., Krylov V.I., Benster C.D., Weiss G. (1960) "Approximate Methods of Higher Analysis" *Phys. Today*, vol. 13, no. 1, pp. 74–76.
31. Nayfeh A. H. Perturbation methods. New Jercey: John Wiley & Sons. 2008. 429 p.
32. Merson R. H. (1957) "An operational method for the study of integration processes", *Proc. Symp. Data Processing*, vol. 1, pp. 110 –125.
33. Parlett B. N. (2000) "The QR algorithm", *Computing in science & engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 38-42.
34. Rotella F., Zambettakis I. (1999) "Block Householder transformation for parallel QR factorization", *Applied mathematics letters*, vol. 12, no. 4, pp. 29-34.

35. Maryshev B. S., Khabin M. R., Evgrafova A. V. (2023) "Identification of transport parameters for the solute filtration through porous media with clogging", *Journal of Porous Media*, vol. 26. no. 6, pp. 31-53.
36. Demin V. A., Maryshev B. S., Menshikov A. I. (2021) "Dynamics of an admixture front during the pumping of a nanofluid through a porous medium" *Journal of Porous Media*, vol. 24, no. 6, pp. 53-67.

Информация об авторах:

Б. С. Марышев – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614000, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН (614000, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1);

Л. С. Клименко – кандидат физико-математических наук, доцент физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614000, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН (614000, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1).

Information about the authors:

B. S. Maryshev – PhD, Associate Professor of Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614000), researcher of Institute of Continuous Media Mechanics Ub RAS (1, Academica Koroleva St., Perm, Russia, 614000);

L. S. Klimenko – PhD, Associate Professor of Perm State University (15, Bukireva St., 15, Perm, Russia, 614000), researcher of Institute of Continuous Media Mechanics Ub RAS (1, Academica Koroleva St., Perm, Russia, 614000).