

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 532.546, 517.925.42

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-65-77

<https://elibrary.ru/GPJXCD>**Влияние шума на синхронность колебаний
конвективных течений****Ирина Валерьевна Тюлькина¹, Денис Сергеевич Голдобин^{1,2}**¹Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия²Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия¹irinatiulkina95@gmail.com

Аннотация. В данной работе исследуется термоконцентрационная конвекция двухкомпонентной жидкости в подогреваемых снизу смежных горизонтальных ячейках пористой среды с учетом влияния случайных тепловых флуктуаций внешних условий. Рассмотрено два случая: пространственно регулярного притока тепла и пространственно случайного притока тепла. Получены стохастические уравнения для динамики фазы колебаний. В рамках этих фазовых уравнений проблема степени синхронности колебаний конвективных течений в связанных ячейках исследуется с использованием круговых кумулянтов.

Ключевые слова: термоконцентрационная конвекция; пористая среда; фазовое описание; синхронизация; шум; круговые кумулянты

Для цитирования: Тюлькина И. В., Голдобин Д. С. Влияние шума на синхронность колебаний конвективных течений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 65–77. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-65-77. <https://elibrary.ru/GPJXCD>.

Статья поступила в редакцию 07.10.2024; одобрена после рецензирования 21.11.2024; принята к публикации 01.12.2024.

MECHANICS

Research article

**The Influence of Noise on the Synchronization of Oscillations
of Convective Currents****Irina. V. Tiulkina¹, Denis. S. Goldobin^{1,2}**¹Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia²Perm State University, Perm, Russia¹e-mail irinatiulkina95@gmail.com

Эта работа © 2024 Тюлькина И.В., Голдобин Д.С. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. In this work, we study the Soret-driven convection of a two-component liquid in adjacent rectangular cells of a porous medium heated from below, taking into account the influence of random thermal fluctuations of external conditions. Two cases are considered: a spatially regular heat influx and a spatially irregular heat influx. We obtain stochastic equations for the dynamics of oscillation phases. Within the framework of these phase equations, we study the problem of the degree of synchrony of oscillations of convective currents in coupled cells using circular cumulants.

Keywords: *Soret-driven convection; porous medium; phase reduction; synchronization; noise; circular cumulant*

For citation: Tiulkina, I. V. and Goldobin, D. S. (2024), "The Influence of Noise on the Synchronization of Oscillations of Convective Currents", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 65-77. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-65-77. <https://elibrary.ru/GPJXCD>.

The article was submitted 07.10.2024; approved after reviewing 21.11.2024; accepted for publication 01.12.2024.

Введение

В системах с периодическими колебаниями собственная динамика проста, но есть одна нейтрально устойчивая степень свободы – фаза колебания. Слабое воздействие на систему позволяет управлять динамикой этой фазы, добиваясь совпадения ритмов колебаний элементов. Оказываются возможны коллективные явления при слабых связи или воздействии. С практической точки зрения, именно примерами связанных периодических осцилляторов являются электродвигатели и роторные двигатели, смонтированные на общей платформе, массивы одинаковых электроприборов, подключенных к общей сети переменного тока, пешеходы на мосту, колонии бактерий, пористые конвективные ячейки со связью через соприкасающиеся стенки и т.д. Даже если общая физическая картина, связанная с синхронизацией, сложна и многогранна, анализ синхронизации можно чрезвычайно упростить для слабых возмущений, рассматривая ее в рамках динамики фаз колебаний [1, 2]. Такая формулировка позволяет сосредоточиться исключительно на скалярной фазе осциллятора, вместо того чтобы описывать динамику состояния в полном многомерном (или бесконечномерном) конфигурационном пространстве.

В основе математической теории коллективных явлений в таких системах лежит фазовое описание [1–4], при котором главное внимание уделяется динамике фазы колебания элемента. Математически, на уровне уравнений, исследуется динамика ансамблей фаз. С точки зрения теории возмущений, фазовое описание представляет собой стандартный теоретический метод анализа слабозвозмущенных осцилляторов с устойчивым предельным циклом, этот метод является частным случаем метода усреднения Крылова–Боголюбова [5, 6], при котором для каждого осциллятора остается уравнение динамики единственной "медленной" переменной [6]. Для метода Крылова–Боголюбова Боголюбовым была доказана теорема о равномерной сходимости разложений [5].

Эта статья является развитием работы [7], в которой отсутствовал учет влияния внешних тепловых флуктуаций на систему связанных пористых ячеек.

1. Постановка задачи

Рассматривается термоконцентрационная конвекция двухкомпонентной жидкости в подогреваемых снизу смежных горизонтальных ячейках пористой среды (рис. 1). Толщина стенки между ячейками – l , высота ячеек – h , толщина ячеек – H ; ось y выбираем перпендикулярно стенке между ячейками, x – вдоль ячеек, ось z – вертикально вверх. Границы ячеек полагаются непроницаемыми (в том числе для примеси), тепловой поток через горизонтальные границы – фиксированным, вертикальные границы обладают очень низкой теплопроводностью. Тепловая конвекция рассматривается с учетом эффекта Соре (эффект термодиффузии) (см. работу [7]), при котором диффузионная часть потока концентрации

$$\mathbf{j} = -D \left(\nabla C + \alpha_T \frac{C}{T} \nabla T \right),$$

где D – коэффициент диффузии, α_T – константа термодиффузии, T – температура, C – концентрация тяжелой компоненты.

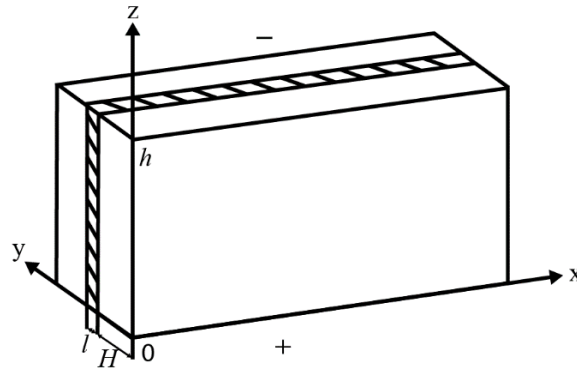


Рис. 1. Геометрия задачи и система координат

Для математического описания поведения системы используется модель Дарси–Буссинеска [8], предполагающая линейную зависимость плотности от температуры и концентрации $\rho(C, T) = \rho_0[1 + \beta_T(T - T_0) - \beta_C(C - C_0)]$:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_i - \frac{vm}{K} \mathbf{v}_i + g(\beta_T T_i - \beta_C C_i) \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial C_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) C_i &= D \Delta C_i + \frac{\alpha_T C_0 D}{T_0} \Delta T_i, \\ \frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{1}{b_*} (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) T_i &= \chi \Delta T_i + Q_i, \quad i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_i &= 0, \\ z = 0, h: \quad \frac{\partial T_i}{\partial z} &= -A, v_{iz} = 0, j_{iz} = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где индекс i указывает номер ячейки, $\mathbf{v}_i$ – средняя скорость (осредненная по масштабам пор) жидкости в порах, j_{iz} – вертикальная компонента потока концентрации, m – пористость среды (отношение объема пор в элементе пористой среды к объему этого элемента), K – коэффициент проницаемости, h – высота ячейки, $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ – вектор ускорения свободного падения, b_* – отношение теплоемкости пористой среды, насыщенной

жидкостью, к части этой теплоемкости, приходящейся на жидкость в порах ($b_* > 1$), χ – температуропроводность пористой среды, насыщенной жидкостью. При подогреве снизу градиент температуры в основном состоянии $A > 0$, что соответствует заданному тепловому потоку и отражено в граничном условии для температуры. Q_i – распределенный источник тепла. Качественно карта режимов линейной устойчивости системы [8] подобна таковой для термоконцентрационной конвекции жидкости в отсутствие пористого скелета ([9], §32 в [10], §30, раздел, 3 в [11]).

В работе [7] было показано, как систему двух связанных конвективных ячеек можно свести к двум уравнениям в терминах фаз (система Курамото–Сакагучи) (1.2) и исследовать синхронизацию конвективных потоков:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \Omega_0 + |K|(\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) - \sin \beta), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Omega_0 + |K|(\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) - \sin \beta).\end{aligned}\quad (1.2)$$

где Ω_0 – частота колебательного течения при $Ra = Ra_0 + \delta Ra$, с учетом слабонелинейной поправки, β – фазовый сдвиг связи, K – комплексный коэффициент связи. Вместе с тем, в работе [7] не учитывалось влияние случайных флуктуаций внешних условий – шума.

2. Нестационарность внешних температурных условий

Основным естественным источником случайных флуктуаций является нестационарность внешних температурных условий, поскольку непроницаемость границ для течения и примеси является более точным граничным условием, чем фиксированность вертикального теплового потока и теплоизолированность боковых границ.

Опишем интегральную по поперечной координате y флуктуирующую компоненту притока тепла в ячейку i распределенным безразмерным притоком тепла на единицу площади плоскости (x, z) полем $q_{gi}(x, z, t)$. Отметим, что посредством $q_{gi}(x, z, t)$ можно описать не только теплопередачу через боковые границы, но и флуктуации потока тепла через горизонтальные границы: последние дают в $q_{gi}(x, z, t)$ вклады вида $\sim \delta(z)$ и/или $\sim \delta(z-1)$.

В этом случае в уравнениях для амплитуды, выведенных в [7], появятся новые члены – эффективные шумовые слагаемые:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial t} &= C_R \delta Ra A_1 + C_A a (A_2 - A_1) + C_T |A_1|^2 A_1 + \sigma(\xi_{re,1}(t) + i\xi_{im,1}(t)), \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} &= C_R \delta Ra A_2 + C_A a (A_1 - A_2) + C_T |A_2|^2 A_2 + \sigma(\xi_{re,2}(t) + i\xi_{im,2}(t)),\end{aligned}\quad (2.1)$$

где A – амплитуда колебательных конвективных течений, δRa – отклонение числа Рэлея-Дарси от порога линейной неустойчивости, a – коэффициент тепловой связи между пористыми ячейками,

$$a = \frac{\kappa_b}{\kappa} \frac{h^2}{Hl},$$

κ – теплопроводность насыщенного жидкостью пористого скелета и κ_b – теплопроводность стенки, разделяющей ячейки. Коэффициенты C_R , C_A , C_T зависят от управляющих параметров системы:

$$C_R = \frac{1-N}{24}k^2 + i\frac{k^4}{24\omega_0}(N - S(1-N)),$$

$$C_A = \frac{1}{2} - i\frac{k^2}{2\omega_0} \frac{b(N+S) - S^2(1-N)(b-1)}{(1-N)(b-S(b-1))},$$

$$C_T = -i\frac{Ra_0^2 k^6 N}{320\omega_0} \left(N - (1-N) \left(S + \frac{i\omega_0}{k^2} \right) \right) \times$$

$$\times \left(3 - \frac{i\omega_0}{k^2} + \frac{Ra_0 b^2}{12S} \frac{3N + [b - N - S(b-1)(1-N)] \left(-3S + \frac{i\omega_0}{k^2} \right)}{[b - S(b-1)] \left(S + \frac{i\omega_0}{k^2} \right)} \right),$$

где $S = D/\chi$ – обратное число Льюиса, модифицированные параметр

$$b = \frac{b_* - 1}{b_* - S(b_* - 1)},$$

и параметр плавучести

$$N = \frac{N_* b_* - N_* S(b_* - 1)}{1 - N_* S(b_* - 1)}, \quad N_* = \frac{(-\alpha_T)\beta_C C_0}{\beta T_0},$$

критическое значение модифицированного числа Рэлея–Дарси

$$Ra = [1 - N_* S(b_* - 1)] \frac{\beta_T A h^2 g K}{mbv\chi}$$

для колебательной неустойчивости равно

$$Ra_0 = \frac{12 + 12S}{1 - N},$$

частота колебаний длинноволновых возмущений с волновым вектором k на границе неустойчивости:

$$\frac{\omega_0^2}{k^4} = \frac{(1+S)N}{1-N} - S^2.$$

В (2.1) $\xi_{re,1}(t)$ и $\xi_{im,1}(t)$ – независимые нормированные дельта-коррелированные гауссовы шумы: $\langle \xi_{re,1}(t), \xi_{re,1}(t') \rangle = \langle \xi_{im,1}(t), \xi_{im,1}(t') \rangle = 2\delta(t-t')$, $\langle \xi_{re,1}(t) \rangle = \langle \xi_{im,1}(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_{re,1}(t), \xi_{im,1}(t') \rangle = 0$. Нетривиальной задачей, решаемой в настоящей работе, является физически корректное введение шума в итоговых уравнениях для фазы колебаний и описание влияния шума на основе подхода "круговых кумулянтов" [13].

Отметим, что идеализация дельта-коррелированного шума в амплитудном уравнении уместна и при конечных, но коротких временах корреляций, поскольку в "медленном" времени, на масштабах которого происходит эволюция амплитуд вблизи порога линейной неустойчивости системы, эти времена корреляций будут еще меньше. Амплитуда σ по-разному вычисляется для случаев *пространственно регулярного* и *пространственно случайного* притока тепла.

3. Пространственно регулярный приток тепла

Для пространственно регулярного притока тепла имеем

$$q_{\vartheta i}(x, z, t) = \sigma_{\vartheta}(x, z) \xi_1(t), \quad (3.1)$$

где $\sigma_{\vartheta}(x, z)$ – детерминированная функция координат, $\xi_1(t)$ – дельта-коррелированный гауссов шум: $\langle \xi_1(t) \rangle = 0$, $\langle \xi_1(t), \xi_1(t') \rangle = 2\delta(t - t')$. В этом случае сигналы $\xi_1(t) \cos(\omega_0 t + \beta_q)$ и $\xi_1(t) \sin(\omega_0 t + \beta_q)$ при любом значении β_q можно представить независимыми эффективными шумами $\xi_{re,1}(t)/\sqrt{2}$ и $\xi_{im,1}(t)/\sqrt{2}$ соответственно. В самом деле, для статистически стационарного шума имеет место эргодичность: среднее по времени эквивалентно среднему по реализациям шума:

$$\begin{aligned} & \langle \xi_1(t) \cos(\omega_0 t + \beta_q) \xi_1(t + \tau) \cos(\omega_0(t + \tau) + \beta_q) \rangle_{\xi_1} = \\ & = \langle \langle \xi_1(t) \xi_1(t + \tau) \rangle_{\xi_1} \cos(\omega_0 t + \beta_q) \cos(\omega_0(t + \tau) + \beta_q) \rangle_t = \\ & = \langle 2\delta(\tau) \cos(\omega_0 t + \beta_q) \cos(\omega_0(t + \tau) + \beta_q) \rangle_t = \\ & = 2\delta(\tau) \langle \cos^2(\omega_0 t + \beta_q) \rangle_t = \delta(\tau). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение имеем для второго сигнала, а перекрестная корреляционная функция выглядит как:

$$\langle \xi_1(t) \cos(\omega_0 t + \beta_q) \xi_1(t + \tau) \sin(\omega_0(t + \tau) + \beta_q) \rangle_{\xi_1} = 2\delta(\tau) \left\langle \frac{1}{2} \sin^2(2\omega_0 t + 2\beta_q) \right\rangle_t = 0.$$

Исходя из этого первый и второй сигналы являются статистически независимыми, дельта-коррелированными, имеют половинную интенсивность по сравнению с $\xi_1(t)$ и, в силу линейности по $\xi_1(t)$, остаются гауссовыми случайными величинами. Альтернативный строгий вывод того, как на масштабе времени большом по сравнению с периодом $2\pi/\omega_0$ сигнал $e^{-i\omega_0 t} \xi_1(t)$ порождает два эффективных статистически независимых дельта-коррелированных сигнала, может быть проведен на основании уравнения Фоккера–Планка с применением метода усреднения Крылова–Боголюбова [5, 6] и дает эквивалентные результаты (раздел 3.1 в работе [14]).

Для амплитуды эффективного шума в случае связанных конвективных ячеек [7] можно получить:

$$\sigma = \frac{k^2}{\sqrt{2}\omega_0} \left| 1 + \frac{b(S - \frac{i\omega_0}{k^2})}{b - S(b - 1)} \right| \left| \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz \sigma_{\vartheta}(x, z) \cos kx \right|,$$

где ω_0 – частота колебаний на границе устойчивости, k – волновое число, S – обратное число Льюиса.

Для жидкостей ($S \ll 1$) имеем

$$\sigma \approx \frac{1}{\sqrt{2N}} \left| \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz \sigma_{\vartheta}(x, z) \cos kx \right|.$$

Для газов ($1 \ll S < b$):

$$\sigma \approx \frac{1}{\sqrt{2S}} \left| \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz \sigma_{\vartheta}(x, z) \cos kx \right|.$$

4. Пространственно случайный приток тепла

Пространственно случайный приток тепла $q_{\text{зи}}(x, z, t)$ следует характеризовать пространственно-временной автокорреляционной функцией

$$\langle q_{\text{зи}}(x, z, t) q_{\text{зи}}(x + r_x, z + r_z, t') \rangle = 2C_q(r) \delta(t - t'), \quad (4.1)$$

здесь рассмотрение ограничивается случаем пространственно однородного и изотропного шума, $r = \sqrt{r_x^2 + r_z^2}$. Аналогично предыдущему случаю, можно показать, что на «медленном» масштабе времени $\cos \omega_0 t q_{\text{зи}}(x, z, t)$ и $\sin \omega_0 t q_{\text{зи}}(x, z, t)$ представимы парой статистически независимых шумов $\frac{1}{\sqrt{2}} q_{re,1}(x, z, t)$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} q_{im,1}(x, z, t)$ с теми же автокорреляционными свойствами, как $q_{\text{зи}}$, но половинной интенсивностью. Шумовое слагаемое $\sigma(\xi_{re,1}(t) + i\xi_{im,1}(t))$ в амплитудном уравнении (2.1) определяется с помощью автокорреляционной функции

$$\frac{k^4}{\omega_0^2} \left| 1 + \frac{b \left(S - \frac{i\omega_0}{k^2} \right)}{b - S(b-1)} \right|^2 \left\langle \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz q_{re,1}(x, z, t) \cos kx \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx' \int_0^1 dz' q_{re,1}(x', z', t + \tau) \cos kx' \right\rangle.$$

Подставляя в последнее выражение автокорреляционную функцию (4.1) в пределе малого радиуса корреляций

$$r_{corr} = \frac{\int_0^\infty r |C_q(r)| dr}{\int_0^\infty |C_q(r)| dr} \ll 1,$$

можно вычислить среднее от интегралов, которое оказывается равно $2\delta(\tau) \int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr \langle \cos^2 kx \rangle_x$, и окончательно получить:

$$\frac{k^4}{\omega_0^2} \left| 1 + \frac{b \left(S - \frac{i\omega_0}{k^2} \right)}{b - S(b-1)} \right|^2 \delta(\tau) \int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr. \quad (4.2)$$

С другой стороны, автокорреляционная функция сигнала $\sigma(\xi_{re,1}(t) + i\xi_{im,1}(t))$ равна

$$\sigma^2 \left(\langle \xi_{re,1}(t) \xi_{re,1}(t + \tau) \rangle + \langle \xi_{im,1}(t) \xi_{im,1}(t + \tau) \rangle \right). \quad (4.3)$$

Сопоставляя (4.2) с (4.3), используем $\langle \xi_{re,1}(t) \xi_{re,1}(t + \tau) \rangle = \langle \xi_{im,1}(t) \xi_{im,1}(t + \tau) \rangle = 2\delta(\tau)$ и находим

$$\sigma = \frac{k^2}{\sqrt{2}\omega_0} \left| 1 + \frac{b \left(S - \frac{i\omega_0}{k^2} \right)}{b - S(b-1)} \right| \sqrt{\int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr}.$$

Для жидкостей $S \ll 1$ и

$$\sigma \approx \frac{k^2}{2\sqrt{N}} \sqrt{\int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr},$$

для газов $1 \ll S < b$ и

$$\sigma \approx \frac{1}{2S} \sqrt{\int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr}.$$

5. Стохастические уравнения для пары связанных конвективных осцилляторов с шумом

Для пары связанных пористых ячеек, насыщенных бинарной жидкостью (рис. 1) с учетом флуктуации внешних условий уравнения для амплитуд колебательных течений принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= C_R \delta Ra A_1 + C_A a (A_2 - A_1) + C_T |A_1|^2 A_1 + \sigma (\xi_{re,1}(t) + i \xi_{im,1}(t)), \\ \frac{dA_2}{dt} &= C_R \delta Ra A_2 + C_A a (A_1 - A_2) + C_T |A_2|^2 A_2 + \sigma (\xi_{re,2}(t) + i \xi_{im,2}(t)), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\lambda_r = \text{Re } C_R \delta Ra$, $\delta \omega_0 = \text{Im } C_R \delta Ra$, комплексный параметр $K = |K| e^{i\beta} = C_A a$ – комплексный коэффициент связи.

Строгая фазовая редукция для шума с коротким временем корреляций, когда время корреляций сопоставимо или меньше характерного времени затухания амплитудных степеней свободы $1/\lambda_r$, должна учитывать конечность $1/\lambda_r$ [15] и была проведена в [16].

Для уравнений (5.1) эта процедура дает стохастическую версию уравнений динамики фазы:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \Omega_{01} + |K| (\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) - \sin \beta) + \sigma_\varphi \xi_{\varphi 1}(t), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Omega_{02} + |K| (\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) - \sin \beta) + \sigma_\varphi \xi_{\varphi 2}(t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

здесь допускается малая неидентичность параметров осцилляторов $\Omega_{01} \neq \Omega_{02}$, а интенсивность эффективных независимых дельта-коррелированных шумов может быть вычислена как

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\sigma^2 (-\text{Re } C_T)}{\lambda_r} \left[1 + \left(\frac{\text{Im } C_T}{\text{Re } C_T} \right)^2 \right],$$

где второе слагаемое в скобках связано с шумом в амплитудной степени свободы. Разность уравнений системы дает замкнутое уравнение для разности фаз $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\frac{d}{dt} \delta\varphi = \Omega_{01} - \Omega_{02} - |K| \cos \beta \sin \delta\varphi + \sigma_{\delta\varphi} \xi_\varphi(t), \quad (5.3)$$

где нормированный шум $\xi_\varphi(t) = \frac{\xi_{\varphi 1}(t) - \xi_{\varphi 2}(t)}{\sqrt{2}}$,

$$\sigma_{\delta\varphi}^2 = \frac{2\sigma^2 (-\text{Re } C_T)}{\lambda_r} \left[1 + \left(\frac{\text{Im } C_T}{\text{Re } C_T} \right)^2 \right].$$

6. Использование формализма круговых кумулянтов для изучения синхронизации в пористых ячейках

При наличии шума задача о поведении распределения плотности вероятности состояний в такой системе имеет физический смысл не только для большого ансамбля, но и для единственного элемента или небольшого их количества. Комплексные Фурье-коэффициенты распределения $w(\delta\varphi, t)$ имеют следующий смысл: $a_j = \langle e^{ij\delta\varphi} \rangle$.

В работе [13] для динамики системы получено двухкумулянтное приближение

$$\begin{aligned}\dot{Z} &= (i\Omega_0 - \gamma)Z + h - h^* Z^2 - h^* \kappa, \\ \dot{\kappa} &= 2(i\Omega_0 - \gamma)\kappa - 4h^* Z \kappa - \sigma^2(4\kappa + 2Z^2),\end{aligned}\quad (6.1)$$

для нашего случая $\gamma = 0$ (отсутствие расстройки частот), $Z = a_1$, $\kappa = a_2 - a_1$.

Синхронность осцилляторов можно количественно характеризовать величиной $\langle \cos \delta\varphi \rangle = \text{Re } Z$, таким образом задача математически сводится к проблеме вычисления Z . Для стационарного распределения $\dot{Z} = \dot{\kappa} = 0$ и из второго уравнения системы (6.1) можно выразить

$$\kappa = \frac{\sigma_{\delta\varphi}^2 Z}{i(\Omega_{01} - \Omega_{02}) - 2\sigma_{\delta\varphi}^2 - 2|K|\cos\beta Z}, \quad (6.2)$$

после чего первое уравнение системы становится кубическим относительно Z :

$$\begin{aligned}Z^3 + \frac{3}{2}D_1 Z^2 - (1 - D_1 D_2)Z - D_2 &= 0, \\ D_1 &\equiv \frac{\sigma_{\delta\varphi}^2 - i(\Omega_{01} - \Omega_{02})}{|K|\cos\beta}, \quad D_2 \equiv \frac{\sigma_{\delta\varphi}^2 - i(\Omega_{01} - \Omega_{02})/2}{|K|\cos\beta}.\end{aligned}\quad (6.3)$$

У данного кубического уравнения следует выбирать ту ветку решений, которая при $\Omega_{01} - \Omega_{02} = \sigma_{\delta\varphi} = 0$ дает $Z = 1$; выражения не приводятся в силу их чрезвычайной громоздкости.

Для идентичных конвективных осцилляторов $\Omega_{01} = \Omega_{02}$, стационарное распределение $\delta\varphi$ в стохастической системе (5.3) может быть найдено точно – это распределение фон Мисеса (von Mises) [13,16,18]

$$w(\delta\varphi) = \frac{\exp\left(\frac{2|K|\cos\beta}{\sigma_{\delta\varphi}^2} \cos\delta\varphi\right)}{2\pi I_0\left(\frac{2|K|\cos\beta}{\sigma_{\delta\varphi}^2}\right)},$$

для которого можно вычислить

$$Z_{\Omega_{01}=\Omega_{02}} = \frac{I_1\left(2|K|\cos\beta/\sigma_{\delta\varphi}^2\right)}{I_0\left(2|K|\cos\beta/\sigma_{\delta\varphi}^2\right)}, \quad (6.4)$$

здесь $I_n(\cdot)$ – функция Бесселя n -го порядка от мнимого аргумента.

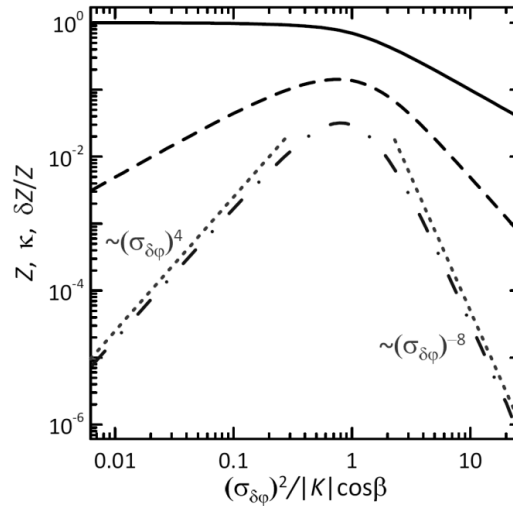


Рис. 2. Степень синхронизации двух идентичных конвективных осцилляторов, подверженных воздействию шума, Z (сплошная кривая) в зависимости от интенсивности шума $\sigma_{\delta\varphi}^2$ (6.4). Штриховая кривая: второй кумулянт (6.2); синяя штрихпунктирная: относительная погрешность двухкумулянтного приближения (6.3); красный пунктир показывает наклон степенных законов

На рис. 2. двухкумулянтное приближение (6.3) сопоставляется с точным решением (6.4) (двухкумулянтное приближение не ограничено условием $\Omega_{01} = \Omega_{02}$, для которого возможно точное решение). Можно видеть, что при малой интенсивности шума двухкумулянтное приближение имеет точность $O(\sigma_{\delta\varphi}^4)$ (красный пунктир: $\sigma_{\delta\varphi}^4 / (4|K|^2 \cos^2 \beta)$). При большой интенсивности шума малым параметром задачи становится $1/\sigma_{\delta\varphi}^2$ и двухкумулянтное приближение дает очень высокий порядок точности (красный пунктир: $0.5[\sigma_{\delta\varphi}^2 / (|K| \cos \beta)]^{-4}$).

Таким образом, можно явно видеть, что построенное на основе формализма круговых кумулянтов обобщение теории Отта–Антонсена [17] имеет смысл и позволяет решать физические задачи не только для больших ансамблей, как это было с оригинальной теорией [17], но и для пары связанных осцилляторов, рассмотренной в настоящей работе, или даже единственного осциллятора, для которого может быть сформулирована задача о когерентности отклика на периодическое внешнее воздействие в присутствии шума [2].

Заключение

Для задачи о термоконцентрационной конвекции в пористой среде получены уравнения стохастической динамики фазы колебаний течения при случайной флуктуации внешних температурных условий. В рамках этих фазовых уравнений исследована проблема о степени синхронности колебаний в связанных ячейках. С использованием круговых кумулянтов – фактически, обобщения теории Отта–Антонсена – получены количественные характеристики степени синхронности и установлена их зависимость от параметров задачи. Следует отметить, что оригинальная теория Отта–Антонсена имеет смысл только для больших ансамблей осцилляторов, поскольку в своей основе опирается

на распределение плотности вероятности состояний, но не позволяет рассматривать задачи с индивидуальным шумом в осцилляторах. В присутствии же шума, распределение плотности вероятности состояний имеет смысл не только для большого ансамбля, но и для пары связанных осцилляторов или даже одного осциллятора (например, задача о когерентности отклика осциллятора с шумом на периодическое внешнее воздействие).

Список источников

1. Acebrón J. A., Bonilla L. L., C. J. P. Vicente, et al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Reviews of Modern Physics*. 2005. Vol. 77, № 1. P. 137. URL: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137> (дата обращения: 05.10.2024).
2. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.М.: Техносфера, 2003. 493 с.
3. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* / Kuramoto, Y. Dover, New York, 2003. 156 p.
4. Nakao H. Phase reduction approach to synchronization of nonlinear oscillators // *Contemporary Physics*. 2016. Vol. 57. P. 188–214. URL: <https://doi.org/10.1080/00107514.2015.1094987> (дата обращения: 05.10.2024).
5. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. М.: Наука, 1974. 503 с
6. Теория колебаний / Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. М.: Наука, 1981. 918 с.
7. Тюлькина И.В., Голдобин Д.С. Синхронизация конвективных течений двухкомпонентной жидкости в смежных ячейках пористой среды // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2023. № 2. С. 59–68. URL: <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2023-2-59-68> (дата обращения: 05.10.2024).
8. Голдобин Д.С., Любимов Д.В. Термоконтрационная конвекция бинарной смеси в горизонтальном слое пористой среды при наличии источника тепла или примеси // *Журн. Экспериментальной и Теоретической Физики*. 2007. Т. 131, № 5. С. 949–956.
9. Hart J. E. A note on the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations // *Journal of Fluid Mechanics*. 1983. Vol. 132. P. 271–281. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112083001603> (дата обращения: 05.10.2024).
10. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. М.: Наука, 1972. 392 с.
11. Устойчивость конвективных течений / Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. М.: Наука, 1989. 320 с.
12. *Convection in Porous Media* / Nield D. A., Bejan A. New-York: Springer Verlag, 1998. 546 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3033-3> (дата обращения: 05.10.2024).
13. Goldobin D. S., Tyulkina, I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators // *Chaos*. 2018. Vol. 28. P. 101101. URL: <https://doi.org/10.1063/1.5053576> (дата обращения: 05.10.2024).
14. Голдобин Д.С., Долматова А.В., Розенблюм М., Пиковский А. Синхронизация в ансамблях Курамото–Сакагучи при конкурирующем влиянии общего шума и глобальной связи // *Известия вузов. ПНД*. 2017. Т. 25, № 6. С. 5–37. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37> (дата обращения: 05.10.2024).
15. Goldobin D. S., Teramae J.-N., Nakao H., Ermentrout G. B. Dynamics of Limit-Cycle Oscillators Subject to General Noise // *Physical Review Letters*. 2010. Vol. 105. P. 154101. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.154101> (дата обращения: 05.10.2024).
16. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Poperechny I. S., Raikhe Y. L. Collective in-plane magnetization in a two-dimensional XY macrospin system within the framework

of generalized Ott–Antonsen theory // *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences (Series A)*. 2020. Vol. 378, № 2171. P. 20190259. URL: <https://doi.org/10.1098/rsta.2019.0259> (дата обращения: 05.10.2024).

17. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // *Chaos*. 2008. Vol. 18. P. 037113. URL: <https://doi.org/10.1063/1.2930766> (дата обращения: 05.10.2024).

18. Bertini L., Giacomini G., Pakdaman K. Dynamical aspects of mean field plane rotators and the Kuramoto model // *Journal of Statistical Physics*. 2010. Vol. 138. P. 270–290. URL: <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9908-9> (дата обращения: 05.10.2024).

References

1. Acebrón, J. A., Bonilla, L. L., Vicente, C. J. P., et al. (2005), "The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena", *Reviews of Modern Physics*, vol. 77, no. 1, pp. 137. URL: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137>.
2. Pikovsky, A., Rosenblum, M. and Kurths J. (2001), *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, UK.
3. Kuramoto, Y. (2003), *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Dover, New York, USA.
4. Nakao, H. (2016), "Phase reduction approach to synchronization of nonlinear oscillators", *Contemporary Physics*, vol. 57, pp. 188–214. URL: <https://doi.org/10.1080/00107514.2015.1094987>.
5. Bogolyubov, N. N. and Mitropol'skiy, Yu. A. (1974), *Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations], Nauka, Moscow, Russia.
6. Andronov, A. A., Vitt, A. A. and Khaykin, S. E. (1981), *Teoriya kolebaniy* [Oscillation theory], Nauka, Moscow, Russia.
7. Tyulkina, I. V., Goldobin, D. S. (2023), "Synchronization of convective currents of a two-component fluid in adjacent porous cells", *Bulletin of Perm University. Physics*, no. 2, pp. 59–68. URL: <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2023-2-59-68>.
8. Goldobin D.S., Lyubimov, D.V. (2007), "Soret-Driven Convection of Binary Mixture in a Horizontal Porous Layer in the Presence of a Heat or Concentration Source", *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 104, no. 5, pp. 830–836.
9. Hart, J. E. (1983), "A note on the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 132, pp. 271–281. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112083001603>.
10. Gershuni, G. Z. and Zhukhovitskii, E. M. (1976), *Convective stability of incompressible fluids*, Jerusalem, Israel: Keter Publishing House.
11. Gershuni, G.Z., Zhukhovitsky, E.M. and Nepomnyashchy, A.A. (1989), *Stability of convective flows* [Ustoychivost' konvektivnykh techeniy], Nauka, Moscow, Russia.
12. Nield, D. A. and Bejan, A. (1998), *Convection in Porous Media*, New-York: Springer Verlag, USA. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3033-3>.
13. Goldobin, D. S., Tyulkina, I. V., Klimenko, L. S. and Pikovsky, A. (2018), "Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators", *Chaos*, vol. 28. pp. 101101. URL: <https://doi.org/10.1063/1.5053576>.
14. Goldobin, D.S., Dolmatova, A.V., Rosenblum, M. and Pikovsky, A. (2017), "Synchronization in Kuramoto–Sakaguchi ensembles with competing influence of common noise and global coupling", *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 25, no. 6, pp. 5–37. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37>.

15. Goldobin, D. S., Teramae, J.-N., Nakao, H. and Ermentrout, G. B. (2010), "Dynamics of Limit-Cycle Oscillators Subject to General Noise", *Physical Review Letters*, vol. 105. pp. 154101. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.154101>.
16. Tyulkina, I. V., Goldobin, D. S., Klimenko, L. S., Poperechny, I. S. and Raikhe, Y. L. (2020), "Collective in-plane magnetization in a two-dimensional XY macrospin system within the framework of generalized Ott–Antonsen theory", *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences (Series A)*, vol. 378, no. 2171, pp. 20190259. URL: <https://doi.org/10.1098/rsta.2019.0259>.
17. Ott, E., Antonsen, T. M. (2008), "Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators", *Chaos*, vol. 18. pp. 037113. URL: <https://doi.org/10.1063/1.2930766>.
18. Bertini, L., Giacomini, G. and Pakdaman, K. (2010), "Dynamical aspects of mean field plane rotators and the Kuramoto model", *Journal of Statistical Physics*, vol. 138. pp. 270-290. URL: <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9908-9>.

Информация об авторах:

И. В. Тюлькина – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), Author ID: 57202792441;

Д. С. Голдобин – кандидат физико-математических наук, заведующий Лаборатории подземной утилизации углерода (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), доцент кафедры теоретической физики Пермского государственного национального исследовательского университета (614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), Author ID: 8368187600.

Information about the authors:

I. V. Tyulkina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, junior researcher in the Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS (1, Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), Author ID: 57202792441;

D. S. Goldobin – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Laboratory of underground sequestration of carbon in the Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS (1, Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), Associated Professor at Theoretical Physics department at the Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614990), Author ID: 8368187600.