

Учредитель: Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Научный журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" публикует оригинальные научные статьи, краткие сообщения и обзорные статьи по направлениям журнала на русском и английском языках, ранее не публиковавшиеся и не представленные для публикации в других изданиях. Все статьи проходят рецензирование членами редакционной коллегии журнала и внешними рецензентами.

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

БУЗМАКОВА М. М., к. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

МАЛАНИН В. В., д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

БАРУЛИНА М. А., д. ф.-м. н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

НУРБАКОВА Д. М., PhD in Computer Science; Национальный институт прикладных наук Лиона (National Institute of Applied Sciences of Lyon), Лион, Франция.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

БУЗМАКОВА М. М., к.ф.-м.н., доцент, **главный редактор**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

РУСАКОВА О. Л., к.ф.-м.н., доцент, **ответственный секретарь**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

АЛЕКСЕЕВ А. О., к.э.н., доцент; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

АПТУКОВ В. Н., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

АПУШКИНСКАЯ Д. Е., д.ф.-м.н.; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

БАРУЛИНА М. А., д.ф.-м.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

БИРЮКОВ А. Н., д.э.н., доцент; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;

БОРИСОВ В. В., д.т.н., профессор; Смоленский филиал национального исследовательского университета «МЭИ», Смоленск, Россия;

ВЕЧТОМОВ Е. М., д.ф.-м.н., профессор; Вятский государственный университет, Киров, Россия;

ГУСЕВ А. Л., д.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ДЕМИДОВ С. С., д.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

ИВАНОВ Д. В., д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

ИСАЕВ К. П., д.ф.-м.н.; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ИШКИН Х. К., д.ф.-м.н.; доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

КРИВОШЕЕВА О. А., д. ф.-м. н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

КОССОВИЧ Л. Ю., д.ф.-м.н., профессор; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

КУЗНЕЦОВ А. Г., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

МАЛАНИН В. В., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

МАТВЕЕНКО В. П., д.т.н., профессор, академик РАН; Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия;

МАХНЕВ А. А., д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

ПАЛКОВА И. В., д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

ПЕСТРЕНИН В. М., к.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ПОЛОСКОВ И. Е., д.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

РУСАКОВ С. В., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

САВЧИН В. М., д.ф.-м.н., профессор; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

СЕЛЕТКОВ И. П., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ТРУСОВ П. В., д.ф.-м.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

ТЮРИН С. Ф., д.т.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

ХАЧАЙ М. Ю., д.ф.-м.н., профессор РАН, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

ХЕННЕР Е. К., д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАО; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ФАЗУЛЛИН З.Ю., д.ф.-м.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ЧЕРНЫХ В. В., д.ф.-м.н., доцент; Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия;

ЧЕРНИКОВ А. В., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ЧИНЕНОВА В. Н., к.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

ШАХМАМЕТОВА Г. Р., д.т.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ШВАРЦ К. Г., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ЮМАГУЛОВ М. Г., д.ф.-м.н., профессор; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ЯКОВЛЕВ В. И., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ЯСНИЦКИЙ Л. Н., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77 - 66787 от 08.08.2016.

Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ, eLIBRARY ID 28484).

Founder: Perm State University

The journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" publishes Full Articles, Short Communications Article and Review paper/perspectives on the journal's directions, which have not been previously published. The papers have been written in Russian and English. The papers are reviewed by the journal editorial board members and external reviewers.

EDITORIAL COUNCIL

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Perm State University, Perm, Russia;
NURBAKOVA D. M., PhD in Computer Science; National Institute of Applied Sciences of Lyon, France.

EDITORIAL BOARD

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Editor-in-Chief**; Perm State University, Perm, Russia;
RUSAKOVA O. L., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Executive Secretary**; Perm State University, Perm, Russia;
ALEKSEEV A. O., Candidate of Science in Economics, Associate Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
APTUKOV V. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
APUSHKINSKAYA D. E., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;
BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Perm State University, Perm, Russia;
BIRUKOV A. N., Doctor of Science in Economics, Associate Professor; Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;
BORISOV V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Smolensk Branch of National Research University "MEI", Smolensk, Russia;
VECHTOMOV E. M., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Vyatka State University, Kirov, Russia;
GUSEV A. L., Doctor of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
DEMIDOV S. S., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
IVANOV D. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
ISAEV K. P., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
ISHKIN H. K., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
KRIVOSHEEVA O. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
KOSSOVICH L. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
KUZNECOV A. G., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
MATVEENKO V. P., Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician of RAS; Institute of Continuous Media Mechanics, UrD RAS, Perm, Russia;

MAHNEV A. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS;
PAPKOVA I. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
PESTRENIN V. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
POLOSKOV I. E., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
RUSAKOV S. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
SAVCHIN V. M., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;
SELETKOV I. P., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
TRUSOV P. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
TURIN S. F., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
HACHAI M. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of RAS, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS, Yekaterinburg, Russia;
HENNER E. K., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAO; Perm State University, Perm, Russia;
FAZULLIN Z. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
CHERMNYH V. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia;
CHERNIKOV A. V., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
CHINENOVA V. N., Candidate of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
SHAHMAMETOVA G. R., Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
SHVARTS K. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
UMAGULOV M. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
YAKOVLEV V. I., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
YASNICKIY L. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia.

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor). Certificate of registration of the mass media PI No. FS 77 - 66787 dated 08.08.2016.

The journal is included in the national information and analytical system "Russian Science Citation Index" (eLIBRARY ID 28484).

С о д е р ж а н и е

«Математика»

Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированная формула Герасимова–Капуто.....	5
Половицкий Я.Д., Коневских Т.М. Ослабления условия инцидентности для подгрупп, рассмотренные алгебраистами Пермского университета.....	15

«Механика»

Макеев Н.Н. Движение гиростата под действием следящего момента силы.....	24
Митин В.Ю., Аптуков В.Н. Математические модели прогнозирования температуры и осадков с использованием фрактального и фурье-анализа метеорологических рядов.....	33

«Информатика»

Ощепков А.Ю., Власов А.Н. Компьютерное моделирование робастных и адаптивных алгоритмов в технологии модельно-ориентированного проектирования.....	43
Файзрахманов Р.А., Долгова Е.В., Сухих И.И. Анализ состояния гармонизации дисциплин направления 09.03.01 "Информатика и вычислительная техника".....	53
Черняев А.А., Ивашко А.Г. Создание алгоритма для предсказания наличия недостоверной информации в социальных сетях на русском языке.....	60
Информация для авторов.....	72

C o n t e n t s

«Mathematics»

- Volosova N. K., Volosov K. A., Volosova A. K., Karlov M. I., Pastuhov D. F., Pastuhov Yu. F.** Modified Gerasimov–Caputo Formula..... 5
- Polovitsky Ya. D., Konevskikh T. M.** Weakening Incidence Conditions for Subgroups Considered by Algebraists From Perm University..... 15

«Mechanics»

- Makeev N. N.** The Force Tracking Moment Action on the Gyrostat Motion..... 24
- Mitin V. Yu., Aptukov V. N.** Mathematical Models of Temperature and Precipitation Forecasting Using Fractal and Fourier Analysis of Meteorological Series..... 33

«Computer Science»

- Oshchepkov A. Yu., Vlasov A. N.** Computer Modeling of Robust and Adaptive Algorithms in Model-based Design Technology..... 43
- Faizrakhmanov R. A., Dolgova E. V., Sukhikh I. I.** Harmonization Status Analysis of 09.03.01 "Computer Science and Computer Engineering" Disciplines 53
- Chernyaev A. A., Ivashko A. G.** An Algorithm Creating for Predicting the Inaccurate Information Presence in Social Networks in Russian Language..... 60
- Information for authors 72

«Математика»

Научная статья

УДК 519.6

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-5-14

Модифицированная формула Герасимова–Капуто

**Н.К. Волосова¹, К.А. Волосов², А.К. Волосова², М.И. Карлов³, Д.Ф. Пастухов⁴,
Ю.Ф. Пастухов⁴**

¹Московский государственный технический университет (МГТУ) им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

²Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия

³Московский физико-технический университет (МФТИ), Москва, Россия

⁴Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Республика Беларусь

Автор, ответственный за переписку: Дмитрий Феликсович Пастухов, dmitrij.pastuhov@mail.ru

Аннотация. В работе впервые получены модифицированные формулы Герасимова–Капуто. Модифицированные формулы учитывают значение производной функции в нуле с порядком на единицу меньше, чем порядок производной, стоящей под знаком интеграла Герасимова–Капуто. Без учета нового слагаемого в формулах Герасимова–Капуто не всегда корректно вычисление дробной производной на интервале любого порядка и для любой функции. В работе также описан простой численный алгоритм с квадратурной формулой Гаусса, позволяющей вычислять дробную производную с двойной точностью. Составлены таблицы дробной производной для функций синуса и косинуса. Причем первая половина таблиц (в интервале порядка (0,1)) и вторая половина таблиц (в интервале порядка (1,2)) получена программами по разным алгоритмам. В работе достигнута абсолютная погрешность вычисления дробной производной 10^{-15} .

Ключевые слова: численные методы; дробная производная Герасимова–Капуто; дробная производная Капуто

Для цитирования: Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированная формула Герасимова–Капуто // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 1(64). С. 5–14. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-5-14.

Статья поступила в редакцию 19.01.2024; одобрена после рецензирования 14.02.2024; принята к публикации 15.03.2024.

«Mathematics»

Research article

Modified Gerasimov–Caputo Formula

N.K. Volosova¹, K.A. Volosov², A.K. Volosova², M.I. Karlov³, D.F. Pastuhov⁴, Yu.F. Pastuhov⁴

¹Bauman Moscow State Technical University (BMSTU), Moscow, Russia

²Russian University of Transport (RUT MIIT), Moscow, Russia

³Moscow University of Physics and Technology (MIPT), Moscow, Russia

⁴Polotsk State University, Novopolotsk, Republic of Belarus

Corresponding author: Dmitriy F. Pastukhov, dmitrij.pastuhov@mail.ru



Данная работа © 2024 Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. In this work, modified Gerasimov–Caputo formulas were obtained for the first time. The modified formulas take into account the value of the derivative of the function at zero with an order of one less than the order of the derivative under the sign of the Gerasimov–Caputo integral. Without taking into account the new term in the Gerasimov–Caputo formulas, it is not always possible to calculate the fractional derivative on any order interval and for any function. The paper also describes a simple numerical algorithm with the Gaussian quadrature formula, which allows one to calculate the fractional derivative with double precision. tables of fractional derivatives for the sine and cosine functions have been compiled. Moreover, the first half of the tables (in the interval of order (0,1)) and the second half of the tables (in the interval of order (1,2)) were obtained by programs using different algorithms. In the work, an absolute error in calculating the fractional derivative of 10–15 was achieved.

Keywords: numerical methods; Gerasimov–Caputo fractional derivative; Caputo fractional derivative

For citation: Volosova, N.K., Volosov, K.A., Volosova, A.K., Karlov, M.I., Pastukhov, D.F., Pastukhov, Yu.F. (2024), "Modified Gerasimov–Caputo Formula", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(64), pp. 5-14. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-5-14.

The article was submitted 19.01.2024; approved after reviewing 14.02.2024; accepted for publication 15.03.2024.

Введение

В работе [1] показано, что в задачах аномальной диффузии необходимо использовать производные дробного порядка, принимающего значения на интервале (0,2). Другой пример, в задачах механики поток газа Трикоми на звуковой линии прямо пропорционален производной порядка 2/3 от функции тока [2]. Как известно, производная Герасимова–Капуто определяется [1], [2], [3], [4] интегральной формулой (1).

В работе показано, что для явного вычисления производной Герасимова–Капуто необходимо еще одно слагаемое, которое зависит от значения функции $u(0)$, переменной t и порядка дробной производной α на интервале (0,1). Данное слагаемое необходимо для согласования производной функции целого порядка и предельного значения производной дробного порядка, когда ее порядок становится целым. Для некоторых функций новое дополнительное слагаемое в точке $t=0$ не требуется, например, для функции $u(t)=\sin(t)$ в интервале $\alpha = (0,1)$. В работе максимально упрощен алгоритм вычисления дробных производных квадратурной формулой Гаусса. В программу вводится исходная функция, первая или вторая ее производные. Гладкости первого или второго порядка используемой функции требует также формула-определение (1).

В работах [5], [6], [10] рассмотрены разностные уравнения и аналог задачи оптимального управления Л.С. Понтрягина с производными дробного порядка.

Постановка задачи

Пусть заданная функция $u(x,t)$ является достаточно гладкой по переменной t , $u(x,t) \in C^n(0,t)$, тогда производная функции целого порядка n по переменной t является непрерывной и интеграл в формуле (1) сходится, так как в особой точке $\tau \rightarrow t$ знаменатель дроби пропорционален $1/(t-\tau)^{\alpha-n+1}$ учитывая $-1 < \alpha - n + 1 < 0$.

Определение 1. Производной дробного порядка $\alpha > 0$ Герасимова–Капуто от функции двух переменных $u(x,t)$ (по переменной t) [1], [2], [3] называется функция

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(x,t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial^n u(x,\tau)}{\partial \tau^n} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad (1)$$

$$n = [\alpha] + 1, n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha - n + 1 = \{\alpha\} \in (0,1).$$

Для простоты рассмотрим частный случай дробной производной для функции одной переменной $u(t)$, так как в нашей задаче переменная x не используется. Для двух интересующих нас интервалов порядка производной с учетом формулы (1) получим:

$$1). 0 < \alpha < 1, n = 1$$

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, n = 1, 0 < \alpha < 1 \quad (2)$$

$$2). 1 < \alpha < 2, n = 2$$

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{d^2 u(\tau)}{d\tau^2} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, n = 2, 1 < \alpha < 2. \quad (3)$$

Гамма-функция в формулах (2), (3) вычисляется по формуле Эйлера (4):

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, t \in [0, \infty), \alpha > 0. \quad (4)$$

Поскольку дробные производные в формулах (2), (3) определены с точностью до множителя $\Gamma(1-\alpha), \Gamma(2-\alpha)$, то сложность вычисления производной дробного порядка заключается в сложности численного алгоритма для соответствующего интеграла. В языке FORTRAN вызовом функции $dgamma(\alpha)$ $\Gamma(\alpha)$ вычисляется с относительной точностью 10^{-15} .

Очевидно, что производная дробного порядка α в (2), (3) должна переходить в производную целого порядка $n-1$ в случае $\alpha \rightarrow n-1$. Если в формуле (2) $\alpha \rightarrow n-1=0$, то

$$(D_{0+,t}^{\alpha \rightarrow 0} u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1)} \int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha=0}} = u(t) - u(0). \quad (5)$$

Аналогично, если в формуле (3) $\alpha \rightarrow n-1=1$, то

$$(D_{0+,t}^{\alpha \rightarrow 1} u)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-1)} \int_0^t \frac{d^2 u(\tau)}{d\tau^2} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-1}} = \frac{d}{dt} u(t) - \frac{d}{dt} u(0). \quad (6)$$

Рассмотрим пример:

$$u(t) = \sin(t) : D_{0+}^{\alpha \rightarrow 0} u(t) \stackrel{(5)}{=} \sin(t) - \sin(0) = \sin(t)$$

$$D_{0+}^{\alpha \rightarrow 1} u(t) \stackrel{(6)}{=} \sin'(t) - \sin'(0) = \cos(t) - 1 \neq \cos(t).$$

Получаем противоречие для производной синуса первого порядка и формулой (6) на интервале $\alpha \in (1,2)$, хотя противоречия для производной синуса нуль порядка на интервале $\alpha \in (0,1)$ и формулой (5) нет.

Чтобы устранить противоречие, в формулу (2) нужно добавить слагаемое вида

$$(\overline{D_{0+,t}^{\alpha}} u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} + u(0)g_1(t, \alpha) \right). \quad (7)$$

Сравнивая формулы (5) и (7), получим $g_1(t, \alpha \rightarrow 0+0) = 1, \alpha \in (0,1)$. Также добавим в формулу (3) слагаемое вида

$$(\overline{D_{0+,t}^{\alpha}} u)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\int_0^t \frac{d^2 u(\tau)}{d\tau^2} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} + \frac{d}{dt} u(0)g_2(t, \alpha) \right) \quad (8)$$

$$g_2(t, \alpha \rightarrow 1+0) = 1, \alpha \in (1,2).$$

Преобразуем интеграл в формуле (2) по частям

$$\begin{aligned} \text{для } \alpha \in (0,1): \quad & \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} = \\ & = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{u(0)}{t^{\alpha}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\left(\frac{u(t-\varepsilon)}{(\varepsilon)^{\alpha}} \right) - \alpha \int_0^{t-\varepsilon} \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} d\tau \right] \right). \quad (9) \end{aligned}$$

В формуле (9) под знаком предельного перехода два слагаемые, зависящие от переменной ε , стремятся к бесконечности, и именно их разность может дать конечное число. Уточняя формулу (7), получим

$$(\overline{D_{0+,t}^{\alpha}} u)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int_0^t \frac{du(\tau)}{d\tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}} + \frac{u(0)}{t^{\alpha}} \right), \alpha \in (0,1). \quad (10)$$

$$\text{Преобразуем также (3):} \quad \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_0^t \frac{d^2 u(\tau)}{d\tau^2} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} =$$

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(-\frac{u'(0)}{t^{\alpha-1}} + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\left(\frac{u'(t-\varepsilon)}{(\varepsilon)^{\alpha-1}} \right) - (\alpha-1) \int_0^{t-\varepsilon} \frac{u'(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \right] \right). \quad (11)$$

Аналогично формуле (10), для интервала (0,1) на интервале (1,2) получим модифицированную формулу Герасимова–Капуто (12): $1 < \alpha < 2, n=2$

$$(\overline{D_{0+,t}^{\alpha}} u)(t) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left(\int_0^t \frac{d^2 u(\tau)}{d\tau^2} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}} + \frac{u'(0)}{t^{\alpha-1}} \right). \quad (12)$$

Заметим, что формула (10) переходит в функцию $u(t)$ при $\alpha \rightarrow +0$, а формула (12) переходит в производную $\frac{du(t)}{dt}$ при $\alpha \rightarrow 1+0$.

Определение 2. Модифицированной формулой Герасимова–Капуто на интервале $0 < \alpha < 1, n=1$ определим формулой (10), а на интервале $1 < \alpha < 2, n=2$ определим формулой (12).

Определение 3. Модифицированной формулой Герасимова–Капуто на интервале $n-1 < \alpha < n, n=[\alpha]+1$ определим формулой

$$(\overline{D_{0+,t}^{\alpha}} u)(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\int_0^t \frac{d^n u(\tau)}{d\tau^n} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} + \frac{u^{(n-1)}(0)}{t^{\alpha-n+1}} \right). \quad (13)$$

Формула (13) переходит в формулу $u^{(n-1)}(t)$ при $\alpha \rightarrow n-1+0$.

Рассмотрим обобщение производной дробного порядка от степенной функции:

$$\frac{d^k x^n}{dx^k} = n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

Для производной дробного порядка α получим аналогичное выражение:

$$\frac{d^\alpha x^n}{dx^\alpha} = \frac{n!}{(n-\alpha)!} x^{n-\alpha} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha}.$$

Разложим гладкую функцию в ряд Маклорена, используя предыдущую формулу:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)t^n}{\Gamma(n+1)},$$

$$(D_{0+,t}^\alpha u)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{u^{(n)}(0)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}. \quad (14)$$

Для функции $u(t) = \cos(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^{2k}$ получим

$$(D_{0+,t}^\alpha \cos(t))^{(14)} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k-\alpha}}{\prod_{i=1}^{2k} (i-\alpha)}, & \alpha \in (0,1) \\ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k-\alpha}}{\prod_{i=2}^{2k} (i-\alpha)}, & \alpha \in (1,2) \end{cases}. \quad (15)$$

Для функции $u(t) = \sin(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$ имеем

$$(D_{0+,t}^\alpha \sin(t))^{(14)} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1-\alpha}}{\prod_{i=1}^{2k+1} (i-\alpha)}, & \alpha \in (0,1) \\ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1-\alpha}}{\prod_{i=2}^{2k+1} (i-\alpha)}, & \alpha \in (1,2) \end{cases}. \quad (16)$$

Опишем численный алгоритм, аппроксимирующий формулу (10), отбрасывая известный множитель $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ и слагаемое $\frac{u(0)}{t^\alpha}$.

Представим интеграл (2) в виде суммы, используя во втором интеграле замену переменных $z|_{t-b}^0 = t - \tau|_b^t, dz = -d\tau$.

$$I(u(t)) \equiv \int_0^t \frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} = \int_0^b \frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + \int_b^t \frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} =$$

$$= \int_0^b \frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} - \int_{t-b}^0 \frac{u'(t-z)dz}{z^\alpha} = \int_0^b \frac{u'(\tau)d\tau}{(t-\tau)^\alpha} + \int_0^{t-b} \frac{u'(t-z)dz}{z^\alpha} \quad (17)$$

Для максимального упрощения алгоритма, первую производную в (17) от известной функции считаем заданной.

В работе [9] получена составная квадратурная интегральная формула с равномерным шагом и с 12 порядком погрешности $O(h^{12})$, которую мы используем для первого интеграла в (17) на отрезке $[0, b]$

$$\int_a^b u(x)dx = 5h \sum_{i=0}^n C_i u(x_i) + O(h^{12}), n = 10m, h = \frac{b-a}{n}, m \in N,$$

если

$$C_i = \begin{cases} \frac{16067}{299376}, & i = 0 \vee i = n \\ \frac{16067}{149688}, & (i \equiv 0 \bmod 10) \wedge (0 < i < n) \\ \frac{26575}{74844}, & (i \equiv 1 \bmod 10) \vee (i \equiv 9 \bmod 10) \\ -\frac{16175}{99792}, & (i \equiv 2 \bmod 10) \vee (i \equiv 8 \bmod 10) \\ \frac{5675}{6237}, & (i \equiv 3 \bmod 10) \vee (i \equiv 7 \bmod 10) \\ -\frac{4825}{5544}, & (i \equiv 4 \bmod 10) \vee (i \equiv 6 \bmod 10) \\ \frac{17807}{12474}, & i \equiv 5 \bmod 10 \end{cases}. \quad (18)$$

Вычислим второй интеграл в (17) $\int_0^{t-b} \frac{u'(t-z)dz}{z^\alpha}$.

Предварительно введем вспомогательный интеграл с параметром a под аргументом функции:

$$I_2(b, t, a, \alpha) = \int_0^{t-b} \frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha}. \quad (19)$$

Параметр a необходим для аппроксимации первой производной в (10) квадратурной формулой, которая в данной работе не используется, но получена в работе [9].

Весовая функция неотрицательна $\rho(z) = \frac{1}{z^\alpha} \geq 0$ на отрезке $[0, t-b]$.

Построим [8] квадратурную формулу Гаусса с тремя узлами.

Утверждение 1. Если функция $u(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, t-b]$ с весом $\rho(z) = \frac{1}{z^\alpha} \geq 0, z \in [0, t-b]$, то квадратурная формула Гаусса имеет вид

$$\int_0^{t-b} \frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha} = C_1 u(x_1) + C_2 u(x_2) + C_3 u(x_3) + O((t-b)^6), \quad (20)$$

где неизвестные $C_1, C_2, C_3, x_1, x_2, x_3$ равны

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \left((t + a - x_2)(t + a - x_3) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \right. \\
 &\quad \left. - (2(t+a) - x_3 - x_2) \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} \right), \\
 C_2 &= \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)} \left((t + a - x_3)(x_1 - t - a) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + \right. \\
 &\quad \left. + (2(t+a) - x_1 - x_3) \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} \right), \\
 C_3 &= \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - C_2 - C_1, \\
 x_1 &= t + a - 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) + \frac{b_1}{3}, \\
 x_2 &= t + a - 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right) + \frac{b_1}{3}, \\
 x_3 &= t + a - 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right) + \frac{b_1}{3}, \\
 \varphi &= \arccos\left(-\frac{q}{2r}\right) = \arccos\left(-\frac{\left(\frac{2}{27}\right)b_1^3 - \frac{b_1 c}{3} + d}{2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}}\right).
 \end{aligned}$$

В формуле (20) b_1, c, d – неизвестные для ортогонального полинома [8]:

$$\begin{aligned}
 P_3(z) &= z^3 + b_1 z^2 + cz + d, \quad \rho(z) = \frac{1}{z^\alpha} \geq 0, z \in [0, t-b], \\
 b_1 &= \frac{-3(3-\alpha)(t-b)}{(6-\alpha)}, c = \frac{3(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^2}{(5-\alpha)(6-\alpha)}, \\
 d &= \frac{-(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(4-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)}. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Определим ортогональный полином

$$z^3 + b_1 z^2 + cz + d, z|_{t-b}^0 = t - \tau|_b^t \geq 0$$

с 3 узлами и $\rho(z) = \frac{1}{(z)^\alpha} \geq 0, z \in [0, t-b]$ с помощью системы уравнений [8]:

$$\begin{cases}
 \int_0^{t-b} \rho(z) P_3(z) dz = 0 \Leftrightarrow \int_0^{t-b} \frac{z^3 + b_1 z^2 + cz + d}{z^\alpha} dz = 0 \\
 \int_a^{t-b} \rho(z) P_3(z) z dz = 0 \Leftrightarrow \int_0^{t-b} \frac{(z^3 + b_1 z^2 + cz + d)z}{z^\alpha} dz = 0 \Leftrightarrow \\
 \int_a^{t-b} \rho(z) P_3(z) z^2 dz = 0 \Leftrightarrow \int_0^{t-b} \frac{(z^3 + b_1 z^2 + cz + d)z^2}{z^\alpha} dz = 0
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \frac{(t-b)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)} + b_1 \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} + \frac{c(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{d(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} = 0 \\
 \frac{(t-b)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)} + b_1 \frac{(t-b)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)} + \frac{c(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} + \frac{d(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = 0 \cdot (22) \\
 \frac{(t-b)^{6-\alpha}}{(6-\alpha)} + b_1 \frac{(t-b)^{5-\alpha}}{(5-\alpha)} + \frac{c(t-b)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)} + \frac{d(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} = 0
 \end{cases}$$

Из системы (22) получим уравнения (23), (24):

$$\begin{cases}
 \frac{(t-b)^3}{(4-\alpha)(2-\alpha)} + b_1 \frac{(t-b)^2}{(3-\alpha)(2-\alpha)} + \frac{c(t-b)}{(2-\alpha)^2} + \frac{d}{(1-\alpha)(2-\alpha)} = 0 \quad (23) \\
 \frac{(t-b)^3}{(5-\alpha)(1-\alpha)} + b_1 \frac{(t-b)^2}{(4-\alpha)(1-\alpha)} + \frac{c(t-b)}{(3-\alpha)(1-\alpha)} + \frac{d}{(2-\alpha)(1-\alpha)} = 0
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \frac{(t-b)^3}{(5-\alpha)(3-\alpha)} + b_1 \frac{(t-b)^2}{(4-\alpha)(3-\alpha)} + \frac{c(t-b)}{(3-\alpha)^2} + \frac{d}{(3-\alpha)(2-\alpha)} = 0 \quad (24) \\
 \frac{(t-b)^3}{(6-\alpha)(2-\alpha)} + b_1 \frac{(t-b)^2}{(5-\alpha)(2-\alpha)} + \frac{c(t-b)}{(4-\alpha)(2-\alpha)} + \frac{d}{(2-\alpha)(3-\alpha)} = 0
 \end{cases}$$

Вычитая из вторых уравнений систем (23) и (24) первые уравнения в (23) и (24) соответственно, получим систему двух уравнений (25) с константами b_1, c :

$$\begin{cases}
 (t-b)^2 \left(\frac{3}{(5-\alpha)(4-\alpha)} \right) + (t-b)b_1 \left(\frac{2}{(4-\alpha)(3-\alpha)} \right) + c \left(\frac{1}{(3-\alpha)(2-\alpha)} \right) = 0 \\
 (t-b)^2 \left(\frac{3}{(6-\alpha)(5-\alpha)} \right) + (t-b)b_1 \left(\frac{2}{(5-\alpha)(4-\alpha)} \right) + c \left(\frac{1}{(4-\alpha)(3-\alpha)} \right) = 0
 \end{cases} \quad (25)$$

Второе уравнение в (25) умножим на дробь $\frac{1}{(2-\alpha)}$, затем вычтем из полученного выражения с множителем $\frac{1}{(4-\alpha)}$ первое уравнение

$$\begin{aligned}
 &\frac{3(t-b)}{(5-\alpha)} \left(\frac{1}{(6-\alpha)(2-\alpha)} - \frac{1}{(4-\alpha)^2} \right) + \\
 &\frac{2b_1}{(4-\alpha)} \left(\frac{1}{(5-\alpha)(2-\alpha)} - \frac{1}{(4-\alpha)(3-\alpha)} \right) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\frac{3(t-b)}{(5-\alpha)} \left(\frac{16-8\alpha+\alpha^2-(12-8\alpha+\alpha^2)}{(6-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)^2} \right) + \\
 &+ \frac{2b_1}{(4-\alpha)} \left(\frac{12-7\alpha+\alpha^2-(10-7\alpha+\alpha^2)}{(5-\alpha)(3-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)} \right) = 0 \Leftrightarrow \\
 &\frac{3(t-b)}{(5-\alpha)} \left(\frac{4}{(6-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)^2} \right) + \\
 &+ \frac{2b_1}{(4-\alpha)} \left(\frac{2}{(5-\alpha)(3-\alpha)(2-\alpha)(4-\alpha)} \right) = 0 \Leftrightarrow \\
 &b_1 = -\frac{3(t-b)(3-\alpha)}{(6-\alpha)}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

Выражая из первой формулы системы (25), найдем c с учетом результата (26):

$$\begin{aligned} c &= -(3-\alpha)(2-\alpha) \left((t-b)^2 \left(\frac{3}{(5-\alpha)(4-\alpha)} \right) + (t-b)b_1 \left(\frac{2}{(4-\alpha)(3-\alpha)} \right) \right) = \\ &= -\frac{3(3-\alpha)(2-\alpha)(t-b)^2}{(4-\alpha)} \left(\frac{1}{(5-\alpha)} - \frac{2}{(6-\alpha)} \right) = \\ &= -\frac{3(3-\alpha)(2-\alpha)(t-b)^2}{(4-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)} (-4+\alpha) = \frac{3(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^2}{(5-\alpha)(6-\alpha)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Получим d из первой строки системы (22) с учетом (26), (27) для найденных b_1, c :

$$\begin{aligned} d &= -(1-\alpha) \left(\frac{(t-b)^3}{(4-\alpha)} + b_1 \frac{(t-b)^2}{(3-\alpha)} + \frac{c(t-b)}{(2-\alpha)} \right) = \\ &= -(1-\alpha)(t-b)^3 \left(\frac{1}{(4-\alpha)} - \frac{3}{(6-\alpha)} + \frac{3(3-\alpha)}{(5-\alpha)(6-\alpha)} \right) = \\ &= -(1-\alpha)(t-b)^3 \left(\frac{6-\alpha-(12-3\alpha)}{(4-\alpha)(6-\alpha)} + \frac{3(3-\alpha)}{(5-\alpha)(6-\alpha)} \right) = \\ &= \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(6-\alpha)} \left(\frac{2}{(4-\alpha)} - \frac{3}{(5-\alpha)} \right) = \\ &= \frac{(1-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(6-\alpha)} \left(\frac{10-2\alpha-(12-3\alpha)}{(4-\alpha)(5-\alpha)} \right) = \\ &= -\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(4-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)}. \end{aligned} \quad (28)$$

Получен ортогональный полином с учетом формул (26), (27), (28):

$$\begin{aligned} P_3(z) &= z^3 + b_1 z^2 + cz + d = z^3 - \frac{3(t-b)(3-\alpha)}{(6-\alpha)} z^2 + \\ &+ \frac{3(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^2}{(5-\alpha)(6-\alpha)} z - \frac{(1-\alpha)(2-\alpha)(3-\alpha)(t-b)^3}{(4-\alpha)(5-\alpha)(6-\alpha)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Поскольку корни ортогонального полинома действительны [8], попарно различны, то уравнение (29) имеет три положительных корня на отрезке $[0, t-b]$. Кубическое уравнение (29) согласно работе [7] следует привести к каноническому уравнению заменой переменных:

$$y = z + \frac{b_1}{3}, y^3 + py + q = 0, p = c - \frac{b_1^2}{3}, q = \left(\frac{2}{27} \right) b_1^3 - \frac{b_1 c}{3} + d.$$

По критерию Д.К. Фаддеева [7] кубическое уравнение (29) имеет три различных вещественных корня если $p_1 = -p = \frac{b_1^2}{3} - c > 0$.

Это условие выполнено и для нашего ортогонального полинома (29).

$$p_1 = \frac{b_1^2}{3} - c = \frac{3(t-b)^2(3-\alpha)}{(6-\alpha)} \left(\frac{(3-\alpha)}{(6-\alpha)} - \frac{(2-\alpha)}{(5-\alpha)} \right) =$$

$$= \frac{3(t-b)^2(3-\alpha)}{(6-\alpha)^2(5-\alpha)} (15-8\alpha+\alpha^2 - (12-8\alpha+\alpha^2)) = \frac{9(t-b)^2(3-\alpha)}{(6-\alpha)^2(5-\alpha)} > 0,$$

так как $0 < \alpha < 1$.

Поэтому воспользуемся формулами А.Д. Фаддеева [7, стр. 65] для трех действительных различных корней уравнения (29).

Последовательно вычисляем:

$$r, \varphi, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3, x_1, x_2, x_3 \quad r = \sqrt{\frac{b_1^3}{3}},$$

$$\varphi = \arccos \left(-\frac{q}{2r} \right) = \arccos \left(-\frac{\left(\frac{2}{27} \right) b_1^3 - \frac{b_1 c}{3} + d}{2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}}} \right), \quad (30)$$

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} \right), y_2 = 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi}{3} \right),$$

$$y_3 = 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos \left(\frac{\varphi + 4\pi}{3} \right), z_1 = 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} \right) - \frac{b_1}{3},$$

$$z_2 = 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi}{3} \right) - \frac{b_1}{3}, z_3 = 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos \left(\frac{\varphi + 4\pi}{3} \right) - \frac{b_1}{3}.$$

А также

$$\begin{cases} x_1 = t + a - z_1 = t + a - 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos \left(\frac{\varphi}{3} \right) + \frac{b_1}{3}, \\ x_2 = t + a - z_2 = t + a - 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi}{3} \right) + \frac{b_1}{3}, \\ x_3 = t + a - z_3 = t + a - 2\sqrt{\frac{b_1^3}{3}} \cos \left(\frac{\varphi + 4\pi}{3} \right) + \frac{b_1}{3} \end{cases} \quad (31)$$

Весовые коэффициенты C_1, C_2, C_3 в формуле Гаусса с найденными корнями (31) найдем с помощью классической задачи [8]:

$$u(t+a-z) \equiv 1: \int_0^{t-b} \frac{u(t+a-z)dz}{z^\alpha} = \int_0^{t-b} \frac{dz}{z^\alpha} = \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} = C_1 + C_2 + C_3$$

$$u(t+a-z) = t+a-z: \int_0^{t-b} \frac{(t+a-z)dz}{z^\alpha} = (t+a) \int_0^{t-b} \frac{dz}{z^\alpha} - \int_0^{t-b} \frac{zdz}{z^\alpha} =$$

$$= (t+a) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3$$

$$\begin{aligned} u(t+a-z) &= (t+a-z)^2: \int_0^{t-b} \frac{(t+a-z)^2 dz}{z^\alpha} = (t+a)^2 \int_0^{t-b} \frac{dz}{z^\alpha} - 2(t+a) \int_0^{t-b} \frac{zdz}{z^\alpha} + \int_0^{t-b} \frac{z^2 dz}{z^\alpha} = \\ &= (t+a)^2 \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - 2(t+a) \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} = C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + C_3 x_3^2 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} = C_1 + C_2 + C_3 \\ (t+a) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3 \\ (t+a)^2 \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - 2(t+a) \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} = C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + C_3 x_3^2 \end{cases} \quad (32)$$

Первую строку в системе уравнений (32) умножим на x_3 и вычтем из второй строки:

$$(t+a-x_3) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = C_1(x_1-x_3) + C_2(x_2-x_3). \quad (33)$$

Затем вторую строку системы (32) умножим на число x_3 и вычтем из третьей строки:

$$\begin{aligned} (t+a)^2 \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - 2(t+a) \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} - (t+a)x_3 \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + \frac{x_3(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = \\ = C_1x_1(x_1-x_3) + C_2x_2(x_2-x_3) \Leftrightarrow (t+a)(t+a-x_3) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \\ - (2(t+a)-x_3) \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} = C_1x_1(x_1-x_3) + C_2x_2(x_2-x_3). \quad (34) \end{aligned}$$

Выражение (33) умножим на x_2 и вычтем из полученного (34).

$$\begin{aligned} (t+a)(t+a-x_3) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - (2(t+a)-x_3) \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} - \\ - (t+a-x_3)x_2 \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + x_2 \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} = \\ = C_1x_1(x_1-x_3) - C_1x_2(x_1-x_3) = C_1(x_1-x_2)(x_1-x_3) = \\ = (t+a-x_2)(t+a-x_3) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - (2(t+a)-x_3-x_2) \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения выразим C_1 :

$$\begin{aligned} C_1 = \frac{1}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \left((t+a-x_2)(t+a-x_3) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \right. \\ \left. - (2(t+a)-x_3-x_2) \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} \right). \quad (35) \end{aligned}$$

С учетом (35) из формулы (33) найдем C_2 :

$$\begin{aligned} C_2 = -\frac{C_1(x_1-x_3)}{(x_2-x_3)} + \frac{1}{(x_2-x_3)} \left((t+a-x_3) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} \right) = \\ = -\frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} \left((t+a-x_2)(t+a-x_3) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - (2(t+a)-x_3-x_2) \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} + \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} \right) + \\ + \frac{1}{(x_2-x_3)} \left((t+a-x_3) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} \right) = \\ = \frac{(t+a-x_3)(x_1-t-a)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + \frac{(2(t+a)-x_1-x_3)}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)(3-\alpha)} = \\ = \frac{1}{(x_1-x_2)(x_2-x_3)} \left((t+a-x_3)(x_1-t-a) \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} + (2(t+a)-x_1-x_3) \frac{(t-b)^{2-\alpha}}{(2-\alpha)} - \frac{(t-b)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)} \right) \quad (36) \end{aligned}$$

Из системы (32) выразим C_3 :

$$C_3 = \frac{(t-b)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)} - C_2 - C_1 \quad (37)$$

Результаты формул (37), (36), (35), (31), (30), (29), (28), (27) совпадают с формулами (20), (21) и **Утверждение 1** доказано. Отметим также, что в упрощенном алгоритме квадратурная формула Гаусса (20), (21) для вычисления второго интеграла в формуле (17)

(или в формуле (19) с параметром $a=0$) используется один раз. Как и используется один раз формула (18) с равномерным шагом для вычисления первого интеграла в (17).

Замечание 1. Для дробной производной на интервале $(0,1)$ в упрощенном алгоритме в Утверждении 1 нужно выбрать функцию и вес:

$$u(t-z) \rightarrow u'(t-z), a=0, \rho(z)=1/z^\alpha, \alpha \in (0,1).$$

А на интервале $(1,2)$ нужно выбрать функцию $u(x)$ с другим весом:

$$u(t-z) \rightarrow u''(t-z), a=0, \rho(z)=1/z^{\alpha-1}, \alpha \in (1,2).$$

И в этом случае две формулы (20), (21) Утверждения 1 останутся верными, если в них формально заменить $\alpha \rightarrow \alpha-1$ и заменить весовую функцию.

Пользуясь формулами (10), (12) и соответствующим численным алгоритмом (18), (20), (21), составим таблицу для численного значения дробной производной и аналитического значения производной с помощью ряда (16) для функции $f(t)=\sin(t), t=1, \alpha \in (0,2)$.

Таблица 1. Производная Герасимова–Капуто для функции $u(t)=\sin(t), t=\pi/2, \alpha \in (0,2)$

α	$(D_{0+,t}^\alpha \sin(t))$ $(t=\pi/2)$	$(D_{0+,t}^\alpha \sin(t))_{num}$ $(t=\pi/2)$	$\Delta(D_{0+,t}^\alpha)$ $(t=\pi/2)$
10^{-14}	0.9999999999999995	0.9999999999999994	1.7763568 3E-015
10^{-8}	0.999999995279993	0.999999995279997	-4.1078E-015
0.1	0.947027515407809	0.947027515407803	5.9952043 32E-015
0.4	0.718425517119136	0.718425517119135	1.4432899 32E-015
0.5	0.619792030073509	0.619792030073510	-1.4432E-015
0.6	0.510993206384873	0.510993206384873	2.2204460 49E-016
0.9	0.135768608262797	0.135768608262797	2.4980018 05E-016
$1 \cdot 10^{-8}$	1.37076217519046E-008	1.370762180243091E-008	-5.0526E-017
$1 \cdot 10^{-14}$	1.38710238506829E-014	1.375792607134274E-014	1.1309777 93E-016
$1+10^{-14}$	-1.371991E-014	-1.3100631E-014	-6.1927E-016
$1+10^{-8}$	-1.370762E-008	-1.3707621E-008	-3.7398E-016
1.1	-0.137584665279301	-0.137584665279305	3.9690473 13E-015
1.4	-0.535013081857711	-0.535013081857709	-2.2204E-015
1.5	-0.652777665939620	-0.652777665939619	-8.8817E-016
1.6	-0.758179518757917	-0.758179518757916	-6.6613E-016
1.9	-0.971519622786878	-0.971519622786876	-2.3314E-015
$2 \cdot 10^{-8}$	-0.9999999998353808	-0.9999999998353809	-2.220E-016
$2 \cdot 10^{-14}$	-0.9999999999999998	-0.9999999999999999	1.1102230 2E-016

Аналогичную таблицу для численного и аналитического значений производной с помощью ряда (15) составим для функции $f(t) = \cos(t)$, $t = 1$, $\alpha \in (0, 2)$. Первая часть и вторая часть каждой таблицы на интервалах (0,1) и (1,2) находится разными алгоритмами и программы с особенностями, описанными в Замечании 1.

Таблица 2. Производная Герасимова–Капуто для функции $u(t) = \cos(t)$, $t = \pi/2$, $\alpha \in (0, 2)$

α	$(D_{0+,t}^\alpha \cos(t))$ ($t = \pi/2$)	$(D_{0+,t}^\alpha \cos(t))_{num}$ ($t = \pi/2$)	$\Delta(D_{0+,t}^\alpha \cos(t))$ ($t = \pi/2$)
10^{-14}	-1.36710160 44627E-014	-1.310063169 057677E-014	-5.70384E- 016
10^{-8}	-1.37076214 99648E-008	-1.370762118 117236E-008	-3.18475E- 016
0.1	-0.13758466 5279301	-0.137584665 279305	4.218847493 57E-015
0.4	-0.53501308 1857711	-0.535013081 857709	-1.77635E- 015
0.5	-0.65277766 5939620	-0.652777665 939619	-8.88178E- 016
0.6	-0.75817951 8757917	-0.758179518 757916	-1.22124E- 015
0.9	-0.97151962 2786878	-0.971519622 786876	-2.22044E- 015
$1-10^{-8}$	-0.99999999 8353808	-0.999999998 353809	2.220446049 25E-016
$1-10^{-14}$	-0.99999999 9999998	-0.99999999 9999998	1.110223024 625E-016
$1+10^{-14}$	-0.99999999 9999998	-0.99999999 9999998	1.110223024 625E-016
$1+10^{-8}$	-0.99999999 95279994	-0.999999995 279997	3.885780586 188E-015
1.1	-0.94702751 5407809	-0.947027515 407803	-5.99520E- 015
1.4	-0.71842551 7119136	-0.718425517 119135	-1.33226E- 015
1.5	-0.61979203 0073509	-0.619792030 073510	1.443289932 012E-015
1.6	-0.51099320 6384873	-0.510993206 384873	-5.55111E- 016
1.9	-0.13576860 8262798	-0.135768608 262797	-3.33066E- 016
$2-10^{-8}$	-1.37076217 51904E-008	-1.370762165 002316E-008	-1.01881E- 016
$2-10^{-14}$	-1.38710238 50682E-014	-1.375792607 134274E-014	-1.13097E- 016

Таблицы 1 и 2 получены при следующих параметрах $n=10000$, $nh=b$ (n -число интервалов для отрезка в первом интеграле в (17)), $l=45$, $45h=t-b$ – длина правого отрезка в квадратуре Гаусса.

Первый столбец – порядок производной α , второй столбец – аналитическое значение производной Герасимова по формулам (15), (16), третий – численное значение производной по алгоритму (18), (20), (21). Четвертый столбец – разность между аналитическим и численными значениями дробной производной.

Из табл. 1 для функции

$$u(t) = \sin(t), t = \pi/2, \alpha \in [0, 2], \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\alpha \rightarrow +0} \rightarrow 1 - 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\alpha \rightarrow 1-0} \rightarrow +0, -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\alpha \rightarrow 2-0} \rightarrow -1 + 0,$$

что соответствует производным $u(t) = \sin(t)$.

Из табл. 2 для функции

$$u(t) = \cos(t), t = \pi/2, \alpha \in [0, 2], \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0 \rightarrow \alpha = +0$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \rightarrow \alpha = 1, -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0 \rightarrow \alpha = 2 - 0,$$

что соответствует производным $u(t) = \cos(t)$.

Основные полученные результаты:

- 1) Впервые получены модифицированные формулы (10), (12), (13) Герасимова–Капуто.
- 2) С учетом модифицированных формул (10), (12) получен численный алгоритм (18), (20), (21) и доказана корректность алгоритма – **Утверждение 1**.
- 3) Результаты алгоритма (18)–(21) сравнены с аналитическими формулами (15), (16), невязка вычислений не превышает 10^{-15} .
- 4) Формулы (20), (21) Утверждения 1 остаются верными при формальной замене в них α на интервале (0,1) на $\alpha-1$ на интервале (1,2).

Список источников

1. Корчагина А.Н. Использование производных дробного порядка для решения задач механики сплошных сред // Известия Алтайского государственного университета. 2014. № 1–1(81). С. 65–67. DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-14. EDN SECUCD.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
3. Бештокова З.В. Устойчивость и сходимость монотонных разностных схем, аппроксимирующих краевые задачи для интегродифференциального уравнения с дробной по времени производной и оператором Бесселя / З.В. Бештокова, М.Х. Бештоков // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 3. С. 26–50. EDN GMBWPR.
4. Бештоков М.Х. Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения переноса дробного порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестник Удмуртского универси-

- тета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, № 2. С. 158–175. DOI 10.35634/vm200202. DNHMCSFN.
5. Алиева С.Т., Мансимов К.Б. Условие оптимальности типа принципа максимума Понтрягина в задаче управления линейными разностными уравнениями дробного порядка // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 4(63). С. 5–11. DOI 10.17072/1993-0550-2023-4-5-11. EDN ACKUPX.
6. Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б. Аналог принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и многоточечным критерием качества // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2022. Вып. 3(58). С. 5–10. DOI 10.17072/1993-0550-2022-3-5-10. EDN THSSNA.
7. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре: учеб. пособие для вузов. М.: Наука. Физматлит, 1984. 416 с.
8. Бахвалов Н.С., Лапин А.В., Чижонков Е.В. Численные методы в задачах и упражнениях. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. 240 с.
9. Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К. Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности. Новополюк: ПГУ, 2020. 21 с. URL: <https://elib.psu.by/handle/123456789/25335>.
10. Гербер А.Д. Описание алгоритма приближенного вычисления несобственного интеграла, определяющего значения дробной производной // Математика и естественные науки. Теория и практика: межвуз. сб. науч. тр. Т. Вып. 16. Ярославль: Ярослав. гос. техн. ун-т. 2021. С. 22–31. EDN CYCCAJ.
1. Korchagina, A.N. (2014), "The use of fractional derivatives to solve problems in continuum mechanics", *Proceedings of the Altai State University*, no. 1–1(81), pp. 65–67. DOI 10.14258/izvasu(2014)1.1-14. EDN SECUCD.
2. Nakhushev, A.M. (2003), "Fractional calculus and its application", *M., FIZMATLIT*, 272 p.
3. Beshtokova, Z., Beshtokov, M.Kh. (2021), "Vstability and convergence of monotone difference schemes that approximate boundary value problems for an integro-differential equation with a time-fractional derivative and the Bessel operator / Z.V. Beshtokova", *Differential equations and control processes*, no. 3, pp. 26–50. EDN GMBWPR.
4. Beshtokov, M.Kh. (2020), "Boundary value problems for the loaded modified fractional order moisture transfer equation with the Bessel operator and difference methods for their solution", *Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, vol. 30, no. 2, pp. 158–175. DOI 10.35634/vm200202. EDN HMCSFN.
5. Alieva, S., Mansimov, K.B. (2023), "Toptimality condition of the type of Pontryagin's maximum principle in the problem of controlling linear difference equations of fractional order". *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(63), pp. 5–11. DOI 10.17072/1993-0550-2023-4-5-11. EDN ACKUPX.
6. Mansimov, K.B., Bakhmedova, Z.H. (2022), "An analogue of the Pontryagin maximum principle in the problem of optimal control of a system of differential equations with the Caputo fractional derivative and a multipoint quality criterion", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(58), pp. 5–10. DOI 10.17072/1993-0550-2022-3-5-10. EDN THSSNA.
7. Faddeev, D.K. (1984), "Lectures on algebra: Textbook for universities", *M., Science, Fizmatlit*, 416 p.
8. Bakhvalov, N.S., Lapin, A.V., Chizhonkov, E.V. (2010), "Numerical methods in problems and exercises", *M., BINOM, knowledge laboratory*, 240 p.
9. Pastukhov, D.F., Pastukhov, Y.F., Volosova, N.K., Volosov, K.A., Volosova, A.K. (2020), "Calculation of production of the debrief order with high accuracy", *Novopolotsk, PGU*, 21 p. URL: <https://elib.psu.by/handle/123456789/25335>.
10. Gerber, A.D. (2021), "Description of the algorithm for approximate calculation of an improper integral that determines the values of the fractional derivative", *Mathematics and natural sciences. theory and practice: Interuniversity collection of scientific papers, Yaroslavl, Yaroslavl State Technical University*, vol. 16, pp. 22–31. EDN CYCCAJ.

References

Информация об авторах:

Наталья Константиновна Волосова – аспирант МГТУ им. Н. Э. Баумана (105005, Россия, г. Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, стр. 1), navalosova@yandex.ru;

Константин Александрович Волосов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), konstantinvolosov@yandex.ru, AuthorID: 128228;

Александра Константиновна Волосова – кандидат физико-математических наук, начальник аналитического отдела ООО "Трамплин" Российского университета транспорта (127994, ГСП-4, Россия, г. Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9), alya01@yandex.ru, AuthorID: 607500;

Михаил Иванович Карлов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики Московского физико-технического университета (МФТИ) (141701, Россия, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., 9.), karlov@shade.msu.ru, AuthorID: 14680;

Дмитрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), dmitrij.pastuhov@mail.ru, AuthorID: 405101;

Юрий Феликсович Пастухов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры технологий программирования Полоцкого государственного университета (211440, Республика Беларусь, Витебская обл., г. Новополоцк, ул. Блохина, 29), pulsar1900@mail.ru, AuthorID: 405109.

Information about the authors:

Natalya K. Volosova – Post-graduate Student of Bauman Moscow State Technical University (2nd Baumanskaya St., 5-1, Moscow, Russia, 105005), navalosova@yandex.ru;

Konstantin A. Volosov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Applied Mathematics of the Russian University of Transport (Obraztsova St., 9-9, Moscow, GSP-4, Russia, 127994), konstantinvolosov@yandex.ru, AuthorID: 128228;

Aleksandra K. Volosova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Chief Analytical Department "Tramplin" LLC, Russian University of Transport (Obraztsova St., 9-9, Moscow, GSP-4, Russia, 127994), alya01@yandex.ru, AuthorID: 607500;

Mikhail I. Karlov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Moscow University of Physics and Technology (Institutskiy per., 9, Dolgoprudny, Moscow region, Russia, 141701), karlov@shade.msu.ru, AuthorID: 14680;

Dmitriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St., 29, Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), dmitrij.pastuhov@mail.ru, AuthorID: 405101;

Yuriy F. Pastukhov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Polotsk State University (Blokhin St., 29, Novopolotsk, Vitebsk Region, Republic of Belarus, 211440), pulsar1900@mail.ru, AuthorID: 405109.

Научная статья

УДК 512.54

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-15-23

Ослабления условия инцидентности для подгрупп, рассмотренные алгебраистами Пермского университета

Яков Давидович Половицкий¹, Татьяна Михайловна Коневских²

^{1,2}Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

¹yakovpol1935@mail.ru;

²konevskihm@yandex.ru

Аннотация. В первой части статьи приводятся условия инцидентности, введенные и рассмотренные в публикациях алгебраистов Пермского университета, и сведения о том, где и какие классы групп ими описаны. Во второй части анонсируются результаты, полученные пермскими алгебраистами при изучении групп с рядом новых обобщений условий инцидентности для нециклических подгрупп: приводятся формулировки доказанных ими 14 новых теорем. Доказательства этих теорем предполагается опубликовать в серии отдельных статей.

Ключевые слова: группа; инцидентность; нециклическая подгруппа

Для цитирования: Половицкий Я. Д., Коневских Т. М. Ослабления условия инцидентности для подгрупп, рассмотренные алгебраистами Пермского университета // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 1(64). С. 15–23. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-15-23.

Статья поступила в редакцию 07.08.2023; одобрена после рецензирования 24.11.2023; принята к публикации 16.03.2024.

Research article

Weakening Incidence Conditions for Subgroups Considered by Algebraists From Perm University

Yakov D. Polovitsky¹, Tatiana M. Konevskikh²

^{1,2}Perm State University, Perm, Russia

¹yakovpol1935@mail.ru;

²konevskihm@yandex.ru

Abstract. In the first part of this article incidence conditions, introduced and considered by algebraists from Perm University, and information about where and which class of groups are described by them, are given. In the second part, the results, received by algebraists from Perm University in considering of groups with several new generalizations of incidence conditions for noncyclic subgroups, are announced: the formulations of the 14 new theorems proved by them are given. The proofs of these theorems are supposed to be published in a series of separate articles.

Keywords: group; incidence; noncyclic subgroup

For citation: Polovitsky, Ya. D., Konevskikh, T. M. (2024), "Weakening Incidence Conditions for Subgroups Considered by Algebraists From Perm University", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(64), pp. 15-23. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-15-23.

The article was submitted 07.08.2023; approved after reviewing 24.11.2023; accepted for publication 16.03.2024.



Данная работа © 2024 Половицкий Я.Д., Коневских Т.М. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Введение

В начале 1990-х годов доцент кафедры высшей алгебры и геометрии Пермского университета Я. Д. Половицкий предложил студенту механико-математического факультета В. Л. Чечулину рассмотреть в курсовой, а затем и дипломной работах конечные группы с условием инцидентности для нециклических подгрупп. В 1994–1997 гг. на этой кафедре работал приехавший из Киева профессор Н. С. Черников. Он проявил интерес к этой тематике и описал бесконечные локально ступенчатые группы с этим условием и внес существенные коррективы в полученное Я. Д. Половицким и В. Л. Чечулиным описание конечных групп такого рода. Полученные результаты опубликованы в 1995 г. в совместной статье [1] этих трех авторов*.

С этого времени сотрудниками и студентами Пермского университета рассмотрено более 15 различных ослаблений условия инцидентности для подгрупп, предложенных Я. Д. Половицким. Ряд результатов, полученных в выпускных работах студентов, не был опубликован. К настоящему времени опубликованы результаты изучения некоторых классов групп с 13 условиями такого рода. Перечень рассмотренных в этих публикациях условий и классов описанных там групп приведен в первой части настоящей статьи.

Во второй ее части анонсируются еще не опубликованные результаты изучения групп с рядом новых обобщений условия инцидентности для нециклических подгрупп.

Основные определения

Определение А. Две подгруппы группы G называются *инцидентными*, если одна из них содержится в другой.

Определение В. Пусть P – некоторое свойство, формулируемое на языке пар подгрупп группы G . Если в этой группе либо любая пара подгрупп, обладающая свойством P , инци-

дентна, либо в G нет ни одной пары различных подгрупп, которая обладает свойством P , то будем говорить, что G *удовлетворяет условию инцидентности для пар подгрупп со свойством P* .

Ниже, в пункте 1, в качестве P рассматривается условие "иметь пересечение определенного вида", а вид пересечения в каждом из пунктов 1.1–1.7 указывается.

Определение С. Пусть Σ – теоретико-групповое свойство. Будем говорить, что группа *удовлетворяет условию инцидентности для Σ -подгрупп*, если она является Σ -группой и не содержит ни одной пары неинцидентных Σ -подгрупп.

Ниже, в пунктах 2.1–2.3, перечисляется три условия инцидентности для Σ -подгрупп, а то, какое свойство Σ рассматривается в каждом из этих пунктов, видно из формулировки, приведенной в этом пункте.

Условия инцидентности, рассмотренные в публикациях алгебраистов Пермского университета

Эти условия можно разбить на три группы.

1. Условия инцидентности для подгрупп, имеющих пересечения определенного вида.
 - 1.1 Инцидентность подгрупп с нетривиальным пересечением.
В [2] описаны локально ступенчатые и абелевы группы с этим условием.
 - 1.2 Инцидентность подгрупп, порядок пересечения которых делит фиксированное число n .
Конечные разрешимые группы с этим условием описаны в [3].
 - 1.3 Примарное пересечение неинцидентных подгрупп непримарной группы.
В [4] описаны конечные разрешимые непримарные группы с этим условием.
 - 1.4 Пересечение любых двух неинцидентных непримарных подгрупп является p -группой, где p – фиксированное простое число.
На базе результатов изучения групп с условием 1.3 в [4] получено описание конечных непримарных разрешимых групп с условием 1. 4.
 - 1.5 Порядок пересечения любой пары неинцидентных подгрупп делит p^m , где m – фиксированное число, а p – простое число, причем простые числа

*В теореме 1 из [1] следует внести изменение в определяющем соотношении для групп типа 7. Там в показателе степени элемента a стоит сумма двух чисел, первое из которых либо 1, либо (-1). Нужно оставить только 1. Причина ошибки в том, что в пункте 2 доказательства достаточности в теореме 1 не приведено доказательство утверждения "Н нормальна в G " (доказательство заменено словами "нетрудно видеть"). А это утверждение верно для всех рассмотренных в этом пункте случаев, кроме исключенного выше случая с (-1).

- p у разных пар неинцидентных подгрупп могут быть как различными, так и одинаковыми.
- Описание конечных разрешимых групп с этим условием для случаев $m = 1$ и $m = 2$ получено в [5], а для произвольного m – в [4].
- 1.6 Пересечение любых двух неинцидентных подгрупп является циклической группой.
В [6] описаны конечные разрешимые и бесконечные бинарно конечные группы с этим условием.
 - 1.7 Пересечение любых двух неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой выбранной подгруппе группы G , является циклической группой.
Формулировка этого условия использует идею изучения групп с сепарирующими подгруппами, выдвинутую С. Н. Черниковым в [7]. Описание конечных разрешимых групп с условием 1.7 проводилось в [8] и [9], а его результат анонсирован в [10]. Завершение доказательства приведенной в [10] теоремы будет опубликовано в отдельной статье.
2. Условия инцидентности для подгрупп, обладающих определенным свойством.
 - 2.1. Инцидентность непримарных подгрупп.
Локально конечные группы с этим условием описаны в [11].
 - 2.2. Инцидентность ненильпотентных подгрупп.
В [12] получено описание конечных ненильпотентных групп с этим условием.
 - 2.3. Инцидентность неразрешимых подгрупп.
В [12] показано, что описание неразрешимых групп с этим условием, имеющих минимальную неразрешимую подгруппу, сводится к описанию минимальных неразрешимых групп и их расширений с помощью примарных циклических или квазициклических групп.
 3. Частичное обращение одного из следствий теоремы Лагранжа.
Имеется в виду такое следствие: порядок подгруппы конечной группы делит порядок группы.
 - 3.1. Условие L_Σ : для любых двух подгрупп A и B конечной группы G , из которых A является Σ -группой, таких, что $|A| \neq |B|$ и $|A| \mid |B|$, выполняется $A < B$ (здесь Σ – некоторое теоретико-групповое свойство).
Рассмотрены группы с L_Σ -условием для следующих свойств Σ :
 - 3.1.1. Σ – свойство "быть подгруппой";
 - 3.1.2. Σ – свойство "быть подгруппой непростого порядка".
В [13] описаны конечные группы с условием L_Σ для каждого из свойств 3.1.1. и 3.1.2.
 - 3.1.3. Σ – свойство "быть нециклической группой".
Описание конечных групп с условием L_Σ для свойства 3.1.3. начато в [14] и завершено в [15].

Анонс результатов, полученных алгебраистами Пермского университета при изучении групп с рядом обобщений условия инцидентности для нециклических подгрупп

Приводимые ниже новые условия инцидентности и теоремы, являющиеся результатом изучения достаточно широких классов групп с этими условиями, еще не публиковались. Доказательства этих теорем будут приведены позднее в серии отдельных статей.

Теоремы 1–13 получены авторами настоящей статьи, а теорема 14 – Я.Д. Половицким и О. В. Дербеновой.

Определение 1. Будем говорить, что в группе G выполняется J_{HH} -условие (J_{ni} -условие, $J_{\text{H}\bar{\text{M}}}$ -условие), если либо любые две ее конечные нециклические неинцидентные подгруппы, соответственно, изоордны (изоморфны, являются максимальными в G), либо в G нет ни одной пары неинцидентных конечных нециклических подгрупп.

Определение 2. Нециклическую группу, в которой выполняется J_{HH} -условие (J_{ni} -условие, $J_{\text{H}\bar{\text{M}}}$ -условие), назовем, соответственно, J_{HH} -группой (J_{ni} -группой, $J_{\text{H}\bar{\text{M}}}$ -группой).

Теорема 1. Конечная p -группа P тогда и только тогда является J_{HH} -группой, когда она – группа одного из следующих типов:

1. P –нециклическая группа и $|P| = p^3$;

2. $Z_{p^{n-1}} \times Z_p, n \geq 2$;
3. модулярная группа $M_{p^n}, n \geq 4$;
4. кватернионная группа Q_{16} ;
5. $Z_{p^2} \times Z_{p^2}$;
6. $|P| = p^n, n \geq 4, p^n \neq 16, \Omega_1(P) \subset \Phi(P), \Phi(P) \cong Z_{p^{n-3}} \times Z_p$, каждая максимальная подгруппа группы P изоморфна либо $M_{p^{n-1}}$ (и хотя бы одна такая подгруппа в P существует), либо $Z_{p^{n-2}} \times Z_p$;
7. $P = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle, a^{p^2} = b^{p^2} = 1, b^{-1}ab = a^{1+p}$.

Теорема 2. Для бесконечной локально конечной p -группы P равносильны следующие условия:

1. J_{HH} -условие;
2. J_{ni} -условие;
3. J_{HM} -условие;
4. в P нет ни одной пары неинцидентных конечных нециклических подгрупп;
5. группа P изоморфна одной из следующих групп: C_{p^∞} или $C_{p^\infty} \times Z_p$.

Теорема 3. Для примарных локально конечных групп J_{HH} -условие и J_{HM} -условие равносильны.

Теорема 4. Примарные локально конечные J_{ni} -группы – это все примарные локально конечные J_{HH} -группы, за исключением всех тех групп типа 6 теоремы 1, в каждой из которых есть хотя бы одна абелева максимальная подгруппа, и только такие группы.

Определение 3. Конечную непримарную группу G , имеющую хотя бы одну истинную нециклическую подгруппу, в которой для любой нециклической максимальной подгруппы M выполняется $|M| = m$, где m – одно и то же для всех таких M , назовем *in-группой* (а само указанное выше условие, которому удовлетворяет G , назовем *in-условием*).

Замечание 1. Из определения 3 видно, *in-группа* – это конечная непримарная группа с изоордными нециклическими максимальными подгруппами или с единственной нециклической максимальной подгруппой.

Теорема 5. Группа G тогда и только тогда является *in-группой*, когда она – группа одного из следующих типов:

1. $G = H \times Q, H$ – конечная минимальная нециклическая группа, $Q \cong Z_{q^m}, q \nmid |H|, Q \neq 1$;
2. $G = R \rtimes P, R \cong Z_{r^k}, r \neq 2, k \geq 2, P \cong Z_{p^n}, (Z(G) \cap P) < P$;

3. $G = P \rtimes R, P$ – конечная p -группа, $R \cong Z_{r^l}, C_P(R) = \Phi(P)$ – циклическая группа, $(R \times \Phi(P)) < G$. Если P – циклическая группа, то $|P| = p \neq 2$ и $|R/R \cap Z(G)| \geq r^2$.

Следствие. Для конечной непримарной группы G , имеющей не менее двух нециклических максимальных подгрупп, равносильны следующие условия:

1. все нециклические максимальные подгруппы группы G изоордны;
2. все нециклические максимальные подгруппы группы G составляют один класс сопряженных подгрупп;
3. $G = R \rtimes P, R \cong Z_{r^m}, r \neq 2, m \geq 2, P \cong Z_{p^n}, (Z(G) \cap P) < P$;
4. все нециклические максимальные подгруппы группы G изоморфны.

Определение 4. Пусть G – конечная группа, не являющаяся минимальной нециклической. Если в G и в каждой ее нециклической подгруппе, не являющейся минимальной нециклической, выполняется *in-условие*, то G назовем *ins-группой*.

Теорема 6. Непримарная группа G тогда и только тогда является *ins-группой*, когда она – группа одного из следующих типов (ниже всюду $Z = Z(G)$):

1. $G = H \times Q, H$ – конечная минимальная нециклическая группа, $Q \cong Z_{q^m}, m \geq 1, q \nmid |H|$;
2. $G = R \rtimes P, R \cong Z_{r^m}, r \neq 2, m \geq 2, P \cong Z_{p^n}, Z < P$;
3. $G = P \rtimes R, |P| = p^n$, в P есть истинная нециклическая подгруппа, $R \cong Z_{r^m}, (Z \cap R) = 1$, для любой R_1 , такой, что $1 < R_1 \leq R, C_P(R_1) = \Phi(P) \cong Z_{p^l}$, а для $G_1 = P \rtimes R_1$, справедливо $(\Phi(P) \times R_1) < G_1$; для $R_0 < G$, такой, что $|R_0| = r$, справедливо утверждение: всякая истинная R_0 -допустимая подгруппа группы P содержится в $\Phi(P)$;
4. $G = P \rtimes R, R \cong Z_{r^m}$ и выполняется одно из следующих условий:
 - 4.1. $P \cong Q_8, r = 3, (Z \cap R) < R$;
 - 4.2. $P \cong E_{p^2}, G' \neq 1, r \nmid (p-1)$;
 - 4.3. $|P| = p, |R/Z| \geq r^2$.

Теорема 7. Непримарная локально конечная группа G тогда и только тогда является J_{HH} -группой, когда она – группа одного из следующих типов (ниже всюду $Z = Z(G)$):

1. $G = H \times Q, Q \cong Z_{q^m}, m \geq 1, H$ изоморфна либо Q_8 , либо $E_{p^2}, q \nmid |H|$;

2. $G = R \rtimes P$, $R \cong Z_{r^2}$, $r \neq 2$, $P \cong Z_{p^n}$, $Z < P$;
3. $G = P \rtimes R$, $R \cong Z_{r^m}$, $R_0 = \Omega_1(R)$ и выполняется одно из условий:
 - 3.1. либо $P \cong E_{p^2}$, либо $P \cong E_{p^3}$ и в P нет собственных R_0 -допустимых подгрупп;
 - 3.2. $P = (\langle a \rangle \times \langle z \rangle) \rtimes \langle c \rangle$, $a^p = z^p = c^p = 1$, $\langle z \rangle = Z$, $c^{-1}ac = az$ и Z – единственная собственная R_0 -допустимая подгруппа группы P ;
 - 3.3. $|P| = p \neq 2$, $G' \neq 1$;
 - 3.4. $P \cong Q_8$, $R \cong Z_{3^k}$, $(Z \cap R) < R$;
4. $G = H \times Q$, $Q \cong Z_{q^m}$, $m \geq 1$, $H = R \rtimes P$, $|R| = r \neq 2$, $P \cong Z_{p^n}$, $Z(H) < P$;
5. бесконечная периодическая непримарная локально циклическая группа (то есть прямое произведение циклических p -групп и квазициклических p -групп по разным простым p);
6. $G = H \times P$, $P \cong C_{p^\infty}$, H – конечная минимальная нециклическая группа, $p \nmid |H|$.

Следствие. (из теорем 1, 2 и 7). Локально конечная группа G тогда и только тогда является J_{HN} -группой, когда она – группа одного из типов теоремы 1, теоремы 2 или теоремы 7.

Теорема 8. Локально конечные J_{ni} -группы – это все локально конечные J_{HN} -группы, за исключением всех тех групп типа 6 теоремы 1, в каждой из которых есть хотя бы одна абелева максимальная подгруппа, и только такие группы.

Теорема 9. Для любой бесконечной локально конечной группы G равносильны следующие условия:

1. J_{HN} -условие;
2. J_{ni} -условие;
3. J_{NM} -условие;
4. в G нет ни одной пары неинцидентных конечных нециклических подгрупп;
5. G – группа одного из следующих видов:
 - 5.1. бесконечная периодическая локально циклическая группа;
 - 5.2. $G = C_{p^\infty} \times Z_p$;
 - 5.3. $G = C_{p^\infty} \times H$, где H – конечная минимальная нециклическая группа и $p \nmid |H|$.

В [1] определено понятие J_H -группы. Ниже приведем его в несколько иной форме.

Определение 5. Будем говорить, что в группе G выполняется J_H -условие, если в G нет ни одной пары неинцидентных нециклических подгрупп. Нециклическую группу с J_H -условием назовем J_H -группой.

Определение 6. Группу G назовем W -группой (минимальной не J_H -группой), если в каждой ее истинной подгруппе выполняется J_H -условие, а в самой группе G это условие не выполняется.

Теорема 10. Конечная разрешимая группа G тогда и только тогда является W -группой, когда она – группа одного из следующих типов (ниже p, q, r – различные простые числа, $Z = Z(G)$):

1. D_8 ;
2. E_{p^3} ;
3. G изоморфна p -группе P одного из типов 4–7 теоремы 1;
4. $G = M \rtimes A$, $M \cong Q_8$, $|A| = 2$, $\Omega_1(G) \cong E_4$;
5. $G = P \rtimes B$, $B = Q \times R$, $|P| = p$, $Q \cong Z_{q^m}$, $R \cong Z_{r^t}$, $Z \subset B$ и $|B/Z| = qr$;
6. $G = (A \rtimes Q) \times R$, $Q \cong Z_{q^m}$ и выполняется одно из условий:
 - 6.1. $R = 1$, A изоморфна Z_{p^2} или Z_{pr} , $Z \subset Q$ и $|Q/Z| = q$;
 - 6.2. $|A| = p$, $|R| = r$, $|Q/Q \cap Z| = q^2$;
7. $G = H \times K$, H – конечная непримарная минимальная нециклическая группа, $K \cong Z_{p^r}$, $(|H|, |K|) = 1$;
8. $G = P \rtimes Q$, $G' \neq 1$, $P \cong E_{p^2}$ и выполняется одно из условий:
 - 8.1. $Q \cong E_{q^2}$; $q \nmid (p-1)$;
 - 8.2. $Q \cong Z_{q^m}$, $q \mid (p-1)$, $|Q/Q \cap Z| = q$;
9. $G = P \rtimes S$, $[P, S] \neq 1$, $P \cong E_{p^2}$, $S = QR$, $|Q| = q$, $|R| = r$ и если $[P, Q] \neq 1$, то $q \nmid (p-1)$, а если $[P, R] \neq 1$, то $r \nmid (p-1)$;
10. $G = P \rtimes Q$, $|Q| = q$ и либо $P \cong M_{p^3}$ ($p \neq 2$), либо $P \cong (Z_{p^2} \times Z_p)$. Группа G либо нильпотентна, либо $P \cong (Z_{p^2} \times Z_p)$, $q \nmid (p-1)$ и $\Omega_1(P) \not\subset C(Q)$;
11. $G = Q \rtimes P$, $|Q| = q \neq 2$ и выполняется одно из условий:
 - 11.1. Либо $P \cong M_{p^3}$ ($p \neq 2$), либо $P \cong (Z_{p^2} \times Z_p)$. В каждом из этих случаев $C(Q) = Q \times \Omega_1(P)$;
 - 11.2. $P \cong Q_8$, $[Q, P] \neq 1$;

12. $G = Q \rtimes B$, $[Q, B] \neq 1$, $Q \cong Q_8$ и выполняется одно из условий:

12.1. $B = B_1 \times B_2$, $|B_i| = 3$, $i = 1, 2$, $(B \cap Z) = B_2$;

12.2. $B = PR$, $|P| = 3$, $|R| = r$, $r \nmid 6$, $G = (Q \times R) \rtimes P$, $[Q, P] \neq 1$;

13. $G = P_0 \times (Q \rtimes P_1)$, $|P_0| = |P_1| = p$, $|Q| = q \neq 2$, $G' \neq 1$;

14. $G = P \times S$, P – конечная минимальная нециклическая p -группа, S – либо конечная минимальная нециклическая q -группа, либо $|S| = qr$.

Замечание 2. Среди конечных W -групп есть и неразрешимые – например, простая группа A_5 .

Определение 7. (см. [16]). Группу, все вторые максимальные подгруппы которой циклические, назовем *SMC-группой*.

В [16] показано, что всякая конечная SMC-группа разрешима. С помощью этого результата доказана

Теорема 11. Всякая конечная $J_{H\bar{M}}$ -группа разрешима.

Следствие. Класс конечных $J_{H\bar{M}}$ -групп содержится в объединении классов конечных разрешимых минимальных не J_H -групп и конечных J_H -групп.

Теорема 12. Конечная группа G является $J_{H\bar{M}}$ -группой тогда и только тогда, когда она – группа одного из следующих типов (ниже p, q, r – различные простые числа; некоторые типы пересекаются):

1. конечная J_H -группа (они описаны в [13]);
2. группа одного из типов теоремы 1;
3. нециклическая группа порядка p^3 , p^2q или pqr ;
4. группа одного из следующих типов теоремы 10: 6, 10, 11.2 или типа 9, в котором подгруппа S циклическая;
5. $G = (Q \rtimes P) \times R$, $Q \cong Q_8$, $|P| = 3$, $|R| = r$, $r \nmid 6$, $P \not\subseteq Z(G)$;
6. $G = H \times K$, H – конечная минимальная нециклическая группа, $K \cong Z_{pr}$, $(|H|, |K|) = 1$;

Из групп теоремы 12 можно выделить подкласс класса конечных $J_{H\bar{M}}$ -групп – конечные SMC-группы, описание которых получено в [16].

Теорема 13. Конечная нециклическая группа G тогда и только тогда является SMC-группой, когда она – группа одного из следующих типов (ниже всюду p, q, r – различные

простые числа, $Z = Z(G)$; некоторые типы пересекаются):

1. конечная минимальная нециклическая группа;
2. нециклическая группа порядка p^3 , p^2q или pqr ;
3. Q_{16} ;
4. $G = H \times Q$, H – конечная минимальная нециклическая группа, $Q \cong Z_q$, $q \nmid |H|$;
5. $G = Q_8 \rtimes Z_3$, $Z_3 \not\subseteq Z$;
6. $G = Z_p \rtimes Q_8$, $p \neq 2$, $Z_p \not\subseteq Z$;
7. $G = A \rtimes Q$, $A \cong Z_{p^2}$ или $A \cong Z_{pr}$, $Q \cong Z_{q^m}$, $Z \subset Q$, $|Q/Z| = q$;
8. $G = P \rtimes Q$, $P \cong Z_p$, $p \neq 2$, $Q \cong Z_{q^m}$, $m \geq 2$, $Z \subset Q$, $|Q/Z| = q^2$.

Замечание 3. В описании SMC-групп в [16] большая часть типов таких групп задается образующими элементами и определяющими соотношениями. При этом в формулировках ряда теорем эти задания иногда отличаются от тех, что приведены там в доказательствах и определяют не SMC-группы. В частности, в типах 1, 4, 5 теоремы 2.7 из [16] циклическая подгруппа $\langle a \rangle$ непростого порядка должна быть инвариантной (это следует из описания конечных непримарных минимальных нециклических групп, являющихся максимальными подгруппами группы G). Есть и другие неточности и опечатки. В типе 9 основной теоремы из [16] вместо $b^2 = 1$ нужно $b^4 = 1$, а в типе 7 этой теоремы вместо прямого произведения должно стоять полупрямое.

Определение 8. Пусть в группе G существует такая истинная подгруппа S , что выполняется одно из следующих условий:

1. любые две нециклические подгруппы группы G , не содержащиеся в S , инцидентны;
2. все истинные подгруппы группы G , не содержащиеся в S , циклические. Такую группу G назовем *SIN-группой*.

Теорема 14. Конечная группа G является SIN-группой тогда и только тогда, когда она – группа одного из следующих типов (некоторые из них могут пересекаться; ниже всюду $Z = Z(G)$):

1. конечная группа, имеющая не более одной нециклической максимальной подгруппы (описание таких групп получено в [17]);
2. $G = H \times A$, $A \cong Z_k$, $(k, |H|) = 1$ и выполняется одно из условий:

- 2.1 H – конечная минимальная нециклическая группа, $|\pi(k)| = 2$;
- 2.2 H – конечная группа с единственной нециклической максимальной подгруппой, $|\pi(k)| = 1$;
3. Q_{16} ;
4. SD_{16} ;
5. D_8 ;
6. $G = P \rtimes A$, P – конечная нециклическая p -группа, $A \cong Z_m$, $p \nmid m$, $A \not\trianglelefteq G$, $F = C(A) = P_1 \times A$, $P_1 \cong Z_l$, $\Phi(P) \leq P_1 \leq Z$, $F/\Phi(P) \leq G/\Phi(P)$ и выполняется одно из условий:
 - 6.1. $P_1 = \Phi(P)$, $|\pi(m)| = 2$ и для некоторой силовой r -подгруппы R группы A все истинные R -допустимые подгруппы группы P содержатся в P_1 ;
 - 6.2. $P_1 > \Phi(P)$, $A = Q$ является q -группой, в P существует хотя бы одна истинная Q -допустимая подгруппа, не содержащаяся в P_1 , и каждая такая подгруппа содержит G' ;
 - 6.3. $P_1 > \Phi(P)$, $A = Q$ является q -группой, для любой Q_1 , удовлетворяющей условию $1 < Q_1 \leq Q$, все истинные Q_1 -допустимые подгруппы группы P , не содержащиеся в $F = G' \cdot \Phi(P)$, циклические и содержатся в P_1 ;
7. $G = P_1 \times (P_2 \rtimes Q)$, $P_1 \cong Z_{p^{n-1}}$, $|P_2| = p \neq 2$, $Q \cong Z_{q^m}$, $G' = P_2$;
8. $G = P \rtimes (Q \times R)$, $|P| = p$, $Q \cong Z_{q^m}$, $R \cong Z_{r^t}$, $Q \not\trianglelefteq Z$, $R \not\trianglelefteq Z$.
3. Половицкий Я. Д. Конечные разрешимые группы, в которых порядок пересечения любых двух неинцидентных подгрупп является делителем числа n // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 4. С. 8–17.
4. Половицкий Я. Д. Некоторые классы конечных групп с примарными пересечениями неинцидентных подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2012. Вып. 1. С. 5–18.
5. Половицкий Я. Д. Конечные разрешимые группы с одним условием для пересечений неинцидентных подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2011. Вып. 2. С. 10–21.
6. Половицкий Я. Д., Коневских Т. М. О группах с циклическими пересечениями неинцидентных (максимальных) подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 3(46). С. 23–31.
7. Черников С. Н. Группы, имеющие сепарирующие подгруппы // Группы с заданными свойствами подгрупп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1973. С. 6–14.
8. Половицкий Я. Д., Коневских Т. М. О конечных группах с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой подгруппе // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 3(50). С. 5–16.
9. Половицкий Я. Д., Коневских Т. М. Конечные бипримарные группы с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой подгруппе // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 4(51). С. 14–23.
10. Коневских Т. М., Половицкий Я. Д. Конечные разрешимые группы с циклическими пересечениями неинцидентных подгрупп, не содержащихся в некоторой подгруппе // Конференция "Алгебра и ее приложения", посвященная 70-летию Пермской алгебраической школы С. Н. Черникова: тез. докл. Пермь. 2020. С. 30–31.
11. Половицкий Я. Д. Группы с условием инцидентности для некоторых типов подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2008. Вып. 4. С. 32–36.

Заключение

Каждое из условий инцидентности, наложенное на группу, вводит определенные ограничения на граф подгрупп этой группы. В связи с этим было бы интересно изучить свойства таких графов для групп с рядом условий инцидентности, сформулированных выше в настоящей статье.

Список источников

1. Черников С. Н., Половицкий Я. Д., Чечулин В. Л. Группы с условием инцидентности для нециклических подгрупп // Укр. матем. журн. 1996. Т. 48, № 4. С. 533–539.
2. Волочков А. А., Половицкий Я. Д. Группы с условием инцидентности для подгрупп с нетривиальным пересечением // Современные проблемы математики и информатики. Ярославль, 2001. № 4. С. 13–17.

12. Половицкий Я. Д. Группы с условием инцидентности для ненильпотентных (неразрешимых) подгрупп // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2010. Вып. 1. С. 24–28.
 13. Половицкий Я. Д. Конечные группы с некоторыми условиями инцидентности, связанными с теоремой Лагранжа // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2016. Вып. 3(34). С. 5–20.
 14. Половицкий Я. Д. Конечные группы с одним условием инцидентности, связанным с обращением теоремы Лагранжа. Ч. 1 // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2(37). С. 5–18.
 15. Половицкий Я. Д. Конечные группы с одним условием инцидентности, связанным с обращением теоремы Лагранжа. Ч. 2 // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 3(38). С. 13–26.
 16. Ma L., Meng W., Ma W. Finite groups whose all second maximal subgroups are cyclic // Open Mathematics. 2017. V. 15, No. 1. P. 646–654.
 17. Пылаев В. В., Кузенный Н. Ф. Конечные группы, обладающие циклической максимальной подгруппой // Укр. матем. журнал. 1976. Т. 48, № 5. С. 646–539.
- References**
1. Chernikov, N. S., Polovitsky, Ya. D., Chechulin, V. L. (1996), "Groups with incidence condition for noncyclic subgroups", *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 48, pp. 533-539.
 2. Volochkov, A. A., Polovitsky, Ya. D. (2001), "Groups with the incidence condition for subgroups with non-trivial intersection", *Modern problems of mathematics and informatics. Yaroslavl*, no. 4, pp. 13-17.
 3. Polovitsky, Ya. D. (2010), "Finite solvable groups in which the order of intersection of any two non-incident subgroups is a divisor of the number n ", *Bulletin of the Perm University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 4, pp. 8-17.
 4. Polovitsky, Ya. D. (2012), "Some classes of finite groups with primary intersections of non-incident subgroups", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 1, pp. 5-18.
 5. Polovitsky, Ya. D. (2011), "Finite solvable groups with one condition for intersections of non-incident subgroups", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 2, pp. 10-21.
 6. Polovitsky, Ya. D., Konevskikh, T. M. (2019), "On groups with cyclic intersections of non-incident (maximal) subgroups", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 3(46), pp. 23-31.
 7. Chernikov, S. N. (1973), "Groups having separating subgroups", *Groups with given properties of subgroups*. Kyiv: Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, pp. 6-14.
 8. Polovitsky, Ya. D., Konevskikh, T. M. (2020), "About finite groups with cyclic intersections of non-incident subgroups not contained in some subgroup", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 3(50), pp. 5-16.
 9. Polovitsky, Ya. D., Konevskikh, T. M. (2020), "Finite biprimary groups with cyclic intersections of non-incident subgroups not contained in some subgroup", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 4(51), pp. 14-23.
 10. Konevskikh, T. M., Polovitsky, Ya. D. (2020), "Finite solvable groups with cyclic intersections of non-incident subgroups not contained in some subgroup", *Conference "Algebra and its applications", dedicated to the 70th anniversary of the Perm algebraic school of S. N. Chernikov. Abstracts of reports. Perm*, pp. 30-31.
 11. Polovitsky, Ya. D. (2008), "Groups with the incidence condition for some types of subgroups", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 4, pp. 32-36.
 12. Polovitsky, Ya. D. (2010), "Groups with the incidence condition for non-nilpotent (irresolvable) subgroups", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 1, pp. 24-28.
 13. Polovitsky, Ya. D. (2016), "Finite groups with some incidence conditions related to the Lagrange theorem", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 3 (34), pp. 5-20.
 14. Polovitsky, Ya. D. (2017), "Finite groups with one incidence condition connected with the inversion of Lagrange's theorem. P. 1", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 2(37), pp. 5-18.

15. Polovitsky, Ya. D. (2017), "Finite groups with one incidence condition related to the inversion of Lagrange's theorem. P. 2", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer science*, no. 3(38), pp. 13-26.
16. Ma, L., Meng, W., Ma W. (2017), Finite groups whose all second maximal subgroups are cyclic. *Open Mathematics*, vol. 15, no. 1, pp. 646-654.
17. Pylaev, V. V., Kuzenn, N. F. (1976), "Finite groups with a cyclic maximal subgroup" *Ukrainian Mathematical Journal*, vol. 48, pp. 646-539.

Информация об авторах:

Я. Д. Половицкий – кандидат физико-математических наук, почетный профессор механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета, (614068, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15), AuthorID: 537881;

Т. М. Конеvских – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID: 972024.

Information about the authors:

Yakov D. Polovitsky – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Honorary Professor of Mechanics and Mathematics the Faculty of Perm State University (Bukireva St., 15, Perm, Russia, 614068), AuthorID: 537881;

Tatiana M. Konevskikh – PhD, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Perm State University (Bukireva St., 15, Perm, Russia, 614068), AuthorID: 972024.

«Механика»

Научная статья

УДК 531.9; 514.853

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-24-32

**Движение гиростата под действием
следящего момента силы**

Николай Николаевич Макеев

Саратов, Россия, nmakeyev@mail.ru

Аннотация. Гириостат движется вокруг неподвижной точки под воздействием сил в псевдоевклидовом пространстве с сигнатурой $(3,1)$. Результирующий момент системы внешних сил и гириостатический момент заданы относительно координатного орторепера, неизменно связанного с носителем гириостата, и являются постоянными. Приведены три вида движения гириостата, в каждом из которых результирующий вектор-момент сил коллинеарен одной из главных осей инерции гириостата, а гириостатический момент ортогонален этой оси. Методом параметрического интегрирования найдены векторное многообразие угловых скоростей гириостата и поле его фазовых траекторий в пространстве состояний. Интегрирование уравнений движения гириостата выполнено в квадратурах и эллиптических функциях времени.

Ключевые слова: гириостат; псевдоевклидово пространство; параметрическое интегрирование; интегральное многообразие; поле фазовых траекторий

Для цитирования: Макеев Н.Н. Движение гириостата под действием следящего момента силы // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 1(64). С. 24–32. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-24-32.

Статья поступила в редакцию 26.12.2023; одобрена после рецензирования 09.02.2024; принята к публикации 15.03.2024.

«Mechanics»

Research article

The Force Tracking Moment Action on the Gyrostat Motion

Nikolay N. Makeev

Saratov, Russia, nmakeyev@mail.ru

Abstract. The gyrostat moves around a fixed point under the forces influence in pseudo-Euclidean space with signature $(3,1)$. The resulting moment of the external forces system and the gyrostatic moment are specified relative to the coordinate orthoreper, invariably associated with the gyrostat carrier, and are constant. Three types of gyrostat motion are given, in each of which the resulting force vector-moment is collinear to of the main axis of the gyrostat inertia, and the gyrostatic moment is orthogonal to this axis. The vector manifold of the gyrostat angular velocities and the field of its phase trajectories in the state space are found with the parametric integration method using. Integration of the gyrostat motion equations is carried out in quadratures and elliptic functions of time.

Keywords: gyrostat; pseudo-Euclidean space; parametric integration; integral manifold; field of phase trajectories

For citation: Makeev, N.N. (2024), "The Force Tracking Moment Action on the Gyrostat Motion", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(64), pp. 24-32. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-24-32.

The article was submitted 26.12.2023; approved after reviewing 09.02.2024; accepted for publication 15.03.2024.



Данная работа © 2024 Макеев Н.Н. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Введение

Начало исследованиям по динамике твердого тела в неевклидовых пространствах было положено в 1870-х годах работами Э. Шеринга, У. Клиффорда, Р. Хьюза, Ф. Клейна и других авторов. К изучению свойств движения тел в неевклидовых пространствах постоянной кривизны относятся работы Р. Стояновича, А.П. Широкова, М.С. Крюкова. Н.Е. Жуковский в работе [1] отметил, что из множества задач неевклидовой механики примечательна задача, имеющая вполне реальное значение – это задача о движении материальной неизменяемой плоской фигуры по псевдосфере, гомеоморфной плоскости Лобачевского. В этой работе им дана геометрическая интерпретация инерционного движения плоской геометрической фигуры при идеальном (без трения) контакте с псевдосферой. Эта задача в трехмерном евклидовом пространстве однозначно соответствует движению материальной твердой псевдосферической фигуры по неподвижной псевдосфере. При этом все точки этой фигуры должны находиться на действительной сфере псевдоевклидова пространства R_3^1 .

Вместе с тем, вследствие существующего гомеоморфизма, данная задача эквивалентна задаче о вращении абсолютно твердого тела (далее – твердого тела) вокруг неподвижного полюса в псевдоевклидовом пространстве R_3^1 с метрическим тензором $g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$, отнесенном к пространству конфигураций тела, с компонентами $g_{11} = g_{22} = -1$, $g_{33} = 1$ при $i = j$; $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Здесь $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) – орты заданного координатного орторепера в пространстве R_3^1 . Согласно проективной модели Э. Бельтрами–Ф. Клейна плоскость Лобачевского наглядно представляется в виде внутренних точек абсолюта гиперболической плоскости

$$g_{ij} x^i x^j \equiv -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0,$$

где x^i, x^j – контравариантные координаты.

Под гиригистатом в пространстве R_3^1 в общепринятом смысле понимается гиригистат, расположенный внутри изотропного конуса этого пространства, а под неподвижным полюсом O – вершина данного конуса. Тогда для радиусов-векторов всех точек гиригистата

имеем $\mathbf{r}_s^2 = g_{ij} r_s^i r_s^j > 0$ и данные векторы, по определению, являются собственными.

Открытие к настоящему времени новых физических законов обоснованно и наглядно подтверждает предвидение Н.Е. Жуковского о реальном значении исследований по механике тел в неевклидовых пространствах.

1. Предварительные положения

Введем правые координатные ортореперы с общим началом в неподвижном полюсе O : орторепер Γ_0 , неподвижный относительно инерциального конфигурационного пространства гиригистата, и орторепер $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, неизменно связанный с телом-носителем гиригистата, оси Ox_j которого совмещены с его главными в полюсе O осями приведенного (по Жуковскому) тензора инерции гиригистата.

Обозначим: A_j – диагональные элементы матрицы тензора инерции, являющиеся главными осевыми моментами инерции, соответствующими собственным значениям оператора инерции гиригистата; ω (ω_j) – абсолютная угловая скорость тела-носителя. Здесь и всюду далее индекс j принимает значения $j = 1, 2, 3$. В частности, символ (ω_j) обозначает всю совокупность заданных значений $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

На гиригистат действует система внешних активных сил с результирующим вектор-моментом $\mathbf{L}$ (L_j), постоянным относительно орторепера Γ . Движение гиригистата, происходящее под воздействием данного момента относительно полюса O , определяется эволюционной динамической системой, представленной в проекциях на координатные оси подвижного орторепера Γ [2]:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 + A_2) \omega_2 \omega_3 + k_3 \omega_2 + k_2 \omega_3 &= L_1, \\ A_2 \dot{\omega}_2 - (A_1 + A_3) \omega_3 \omega_1 - k_1 \omega_3 - k_3 \omega_1 &= L_2, \\ A_3 \dot{\omega}_3 - (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 - k_2 \omega_1 + k_1 \omega_2 &= -L_3. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнениях (1) обозначено: $\mathbf{k}(k_j)$ – постоянный гиригистатический вектор-момент, заданный проекциями k_j на оси орторепера Γ ; главные осевые моменты инерции гиригистата A_1, A_2 – моменты относительно не изотропных (идеальных) главных осей Ox_1, Ox_2 , а

момент A_3 – относительно собственной главной оси инерции Ox_3 . Моменты инерции гиростата относительно изотропных осей здесь и всюду далее не рассматриваются.

Определение. Движение гиростата, подчиненное системе уравнений (1), при котором вектор-моменты $\mathbf{L}$, $\mathbf{k}$ заданы относительно подвижного (связанного) орторепера Γ , называется его движением под действием следящего момента силы.

Уравнения (1) представляют 9-параметрическую автономную динамическую систему с квадратичной нелинейностью, содержащую инерционные, гироскопические и моментно-силовые параметры.

Целью работы является определение точного интегрального многообразия уравнений движения гиростата в режиме воздействия следящего постоянного момента силы и нахождение поля фазовых траекторий его динамической системы.

Достижение поставленной цели предполагается в следующих трех случаях движения гиростата, определяемых характером динамического воздействия на гиростат.

2. Движение первого рода

Введем ограничения:

$$\begin{aligned} A_1 < A_2, \quad k_1 k_2 \neq 0, \quad k_3 = 0, \\ L_1 = L_2 = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и примем условие $L_3 \neq 0$, означающее совместно с условиями (2), что вектор-момент $\mathbf{L}$ коллинеарен главной оси инерции гиростата, совпадающей с собственной осью Ox_3 орторепера Γ .

Обозначим безразмерные постоянные:

$$\begin{aligned} n_r &= A_r^{-1} A_3, \quad n_3 = A_1^{-1} A_2, \\ l_r &= (A_r m)^{-1} k_{3-r} \quad (r = 1, 2), \\ m &= +\sqrt{\rho(1+n_2)}, \quad \rho = 1+n_1, \\ m_1 &= m^{-1}(n_1+n_3), \quad m_2 = m_1^{-1} \end{aligned}$$

и для значений $t \in T = [0, +\infty)$ параметризуем систему уравнений (1) переменной:

$$w = m \int_0^t \omega_3(s) ds \quad (3)$$

при условиях (2) и ограничении $\omega_3 \neq 0$. В результате приведения к переменной (3) систе-

ма уравнений (1), согласно условиям (2), принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_1' + m_1 \omega_2 + l_1 &= 0, \\ \omega_2' - m_2 \omega_1 - l_2 &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \ddot{w} - m[n_p \omega_1 \omega_2 + A_3^{-1}(k_2 \omega_1 - \\ - k_1 \omega_2 - L_3)] &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где обозначено:

$$n_p = \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_1}$$

и штрих здесь обозначает производную функции по переменной w .

Положим:

$$\begin{aligned} a_1 &= -H_1 \sqrt{n_1 + n_3}, \quad b_1 = H_1 \sqrt{m m_2}, \\ a_2 &= \frac{k_1}{A_2 m m_2}, \quad b_2 = \frac{k_2}{A_1 m m_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

В результате интегрирования системы уравнений (4) находим

$$\begin{aligned} \omega_1 &= a_1 \sin w - a_2, \\ \omega_2 &= b_1 \cos w - b_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где величина $H_1 \neq 0$, содержащаяся в равенствах (6), – постоянная интегрирования. Полагаем, что другая постоянная, не представленная явно в соотношениях (6), (7), содержится аддитивно в выражении для переменной w .

Сопоставим движение гиростата в пространстве конфигураций движению его изображающей точки в фазовом пространстве $\Omega(\omega_j)$ (далее – в Ω -пространстве). Из системы уравнений (7) следует соотношение связи:

$$\frac{(\omega_1 + a_2)^2}{a_1^2} + \frac{(\omega_2 + b_2)^2}{b_1^2} = 1. \quad (8)$$

Уравнение (8) в Ω -пространстве определяет действительный невырожденный эллиптический цилиндр, образующие которого параллельны собственной координатной оси Ox_3 орторепера Γ . Этот цилиндр является несущей поверхностью, содержащей фазовые траектории гиростата и подвижный годограф вектора угловой скорости.

Направляющая цилиндра, расположенная в плоскости его ортогонального сечения, определяется явным уравнением (8) и параметрическими уравнениями (7).

Преобразуем уравнение (5), вводя новую переменную τ равенством

$$d\tau = +\sqrt{mn_p} dt. \quad (9)$$

Согласно зависимости (9), уравнение (5) принимает вид

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} - \omega_1 \omega_2 + l(k_1 \omega_2 - k_2 \omega_1 + L_3) = 0,$$

а в силу соотношений (7) это уравнение принимает форму

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} + P(w) = 0, \quad (10)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} P(w) &= c_1 \sin w \cos w + c_2 \cos w + \\ &\quad + c_3 \sin w + c_4, \\ c_1 &= -\frac{1}{2} a_1 b_1, \quad c_2 = (a_2 + h_1) b_1, \\ c_3 &= (b_2 - h_2) a_1, \\ c_4 &= a_2 (h_2 - b_2) - b_2 h_1 + l L_3, \\ l &= (A_3 n_p)^{-1}, \quad h_r = l k_r \quad (r = 1, 2). \end{aligned} \quad (11)$$

Первый интеграл уравнения (10) имеет вид

$$\frac{dw}{d\tau} = \pm \sqrt{2[D - Q(w)]}, \quad (12)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} Q(w) &= c_1 \sin^2 w + c_2 \sin w - \\ &\quad - c_3 \cos w + c_4 w, \end{aligned}$$

D – постоянная интегрирования. Повторное интегрирование уравнения (12) приводит (с точностью до произвольной постоянной) к зависимости

$$\pm \int \frac{dw}{\sqrt{2[D - Q(w)]}} = \tau. \quad (13)$$

Знак перед интегралом в равенстве (13) выбирается согласно условию $\tau > 0$. Интеграл в этом равенстве не выражается в замкнутом конечном виде через элементарные функции.

Из соотношений (3), (9) следует

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{n_p}{m}} \frac{dw}{d\tau},$$

откуда, согласно равенствам (11), (12), получаем

$$\omega_3 = \pm \sqrt{2m^{-1}n_p[D - Q(w)]}, \quad (14)$$

где область действительных значений величины ω_3 и приведенного времени τ соответствует условию $Q(w) < D$.

Выражения (7), (14) определяют систему уравнений подвижного годографа вектора угловой скорости носителя гиростата, представленную в параметрической форме с параметром w .

Для определения фазового портрета динамической системы гиростата рассмотрим поле ее фазовых траекторий на плоскости квазиординат $(w, dw/d\tau)$. Эта плоскость является разверткой фазового цилиндра (8) при зависимостях (7). Структура фазового портрета системы определяется характерной функцией $P(w)$ (11) – одномерным квазипотенциалом, содержащемся в равенствах (13), (14), и зависящем от величин параметров c_j ($j = 1, \dots, 4$).

Введем новый параметр $p = \operatorname{tg} w$ и функции этого параметра:

$$\begin{aligned} F_1(c, p) &= \frac{p + c(1 + p^2)}{\sqrt{1 + p^2}}, \\ F_2(p) &= \frac{p^2 - 1}{\sqrt{1 + p^2}}, \\ \Phi(c, p) &= \frac{F_1(c, p) - F_2(p)p}{1 + p^2}. \end{aligned}$$

Исследуя стандартным приемом математического анализа функцию (11) на наличие характерных и критических точек, получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} ap + b &= \pm F_1(c, p), \\ a - bp &= \pm F_2(p), \end{aligned} \quad (15)$$

где обозначено:

$$(a, b, c) = (2c_1)^{-1}(c_2, c_3, c_4).$$

Система уравнений (15) определяет в пространстве безразмерных параметров (a, b, c) сепаратрисную поверхность, разделяющую области с различным числом локальных экстремумов функции $P(w)$. Уравнения этой поверхности в параметрической форме с параметром p имеют вид

$$\begin{aligned} a &= \pm [\Phi(c, p)p + F_2(p)], \\ b &= \pm \Phi(c, p). \end{aligned} \quad (16)$$

Рассматривая сечения поверхности (16) плоскостями вида $c = \text{const}$, определяющими каждую плоскость при фиксированном значении параметра c , получим множество сечений – кривых на плоскости координат (a, b) , являющееся полем плоских кривых.

3. Движение второго рода

Рассмотрим случай движения гири, для которого выполняются условия

$$\begin{aligned} A_1 < A_2, \quad k_1 k_3 \neq 0, \quad k_2 = 0, \\ L_1 = L_3 = 0, \quad L_2 \neq 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Согласно этим условиям, вектор-момент $\mathbf{L}$ направлен коллинеарно неизотропной (идеальной) оси Ox_2 орторепера Γ . Параметризуем систему уравнений (1) для $t \in T$ переменной

$$u = n \int_0^t \omega_2(s) ds \quad (18)$$

при условиях (17) и $\omega_2 \neq 0$.

В результате приведения к переменной (18) подсистема первых двух уравнений (1) в силу условий (17) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_1' + m_3 \omega_3 + l_3 &= 0, \\ \omega_3' - m_4 \omega_1 + l_4 &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где штрих здесь обозначает дифференцирование по переменной u .

В соотношениях (18), (19) обозначено:

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{n_2^{-1}(n_2 + 1)(n_3 - 1)} \quad (n_3 \neq 1), \\ m_3 &= n^{-1}(n_1 + n_3), \quad m_4 = n^{-1}n_p, \\ l_3 &= (A_1 n)^{-1}k_3, \quad l_4 = (A_3 n)^{-1}k_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Согласно равенствам (20) $m_3 m_4 = 1$ и тогда решение системы уравнений (19) принимает вид соотношений (7) с фазовой поверхностью – эллиптическим цилиндром, аналогичным цилиндру (8). В целом данное движение качественно идентично по переменной u движению первого рода, в отличие от аналогичного движения в случае евклидова пространства.

4. Движение третьего рода

Исследуем движение гири, для которого выполняются условия:

$$A_1 = A_2, \quad L_2 = 0. \quad (21)$$

Согласно первому условию (21) соб-

ственная ось координат Ox_3 орторепера Γ совпадает с осью кинетической симметрии гири, а второе условие показывает, что вектор-момент $\mathbf{L}$ расположен в координатной плоскости $Ox_1 x_3$. При этом первое условие (21) отличается от соответствующего условия (2).

Существуют следующие случаи данного движения.

Случай 1 соответствует в дополнение к принятым ограничениям (21) условиям

$$k_3 = 0, \quad L_1 = 0. \quad (22)$$

Согласно ограничениям (21), (22), вектор-момент $\mathbf{L}$ коллинеарен оси кинетической симметрии гири, а гири статический момент $\mathbf{k}$ компланарен координатной плоскости $Ox_1 x_2$.

При условиях (21), (22) и ограничении $\omega_3 \neq 0$ для значений $t \in T$ введем переменную:

$$v = \lambda \int_0^t \omega_3(s) ds, \quad (23)$$

где $\lambda > 0$ – произвольная безразмерная постоянная.

В результате приведения к переменной (23) первые два уравнения системы (1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \omega_1' + \Phi \omega_2 + l_5 &= 0, \\ \omega_2' - \Phi \omega_1 - l_6 &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где штрих здесь обозначает дифференцирование по переменной v , а постоянные определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \Phi &= \lambda^{-1} \rho, \\ (l_5, l_6) &= (A_1 \lambda)^{-1} (k_2, k_1). \end{aligned} \quad (25)$$

При этом третье уравнение системы (1) идентично уравнению (5), в котором параметр m заменен на λ . Это уравнение при $A_1 = A_2$ описывает движение одномерного линейного осциллятора – математического маятника, находящегося под воздействием моментно-силового фактора L_3 .

Интегрирование системы уравнений (24) приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= H_2 \cos \Phi v - \Phi^{-1} l_6, \\ \omega_2 &= H_2 \sin \Phi v - \Phi^{-1} l_5 \end{aligned} \quad (26)$$

с постоянными (25), где $H_2 \neq 0$ – постоянная интегрирования.

Пользуясь произвольностью выбора значений постоянной λ , для дальнейшего положим $\lambda = \rho$ и тогда, согласно равенству (25), имеем $\Phi = 1$.

В силу равенств (26) фазовые траектории системы (24) в Ω -пространстве расположены на круговом цилиндре радиуса $|H_2|$ с уравнением

$$(\omega_1 + l_6)^2 + (\omega_2 + l_5)^2 = H_2^2, \quad (27)$$

ось которого параллельна оси кинетической симметрии гиригостата.

Из третьего уравнения системы (1), согласно соотношению (23), при условиях (21), (22) получаем

$$\ddot{v} + A_3^{-1} \lambda [H_2 U(v) + L_3] = 0, \quad (28)$$

где функция квазипотенциала

$$U(v) = k_1 \sin v - k_2 \cos v$$

$$(k_1^2 + k_2^2 \neq 0).$$

Уравнение (28) характеризует движение одномерного осциллятора, совершающего маятниковое движение, решение которого известно и представляется в эллиптических функциях времени. Этим решением определяется характер движения изображающей точки динамической системы гиригостата по фазовому цилиндру (27).

Случай 2 определяется дополнительными к ограничениям (21) условиями:

$$k_1 = 0, \quad k_2 \neq 0, \quad L_3 = 0. \quad (29)$$

Согласно ограничениям (21), (29), вектор-момент L ортогонален оси кинетической симметрии гиригостата, а гиригостатический момент k компланарен координатной плоскости Ox_2x_3 .

Произведем параметризацию системы (1) преобразованием

$$\mathcal{G} = \rho \int_0^t \omega_1(s) ds \quad (30)$$

при условиях (21), (29) и ограничении $\omega_1 \neq 0$ для значений $t \in T$. В результате, согласно равенству (30), второе и третье уравнения системы (1) принимают вид

$$\begin{aligned} \omega_2' - \omega_3 - l_7 &= 0, \\ \omega_3' - l_8 &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

где штрих здесь обозначает дифференцирование по переменной $\mathcal{G}$, причем

$$l_7 = (A_1 \rho)^{-1} k_3, \quad l_8 = (A_3 \rho)^{-1} k_2. \quad (32)$$

В результате интегрирования системы уравнений (31) получаем:

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{1}{2} l_8 \mathcal{G}^2 + \mu_2 \mathcal{G} + \mu_3, \\ \omega_3 &= l_8 \mathcal{G} + \mu_1, \end{aligned} \quad (33)$$

где все μ_j – постоянные интегрирования.

Соотношения (33), (32) являются параметрическими уравнениями фазовой поверхности, несущей подвижный годограф вектора угловой скорости носителя гиригостата. Исключая из этих уравнений параметр $\mathcal{G}$, получаем явное уравнение этой поверхности – параболы цилиндра

$$\omega_2 = b_3 \omega_3^2 + b_4 \omega_3 + b_5 \quad (34)$$

с образующими, параллельными координатной оси Ox_1 репера Γ . В уравнении (34) обозначено:

$$\begin{aligned} b_3 &= (2l_8)^{-1}, \quad b_4 = l_8^{-1}(\mu_2 - \mu_1), \\ b_5 &= l_8^{-1} \mu_1 \left(\frac{1}{2} \mu_1 - \mu_2 \right) + \mu_3. \end{aligned}$$

Согласно преобразованию (23) первое уравнение системы (1) принимает вид

$$\ddot{\mathcal{G}} + \rho [\rho \omega_2 \omega_3 + A_1^{-1} (k_3 \omega_2 + k_2 \omega_3 - L_1)] = 0,$$

и в силу равенств (33) преобразуется в уравнение

$$\ddot{\mathcal{G}} + \sum_{k=0}^3 p_k \mathcal{G}^k = 0, \quad (35)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} p_0 &= \rho [A_1^{-1} (k_2 \mu_1 + \mu_3 - L_1) + \rho \mu_1 \mu_3], \\ p_1 &= \rho [A_1^{-1} (\mu_2 + k_2 l_8) + \rho (\mu_1 \mu_2 + \mu_3 l_8)], \\ p_2 &= \rho l_8 \left[\frac{1}{2} A_1^{-1} k_3 + \rho \left(\frac{1}{2} \mu_1 + \mu_2 \right) \right], \\ p_3 &= \frac{1}{2} (\rho l_8)^2. \end{aligned} \quad (36)$$

Вводя новую переменную τ посредством равенства

$$d\tau = \sqrt{p_3} dt,$$

и полагая в соотношениях (36) $q_k = p_3^{-1} p_k$ ($k = 0, 1, 2$), приведем уравнение (35) к виду

$$\frac{d^2 \mathcal{G}}{d\tau^2} + V(\mathcal{G}) = 0, \quad (37)$$

где

$$V(\mathcal{G}) = \mathcal{G}^3 + q_2 \mathcal{G}^2 + q_1 \mathcal{G} + q_0.$$

Для уравнения (37) имеет место первый интеграл:

$$\frac{d\mathcal{G}}{d\tau} = \pm \sqrt{H - W(\mathcal{G})}, \quad (38)$$

где квазипотенциальная функция

$$W(\mathcal{G}) = \frac{1}{2} \mathcal{G}^4 + \frac{2}{3} q_2 \mathcal{G}^3 + q_1 \mathcal{G}^2 + 2q_0 \mathcal{G},$$

H – постоянная интегрирования.

Интегрирование уравнения (38) приводит к соотношению

$$\pm \int_0^{\mathcal{G}} \frac{ds}{\sqrt{H - W(s)}} = \tau, \quad (39)$$

где знак в левой части выбирается из условия $\tau > 0$, а область действительных значений τ и величины $\mathcal{G}$ соответствует условию $W(\mathcal{G}) < H$.

Обращая равенство (39) в случае, при котором полином W не имеет равных линейных действительных множителей, в результате получаем зависимость с эллиптической функцией Вейерштрасса $\wp$:

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{2} q_0 [\wp(\tau; g_2, g_3) + \frac{1}{12} q_1]^{-1}, \quad (40)$$

где инварианты полинома W определяются равенствами [3, с. 321]:

$$\begin{aligned} g_2 &= q_1^2 - \frac{1}{3} q_0 q_2 - \frac{1}{2} H, \\ g_3 &= \frac{1}{108} q_1^3 - \frac{1}{36} (q_0 q_1 + H q_2) q_2 + \\ &\quad + \frac{1}{8} q_0^2 + \frac{1}{12} H q_1. \end{aligned}$$

Сопоставляя между собой зависимости (30), (40), в результате получаем:

$$\omega_1 = 2(\rho q_0)^{-1} \mathcal{G}^2 \sqrt{p_3} \wp'(\tau), \quad (41)$$

где [3, с. 320]

$$\wp'(\tau) = \pm [4\wp^3(\tau) - g_2 \wp(\tau) - g_3]^{1/2},$$

штрих здесь обозначает дифференцирование по переменной τ . При этом с точностью до аддитивной постоянной имеем

$$\tau = \sqrt{p_3} t \quad (42)$$

и равенства (41), (42) определяют функциональную зависимость вида $\omega_1(t)$.

Полученные соотношения позволяют исследовать характер фазовых траекторий изображающей точки на плоскости (v, v') , которую можно интерпретировать как развертку в Ω -пространстве параболического цилиндра с уравнением (34).

Величины $\mathcal{G}, \omega_1$, определяемые равенствами (40), (41), выражаются через эллиптическую функцию Якоби sn с применением соотношения связи [3, с. 393]:

$$\wp(\tau) = e_3 + \sigma^2 [\text{sn}^2(\sigma\tau)]^{-1}, \quad (43)$$

где $\sigma = \sqrt{e_1 - e_3}$, а постоянные $e_1 \geq e_2 \geq e_3$ – действительные корни стандартного полинома Вейерштрасса:

$$S = 4s^3 - g_2 s - g_3.$$

В данном случае равенство (40) представляется в виде:

$$\mathcal{G} = -\frac{1}{2} q_0 [\sigma^2 \text{sn}^{-2}(\sigma\tau) + e_3 + \frac{1}{12} q_1]^{-1},$$

где модуль функции Якоби

$$k = \sqrt{\frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3}} \quad (0 < k^2 < 1).$$

В случае кратных корней e_j эллиптическая функция $\wp(\tau)$ вырождается в элементарную функцию.

Заключение

Проведено интегрирование динамической системы гиростата с постоянным гиростатическим моментом, движущегося относительно центра инерции в пространстве R_3^1 . Выделено три отдельных случая расположения результирующего вектор-момента внешних сил и гиростатического момента относительно главных осей инерции гиростата.

Установлено, что во всех случаях движения фазовые траектории динамической системы гиростата в пространстве состояний расположены на действительных невырожденных цилиндрических поверхностях либо эллиптического, либо параболического типа. Характер этих траекторий соответствует периодическому режиму движения по перемен-

ным ω_1, ω_2 и колебательно-вращательному режиму маятниковго типа – по компоненте ω_3 . Эти движения существуют в односвязных полуограниченных областях фазового пространства, разделенных регулярной алгебраической сепаратрисной поверхностью.

Задача, аналогичная данной, рассмотрена для случая движения гиригостата в евклидовом пространстве в работе [4].

Примененный в настоящей работе метод параметрического интегрирования динамической системы гиригостата (как и в статье [4]) ранее был использован Р. Граммелем [5] в задаче об аналогичном движении твердого тела в евклидовом пространстве. Ему принадлежит также идея применения этого приема в задаче о движении тела под действием следящего силового вектор-момента. Такой подход в ряде случаев упрощает точное интегрирование системы уравнений движения с квадратичной нелинейностью. В частности, в результате параметризации первые два нелинейных уравнения системы (1) преобразуются в линейные и принимают вид (4), (19), (24), (31) (см. также [6]). Этот прием эффективен в случаях, при которых не применяются первые интегралы системы уравнений движения или если эти интегралы для данной системы не существуют.

В некоторых случаях применение этого приема не приводит к результату, выраженному в конечном замкнутом виде и представляемого в элементарных функциях (без использования разложений функций в ряды и приближенных методов). В частности, такому случаю соответствует выражение (13). Здесь возможно применение аппроксимации подынтегральной функции полиномом третьей или четвертой степени с последующим сведением интеграла к эллиптической форме. Согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации, такое представление возможно для всякой непрерывной функции с любой степенью точности.

Предпосылки к постановке задачи рассмотренного типа в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах существенно различны. В задаче для пространства R_3^1 задано только одно ограничение, наложенное на главные моменты инерции гиригостата в виде $A_1 < A_2$, тогда как в случае евклидова пространства ограничения заданы в виде $A_1 < A_2 < A_3$ [4]. Вследствие этого для псевдоевклидова пространства не применяется

понятие "ось промежуточного момента инерции" гиригостата, поскольку в данном случае этой оси не существует, в силу чего характер движения второго рода для каждого из этих пространств коренным образом различен.

Следует отметить, что применение приема Граммеля имеет важное ограничение: параметризуемая компонента угловой скорости гиригостата (в частности, величина ω_3 в равенстве (3)) на интервале ее значений должна быть отличной от нуля. Это условие имеет определяющее значение и его нарушение приводит к недостоверности результатов исследования. Однако такое ограничение не применяется и, более того, о нем не упоминается в работах [4; 6, с. 155, 164].

Список источников

1. Жуковский Н.Е. О движении материальной псевдосферической фигуры по поверхности псевдосферы // Полн. собр. соч.: в 10 т. М.; Л.: ОНТИ. Т. 1. 1937. С. 490–535.
2. Макеев Н.Н. Устойчивость перманентных вращений гиригостата в пространстве R_3^1 // Дифференциальная геометрия: межвуз. науч. сб. Саратов, изд-во Саратовского ун-та, 1979. Вып. 4. С. 150–156.
3. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. В 2 ч. М.: Физматлит. Ч. 2, 1963. 516 с.
4. Смольников Б.А., Степанова М.В. Перманентные вращения гиригостата с самовозбуждением // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 1981. № 3. С. 107–113.
5. Граммель Р. Теория несимметричного гироскопа с реактивным приводом // Механика: период. сб. переводов иностр. статей 1958. № 6. С. 145–151.
6. Магнус К. Гироскоп. Теория и применение. М.: Мир, 1974. 528 с.

References

1. Zhukovskiy, N.E. (1937), *O dvizhenii material'noy psevdosfericheskoy figury po poverkhnosti psevdosfery* [On the motion of a material pseudo-spherical figure on the surface of the pseudo-dosphere], ONTI, Poln. sobr. soch. v 10 t., T. 1, M., L., Russia. pp. 490-535.
2. Makeev, N.N. (1979), "Ustoychivost' permanentnykh vrashcheniy girostata v prostranstve R_3^1 ", *Differentsial'naya geometriya: mezhvuzovskiy nauchnyy sb.*, vol. 4, pp.150-156.

3. Uitteker, E.T., Watson, DZh.N. (1963), *Kurs sovremennogo analiza. V 2 ch.* [A course in modern analysis. In 2 parts], Fizmatlit, M, Russia. 516 p.
4. Smol'nikov, B.A., Stepanova, M.V. (1981), "Permanent rotations of the gyrostat with self-excitation", *Izvestiya Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, vol. 3, pp.107-113.
5. Grammel, R. (1958), "Theory of asymmetric gyroscope with reactive drive", *Mekhanika: period. sb. perevodov inostr. statey*, vol. 6, pp. 145-151.
6. Magnus, K. (1974), *Giroskop. Teoriya i primeneniye* [Gyroscope. Theory and application], Mir, M., Russia. 528 p.

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев – доктор физико-математических наук, профессор, AuthorID: 374535.

Information about the author:

Nikolay N. Makeev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, AuthorID: 374535.

Научная статья

УДК 551.582.2

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-33-42

Математические модели прогнозирования температуры и осадков с использованием фрактального и фурье-анализа метеорологических рядов

Виктор Юрьевич Митин¹, Валерий Нагимович Аптуков²

^{1,2}Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия

¹victormitin@ya.ru;

²aptukov@psu.ru

Аннотация. В статье представлена методика построения статистических моделей, которые могут быть использованы для прогнозирования температурного режима и осадков на предстоящий месяц. Температура и осадки прогнозируются в двухэлементной шкале (высокое или низкое значение параметра). В рамках рассмотренных примеров установлено, что температура прогнозируется лучше, чем осадки и в последнее время имеется тенденция к увеличению точности прогнозов. Также в статье дается подробный анализ параметров модели, включающий их изменение в годовом цикле, тенденции в динамике изменения за последние 80 лет, корреляцию между климатическими параметрами. Наряду с базовыми статистическими функциями климатических показателей в моделях присутствуют фрактальные параметры (индекс фрактальности) и параметры дискретного преобразования Фурье (амплитуда и фаза первой гармоники). Установлено, что индекс фрактальности месячных рядов среднесуточных температур ниже, чем месячных рядов, содержащих значения суточных сумм осадков.

Ключевые слова: прогнозирование погоды; температура; осадки; статистические модели; статистические характеристики; индекс фрактальности; преобразование Фурье; изменение климата

Для цитирования: Митин В. Ю., Аптуков В. Н. Математические модели прогнозирования среднемесячной температуры и осадков с использованием фрактального и фурье-анализа метеорологических рядов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 1(64). С. 33–42. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-33-42.

Статья поступила в редакцию 30.01.2024; одобрена после рецензирования 27.02.2024; принята к публикации 17.03.2024.

Research article

Mathematical Models of Temperature and Precipitation Forecasting Using Fractal and Fourier-Analysis of Meteorological Series

Victor Y. Mitin¹, Valery N. Aptukov²

^{1,2}Perm State University, Perm, Russia

¹victormitin@ya.ru;

²aptukov@psu.ru

Abstract. The article presents a methodology for constructing statistical models that can be used to predict the temperature regime and precipitation for the upcoming month. Temperature and precipitation are predicted on a two-element scale (high or low parameter value). Within the framework of the considered examples, it was found that temperature is predicted better than precipitation, and recently the accuracy of forecasts tends to increase. The article also provides a detailed analysis of the model parameters, including their change in the annual cycle, trends in the dynamics of change over the past 80 years, and the correla-



Данная работа © 2024 Митин В.Ю., Аптуков В.Н. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

tion between climatic parameters. Along with the basic statistical functions of climatic indicators, the models contain fractal parameters (fractal index) and parameters of the discrete Fourier transform (amplitude and phase of the first harmonic). It was found that the fractal indices of monthly series of average daily temperatures is lower than those for monthly series containing daily temperature values

Keywords: *weather forecasting; temperature; precipitation; statistical models; statistical characteristics; fractal index; Fourier transform; climate change*

For citation: Mitin, V. Y., Aptukov, V. N. (2024), "Mathematical Models of Temperature and Precipitation Forecasting Using Fractal and Fourier-Analysis of Meteorological Series", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(64), pp. 33-42. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-33-42.

The article was submitted 30.01.2024; approved after reviewing 27.02.2024; accepted for publication 17.03.2024.

Введение

Задача прогнозирования погоды является чрезвычайно актуальной, поскольку изменение погодных характеристик значительно влияет на жизнедеятельность и здоровье человека, на различные экономические процессы. Существуют два подхода к прогнозированию: физико-математический и статистический.

В первом варианте в качестве предикторов могут рассматриваться факторы океана (например, модель ENSO), геофизические (например, в прогнозах Н.С. Сидоренкова) и другие факторы, имеющие большую инерционность и позволяющие давать эффективные прогнозы не более чем на 5–7 дней.

Второй подход основан на поиске скрытых закономерностей временных рядов, их статистических характеристик, в ряде случаев с использованием спектрального, вейвлет- и фурье-анализа, а также фрактальных параметров. Данный подход имел широкое распространение начиная с 1960-х гг. в работах Дружинина И.П., Малинина В.Н. и многих других.

Основные подходы в статистических методах прогнозирования изложены в публикациях [1–4]. Нередко прогнозирование погоды включает обработку большого объема данных, полученных на метеостанциях, и требует значительных вычислительных и материальных затрат.

В данной статье исследуется возможность получения прогнозов температуры и осадков, основанных на минимальном наборе данных (архив ежесуточных значений температур и осадков), с приемлемой точностью, хотя бы в двухэлементной шкале (выше или ниже медианной нормы). Математические модели, изучаемые в статье, основаны на гипотезе о существовании устойчивых статистических связей среднемесячных температур и месячных сумм осадков от характеристик рядов температур и осадков предшествующих периодов.

Например, в статьях [5, 6] описаны подобные закономерности (для Хабаровского края) и положены в основу методики прогнозирования.

В данной статье изучаются более сложные климатические параметры, исследуется их динамика и взаимная корреляция. В моделях учитывается индекс фрактальности – фрактальный параметр, введенный в работах [7, 8] и далее широко используемый в различных областях науки. Основы фрактального подхода изложены в монографии [9]. Фрактальный анализ также иногда используется в метеорологии, например в публикациях [10, 11].

При исследовании климатических рядов также могут использоваться методы, связанные с вейвлет- и фурье-анализом сигналов [10]. В моделях, представленных в данной статье, присутствуют такие климатические параметры – амплитуды и фазы первой гармоники дискретного преобразования Фурье.

Ранее [12, 13] были рассчитаны индексы фрактальности климатических рядов для различных городов России и мира и подробно изучены фрактальные закономерности для Перми. В статьях [14–16] развивались подходы к статистическим моделям прогнозирования аномалий температуры и осадков на предстоящий месяц или климатический сезон для Перми.

В данной статье впервые изучены закономерности базовых статистических, фрактальных и других параметров в Самаре, приведены примеры статистических моделей прогнозирования температуры и осадков для Самары и получена оценка их точности.

Основные отличия этих моделей от ранее использовавшихся моделей в статьях [14–16] состоят в более широком охвате параметров и использовании равномерных двухэлементных шкал. Также исследуются зависимости точности моделей от типа предикторов, глубины модели и временного промежутка в предикторах.

1. Основные климатические характеристики Самары и динамика их изменения

Климатические условия местности определяются температурой, суммой осадков, скоростью ветра, атмосферным давлением, облачностью и другими характеристиками. Основными погодными параметрами, которые представляют наибольший интерес для физических лиц и организаций и наиболее часто встречаются в прогнозах, являются температура и осадки.

Данные о среднесуточных температурах (t) и суточных суммах осадков (o) были взяты из архивов ВНИИМЦД (г. Обнинск), представленных на сайте www.meteo.ru. Далее они объединялись по месяцам, и для каждого месяца рассчитывались статистические и другие характеристики.

В статистических моделях в качестве предикторов используются средние значения mt и mo , среднеквадратичные отклонения σt и σo , коэффициенты асимметрии kt и ko месячных рядов среднесуточных температур и суточных сумм осадков.

Годовая динамика изменения среднемесячных температур воздуха и среднемесячной суточной суммы осадков за период 1936–2020 гг. изображена на рис. 1.

Самый холодный месяц – январь со среднемесячной температурой 11.81°C , самый теплый – июль ($+21.02^{\circ}\text{C}$). Годовая динамика осадков имеет несколько локальных экстремумов, максимальное количество осадков выпадает в июле (53.1 мм за месяц, 1.71 мм за сутки), минимальное – в марте (32.57 мм за месяц, 1.05 мм в сутки). Летом и осенью выпадает в среднем больше осадков, чем в зимне-весенний период.

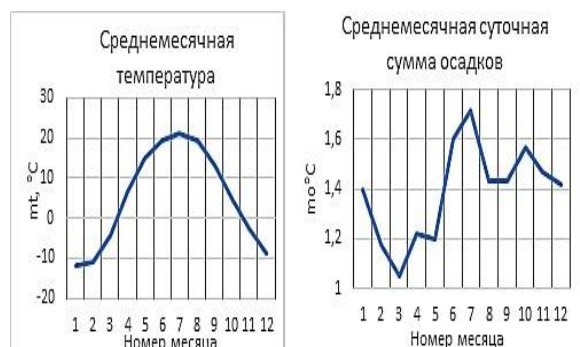


Рис. 1. Среднемесячные климатические параметры mt и mo (за 1936–2020 гг.)

На рис. 2 представлена годовая динамика средних величин среднеквадратичных отклонений месячных рядов температур и осадков: σt (синяя линия), σo (красная линия).

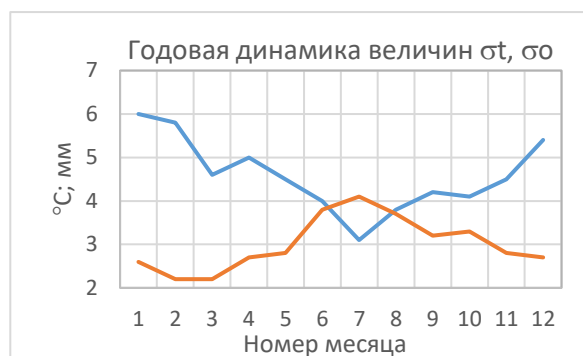


Рис. 2. Годовая динамика величин σt , σo (за 1936–2020 гг.)

Из рис. 2 следует, что температура в летнее время более стабильна чем зимой, когда среднеквадратичные отклонения достигают максимальных значений (выше 5°C), а для осадков, напротив, более стабильным периодом является зима. Распределение температуры близко к симметричному, а распределение осадков обладает сильной положительной асимметрией из-за того, что часто встречаются дни без осадков или с незначительными осадками, при этом пик асимметричности достигается в летние месяцы.

Если разбить восьмидесятилетний период 1941–2020 гг. на 4 двадцатилетних периода, то средняя температура mt во все месяцы, за исключением июня, принимает максимальное значение в последнем периоде. Особенно значительной является тенденция к потеплению в зимний период. Например, в январе она повысилась от -13.28°C в первом периоде до -9.59°C (на 3.69°C), в июле аналогичный прирост составляет только 2.02°C , а в июне, где тренд потепления практически отсутствует, – всего 0.18°C . Величина σt обычно имеет тенденцию к снижению, т.е. температура становится более стабильной, наиболее четко эта закономерность проявляется в зимние месяцы.

Противоположная ситуация наблюдается только в октябре, где величина σt выросла от 3.91°C в первом периоде до 4.23°C в четвертом. Для величины σo в холодный период наблюдается возрастающая тенденция, а в теплые месяцы явные закономерности отсутствуют.

2. Дополнительные климатические параметры

Кроме основных статистических функций от климатических переменных (среднего значения, среднеквадратичного отклонения, коэффициента асимметрии) при построении моделей использовались дополнительные параметры.

Одним из таких параметров является индекс фрактальности μ , оцениваемый с помощью метода минимального покрытия [10]. Этот фрактальный параметр характеризует скорость расходимости полной амплитудной вариации ряда данных по степенному закону:

$$V_f(\delta) = \sum_i A_i(\delta) \sim \delta^{-\mu(f)}, \quad (1)$$

где $V_f(\delta)$ – полная амплитудная вариация, т.е. сумма локальных размахов $A_i(\delta)$ (разностей между локальным максимумом и минимумом на каждом отрезке разбиения) функции f разбиения с масштабом δ . При этом индекс фрактальности μ в соотношении (1) является своеобразной мерой степени изрезанности графика функции, на что указывает его связь с фрактальной размерностью:

$$D = \mu + 1. \quad (2)$$

На практике параметр μ оценивался с помощью линейной регрессии по совокупности разбиений ряда, содержащих от 2 до 10 точек, при этом обычно достигается хорошая сходимость к равенству (2).

С другой стороны, индекс фрактальности характеризует степень детерминированности или случайности ряда. Случайным рядам соответствуют значения μ около 0.5. Значения μ , близкие к 0, соответствуют персистентным рядам (стремящимся к сохранению тренда), а близкие к 1 – антиперсистентным рядам (стремящимся к переходу от возрастания к убыванию и наоборот).

В настоящее время данный параметр достаточно широко используется для фрактального анализа рядов в разнообразных областях науки, в том числе для метеорологических рядов [10, 11].

Ранее [12] были получены значения индекса фрактальности рядов температуры, осадков и других климатических переменных для различных городов России и мира. Установлено, что в регионах с сухим континентальным климатом индексы фрактальности температуры выше, чем в территориях с

влажным климатом. В статье [13] изучена динамика изменения индекса фрактальности в Перми за последние 90 лет.

К дополнительным климатическим параметрам относятся также амплитуда A и фаза φ первой гармоники (с ненулевой частотой) в дискретном преобразовании Фурье. Отметим, что различные методы, связанные со спектральным анализом исходного сигнала, достаточно часто используются для обработки метеорологических данных. Дискретное преобразование Фурье ряда v_s ряда u_r длины n определяется соотношением:

$$v_s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^n u_r e^{2\pi i(r-1)(s-1)/n}, \quad (3)$$

из которого находятся амплитуда A и фаза φ : $A=|v_2|$, $\varphi = \text{Arg } v_2$. Перед выполнением преобразования Фурье исходный ряд нормируется:

$$u_r \rightarrow U_r, U_r = \frac{u_r - \min u_r}{\max u_r - \min u_r}. \quad (4)$$

Таким образом вводятся новые климатические параметры $\mu_t, \mu_o, A_t, A_o, \varphi_t, \varphi_o$.

Индексы фрактальности месячного ряда среднесуточных температур μ_t и осадков μ_o в среднем летом несколько ниже, чем в зимнее время. Величины μ_o для всех месяцев выше соответствующих значений μ_t .

Таким образом, месячные ряды суточных осадков имеют более изрезанный график и менее трендоустойчивы, чем аналогичные ряды среднесуточных температур (рис. 3).

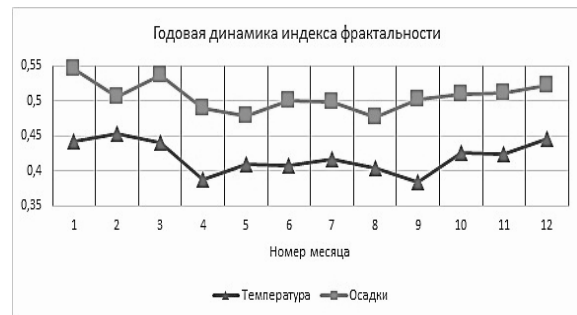


Рис. 3. Годовая динамика индекса фрактальности

Средний индекс фрактальности месячных температурных рядов принимает самые низкие значения в апреле и в сентябре, а самые высокие – в декабре и феврале. Индекс фрактальности ряда осадков принимает высокие значения в январе и в марте, низкие – в мае и в августе. Годовая амплитуда индексов фрактальности для обоих параметров не превышает 0,1.

Выраженного тренда в изменении индексов фрактальности за последние 90 лет не выявлено, величины индекса фрактальности могут существенно изменяться от года к году.

В отдельные месяцы обнаружена тенденция к росту величин At (в январе от 0.496 в первом двадцатилетнем периоде до 0.589 в последнем, в октябре от 0.53 до 0.64 соответственно). Устойчивых тенденций для параметров Ao , ϕt , ϕo не выявлено.

3. Корреляции между климатическими параметрами

Для каждого месяца t были построены таблицы попарных линейных корреляций для набора параметров $\{mt, \sigma t, kt, \mu t, At, \phi t, mo, \sigma o, ko, \mu o, Ao, \phi o\}$. Например, mt – это ряд из среднемесячных температур заданного месяца за весь период наблюдений, σt – ряд из среднеквадратичных отклонений среднесуточных температур в заданном месяце.

Рассчитаны коэффициенты корреляции между всеми парами климатических параметров за один и тот же месяц. Самые высокие коэффициенты линейной корреляции отмечены в паре параметров $(\sigma o, do)$: $r=0.909$ (июль), $r=0.915$ (январь), в остальные месяцы также наблюдается выраженная прямая корреляция. Корреляция в паре (mt, mo) устойчиво положительна в теплое время года и отрицательна в холодное. Это объясняется тем, что высокие температуры летом (вследствие солнечного прогрева) чаще всего наблюдаются в сухую погоду при преобладании антициклонов, а зимой (вследствие влияния облаков) – при циклоническом типе погоды, для которого характерно обилие осадков.

Корреляции средней степени выраженности в январе также наблюдаются в парах (mt, kt) : $r = -0.49$, $(\mu o, ko)$: $r = -0.56$, $(At, \sigma t)$: $r=0.39$. Остальные параметры коррелируют слабо. В июле умеренная корреляция отмечена в парах $(\sigma t, \mu t)$: $r = -0.49$, (ko, Ao) : $r = -0.51$, $(Ao, \mu o)$: $r = 0.43$, $(ko, \mu o)$: $r = -0.43$, $(At, \sigma t)$: $r = 0.53$.

При изучении попарных корреляционных зависимостей между параметрами mt и mo текущего и предыдущего месяцев корреляций высокой степени выраженности не обнаружено. Это говорит о том, что при построении моделей прогнозирования погоды степень влияния предикторов, взятых по отдельности, на прогнозируемую переменную может

быть недостаточной, поэтому предпочтительнее рассматривать совокупное влияние нескольких предикторов.

4. Статистические модели прогнозирования температуры и осадков

В основе статистических моделей прогнозирования аномалий температуры и осадков на предстоящий месяц лежит гипотеза о наличии устойчивых статистических связей между среднемесячной температурой и суммой осадков в текущем месяце и предикторными переменными для предыдущих месяцев, к числу которых относятся статистические функции m , σ , k и дополнительные параметры μ (рассчитывается по формуле (1)), A , ϕ (вычисляется по формулам (3–4)) для рядов температуры и осадков.

Данные среднесуточных температур и сумм осадков в Самаре за каждые сутки начиная с 1936 г. получены из специализированных массивов, предоставленных Всероссийским научно-исследовательским институтом гидрометеорологической информации, по ним рассчитываются ряды климатических переменных.

Все значения климатических переменных ранжируются с помощью выбранной дискретной шкалы, наиболее простой является равномерная двухэлементная шкала R :

$$R(p) = \begin{cases} -1, p < med(p) \\ 1, p \geq med(p) \end{cases}, \quad (5)$$

где p – произвольный климатический параметр, $med(p)$ – его медианное значение за выбранный временной период I , называемый историей. Таким образом, для всех предикторных и прогнозируемых переменных рассматриваются только 2 класса значений: $R = -1$ (низкие) и $R = 1$ (высокие), при этом соотношение 50 % : 50 % для количества элементов в классах выполняется точно (при четной длине ряда) или приблизительно (при нечетной длине ряда или в случае совпадения значений ряда).

Выбор диапазона моделирования "выше или ниже медианного значения" хотя и обладает рядом недостатков (выборочная случайная погрешность, практические неудобства), но зато позволяет распределить историю равномерно по базисным переменным, что является важным в условиях существующих ограничений на длину выборки.

Кроме шкалы (5), можно рассматривать другие шкалы, например четырехэлементную, для прогнозирования не только направления, но и силы аномалии. В статье [15] прогностические модели строятся на основе трехэлементной неравномерной шкалы с соотношением 40 % : 20 % : 40 %.

Рассматриваемые модели базируются на принципе повторяемости истории: считается, что направление аномалии в прогнозируемом периоде будет с большей вероятностью таким же, каким оно чаще всего было ранее в те годы, когда значения предикторных переменных предшествующих месяцев совпадали со значениями в текущем году.

С одной стороны, некоторые взаимосвязи между предикторными и прогнозируемыми переменными могут проявляться только если рассматривать предикторы в совокупности. Например, одновременно холодный и влажный ноябрь может обеспечить высокий уровень снежного покрова, оказывающий определенное влияние на погоду в последующие месяцы. Оптимальным вариантом являются совокупности из двух предикторов, поскольку при дальнейшем увеличении количества предикторов часто бывает, что за рассматриваемый временной период не находится достаточного количества случаев, когда ранговые значения всех предикторов совпадали с их значениями в текущем году, для их статистической обработки.

Таким образом, весь исходный набор предикторов, содержащий значения функций m , σ , k , μ , A , ϕ от рядов температуры и осадков за каждый из нескольких предыдущих месяцев, разбивается на всевозможные пары, далее для каждой пары рассчитывается относительная частота каждого варианта рангового значения прогнозируемой переменной (в двухэлементной шкале – для $R = -1$ и $R = 1$) и усредняется по всем парам, либо по первым p парам с максимальной относительной частотой наиболее часто встречающегося рангового значения прогнозируемой переменной. Прогноз может быть точечным (ранговое значение с наибольшей относительной частотой) или вероятностным (соотношение относительных частот ранговых значений).

Будем использовать обозначения: $p(m)$ – ряд значений произвольного климатического параметра p за месяц m (например, $mt(1)$ – средняя температура января); $p[m] = p(M-m)$,

где M – номер прогнозируемого месяца. При неположительном значении m ряд $p(m)$ – это на один год смещенный ряд $p(m+12)$. Например, величины типа $p(0)$, $p(-1)$ и $p(-2)$ относятся к декабрю, ноябрю и октябрю прошлого года соответственно.

Приведем пример использования данной методики прогнозирования.

Пусть историю I составляют годы с 1936 по 2019 г., а прогноз аномалий среднемесячной температуры и осадков дается на апрель 2020 г., базис предикторов составляют среднемесячные температуры января, февраля и марта: $B=\{mt(1), mt(2), mt(3)\}=\{mt[3], mt[2], mt[1]\}$. Ранговые значения всех параметров $mt(1)$, $mt(2)$, $mt(3)$ в 2020 г. были равны 1.

Таблица 1. Пример реализации методики прогнозирования

Набор параметров	$(mt(1), mt(2))$	$(mt(1), mt(3))$	$(mt(2), mt(3))$
Набор значений	(1,1)	(1,1)	(1,1)
Число совпадений	26	25	27
$mt(4) = -1$	14 (53.8%)	11 (44%)	10 (37%)
$mt(4) = 1$	12 (46.2%)	14 (56%)	17 (63%)
$mo(4) = -1$	11 (42.3%)	8 (32%)	9 (33.3%)
$mo(4) = 1$	15 (57.8%)	17 (68%)	18 (66.7%)

В табл. 1 рассчитаны относительные частоты для каждой пары предикторов. Средние относительные частоты для среднемесячной температуры апреля в 2020 г. равны 55.1 % ($R=1$) и 44.9 % ($R = -1$), для осадков – соответственно 64.2 % ($R=1$) и 35.8 % ($R = -1$). По этим данным можно сделать прогноз о том, что температура и осадки в апреле 2020 г. выше медианной нормы ($R=1$), причем для осадков вероятность исполнения такого прогноза выше. В реальности оба прогноза оказались верными.

Данный пример иллюстрирует алгоритм, на котором основана методика прогнозирования для случая трех предикторов.

В реальных моделях используется больше предикторов, но расчет осуществляется аналогичным образом. В столбце "число совпадений" указано количество лет, когда значения обеих предикторных переменных

совпадали с текущими значениями, что соответствует длине выборки, по которой рассчитываются относительные частоты прогнозируемой величины.

5. Результаты прогнозирования с помощью статистических моделей

Основными параметрами статистических моделей являются прогнозируемая переменная, исходный набор предикторов B , шкала ранжирования (она может быть различной для прогнозируемой переменной и предикторов), диапазон истории I , критерий отбора лучших пар предикторов K , максимальное количество лучших пар p , диапазон проверки модели, алгоритм оценки точности.

В рассмотренных ниже моделях используются равномерные двухэлементные шкалы (5), учитываются все пары предикторов, т.е. $p=C_n^2$, где n – количество переменных в базисе предикторов.

Точность модели оценивается по формуле

$$T = \frac{N_+}{N}, \quad (6)$$

где T – точность модели, N – общее количество прогнозов, N_+ – количество верных прогнозов. Для оценки точности модели по формуле (6) используется временной диапазон проверки, в котором делаются прогнозы с помощью данной модели, а результаты прогнозирования сопоставляются с реальными данными. Прогноз считается верным, если реальные и прогнозируемые ранговые значения прогнозируемой переменной совпадают, в противном случае – неверным. Обычно точность оценивается отдельно для каждого месяца.

Ниже приведен пример моделей и оценки их точности. В них используются 5 базисов предикторов:

$B_1 = \{mt[1], mt[2], mt[3], mo[1], mo[2], mo[3]\}$,
 $B_2 = \{mt[1], mt[2], \sigma t[1], \sigma t[2], mo[1], mo[2]\}$,
 $B_3 = \{mt[1], \sigma t[1], kt[1], \mu t[1], At[1], \varphi t[1]\}$,
 $B_4 = \{mo[1], \sigma o[1], ko[1], \mu o[1], Ao[1], \varphi o[1]\}$,
 $B_5 = \{mt[1], \sigma t[1], \mu t[1], mo[1], do[1], \mu o[1]\}$.

Базис B_1 имеет наибольшую глубину: содержит данные за 3 предыдущих месяца. Базисы B_3 – B_5 имеют глубину в 1 месяц, но более широко охватывают основные и некоторые дополнительные климатические характеристики.

В табл. 2 приведены максимальные значения точности среди моделей с базисами B_1 – B_5 в двух временных периодах:

I) прогноз на 2001–2010 гг., II) прогноз на 2011–2020 гг. Диапазон истории во всех случаях начинается с 1936 г. и заканчивается годом, предшествующим прогнозируемому.

Таблица 2. Максимальные точности прогнозных моделей за 10 лет

Параметр	mt	mt	mo	mo
Период	I	II	I	II
Январь	0.8	0.9	0.7	0.7
Февраль	0.7	0.6	0.7	0.8
Март	0.8	0.8	0.8	0.8
Апрель	0.8	0.6	0.4	0.8
Май	0.7	0.5	0.5	0.7
Июнь	0.5	0.6	0.8	0.3
Июль	0.6	0.6	0.7	0.4
Август	0.7	0.9	0.6	0.7
Сентябрь	0.7	0.7	0.6	0.4
Октябрь	0.8	0.5	0.6	0.4
Ноябрь	0.9	0.6	0.7	0.6
Декабрь	0.8	0.8	0.7	0.6
Среднее	0.73	0.68	0.65	0.6

Из данных табл. 2 следует, что температура обычно прогнозируется лучше, чем осадки. Это связано с тем, что зоны атмосферных фронтов, где проходят обильные осадки, имеют небольшую площадь по сравнению с территориями, в которых наблюдается примерно одинаковая среднесуточная температура. Средняя точность прогноза во временном диапазоне I (2001–2010 гг.) оказалась выше, чем в периоде II (2011–2020 гг.).

Для прогноза температуры наилучшими среди приведенных моделей оказались модели с базисами B_2 и B_3 (13 результатов с точностью не ниже 0.7), для прогноза осадков – модель с базисом B_3 (7 результатов с точностью не ниже 0.7), следовательно, введение в рассмотрение дополнительных функций, таких как μ , A , φ , дают некоторое улучшение моделей.

На практике точность прогнозов при использовании статистических моделей может быть увеличена до 0.7–0.8, если увеличивать количество базисных компонент, для каждого месяца использовать различные типы базисов, полученных путем перебора большого количества базисных компонент, переходя к моделям "третьего уровня", описанным в статье [16].

Пусть, например, рассматриваемая общая совокупность климатических параметров состоит из значений mt , st , kt , ut , mo , so , ko , uo за 3 предыдущих месяца (всего 24 функции), исторические данные рассматриваются за период с 1936 г., а диапазоном проверки модели является период с 2011 по 2020 гг.

Для этого варианта были подобраны модели прогнозирования температуры и осадков, дающие 9 верных прогнозов из 10 для каждого месяца.

При использовании этих моделей в будущем их точность несколько снижается, поскольку закономерности, рассматриваемые в статье, являются статистическими, а не детерминированными. Характер этих взаимосвязей также может меняться с изменением климата. Тем не менее, в будущем параметры моделей могут корректироваться, а накопление новых данных позволяет основывать модели на более полной исторической базе.

Заключение

Климатические параметры Самары (в том числе и индекс фрактальности) обладают рядом устойчивых закономерностей, связанных с годовым циклом и многолетней тенденцией изменения. Тенденции глобального потепления в Самаре в большей степени проявляются в холодный период года. Установлены значительные корреляции между некоторыми парами климатических параметров, причем их характер иногда зависит от сезона. Статистические модели на основе рассмотренных параметров могут достигать точности 0.7 и выше при подходящих параметрах модели. Температура обычно прогнозируется лучше, чем осадки.

Статистические модели, построенные по описанной в статье общей методике, могут давать хорошие результаты в различных климатических условиях (например, как в Перми, так и в Самаре), отличаясь только наборами предикторов и другими параметрами.

Учет дополнительных, глубинных климатических параметров, таких как индекс фрактальности и параметры дискретного преобразования Фурье, в ряде случаев приводит к улучшению модели. Дальнейшее развитие моделей может включать рассмотрение в рамках данной методики прогнозирования новых предикторов, в том числе относящихся к другим климатическим показателям (скорость и направление ветра, атмосферное давление,

облачность и т.д.) и изучение связанных с ними статистических закономерностей.

Список источников

1. *Аргучинцева А.В.* Методы статистической обработки и анализа гидрологических наблюдений. Иркутск, 2007. 105 с.
2. *Дегтярев А.С., Драбенко В.А., Драбенко В.А.* Статистические методы обработки метеорологической информации. СПб: ООО "Андреевский издательский дом", 2015. 225 с.
3. *Малинин В.И.* Статистические методы анализа гидрометеорологической информации. СПб.: РГГМУ, 2007. 279 с.
4. *Дружинин В.С., Сикан А.В.* Методы статистической обработки гидрометеорологической информации. СПб.: Изд-во РГГМУ, 2001. 167 с.
5. *Теплицын Г.П.* Прогнозирование сумм осадков и среднемесячных температур месяцев теплого периода года по месяцам предшествующего холодного периода // Актуальные проблемы лесного комплекса. 2010. №25. С. 64–67.
6. *Теплицын Г.П., Зинцова Э.А.* О связи осадков и температуры холодного и последующего теплого периода на юге Хабаровского края // Метеорология и гидрология. 2011. № 10. С. 70–73.
7. *Дубовиков М.М.* Индекс вариации и его приложение к анализу фрактальных структур // Научный альманах Гордон. 2003. № 1. С. 5–33.
8. *Дубовиков М.М., Крянев А.В., Старченко Н.В.* Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов // Вестник РУДН. 2004. Т. 3, № 1. С. 30–44.
9. *Мандельброт Б.* Фрактальная геометрия природы. М.: Изд-во Института компьютерных исследований, 2002. 656 с.
10. *Митин В.Ю.* Фрактальные характеристики рядов базовых климатических параметров в г. Перми // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1(48). С. 47–52.
11. *Антуков В.Н., Митин В.Ю.* Статистическая модель прогнозирования среднемесячных аномалий температурного режима и осадков в г. Перми // Цифровая география: мат. Всерос. науч.-практ. конф. с межд. участием. Пермь. 2020. Т. 1. С. 359–361.

12. Антуков В.Н., Митин В.Ю. Статистические модели прогнозирования среднемесячной температуры и осадков в г. Перми // Географический вестник. 2021. № 2. С. 84–95.
13. Митин В.Ю. Математические модели прогнозирования аномалий температуры и осадков в г. Перми // Математика и междисциплинарные исследования–2021. С. 32–35.

References

1. Arguchintseva, A.V. (2007), "Methods of statistical processing and analysis of hydrological observations", *Irkutsk*, 105 p.
2. Degtyarev, A.S., Drabenko, V.A., Drabenko, V.A. (2015), "Statistical methods of processing meteorological information", *St. Petersburg: Andreevsky Publishing House LLC*, 225 p.
3. Malini, V.I. (2007), "Statistical methods of analysis of hydrometeorological information", *St. Petersburg: RGGMU*, 279 p.
4. Druzhinin, V.S., Sikan, A.V. (2001), "Methods of statistical processing of hydrometeorological information", *St. Petersburg: Publishing house of RGGMU*, 167 p.
5. Teplitsyn, G.P. (2010), "Forecasting precipitation amounts and average monthly temperatures of the months of the warm period of the year by the months of the preceding cold period", *Actual problems of the forest complex*, no. 25, pp. 64-67.
6. Teplitsyn, G.P., Zintsova, E.A. (2011), "On the relationship between precipitation and temperature of the cold and subsequent warm period in the south of the Khabarovsk Territory", *Meteorology and hydrology*, no. 10, pp. 70-73.
7. Dubovikov, M.M. (2003), "Index of variation-nand its application to the analysis of fractal structures", *Scientific almanac Gordon*, no. 1, pp. 5-33.
8. Dubovikov, M.M., Kryanev, A.V., Starchenko, N.V. (2004), "The dimension of minimum coverage and local analysis of fractal time series", *Bulletin of RUDN*, vol. 3, no. 1, pp. 30-44.
9. Mandelbrot, B. (2002), "Fractal geometry of nature", *Moscow; Publishing House of the Institute of Computer Research*, 656 p.
10. Kuzminykh, E.V. (2012), "Fractal analysis of climatic series: master's thesis", *St. Petersburg: RGGMU*, 284 p.
11. Solntsev, L.A., Yudin, D.I., Snegireva, M.S., Gelashvili, D.B. (2007), "Fractal analysis of the secular course of average air temperature in Nizhny Novgorod", *Bulletin of Nizhny Novgorod University named after N. I. Lobachevsky*, no. 4, pp. 88-91.
12. Aptukov, V.N., Mitin, V.Y. (2019), "Fractal analysis of meteorological series using the minimal covering method", *Geographical Bulletin*, no. 2(49), pp. 67-79.
13. Mitin, V.Y. (2020), "Fractal characteristics of the series of basic climatic parameters in Perm", *Bulletin of the Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(48), pp. 47-52.
14. Aptukov, V.N., Mitin, V.Y. (2020), "Statistical model for forecasting average monthly anomalies of temperature regime and precipitation in Perm", *Digital geography: mat. All-Russian scientific and practical conference with international participation. Perm*, vol. 1, pp. 359-361.
15. Aptukov, V.N., Mitin, V.Y. (2021), "Statistical models for forecasting average monthly temperature and precipitation in Perm", *Geographical Bulletin*, no. 2, pp. 84-95.
16. Mitin, V.Y. (2021), "Mathematical models for forecasting temperature and precipitation anomalies in Perm", *Mathematics and interdisciplinary research-2021*, pp. 32-35.

Информация об авторах:

В. Ю. Митин – ассистент кафедры фундаментальной математики, Пермский государственный национальный исследовательский университет (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID: 552293, Scopus ID: 55638430100, SPIN: 9613-0645;

В. Н. Антуков – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Пермский государственный национальный исследовательский университет (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID: 11997, Scopus ID: 6601983443. SPIN 6717-3908.

Information about the authors:

Victor Y. Mitin – Assistant, Department of Fundamental Mathematics, Perm State University (Bukireva St., 15, Perm, Russia, 614068), AuthorID: 552293, Scopus ID: 55638430100 SPIN: 9613-0645;

Valery N. Aptukov – Doctor of Technical Science, Professor, Head of Department of Fundamental Mathematics, Perm State University (Bukireva St., 15, Perm, Russia, 614068), AuthorID: 11997, Scopus ID: 6601983443. SPIN 67173908.

«Информатика»

Научная статья

УДК 004.94

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-43-52

**Компьютерное моделирование робастных
и адаптивных алгоритмов в технологии
модельно-ориентированного проектирования****Александр Юрьевич Ощепков¹, Александр Николаевич Власов²**^{1,2} Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия¹aos57@mail.ru;²anvlasov99@yandex.ru

Аннотация. Автоматические цифровые регуляторы, обеспечивающие работу автономных (бортовых или встраиваемых) устройств, должны использовать робастные или адаптивные алгоритмы. Для составления программы на языке С, реализующей современные эффективные алгоритмы управления, используется технология модельно-ориентированного проектирования (МОП-технология), суть которой заключается в том, что сначала составляется и отлаживается имитационная компьютерная модель системы автоматического управления на языке более высокого уровня, а затем генерируется код работы регулятора для микропроцессора. В статье приведен обзор робастных и адаптивных алгоритмов, которые могут быть применены в бортовых системах автоматического управления. Построены компьютерные модели систем управления с применением этих алгоритмов в пакетах MATLAB и SimInTech, как примеры начальных этапов технологии модельно-ориентированного проектирования.

Ключевые слова: модельно-ориентированное проектирование; системы автоматического управления; робастные алгоритмы; адаптивные алгоритмы

Для цитирования: Ощепков А.Ю., Власов А.Н. Компьютерное моделирование робастных и адаптивных алгоритмов в технологии модельно-ориентированного проектирования // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 1(64). С. 43-52. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-43-52.

Статья поступила в редакцию 24.01.2024; одобрена после рецензирования 02.02.2024; принята к публикации 18.03.2024.

«Computer Science»

Research article

**Computer Modeling of Robust and Adaptive Algorithms
in Model-based Design Technology****Alexander Yu. Oshchepkov¹, Alexander N. Vlasov²**^{1,2} Perm State University, Perm, Russia¹aos57@mail.ru;²anvlasov99@yandex.ru

Abstract. Automatic digital controllers that ensure the operation of autonomous (on-board or embedded) devices must use robust or adaptive algorithms. To compile a program in C language that implements modern effective control algorithms, model-based design technology (MOP technology) is used, the essence of which is that first a simulation computer model of the automatic control system is being compiled and



Данная работа © 2024 Ощепков А.Ю., Власов А.Н. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

debugged in a higher-level language, and then the controller operation code for the microprocessor is generated. The article provides an overview of robust and adaptive algorithms that can be used in on-board automatic control systems. Computer models of control systems were built using these algorithms in MATLAB and SimInTech packages, as examples of the initial stages of model-based design technology.

Keywords: *model-based design; automatic control systems; robust algorithms; adaptive algorithms*

For citation: Oshchepkov, A.Yu., Vlasov, A.N. (2024), "Computer Modeling of Robust and Adaptive Algorithms in Model-based Design Technology", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. no. 1(64), pp. 43-52. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-43-52.

The article was submitted 24.01.2024; approved after reviewing 02.02.2024; accepted for publication 18.03.2024.

Введение

Современные автоматические цифровые регуляторы, обеспечивающие работу автономных устройств, отдельных узлов промышленных установок, мобильных роботов, должны использовать робастные или адаптивные алгоритмы. Если алгоритм с предварительно настроенными параметрами достигает цели управления при изменяющихся условиях, он называется робастным алгоритмом [1]. Алгоритм, в котором заложена корректировка параметров для наиболее точного управления в условиях неопределенностей, считается адаптивным [2].

Для встраиваемых систем алгоритмы прошиваются в микропроцессор бортового контроллера в виде кода, получаемого компиляцией программы, написанной обычно на языке С или его потомков (С++, С# и др.). Пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) закон регулирования, представляющий пример робастного алгоритма, предполагает использование трех постоянных коэффициентов и применение арифметических действий умножения и сложения, поэтому он широко применяется на практике. В то же время для управления в условиях неопределенностей разработаны более эффективные алгоритмы, хотя и более сложные в математическом плане, но не предполагающие использования искусственного интеллекта, основанные на применении градиентных методов, методов экстремального регулирования, управления с эталонной моделью, идентификационных адаптивных и других методов.

Для этих алгоритмов непосредственное написание программы на языке С представляет громоздкую процедуру, что ограничивает их практическое применение во встраиваемых системах управления. На помощь приходит методика модельно-ориентированного проектирования (МОП-технологии).

Суть методики заключается в том, что сначала составляется и отлаживается имитационная компьютерная модель САУ на языке более высокого уровня, а затем генерируется код работы регулятора для микропроцессора.

В данной статье рассказывается о содержании основных этапов МОП-технологии, дан обзор адаптивных и робастных алгоритмов, которые могли бы применяться в бортовых системах управления и приведены примеры моделирования этих алгоритмов в пакетах MATLAB+Simulink и SimInTech.

Полученные модели могут быть использованы для генерации С-кода и последующей прошивки в микроконтроллер.

1. Этапы МОП-технологии

Последовательность выполнения этапов модельно-ориентированного проектирования приведена на рис. 1. На каждом этапе применяется свое программное обеспечение. Например, в Центре Инженерных Технологий и Моделирования (ЦИТМ "Экспонента") используются возможности пакета MATLAB. Здесь МОП-технология хорошо зарекомендовала себя при разработке различных сложных систем, в частности встраиваемых систем управления, цифровой обработки сигналов, компьютерного зрения, радиолокации и связи [3]. Российской компанией ООО "ЗВ Сервис" разработана среда динамического моделирования технических систем SimInTech (Simulation In Technic). Среда также предназначена для расчетной проверки работы систем управления сложными техническими объектами, описание динамики которых может быть представлено в виде системы дифференциально-алгебраических уравнений и/или реализовано методами структурного моделирования [4].

Рассмотрим этапы методологии МОП на примере ее применения в ЦИТМ "Экспонента".

Архитектура системы создается в виде модели, описания компонентов, их свойств, интерфейсов между компонентами, а также анализа свойств системы. Для этого используется программное обеспечение **System Composer**, которое позволяет создавать или импортировать модели архитектуры, описывающие систему в виде компонентов и интерфейсов. При помощи пользовательских представлений архитектуры могут быть изучены отдельные ограничения проектирования или анализа.

Архитектурные модели позволяют анализировать требования, собирать свойства с помощью стереотипов, а также создавать спецификации и описания интерфейсов.

Исполнение системной модели осуществляется с помощью программного обеспечения **Simulink**. Simulink – среда динамического междисциплинарного моделирования сложных технических систем и основной инструмент для модельно-ориентированного проектирования. Его основным интерфейсом является графический инструмент для построения диаграмм и настраиваемый набор библиотек блоков. Он предлагает тесную интеграцию с остальной средой MATLAB и может либо использовать MATLAB, либо создавать сценарии из него. Simulink широко используется в автоматическом управлении и цифровой обработке сигналов для многодоменного моделирования и проектирования на основе моделей.



Рис. 1. Этапы МОП-технологии

Проектирование алгоритмов может быть проведено в виде программ М-языка или в виде графических диаграмм. Для анализа и настройки алгоритмов применяется ПО **Simulink Control Design**, которое позволяет проектировать и анализировать системы управления, смоделированные в Simulink. Можно выполнять автоматическую настройку систем с SISO и MIMO архитектурами, включая ПИД-регуляторы. Алгоритм автоматической настройки ПИД-регуляторов может быть

перенесен в программное обеспечение встраиваемых систем для проведения настройки коэффициентов регуляторов в режиме реального времени.

Моделирование физических элементов включает в себя моделирование компонентов и окружения, как составных частей системы. При проектировании или выборе компонента для использования в системе крайне важным является анализ взаимовлияния этих подсистем или компонентов друг на друга.

МОП позволяет в одной модели объединить все подсистемы и провести виртуальные комплексные испытания изделия. Это означает, что при разработке систем управления можно воссоздать физическую модель объекта управления, содержащую механическую, гидравлическую, пневматическую, электрическую и другие подсистемы. А при разработке систем цифровой обработки сигналов можно описать канал передачи данных, радиочастотный тракт, радиолокационную обстановку, антенную решетку или даже задать помехи, наводимые потенциальным противником.

Для создания моделей физических систем в среде Simulink используется специальный блок **Simscape**.

Моделируются такие системы, как электродвигатели, мостовые выпрямители, гидроприводы и системы охлаждения. Системы управления для физической системы разрабатываются в Simulink.

При запуске алгоритмов Simscape поддерживает генерацию С-кода для запуска физических моделей на машинах реального времени и проведения программно-аппаратного тестирования (Hardware-in-the-Loop – HIL) блока управления.

Для генерации кода из моделей имеется широкий набор инструментов, позволяющих автоматически генерировать исходный код для различных микропроцессоров, операционных систем реального времени, программируемых логических интегральных схем (ПЛИС), программируемых логических контроллеров (ПЛК) и встраиваемых графических процессоров (GPU).

Такой подход к разработке встраиваемых алгоритмов исключает ошибки ручного кодирования, гарантирует быстрое внесение изменений в проект, обеспечивает быстрый перенос алгоритмов с одной элементной базы на другую и с проекта на проект. ПО **Embedded Coder** генерирует читаемый, компактный и быстрый C/C++ код для встраиваемых процессоров, используемых в массовом производстве. Embedded Coder проводит оптимизации, которые повышают эффективность кода.

Тестирование кода на моделях осуществляется с помощью программного продукта **Simulink Design Verifier**.

Стенды полунатурного моделирования снижают риски при проведении испытаний и экономят бюджет при проектировании систем

за счет использования HIL-технологии. Используемое ПО – **Simulink Real-Time**.

Модельно-ориентированное проектирование – это процесс постоянной верификации и валидации при разработке встраиваемых систем. Систематическое использование моделей позволяет на разных этапах жизненного цикла проекта проводить и повторять испытания, убеждаясь, что система функционирует в соответствии с заложенными требованиями. Удобные инструменты позволяют хранить все тестовые сценарии в удобном виде, сравнивать и анализировать результаты испытаний, а также формально доказывать, что применение инструментов разработки было корректным и не привело к внесению ошибок в проект. Используется программное обеспечение **Simulink Test**.

Ниже рассмотрим выполнение начальных этапов МОП-технологии (1-3) на примере составления математических моделей адаптивных и робастных алгоритмов, которые могли бы применяться в бортовых системах управления и приведем результаты моделирования этих алгоритмов в пакетах MATLAB+Simulink и SimInTech.

2. Робастные и адаптивные алгоритмы

Для демонстрации возможностей различных алгоритмов структуру системы (этап 1 МОП) автоматического управления выберем в простейшей форме системы с обратной связью, как это показано на рис. 2.



Рис. 2. Структура системы автоматического управления

На вход системы подается требуемое значение регулируемой величины (уставка) $U_{уст}$, выходной сигнал объекта y по цепи обратной связи поступает на блок сравнения (компаратор), значение отклонения выхода от требуемой величины на входе (рассогласование, невязка, ошибка) $e = U_{уст} - y$ передается в устройство управления, в котором и реализован тот или иной алгоритм. Сигнал управления u подается на вход объекта управления.

Примеры робастных и адаптивных алгоритмов приведены в табл. 1. Рассмотрим

математические модели некоторых из этих алгоритмов, работу которых затем промоделируем в компьютере.

Таблица 1. Примеры алгоритмов

Наименование алгоритма	Вид алгоритма	Тип САУ
ПИД-закон нерекуррентный	Робастный	Непрерывная/дискретная
ПИД-закон рекуррентный	Робастный	Дискретная
Градиентный метод [5]	Робастный	Дискретная
Экстремальные методы [2]	Адаптивный	Непрерывная
Управление с эталонной моделью [6]	Адаптивный	Непрерывная
Быстрый идентификационный алгоритм [7]	Адаптивный	Дискретная

2.1. Цифровой ПИД-регулятор

Многолетняя практика автоматизации показала, что подавляющее большинство задач синтеза одноканального управления может быть решено с помощью регуляторов по отклонению, учитывающих текущее значение ошибки, первую производную ошибки и интеграл от ошибки за время регулирования. В настоящее время пропорционально-интегрально-дифференциальный (ПИД) закон и его частные случаи считаются стандартными линейными законами регулирования, наиболее часто используемыми в промышленных регуляторах. ПИД-регулятор представляет собой пример универсального робастного регулятора, используемого в системах управления с обратной связью.

Регулятор имеет три настроечных параметра: K_1 , K_2 , K_3 , управляющее воздействие $u(t)$, которое вырабатывает ПИД-регулятор в непрерывной системе, описывается выражением

$$u(t) = K_1 e(t) + K_2 \int_0^t e(\tau) d\tau + K_3 \frac{de(t)}{dt}, \quad (1)$$

где $e(t) = y_{\text{уст}} - y(t)$ – сигнал ошибки, поступающий на вход регулятора.

После дискретизации системы с периодом квантования (шагом дискретизации) T по схеме Эйлера, в которой интеграл в (1) заменяется суммой дискретных отсчетов, а производная – разностью двух последовательных отсчетов, деленной на шаг T , для управляющего воздействия, рассчитываемого в k -й момент времени и выводимого на объект, получим выражение:

$$u_k = K_P e_k + K_I \sum_{j=0}^k e_j + K_D (e_k - e_{k-1}); \quad (2)$$

$$K_P = K_1, K_I = K_2 T, K_D = K_3 / T.$$

Этот закон представляет собой *нерекуррентный алгоритм работы дискретного ПИД-регулятора*, который требует вычисления больших сумм.

Если записать полученное выражение для $(k+1)$ -го момента времени и из него вычесть выражение (2), то получим *рекуррентный алгоритм дискретного ПИД-регулятора*:

$$u_{k+1} = u_k + K_P (e_{k+1} - e_k) + K_I e_{k+1} + K_D (e_{k+1} - e_k - (e_k - e_{k-1})). \quad (3)$$

Как видим, данный алгоритм по-прежнему предполагает использование трех коэффициентов: K_P, K_I, K_D , – значения которых определяются при настройке регулятора.

При достижении цели регулирования ($e = 0$) управляющее воздействие достигает некоторого постоянного значения, компенсируя внешние воздействия на объект управления.

2.2. Градиентный метод

Математическую модель дискретной системы управления представим в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k, \quad (4)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$ – номер стадии функционирования дискретной системы или номер очередного момента измерения и подачи управления t_k ; $\mathbf{x}_k \in R_n$ – вектор переменных состояния, $\mathbf{u}_k \in R_m$ – вектор управляющих воздействий, соответствующих моменту t_k , $\mathbf{y}_k$ – вектор выхода. Градиентный метод [3] предназначен для построения управления дискретной системой (4), когда цель управления задана при помощи некоторой гладкой неотрицательной *целевой функции* $Q = Q(\mathbf{x})$ в виде

$$Q(\mathbf{x}_{k+1}) \leq \Delta, \quad \text{при } k > k_*, \quad (5)$$

где $\Delta > 0$ – заданное значение порога точности задачи.

В качестве целевой функции, может быть выбрана функция дискретного аргумента

$$Q(x_{k+1}) = \frac{1}{2} \langle x_{k+1} - x_*, x_{k+1} - x_* \rangle \quad (6)$$

(здесь угловые скобки означают скалярное произведение векторов).

Подставив очередное состояние объекта из (5) в (6), получим приведенную целевую функцию, непосредственно зависящую от управления $Q_k(u) = Q(f(x_k, u))$. Градиентный метод основан на изменении вектора u_k в направлении, противоположном направлению градиента (вектора из частных производных) от функции Q_k по управляющим переменным

$$u_{k+1} = u_k - \gamma_k \nabla_u Q_k(u_k), \quad (7)$$

где $\nabla_u = \left\{ \frac{\partial}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u_m} \right\}^T$ – вектор градиента, $\gamma_k \geq 0$ – коэффициент шага по управлению. Идея метода основана на том, что при малом γ_k поправка $\Delta u_k = u_{k+1} - u_k$ приводит к уменьшению значения функции $Q_k(u)$, поскольку на следующем шаге управления целевая функция изменяется в силу динамики системы. Одним из условий, гарантирующих достижение цели управления (5), является выбор коэффициента шага γ_k с зоной нечувствительности,

$$\text{если } Q_k(u_k) \leq \Delta, \text{ то } \gamma_k = 0. \quad (8)$$

Условие (8) означает, что при достижении цели регулирования вектор управления компенсирует внешнее воздействие, не изменяясь по величине, аналогично алгоритму ПИД-регулятора (3).

Для дискретного линейного объекта первого порядка уравнение движения можно представить в виде:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + F, \quad (9)$$

где A , B и F – некоторые константы. При $x_* = 0$, целевая функция (6) принимает простой вид

$$Q(e_{k+1}) = \frac{1}{2} e_{k+1}^2, \quad (10)$$

$$e_{k+1} = y_{\text{уст}} - y_{k+1} = -x_{k+1}.$$

Частная производная функции (10) по переменной u равна

$$\frac{\partial Q_k(u)}{\partial u} = (Ax_k + Bu_k + F) \cdot B = -Be_{k+1}.$$

Подставляя это выражение в формулу (7) получаем закон управления

$$u_{k+1} = u_k + \gamma_k \cdot B \cdot e_{k+1}, \quad (11)$$

с учетом условия (8), имеющего в данном случае вид:

$$\text{если } \frac{1}{2} e_{k+1}^2 \leq \Delta, \text{ то } \gamma_k = 0. \quad (12)$$

Таким образом, применение градиентного метода приводит к алгоритму, аналогичному ПИД-закону (3) с $K_p = K_D = 0$ (интегральный регулятор), однако условие (12) делает этот алгоритм нелинейным.

2.3. Быстрый идентификационный алгоритм

Рассмотрим дискретную систему первого порядка, номинальная модель которой имеет вид (9) с начальным условием $x_0 = \tilde{x}_0 \neq 0$. Цель регулирования выберем в виде (5) с целевой функцией (10). При $\Delta \rightarrow 0$ цель регулирования можно записать в простой форме:

$$x_{k+1} \rightarrow 0, \text{ при } k > k_*. \quad (13)$$

Если параметры номинальной модели соответствуют реальной системе, цель регулирования (13) может быть достигнута за один шаг с помощью управляющего воздействия:

$$u_k = -\frac{1}{B} (Ax_k + F), \quad (14.1)$$

поэтому этот алгоритм является самым быстрым из всех возможных. Подстановка (14.1) в (9) даст $x_{k+1} = 0$, поэтому для дальнейших шагов получим

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= -\frac{F}{B}, \\ u_{k+2} &= u_{k+1}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14.2)$$

Алгоритм управления (14) назовем *быстрым алгоритмом*. Если возможности управления ограничены и управляющее воздействие, рассчитанное по формуле (14.1), превосходит максимально возможное значение U_{max} , на вход объекта управления должна подаваться эта величина с соответствующим знаком, что обеспечит движение системы в нужном направлении, аналогично градиентному методу.

Если параметры системы (9) неизвестны, их можно найти, применив в течение нескольких шагов любой устойчивый робастный алгоритм (предполагается, что параметры системы в течение этих шагов не изменяются). В результате мы получим *идентификационный адаптивный алгоритм управления на основе быстрого алгоритма*.

Будем использовать П-регулятор на первых трех шагах управления: $u_k = -K_p x_k$, $k = 0, 1, 2$. В результате, в соответствии с моделью (9), получим три выражения:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 + Bu_0 + F, \\ x_2 &= Ax_1 + Bu_1 + F, \\ x_3 &= Ax_2 + Bu_2 + F. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь значения входов объекта u_k и измеряемых выходов x_k , $k = 0, 1, 2, 3$ – являются известными величинами, а три параметра A , B , F составляют вектор неизвестных параметров, подлежащих идентификации.

Введем векторы $|\xi\rangle$, $|Y\rangle$ и матрицу G_3 по правилам:

$$|\xi\rangle = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A \\ B \\ F \end{pmatrix}, \quad |Y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$G_3 = \begin{pmatrix} x_0 & u_0 & 1 \\ x_1 & u_1 & 1 \\ x_2 & u_2 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда систему уравнений (15) можно записать в виде

$$G_3 \cdot |\xi\rangle = |Y\rangle. \quad (16)$$

Вектор неизвестных параметров определится после решения (16):

$$|\xi\rangle = G_3^{-1} \cdot |Y\rangle.$$

Определив параметры A , B , F , можем синтезировать быстрый алгоритм (14.1) при $k = 3$. С целью фильтрации возможных ошибок измерений алгоритм идентификации позволяет использовать n начальных шагов, где $n \geq 3$. В этом случае вместо системы трех уравнений (16) мы получим следующую систему:

$$G_n \cdot |\xi\rangle = |Y\rangle,$$

$$|Y\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$G_n = \begin{pmatrix} x_0 & u_0 & 1 \\ x_1 & u_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & u_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Система (17) содержит число уравнений, превосходящее количество неизвестных, т.е. является несовместной. Для решения используется метод наименьших квадратов или другие методы линейного регрессионного анализа.

Заметим, что произведение матрицы G_n из (17) на транспонированную матрицу $\tilde{G}_n$ даст квадратную симметричную матрицу размерности 3×3 , для которой можно найти обратную матрицу.

Умножив обе части системы (17) на $\tilde{G}_n$ и проведя операцию обращения квадратной матрицы, найдем вектор $|\xi\rangle$:

$$|\xi\rangle = (\tilde{G}_n G_n)^{-1} \cdot \tilde{G}_n \cdot |Y\rangle. \quad (18)$$

Следует, однако, иметь в виду, что при достижении цели регулирования (13) первый столбец матрицы G_n будет состоять из нулей, поэтому расчеты по формуле (18) становятся невозможными. С другой стороны, достижение цели регулирования говорит о правильной идентификации параметров объекта, следовательно, их не нужно рассчитывать, а следует брать их предыдущие значения.

Аналогично (8) нужно назначить значение порога точности задачи $\Delta > 0$, а целевую функцию на каждом шаге определять как сумму квадратов переменных состояния на всех предшествующих n шагах этапа идентификации $Q_k = \sum_{j=1}^n x_{k+j}^2$.

Полностью работа идентификационной адаптивной системы управления на основе быстрого алгоритма должна быть описана следующим образом:

$$u_{k+1} = -K \cdot x_{k+1} - V, \quad (19.1)$$

$$K = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}, \quad V = \frac{F_{k+1}}{B_{k+1}}.$$

Здесь A_{k+1} , B_{k+1} , F_{k+1} – значения параметров системы на $(k+1)$ -м шаге, определенные по алгоритму:

если $Q_k > \Delta$, то

$A_{k+1} = \xi_1$, $B_{k+1} = \xi_2$, $F_{k+1} = \xi_3$, вектор $|\xi\rangle$ определяется по формуле (18);

если $Q_k \leq \Delta$, то

$$A_{k+1} = A_k, \quad B_{k+1} = B_k, \quad F_{k+1} = F_k. \quad (19.2)$$

3. Компьютерное моделирование робастных и адаптивных алгоритмов для встраиваемых систем

Следующий этап МОП-технологии после составления математической модели алгоритмов – создание компьютерных моделей алгоритмов и их запуск [8].

Модель системы управления имела вид, представленный на рис. 2. Объект управления моделировался уравнением движения (9) со следующими параметрами ABCD-модели системы: $A = 0, 1$, $B = 0, 1$, $C = 1$, $D = 0$.

3.1. Рекуррентный цифровой ПИД-регулятор

На рис. 3а представлен блок рекуррентного ПИД-регулятора (3), созданный в SimInTech [9].

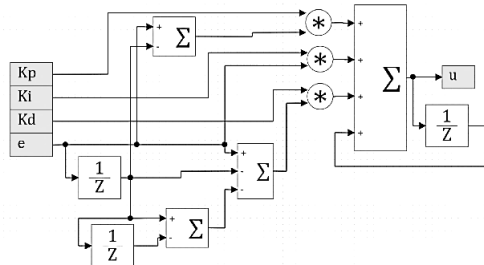


Рис. 3а. Компьютерная модель рекуррентного цифрового ПИД-регулятора в SimInTech

На рис. 3б показана полученная в результате моделирования переходная характеристика системы управления, созданная с использованием этого блока.

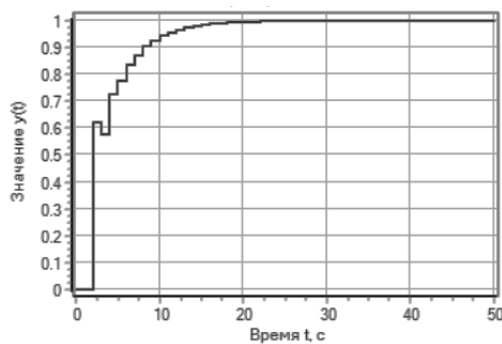


Рис. 36. Переходная характеристика системы управления с рекуррентным ПИД-регулятором

3.2. Градиентный алгоритм

На рис. 4а представлена модель системы управления на основе градиентного алгоритма (11)–(12).

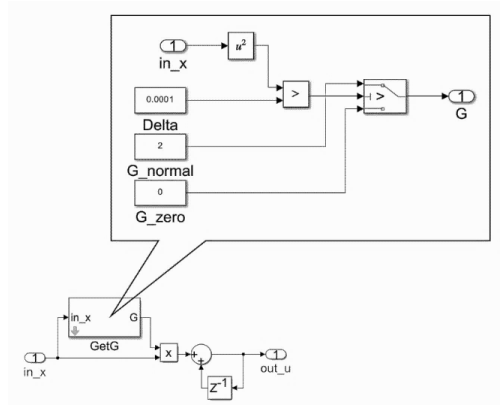


Рис. 4а. S-модель блока управления на основе градиентного алгоритма

На рис. 4б показана переходная характеристика системы, в качестве управляющего блока использующая градиентный алгоритм.

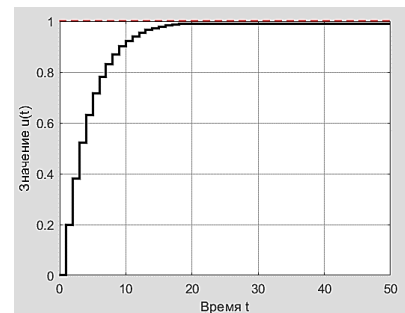


Рис. 46. *Переходная характеристика системы с блоком управления на основе градиентного метода*

3.3. Идентификационный быстрый алгоритм

На рис. 5а представлена модель адаптивной системы управления на основе быстрого идентификационного алгоритма.

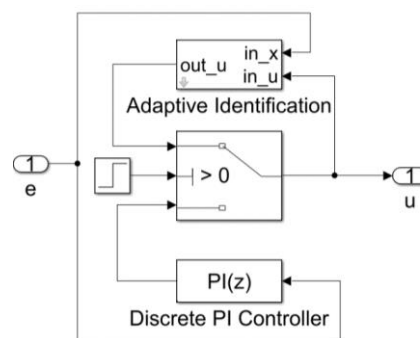


Рис. 5а. S-модель адаптивной системы управления на основе идентификационного быстрого алгоритма

На рис. 5б изображена переходная характеристика системы управления на основе данного алгоритма.

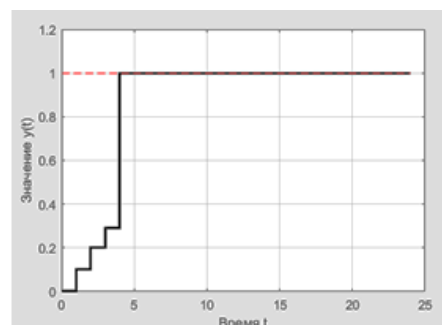


Рис. 56. Переходная характеристика системы управления на основе идентификационного быстрого алгоритма

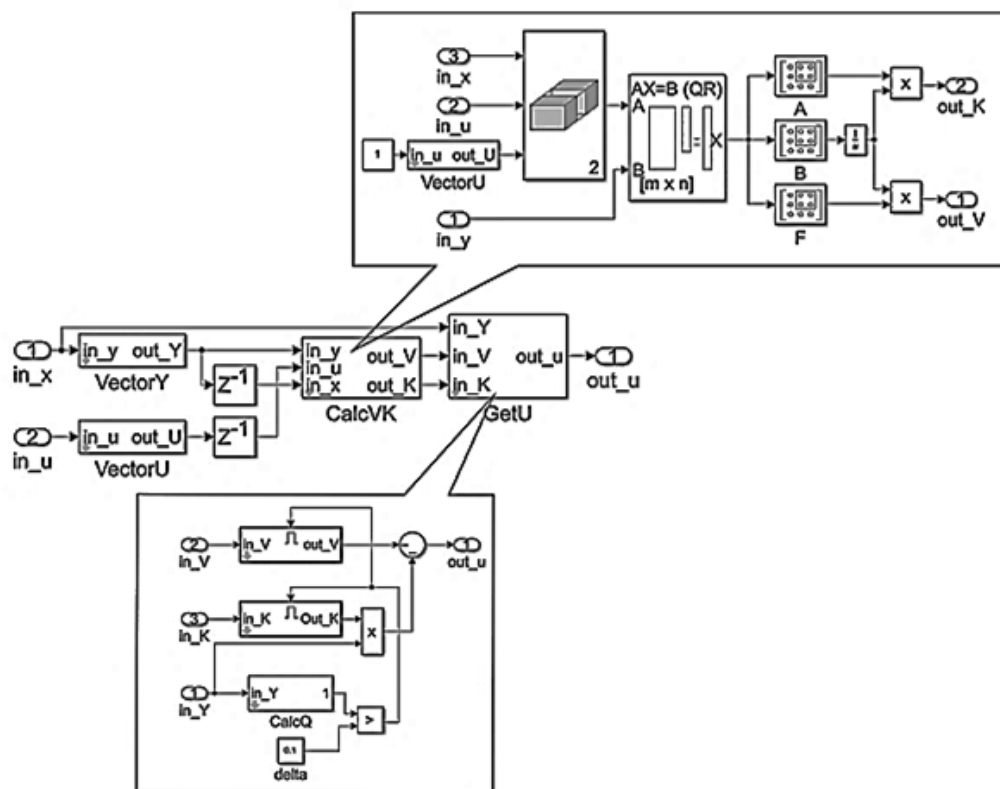


Рис. 6. S-модель блока расчета управляющего воздействия в адаптивной системе на основе идентификационного быстрого алгоритма

На рис. 6 изображена модель блока управления на основе идентификационного быстрого алгоритма.

Заключение

Описана технология модельно-ориентированного проектирования, применяемая при разработке встраиваемых устройств автоматического управления.

Приведены примеры робастных и адаптивных алгоритмов для таких устройств и их моделирования с использованием пакетов MATLAB+Simulink и SimInTech, как реализация первых этапов МОП-технологии.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что разработанные компьютерные модели алгоритмов могут быть применены для управления конкретными объектами с помощью встраиваемых устройств.

Список источников

1. Поляк Б.Т. Математическая теория автоматического управления: учебное пособие / Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, Л.Б. Рапопорт. М.: ЛЕНАНД, 2019. 500 с.
2. Никифоров В.О. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность / В.О. Никифоров, А.В. Ушаков. СПб.: СПб ГИТМО (ТУ), 2002. 232 с.
3. URL: <https://exponenta.ru/mbd> (дата обращения: 03.01.2024).
4. URL: <https://3v-services.com> (дата обращения: 03.01.2024).
5. Фрадков А.Л. Кибернетическая физика: принципы и примеры. СПб.: Наука, 2003. 208 с.
6. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. СПб.: Наука, 2003. 282 с.
7. Ощепков А.Ю. Системы автоматического управления: теория, применение, моделирование в MATLAB: учеб. пособие для студентов физического факультета. 4-е изд., стер. СПб.: Изд-во "Лань", 2021. 208 с.
8. Деменков Н.П. Модельно-ориентированное проектирование систем управления // Промышленные АСУ и контроллеры. 2008. № 10. С. 66–69.
9. Хабаров С.П., Шилкина М.Л. Основы моделирования технических систем. Среда Simintech: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2022. 120 с.

References

1. Polyak, B.T., Hlebnikov, B.T. (2019), "Matematicheskaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya: uchebnoe posobie" [Mathematical theory of automatic control: textbook], LE-NAND, Moscow, Russia. 500 p.
2. Nikiforov, V.O., Ushakov, V.O. (2002), "Upravlenie v usloviyah neopredelyonnosti: chuvstvitel'nost', adaptatsiya, robustnost' " [Control under conditions of uncertainty: sensitivity, adaptation, robustness], SPb GITMO (TU), St. Petersburg, Russia. 232 p.
3. CITM Ekspozenta. "Model-based design", available at <https://exponenta.ru/mbd> (accessed 3 January 2024).
4. 3VS Software Development. "3VSERVICES", available at <https://3v-services.com> (accessed 3 January 2024).
5. Fradkov, A.L. (2003), "Kiberneticheskaya fizika: principy i primery" [Cybernetic physics: principles and examples], Nauka, St. Petersburg, Russia. 208 p.
6. Nikiforov, V.O. (2003), "Adaptivnoe i robustnoe upravlenie s kompensatsiey vozmushcheniy" [Adaptive and robust control with disturbance compensation], Nauka, St. Petersburg, Russia. 208 p.
7. Oshchepkov, A.Yu. (2021), "Sistemy avtomaticheskogo upravleniya: teoriya, primeneniye, modelirovaniye v MATLAB": Uchebnoe posobie dlya studentov fizicheskogo fakul'teta [Automatic control systems: theory, application, modeling in MATLAB: A textbook for students of the Faculty of Physics], 4th ed., Lan', St. Petersburg, Russia. 180 p.
8. Demenkov, N.P. (2008), "Modelno-orientirovannoe proektirovaniye sistem upravleniya" [Model-Based Design of Control Systems], Promyshlennyye ASU i kontrolyery. vol. 10. 66-69 pp.
9. Habarov, S.P., Shilkina M.L (2022), "Osnovy modelirovaniya tehnikeskikh sistem. Sreda Simintech: uchebnoe posobie" [Fundamentals of modeling technical systems. Simintech environment: tutorial], Lan', St. Petersburg, Russia. 120 p.

Информация об авторах:

А. Ю. Ощепков – кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры радиоэлектроники и защиты информации Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), член международного общества по физике и управлению (International Physics And Control Society – IPACS), AuthorID: 175649;

А. Н. Власов – аспирант физического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15).

Information about the authors:

Alexander Yu. Oshchepkov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Radio Electronics and Information Security, Perm State University, (Bukireva St., 15, Perm, Russia, 614068), member of IPACS, AuthorID: 175649;

Alexander N. Vlasov – Postgraduate Student of the Department of Radio Electronics and Information Security, Perm State University (Bukireva St., 15, Perm, Russia, 614068).

Научная статья

УДК 004.4:378.14

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-53-59

Анализ состояния гармонизации дисциплин направления 09.03.01 "Информатика и вычислительная техника"

Рустам Абубакирович Файзрахманов¹, Елена Владимировна Долгова², Илья Игоревич Сухих³

^{1,2,3} Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

¹fayzrakhmanov@gmail.com;

²shagrata@mail.ru;

³vargostelemax@gmail.com

Аннотация. В статье исследуется вопрос гармоничного состояния дисциплин, участвующих в образовательном процессе направления 09.03.01 "Информатика и вычислительная техника" с профилем "Автоматизированные системы обработки информации и управления". Приводится информация о методах обработки ключевой информации из файлов с рабочими программами дисциплин. Демонстрируется результат обработки данных. Описываются дальнейшие перспективы оптимизации процесса обучения студентов путем построения детализированной модели образовательной программы, которая позволит с большей точностью оценить текущий уровень гармонизации, а также дополнит исходную модель новой полезной информацией.

Ключевые слова: гармонизация; компетенции; ключевые понятия; ярусно-параллельный граф

Для цитирования: Файзрахманов Р.А., Долгова Е.В., Сухих И.И. Анализ состояния гармонизации дисциплин направления 09.03.01 "Информатика и вычислительная техника" // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 1(64). С. 53–59. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-53-59.

Статья поступила в редакцию 07.09.2023; одобрена после рецензирования 22.01.2024; принята к публикации 18.03.2024.

Research article

Harmonization Status Analysis of 09.03.01 "Computer Science and Computer Engineering" Disciplines

Rustam A. Faizrakhmanov¹, Elena V. Dolgova², Ilya I. Sukhikh³

^{1,2,3} Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

¹fayzrakhmanov@gmail.com;

²shagrata@mail.ru;

³vargostelemax@gmail.com

Abstract. The article studies the issue of harmonious state of disciplines involved in the educational process of the direction 09.03.01 "Informatics and Computer Science" with the profile "Automated Systems of Information Processing and Control". The information about the methods of key information processing from files with working programs of disciplines is given. The result of data processing is demonstrated. Further perspectives of optimization of students' learning process by building a detailed model of educational program, which will allow to estimate the current level of harmonization with greater accuracy, as well as to supplement the initial model with new useful information, are described.

Keywords: harmonization; competences; key concepts; tier-parallel graph

For citation: Fayzrakhmanov, R.A., Dolgova, E.V., Sukhikh, I.I. (2024), "Harmonization Status Analysis of 09.03.01 "Computer Science and Computer Engineering" Disciplines", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(64), pp. 53-59. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-53-59.

The article was submitted 07.09.2023; approved after reviewing 22.01.2024; accepted for publication 18.03.2024.



Данная работа © 2024 Файзрахманов Р.А., Долгова Е.В., Сухих И.И. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Введение

Наиболее распространенная проблема, с которой сталкивается выпускник высшего учебного заведения – это несоответствие имеющегося набора компетенций к тем требованиям, которые предъявляет работодатель к молодому специалисту. Следовательно, для стабильного экономического развития страны важно выстроить образовательный процесс ИТ-специалистов таким образом, при котором приобретение компетенций студентами происходил гармонично.

Гармонизируя образовательный процесс, возможно добиться важных показателей как для студентов, так и для самого вуза. Для студента важнейшим показателем будет получение необходимых знаний непрерывно, начиная с основ и завершая наиболее актуальными вопросами в сфере информационных технологий на момент завершения обучения. В то же время, для вуза гармонично выстроенный учебный план будет означать повышение конкурентоспособности на рынке образовательных услуг за счет показателей востребованности выпускников у работодателей.

Данное исследование направлено на определение текущего уровня гармонизации дисциплин, участвующих в образовательном процессе направления 09.03.01 "Информатика и вычислительная техника" с профилем "Автоматизированные системы обработки информации и управления" и определению возможных перспектив повышения уровня гармонизации.

1. Обзор подходов для повышения гармоничного состояния дисциплин в учебном плане

Наиболее распространенным вариантом, рассматриваемым авторами научных статей, связанных с улучшением учебных планов, является внесение изменения в педагогическую нагрузку, редактирование расписаний, формирование индивидуальных учебных траекторий, а также попытки привести в соответствие компетенции и их индикаторы достижения.

Так, авторы [1] указывают, что "анализ рабочих учебных планов в первую очередь направлен на их оптимизацию с целью равномерного распределения педагогической нагрузки, а, следовательно, с учетом студенческого контингента" [1, с 2].

Авторы предлагают алгоритм, согласно которому с помощью метода полного перебора формируются оптимальные последовательности распределения дисциплин по семестрам.

В [2] авторы исследуют использование комбинаторных оптимизационных задач для формирования вариативной части учебного плана с целью построения индивидуальных образовательных траекторий обучения.

В качестве методологии предлагается алгоритм "knapsack problem", заключающийся в поиске оптимального набора предметов из заданного списка с ограничением по суммарному весу. Авторами разработано приложение для автоматизации процесса построения индивидуальных образовательных траекторий студентов в вариативной части учебного плана университета.

В [3] авторами произведен обзор источников российских и зарубежных исследований, связанных с автоматизацией составления учебного расписания. Приведено сравнение средств, способных автоматизировать данный вопрос. Рассматриваются такие методы, как метод ветвей и границ, эвристические методы, генетический алгоритм, агрегативный генетический алгоритм, метод имитации отжига, гибридизация.

Итогом обзора является концептуальная постановка задачи, на основе которой авторами формулируются жесткие и мягкие ограничения, которые должны быть выполнены на выходе из системы. Авторами [4] рассмотрены вопросы создания информационного и программного обеспечения организации учебного процесса, включая автоматизированный расчет качественных расписаний и предложены новые стратегии и решения NP-трудных задач, которые могут быть рекомендованы для систем искусственного интеллекта.

Авторы приводят описание принципа обратной связи и, как сами указывают, "данные формируют структуры управления пошагового решения, а на некоторых шагах часть структур управления переходит в данные и т. д. в итерационном режиме с возвратом на некоторые точки пошагового решения для выбора других вариантов" [4, с. 8]. Далее рассматриваются ограничения, которые должны быть учтены в сформированном расписании.

В [5] отмечено, что "необходимо представлять учебные программы в такой форме, чтобы их можно было интерпретировать на компьютере и легко изменять.

Кроме того, важно облегчить определение согласованности учебных планов для различных уровней образования" [5, с. 1]. Автор предполагает, что, разработав платформу, которая позволит находить недостающие аспекты в учебном плане и анализировать статистические данные, возможно улучшить модели учебного плана. Данная платформа базируется на выравнивании онтологий, или, как указал автор, "наборе соответствий"

В [6] автор основной целью исследования указывает разработку "набора компетенций для подготовки бакалавров путем гармонизации соответствующих источников учебных программ" [6, с. 5]. В качестве базовой единицы исследования автор использовал официальные и актуальные документы, находящиеся в открытом доступе в сети Интернет, после чего полученный набор данных подвергался анализу на основе метода анализа задач для формулирования ключевых компетенций.

Таким образом, изучив материалы научных работ, связанных с качественными улучшениями учебного плана и задействованных внутри учебного плана дисциплин, стоит отметить, что вопрос является актуальным и имеет множество векторов для исследования и вариантов улучшения. В то же время вопрос оценки состояния гармонизации, на текущий период времени, изучен на недостаточном уровне и требует отдельного внимания исследователей.

2. Концепция гармонизации

Гармонизация в образовании – это процесс улучшения качества образования, который включает множество подходов [7], таких как:

- использование современных и инновационных технологий, а также методик преподавания;

- развитие не только профессиональных, но и социальных навыков студентов;

- стремление к индивидуальному подходу для каждого студента, а в частных случаях – разработка индивидуальной траектории обучения;

- разработка и создание комфортной образовательной среды;

- анализ и корректировка учебных планов направления для повышения конкурентоспособности выпускников на рынке труда и повышения конкурентоспособности образовательного учреждения на рынке образовательных услуг.

Целью гармонизации является обеспечение того, чтобы все стороны, участвующие в образовательном процессе, смогли достигнуть поставленных целей и задач.

Будущие выпускники ставят перед собой задачу получения высококачественного образования, соответствующего его индивидуальным потребностям, способностям и интересам.

Работодателям важно получить высококвалифицированных выпускников, имеющих необходимые знания и навыки, чтобы успешно выполнять свои профессиональные обязанности. Они также хотят видеть в выпускниках вуза ответственных, трудолюбивых и способных работников, которые готовы к постоянному обучению и развитию.

Высшее учебное заведение, в свою очередь, стремится к подготовке выпускников, обладающих необходимыми знаниями, навыками и качествами для успешной карьеры в соответствующей области и для личностного развития. Вуз также стремится предоставить высокое качество образования, которое соответствует национальным и международным стандартам. Вуз ставит перед собой задачу подготовить студентов к профессиональной деятельности, которая будет способствовать экономическому росту страны, улучшению качества жизни людей и развитию гражданского общества.

Кроме того, вуз должен обеспечить студентам возможность получения широкого спектра знаний и опыта, которые будут полезны им не только в будущей карьере, но и в повседневной жизни.

Критерии гармонизации [8] образования могут включать в себя следующие аспекты:

1. Соответствие стандартам: образовательные стандарты должны соответствовать актуальным стандартам и требованиям.

2. Качество образования: качество образования должно соответствовать национальным стандартам и обеспечивать подготовку студентов

к профессиональной деятельности, соответствующей их потребностям и интересам.

3. Индивидуализация обучения: обучение должно стремиться учитывать индивидуальные потребности и способности каждого студента.

4. Интерактивность: учебные материалы и методы преподавания должны способствовать активному участию студентов в процессе обучения.

5. Адаптивность: образовательные программы должны быть гибкими и адаптироваться к изменяющимся потребностям рынка труда, а также изменениям в обществе, стране и мире.

3. Подход к оценке уровня гармонизации

Для оценки уровня гармонизации существует ряд концептуальных подходов, каждый из которых формирует собственную оценку:

1. Анализ учебных планов по предметам: сравнение учебных планов по предметам в образовательной организации поможет выявить области, где текущий учебный план проявляет признаки ограничений с неэффективностью ("узких мест"), следствием чего является возникновение диспропорций и коллизий в логике выдачи информации.

2. Анализ соответствия учебных программ: анализ соответствия учебных программ национальным стандартам и требованиям поможет выявить области, где текущий учебный план частично либо полностью не отвечает заявленным требованиям.

3. Оценка обратной связи студентов: получение оценки студентов о курсе обучения поможет выявить проблемы с организацией занятий, использованием технологий и другими аспектами обучения.

4. Анализ использования образовательных ресурсов: анализ использования ресурсов, таких как оборудование, библиотеки и лаборатории поможет выявить проблемы с доступностью необходимой материально-технической базы и ее использованием.

5. Анализ успеваемости студентов: данный подход подразумевает сравнение успеваемости студентов до и после изменений в учебном плане, что способствует выявлению причин динамики успеваемости и определению областей, где изменения были успешными.

4. Анализ учебных планов

Для оценки состояния гармонизации требуется построить модель образовательной программы. Модель образовательной программы можно сформировать несколькими способами:

1. *Линейный график*. Представляет собой столбчатую диаграмму, которая показывает прогресс студента в течение курса. График может показывать процентное соотношение времени, затраченного на каждую задачу, или процент выполнения каждой задачи.

2. *Диаграмма Ганта*. Это тип линейного графика, который используется для сравнения прогресса студента на протяжении нескольких недель или месяцев. График может показывать процентное соотношение времени, затраченного на каждую задачу, или процент выполнения каждой задачи.

3. *Ярусно-параллельный граф*. Каждый уровень представляет собой отдельный курс, а каждое ребро представляет собой связь между курсами. Каждый курс представлен вершиной графа, а связи между курсами представлены ребрами. Граф может быть использован для отслеживания прогресса студента на протяжении курса и выявления областей, требующих дополнительного обучения или практики. Он также может помочь в адаптации учебного плана к индивидуальным потребностям студентов и оптимизации процесса обучения.

В соответствии с вышеизложенным, для достижения поставленной цели в данном исследовании, предлагается построить граф в ярусно-параллельной форме, который визуально отобразит текущий учебный план.

Основным элементом разрабатываемой модели использованы дисциплины, которые участвуют в образовательном процессе направления 09.03.01 "Информатика и вычислительная техника" с профилем "Автоматизированные системы обработки информации и управления". Каждая дисциплина представляется в виде набора ключевых слов и понятий, которые так или иначе используются при освоении текущей дисциплины. *Ключевое слово (ключевой термин)* – это термин, фраза или набор слов, используемых для описания концепции или идеи в определенной области знаний.

Данный подход к структуризации данных помогает организовать информацию и упростить ее восприятие и понимание.

Стоит отметить процесс сбора ключевых слов, которые помогут определить основные тезисы документов с рабочими программами направления. Для выделения важных вершин на графе используется следующая метрика:

$$S(V_i) = (1 - d) + d \times \sum_{j \in \text{In}(V_i)} \frac{1}{|\text{Out}(V_j)|} S(V_j), \quad (1)$$

где:

- $S(V_i)$ – важность i -й вершины;
- $\text{In}(V_i)$ – множество вершин, имеющих входящие в i -ю вершину ребра;
- $\text{Out}(V_i)$ – множество вершин, связанных с i -й вершиной исходящими из нее ребрами;
- d – коэффициент затухания [9].

При этом стоит отметить, что изначально важность проходит инициализацию случайными числами, после чего итеративно сходится к корректным значениям, следовательно, важность слова определена связью с другими важными словами.

Приведем пример ключевых слов, которые удалось получить из наиболее широкой по своему тематическому наполнению дисциплины "Б1.Б.09 Информатика" в форме облака слов (рис. 1).

Получив наборы ключевых слов, удалось создать граф, отображающий связи между дисциплинами.

Из графа изначально убрана часть дисциплин, относящихся к формированию универсальных компетенций.



Рис. 1. Облако слов

Отобразим граф в ярусно-параллельной форме (рис. 2).

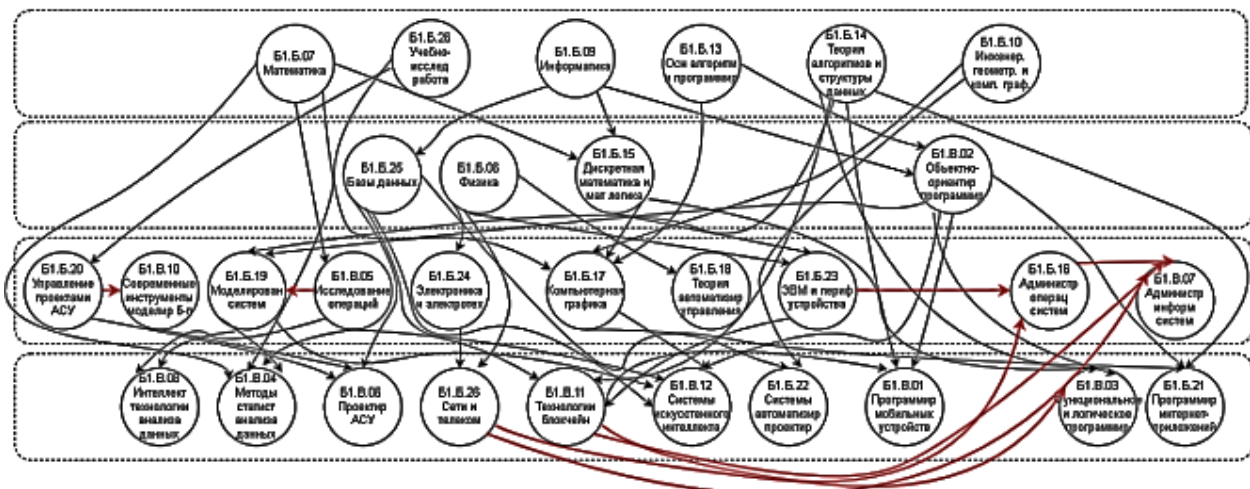


Рис. 2. Граф связей дисциплин

Исходя из полученного графа видно, что присутствуют связи с нарушенными временными промежутками, когда требуемая инфор-

мация выдается с опозданием (на графе выделены красными ребрами), а уровень состояния гармонизации превышает 74 %.

Результаты

Таким образом, в ходе проведения исследования, были определены концепция и цели процедуры гармонизации.

Выделены критерии, способствующие повышению уровня гармонизации. Перечислены подходы, с помощью которых возможно оценить текущий уровень состояния гармонизации.

Для данного исследования построена визуальная модель в виде ярусно-параллельного графа, на который нанесены связи между дисциплинами. Связи между дисциплинами на графе формируются с помощью метрики, позволяющей проводить обработку и структуризацию данных из файлов с рабочими программами дисциплин направления 09.03.01 "Информатика и вычислительная техника".

Ключевые понятия отображены в виде облака слов. Оценен текущий уровень гармонизации направления, на основе которого подтверждена необходимость внесения корректировки учебного плана.

Дальнейшие исследования будут направлены на получение более точной оценки уровня гармонизации путем извлечения ценной информации или данных из набора неструктурированных или слабоструктурированных данных и разработку концепции, позволяющей повысить уровень гармоничного состояния дисциплин.

Список источников

1. Сеньковская А.А., Фураева И.И. Анализ исходных данных в задаче оптимизации рабочих учебных планов // Математические структуры и моделирование. 2019. Т 20, № 2. С. 85–94.
2. Федоров Д.Ю., Забродин А.В. Оптимизация образовательного процесса: построение индивидуальных учебных траекторий с помощью вариативной части учебного плана на примере задачи о рюкзаке // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2023. № 3. С. 68–73. DOI: 10.24412/2413-2527-2023-335-68-73.
3. Масляев Д.А. Современное состояние задачи автоматизации составления оптимального учебного расписания в вузе // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 42, № 1. С. 23–40. DOI: 10.34130/1992-2752_2022_1_23.

4. Мартыянов В.И. Теоретико-множественный анализ организации данных учебного процесса и алгоритмы проектирования расписания с элементами искусственного интеллекта // Известия Байкальского государственного университета. 2020. Т. 30, № 4. С. 575–585.
5. Mandić M. Semantic Web Based Platform for the Harmonization of Teacher Education Curricula // Computer Science and Information Systems. 2021. Vol. 19, Iss. 1. P. 229–250. DOI: 10.2298/CSIS210207050M.
6. Cahapay M.B. Formulation of Undergraduate Teacher Education Core Competencies: A Harmonization Approach // People: International Journal of Social Sciences. 2020. Vol. 6, Iss. 2. P. 593–608. DOI: 10.20319/pijss.2020.62.593 608.
7. Лебедева Н.Н. Гармонизация педагогической системы ценностного самоопределения школьников // Вестник ОГУ. 2005. Т. 1, № 10. С. 72–76.
8. Миннахметов Р.Р., Фалеева С.А., Салахова Н.О. Основные критерии и показатели педагогического отбора содержания образования // Проблемы современного педагогического образования. 2021. № 71–2. С. 244–247.
9. Алгоритмы для выделения ключевых слов URL: <https://vc.ru/newtechaudit/449493-algoritmy-dlya-vydeleniya-klyuchevykh-slov-rake-yake-textrank> (дата обращения: 08.11.2023).
10. Яруллин Д.В. Информационная система сбора и обработки требований работодателей к компетенциям ИТ-специалистов на основе методов денотативного анализа: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 2.3.4 / Яруллин Денис Владимирович. Пермь, 2023. 22 с.

References

1. Senkovskaia, A.A., Furaeva I.I. (2019), "Analysis of initial data in the task of optimization of working curricula", *Matematicheskie struktury i modelirovanie*, no. (20(2)), pp. 85-94.
2. Fedorov, D. Yu., Zabrodin, A.V. (2023), "Optimization of the educational process: building individual learning trajectories with the help of the variable part of the curriculum on the example of the backpack problem", *Intellektual'nye tekhnologii na transporte*, no. 3, pp. 68-73. DOI: 10.24412/2413-2527-2023-335-68-73.

3. Masliaev, D.A. (2022), "Current state of the problem of automation of optimal academic schedule in higher education institution", *Vestnik Syktyvskarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mekhanika. Informatika*, no. 42(1), pp.23-40. DOI: 10.34130/1992-2752_2022_1_23.
4. Mart'ianov, V.I. (2020), "Theoretical-multiple analysis of educational process data organization and schedule design algorithms with artificial intelligence elements", *Izvestiia Baikal'skogo gosudarstvennogo universiteta*, no. 30(4), pp. 575-585.
5. Mandić, M. (2021), "Semantic Web Based Platform for the Harmonization of Teacher Education Curricula" *Computer Science and Information Systems*, vol. 19, iss. 1, pp. 229-250. DOI: 10.2298/CSIS210207050M.
6. Cahapay, M.B. (2020), "Formulation of Undergraduate Teacher Education Core Competencies: A Harmonization Approach", *People: International Journal of Social Sciences. International Journal of Social Sciences*, vol. 6, iss. 2, pp. 593-608. DOI: 10.20319/pijss.2020.62.593608.
7. Lebedeva, N.N. (2005), "Harmonization of pedagogical system of value self-determination of schoolchildren", *Bulletin OGU*, no. 1(10), pp. 72-76.
8. Minnakhmetov, R.R., Faleeva, S.A., Salakhova, N.O. (2021), "Main criteria and indicators of pedagogical selection of educational content", *Problemy sovremennogo pedagogicheskogo obrazovaniia*, no. 71-2, pp. 244-247.
9. Algorithms for keyword URL: <https://vc.ru/newtechaudit/449493-algoritmy-dlya-vydeleniya-klyu-chevyh-slov-rake-yake-textrank> (accessed: 08.11.2023).
10. Yarullin, D.V. (2023), "Information system for collecting and processing employers' requirements to the competencies IT-specialists on the basis of methods denotative analysis", *Abstract of Ph.D. thesis, Perm*, 22 p.

Информация об авторах:

Р. А. Файзрахманов – доктор экономических наук, профессор кафедры "Информационные технологии и автоматизированные системы", Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Россия, г. Пермь, ул. Комсомольский проспект, 29), AuthorID: 459311;

Е. В. Долгова – доктор экономических наук, профессор кафедры "Информационные технологии и автоматизированные системы", Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Россия, г. Пермь, ул. Комсомольский проспект, 29), AuthorID: 313283;

И. И. Сухих – аспирант кафедры "Информационные технологии и автоматизированные системы", группы ИТТ-22-а, Пермский национальный исследовательский политехнический университет (614990, Россия, г. Пермь, ул. Комсомольский проспект, 29), AuthorID:1083169.

Information about the authors:

Rustam A. Faizrahmanov – Doctor of Economics, Professor of the Department of "Information Technologies and Computer-Based Systems", Perm National Research Polytechnic University (Komsomolsky Prospekt, 29, Perm, Russia, 614990), AuthorID: 459311;

Elena V. Dolgova – Doctor of Economics, Professor of the Department of "Information Technologies and Computer-Based Systems", Perm National Research Polytechnic University (Komsomolsky Prospekt, 29, Perm, Russia, 614990), AuthorID: 313283;

Ilya I. Sukhikh – Postgraduate Student of the Department of "Information Technologies and Computer-Based Systems", group ITT-22-a, Perm National Research Polytechnic University (Komsomolsky Prospekt, 29, Perm, Russia, 614990), AuthorID: 1083169.

Научная статья

УДК 004.891.2

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-60-71

Создание алгоритма для предсказания наличия недостоверной информации в социальных сетях на русском языке

Александр Андреевич Черняев¹, Александр Григорьевич Ивашко²^{1,2}Тюменский государственный университет, Тюмень, Россия¹a.a.chernyaev@utmn.ru;²a.g.ivashko@utmn.ru

Аннотация. Развитие способов передачи информации от пользователя к пользователю, таких как социальные сети, привело к тому, что количество недостоверной информации достигает рекордных показателей. Данная проблема касается не только обычных пользователей социальных сетей, но и средств массовой информации, которые в качестве источника информации могут обращаться к подобным сообщениям. Распространение ложной информации приводит как к проблемам финансовым, так и к опасности жизнедеятельности человека. Отследить данные сообщения вручную уже почти не представляется возможным, и в связи с этим требуется создать алгоритм, который способен выполнять этот процесс автоматически. Целью данной работы является попытка создать подобный алгоритм для русского языка методами машинного обучения. В качестве данных, на которых основаны модели, взята выборка данных, которая прошла процесс ручной аннотации. Выборка прошла процесс подготовки и балансировки. Из этой выборки были получены 29 атрибутов, которые можно разделить на 3 категории: пользователя, текста и распространения. Эти атрибуты и были применены для получения классифицирующих моделей, которые способны предсказывать с достаточно большой вероятностью. Результатом данной работы стал алгоритм для предсказания наличия недостоверной информации в сообщении социальной сети.

Ключевые слова: машинное обучение; нейронные сети; анализ данных; лингвистический анализ; семантический анализ; социальные сети

Для цитирования: Черняев А. А., Ивашко А. Г. Создание алгоритма для предсказания наличия недостоверной информации в социальных сетях на русском языке // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 1(64). С. 60–71. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-60-71.

Статья поступила в редакцию 08.12.2023; одобрена после рецензирования 12.02.2024; принята к публикации 18.03.2024.

Research article

An Algorithm Creating for Predicting the Inaccurate Information Presence in Social Networks in Russian Language

Alexander A. Chernyaev¹, Alexander G. Ivashko²^{1,2}Tyumen State University, Tyumen, Russia¹a.a.chernyaev@utmn.ru;²a.g.ivashko@utmn.ru

Abstract. The development of user-to-user communication methods, such as social media, has resulted in the amount of inaccurate information reaching record levels. This problem affects not only regular users of social media, but also the media, which may refer to such messages as a source of information. The spread of false information leads to both financial and life-threatening problems. It is almost impossible to trace these messages manually and therefore it is required to create an algorithm that can perform this process



Данная работа © 2024 Черняев А.А., Ивашко А.Г. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

automatically. The purpose of this paper is to try to create such an algorithm for the Russian language using machine learning methods. The data on which the models are based is a sample of data that has undergone the process of manual annotation. The sample has undergone the process of preparation and balancing. From this sample, 29 attributes were obtained which can be divided into 3 categories: user, text and distribution. These attributes and were applied to obtain classification models that are able to predict with sufficiently high probability. The result of this work is an algorithm for predicting the presence of inaccurate information in a social network post.

Keywords: machine learning; neural networks; data analysis; linguistic analysis; semantic analysis; social networks

For citation: Chernyaev, A.A., Ivashko, A.G. (2024), "An Algorithm Creating for Predicting the Inaccurate Information Presence in Social Networks in Russian Language", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(64), pp. 60-71. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2024-1-60-71.

The article was submitted 08.12.2023; approved after reviewing 12.02.2024; accepted for publication 18.03.2024.

Введение

Актуальность данной темы обусловлена сильным ростом распространения недостоверной информации в сети Интернет. В современное время любой пользователь сети Интернет может быть самостоятельным средством массовой информации, что приводит к распространению непроверенной информации в настолько больших количествах, что модерация этого потока ручными методами просто не осуществима.

Увеличение количества недостоверной информации приводит к потерям, как финансовым, так и ухудшает состояние безопасности в обществе [1].

Чтобы решить данную проблему в последние годы, было создано множество методов, которые позволяют автоматически определять некоторые виды некорректной информации, например, слухи. Но проблема этих решений в том, что созданы они, в основном, только для английского и китайских языков.

Целью данной работы является построение метода автоматического определения наличия недостоверной информации с особенностями для русского языка.

1. Методы

Методы, которые были использованы в данной области, можно разделить на несколько категорий:

1) применение различных методов машинного обучения. В основном такие работы содержат изучение внешних данных сообщения, а не самого текста, например, параметры, построенные вокруг данных пользователя или данные текста сообщения;

2) синтаксический и семантический анализ текста. Методы, основанные на глубоком изучении строения текста и его смысла;

3) графы распространения недостоверной информации. Построение графов взаимодействия пользователей в социальных сетях, например, для поиска первоисточника сообщения.

Среди данных категорий наибольшего успеха добились работы, применяющие машинное обучение с использованием различных параметров.

Данная работа будет комбинировать различные методы и подавать их результаты на модель искусственного интеллекта (модель, обученная на выборке данных, способная распознавать определенные образы).

2. Источник данных

Так как в методах машинного обучения нельзя обойтись без качественных обучающих данных, то необходимо их найти и обработать.

В качестве обучающих данных были выбраны сообщения пользователей в социальной сети Twitter.

Полученные результаты могут быть возвращены и на другие социальные сети с небольшими правками. Так как социальные сети имеют разные особенности.

На момент получения данных социальная сеть Twitter была удобна многими особенностями, такими как:

1. Открытое API с возможностью получения данных как исторических, так и за недавний срок;

2. Количество символов ограничено 480 символами, что уменьшает время на обработку синтаксиса и семантики текста;

3. Разнообразие предоставляемых данных, как о пользователе, так и о самом сообщении;

4. Простое и разнообразное взаимодействие между пользователями позволяет легко строить графы связей; и многие другие.

Но самое важное для данной работы – это обширная русскоязычная аудитория.

Через API, на момент получения данных, можно было получить 54 характеристики, которые описывали пользователя, сообщение и взаимодействие пользователей. Но не все эти характеристики являются необходимыми для построения модели.

Среди обязательных можно выделить следующие:

1. ID-пользователя – уникальный идентификатор пользователя в социальной сети.
2. Дата создания аккаунта.
3. Количество сообщений, который оставил пользователь за все время пользования с даты регистрации.
4. Количество понравившихся сообщений.
5. Количество подписчиков.
6. Количество подписок на других пользователей.
7. Метка о достоверности аккаунта.
8. ID-сообщения – уникальный идентификатор данного сообщения.
9. Текст данного сообщения.
10. Дата создания сообщения.
11. Количество отметок "Нравится".
12. ID-сообщения, на который поступил ответ.
13. ID-пользователей, которые сделали репост (копирование оригинального сообщения с ссылкой на оригинального пользователя) данного сообщения.
14. ID-пользователя на сообщение которого поступил ответ.

Сообщение в данной социальной сети может быть как оригинальным сообщением пользователя, ответом на другое сообщение, так и комментарием в дополнении к репосту. Таким образом формируется взаимодействие пользователей в социальной сети.

Сообщение может содержать ссылки, хэштеги (тег, ссылочного типа, который начинается с символа #), изображения, видео- и другие медиа-элементы. Исследование этих элементов поможет создать алгоритм для автоматического определения наличия недостоверной информации в социальных сетях, однако,

на данный момент, ведется работа только с текстовыми данными.

3. Построение выборки для обучения моделей

Описанные выше характеристики необходимо получить для каждого примера, который будет добавлен в обучающую выборку.

Сами примеры были получены следующими способами:

- а) поиск данных в социальной сети и сбор данных вручную;
- б) поиск заранее собранных, но не размеченных данных.

В случае первого варианта (а) были собраны ID-сообщений и получены описанные выше данные через API.

В случае второго варианта (б) удалось найти большую коллекцию сообщений [2], которая содержала множество миллионов записей пользователей на тему "Коронавирус". В данную выборку попали данные и от пользователей, которые писали сообщения на русском языке. Стоит отметить, что изначально данная выборка содержала только ID-сообщения, дату и регион, в котором было оставлено сообщения. При помощи этих параметров удалось отсортировать по RU региону и применяя ID-сообщения собрать остальную информацию через API. Всего в итоговую выборку, после фильтрации данных и ручной разметки, попало 10150 записей, которые содержат набор вышеописанных характеристик и поле, определяемое следующим образом:

- 1 – если сообщение несет в себе некорректную или ложную информацию;
- 0 – иначе.

Например, сообщение

"Солист Rammstein Тилль Линдеманн попал в больницу в Берлине с COVID-19, сообщают немецкие СМИ" на момент написания, было ложным, что было опровергнуто самой группой. Такому сообщению была поставлена метка 1.

А сообщение

"#coronavirus #коронавирус В Москве выявлен 6-й человек с диагнозом коронавирус", было написано официальными СМИ и такому сообщению была поставлена метка 0.

Процесс разметки включал чтение текста сообщения, поиск информации и оценка.

4. Реализация алгоритма

Для реализации алгоритма был выбран язык Python, так как данный язык наиболее приспособлен для работы с моделями машинного обучения. Собранная выборка помещается в реляционно-графовую базу данных

EdgeDB, где каждая запись воспринимается в качестве объекта, что упрощает и ускоряет работу в Python относительно стандартных реляционных баз данных.

Сам алгоритм состоит из двух частей (рис. 1):



Рис. 1. Диаграмма основных частей из которых состоит алгоритм

1. Подготовка моделей, включающая создание и обучение моделей на собранных данных через манипулирование параметрами моделей. На вход поступают вручную аннотированные данные, а на выходе – модели, обученные на атрибутах, полученных из данных;

2. Работа с данными, которые подаются на модели, пользователем. Это либо ссылка на сообщение, либо ID-сообщения, которые пользователь предоставляет на вход. На выходе пользователь получает предсказание от нескольких моделей и их предсказания в процентах.

Предварительная подготовка данных включает очистку данных, приведение текста и даты к единому формату, очистку от специальных символов и другие. Обновленные данные хранятся отдельно от оригинальных записей, так как некоторые атрибуты применяют оригинальный текст, а другие – обновленный.

Для получения атрибутов моделей применяются различные методы манипулирования данными, таких как: построение деревьев, преобразования данных в табличные, регулярные выражения. Все это сделано путем разработки дополнительных функций.

Далее рассмотрим сами атрибуты, которые необходимо получать из данных.

5. Получение атрибутов модели

Атрибуты можно разделить на три категории. Часть этих атрибутов свойственна для всех языков, а оставшаяся часть является подобранной для русского языка.

Рассмотрим данные атрибуты:

Первая категория – *атрибуты пользователя*. При помощи данных атрибутов происходит изучение поведения пользователя и его действия в социальной сети [3], [4].

Этими атрибутами являются:

1. *Количество дней между регистрацией и сообщением*. Этот атрибут указывает, насколько стар данный аккаунт. Если аккаунт достаточно новый, то можно сделать вывод, что текст сообщения был сгенерирован и отправлен ботом.

2. *Вовлечение* – показатель того, насколько пользователь погружен в систему социальной сети (4.1):

$$ENG = \frac{\sum (R + L + F + FS)}{Y}, \quad (4.1)$$

где R – ответы, L – количество лайков, F – количество подписчиков, FS – количество подписок, Y – количество лет со дня создания аккаунта с округлением в большую сторону.

3. *Влияние* – количество пользователей, на которое пользователь может распространять свои сообщения (4.2):

$$\inf = F, \quad (4.2)$$

где F – количество подписчиков.

4. *Оригинальность* – показывает, насколько данный пользователь оригинален. Если доля оригинальных сообщений больше или равна 50 %, то можно сказать, что пользователь достаточно оригинален, иначе не оригинален (4.3):

$$ORG = \frac{T}{T + R}, \quad (4.3)$$

где T – количество сообщений, R – количество репостов.

5. *Роль* – атрибут, который определяет роль пользователя в социальной сети (4.4). Если количество подписчиков больше, чем подписок, то данный пользователь получает роли – распространитель, иначе получатель:

$$RL = \frac{F}{FS}, \quad (4.4)$$

где F – количество подписчиков, FS – количество подписок.

6. *Доверие* – для этого используется специальная отметка "Verified", которую можно получить через API. Она указывает на то, что пользователь проверен системой социальной сети и является официальным аккаунтом.

Вторая категория – это *категория распространения и связи сообщений в сети*. Для построения атрибутов данной категории необходимо построить дерево связей [5], [6]. Построение данного дерева включает сбор данных о пользователях, которые каким-то образом реагировали на рассматриваемое сообщение (диффузия сообщений), но изначально API возвращает значения, в которых все связи идут от оригинального сообщения. То есть, если пользователь сделал репост репоста, то ссылка будет ввести к оригинальному сообщению в обоих случаях.

Чтобы это исправить, необходимо получить список всех репостов, подписчиков и подписок для каждого пользователя, которые взаимодействовали с оригинальным сообщением, и время публикации каждого сообщения.

При помощи манипулирования этой информацией можно построить дерево взаимодействия.

Из этого дерева можно получить следующие атрибуты:

7. *Наиболее связанный компонент (НСК)*. Отображает глубину полученного дерева, т. е.

НСК является наибольший путь от корня дерева к листьям (4.5):

$$LCP = \frac{LCC}{AC}, \quad (4.5)$$

где LCC – количество узлов в НСК, AC – общее количество узлов в дереве.

8. *Доля изолированных сообщений*. Не каждый узел в дереве мог получить какую-то реакцию (репост, ответ, лайк). В данном атрибуте необходимо найти все эти узлы и определить их долю относительно всех узлов в дереве (4.6):

$$IP = \frac{I}{AC}, \quad (4.6)$$

где I – количество изолированных узлов в дереве, AC – общее количество узлов в дереве.

9. *Низкая – высокая диффузия*. Во время выполнения репоста может возникнуть ситуация, когда пользователь у которого больше подписчиков, сделал репост сообщения пользователя, у которого меньше подписчиков. Данная ситуация называется низкая–высокая диффузия. Необходимо определить долю таких ситуаций относительно всего дерева (4.7):

$$LHDP = \frac{LHD}{AC - 1}, \quad (4.7)$$

где LHD – количество ситуаций с низкой – высокой диффузией в дереве, AC – общее количество узлов в дереве.

10. *Доля сообщений со ссылками*. Для данного атрибута необходимо найти долю узлов, которые содержат ссылки в сообщении. Определить наличие ссылки можно при помощи API или регулярного выражения. Количество таких узлов делится на общее количество узлов в дереве (4.8):

$$URLP = \frac{URL}{AC}, \quad (4.8)$$

где URL – количество узлов со ссылками в дереве, AC – общее количество узлов в дереве.

Последняя категория – это *атрибуты текста сообщения*. Данная категория содержит уникальные для русского языка атрибуты. Для большинства атрибутов этой категории были собраны коллекции слов, которые применялись в регулярных выражениях.

11. *Слова, выражающие мнение*. Это набор таких слов и словосочетаний как: *считаю, вроде, кажется* и т. д. [7] (4.9):

$$MN = \begin{cases} 0, & \text{слова отсутствуют} \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \quad (4.9)$$

12. *Вульгарные выражения.* Под вульгарными словами понимает, как мат, так и грубые слова [8] (4.10):

$$V = \begin{cases} 0, \text{ слова отсутствуют} \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (4.10)$$

13. *Слова, выражающие уверенность.* Данный атрибут указывает на то, что пользователь уверен [9] в том, что он пишет. Например, *знаю, уверен, точно* и т. д. (4.11):

$$S = \begin{cases} 0, \text{ слова отсутствуют} \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (4.11)$$

14. *Слова, выражающие условность.* Для определения наличия условности [10] в сообщении пользователя применяются подобные слова: *если, когда бы, как* и т. д. (4.12):

$$IF = \begin{cases} 0, \text{ слова отсутствуют} \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (4.12)$$

15. *Местоимения.* Параметр определяет наличие местоимений. Это слова: *я, ты, твой* и т. д. (4.13):

$$PR = \begin{cases} 0, \text{ слова отсутствуют} \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (4.13)$$

16. *Количество чисел в тексте.* В тексте сообщения могут присутствовать числа. Для данного атрибута мы проверяем долю чисел относительно всех слов в тексте (4.14):

$$NC = \frac{C}{N}, \quad (4.14)$$

где C – количество чисел в тексте, N – количество слов в тексте.

17. *Слова, описывающие величину.* Пользователь в сообщении может сделать предположение о каком-то количестве, которое можно описать такими словами: *несколько, минимум, количество* и т. д. [11] (4.15):

$$CN = \begin{cases} 0, \text{ слова отсутствуют} \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (4.15)$$

18. *Слова, описывающие относительное время.* Пользователь в тексте может применять такие слова, как *только что, с тех пор как, вчера* и т. д. [12], которые указывают на относительность времени (4.16):

$$TM = \begin{cases} 0, \text{ слова отсутствуют} \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (4.16)$$

19. *Слова, описывающие чувства.* Атрибут определяет наличие слов, указывающих на одно из 5 чувств. Это слова: *увидел, почувствовал, услышал* и т. д. (4.17):

$$FL = \begin{cases} 0, \text{ слова отсутствуют} \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (4.17)$$

20. *Перечисления.* В данном атрибуте необходимо определить наличия перечисления. Это можно сделать как при помощи слов: *во-первых, это раз, во-вторых*, так и при помощи цифр 1,2,3 (4.18):

$$CNT = \begin{cases} 0, \text{ слова отсутствуют} \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (4.18)$$

21. *Правописание.* Чтобы определить наличие ошибок в тексте используются библиотеки, которые используются в OpenOffice или LibreOffice для проверки правописания. Применить эти библиотеки можно при помощи python расширения enchant [13] (4.19):

$$P = \frac{M}{N}, \quad (4.19)$$

где M – количество слов с ошибкой, N – количество слов в тексте.

22. *Настроение.* Параметр отвечает за получение семантического разбора текста. Для получения данного параметра используется модель RuBert, переобученная на корпусе заранее размеченных данных. Модель на выходе определяет текст к одной из следующих категорий:

Neutral – нейтральное значение, т.е. текст не является ни негативным, ни позитивным.

Skip – модель не смогла определить эмоцию.

Negative – модель определила текст как имеющий негативную коннотацию.

Positive – модель определила текст как имеющий позитивную коннотацию.

23. *Смайлики.* Каждый смайлик имеет свой уникальный код и их наличие можно найти без проблем. Для поиска была подключена дополнительная библиотека, написанная на Python [14], способная выполнять поиск самостоятельно и выдавать результат о наличии или отсутствии (4.20).

$$E = \begin{cases} 0, \text{ смайлики отсутствуют} \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (4.20)$$

24. *Хэштеги.* Хэштег – средство для упрощенного поиска записей в сети. Его применяют в тех случаях, когда хотят, чтобы данное сообщение было проще найти в социальной сети [15] (4.21):

$$H = \begin{cases} 0, \text{ хэштеги отсутствуют} \\ 1, \text{ иначе} \end{cases}. \quad (4.21)$$

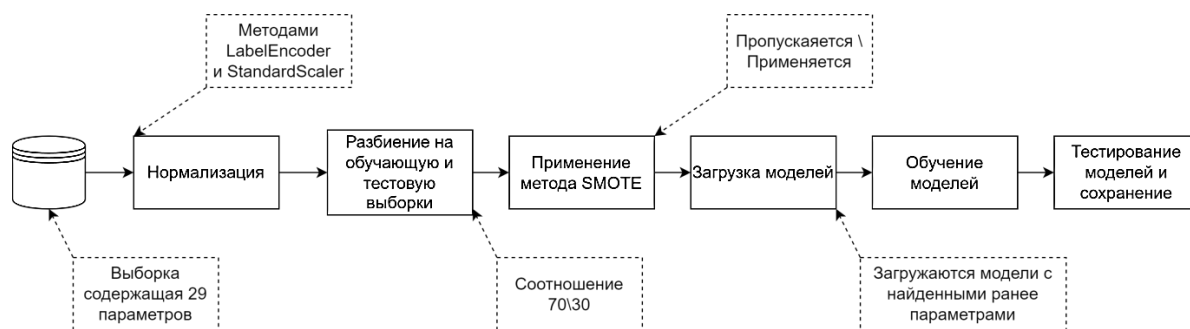


Рис. 2. Диаграмма процесса обучения моделей

25. *Ссылки* – сообщение может содержать в себе ссылки на дополнительные источники информации [16]. Например, пользователь во время обсуждения, какой-то темы может привести пример, найденный в интернете. Получаем данный атрибут через бинарную функцию (4.22):

$$U = \begin{cases} 0, \text{ссылки отсутствуют} \\ 1, \text{иначе} \end{cases}. \quad (4.22)$$

26. *Повторяющиеся слова*. Повторяющиеся слова [15] могут указывать на генерацию текста при помощи моделей (4.23):

$$RW = \begin{cases} 0, \text{пов. слова отсут.} \\ 1, \text{иначе} \end{cases}. \quad (4.23)$$

27. *Повторяющиеся символы*. Аналогично с повторяющимися словами повторяющиеся символы [15] могут указывать на ошибки генерации текста (4.24):

$$RC = \begin{cases} 0, \text{пов. символы отсут.} \\ 1, \text{иначе} \end{cases}. \quad (4.24)$$

28. *Восклицательные знаки* указывают на эмоциональную реакцию на какое-то сообщение или явление. Такие сообщения могут помочь с определением (4.25):

$$EP = \begin{cases} 0, \text{вос. знаки отсут.} \\ 1, \text{иначе} \end{cases}. \quad (4.25)$$

29. *Количество слов в тексте* [20]. Простой атрибут для оценки использования доступного количества символов в сообщении (4.26):

$$WCN = \sum WD, \quad (4.26)$$

где WD – слова в сообщении.

Таким образом количество атрибутов, которые применяются, необходимо получить для обучения модели равно 29.

Например, для сообщения "*Вторая неделя карантина, говорят, самая сложная. И в плане изоляции дома, и в плане новых случаев заболевания коронавирусом (подходит к концу инкубационный период у многих, кто общался с больными)*". получились следующие атрибуты: 1: 4292, 2: 12626.223, 3: 3830, 4: 0, 5: 0.53577, 6: true, 7: 0, 8: 0, 9: 0, 10: 0, 11: 1, 12: 0, 13: 0, 14: 0, 15: 0, 16: 0, 17: 0, 18: 0, 19: 0, 20: 0, 21: 0, 22: Neutral, 23: 0, 24: 0, 25: 0, 26: 0, 27: 0, 28: 0, 29: 29.

Описанные выше атрибуты необходимо получить для каждой записи в обучающей выборке данных.

Важным замечанием является то, что модель строится относительно данных атрибутов, а не самих данных, которые были получены после разметки.

6. Создание тестовых моделей

Полученные атрибуты необходимо рассчитать для каждой записи в собранной выборке данных.

В связи с тем, что собранные данные оказались плохо сбалансированными, необходимо применить один из методов балансировки. В ходе анализа доступных алгоритмов на тестовых моделях лучшего всего себя показал метод SMOTE (Synthetic Minority Over-sampling) [17]. Алгоритм SMOTE позволяет сгенерировать дополнительные примеры в выборку и таким образом изначальная выборка данных, состоящая из 10150 записей, получила новые записи и стала размером в более 13 тыс. примеров.

В качестве тестирования полученных атрибутов были выполнены проверки на пяти моделях (Support Vector Classification (SVC), Multi-layer Perceptron (MLP), K – ближайших соседей (KNN), наивный байесовский классификатор (CNB) и дерево – решений (Tree)) с применением данных оригинальных и включающих сгенерированные примеры.

Оценка моделей основывается на следующих методах:

$$accuracy(a, X) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k [a(x_i) = y_i], \quad (5.1)$$

где $a(x_i)$ – предсказанная метка класса, y_i – ожидаемая метка класса.

Данная оценка (5.1) определяет долю верно определенных меток класса относительно всех примеров в тестовой выборке:

$$recall(a, X) = \frac{TP}{TP + FN}, \quad (5.2)$$

$$precision(a, X) = \frac{TP}{TP + FP}, \quad (5.3)$$

$$F_1 = \frac{2 \cdot precision \cdot recall}{precision + recall}, \quad (5.4)$$

где

TP – true positive (предсказание оказалось правильным с меткой класса True),

FP – false positive (предсказание оказалось ошибочным с меткой класса True),

FN – false negative (предсказание оказалось ошибочным с меткой класса False),

TP , FP и FN определяются из матрицы ошибок.

Оценка F_1 (5.4) позволяет проанализировать: получилась ли модель переобученной, то есть показывают хорошие результаты на обученных данных, но плохие на новых данных.

Для построения данных моделей применялась python библиотека scikit-learn, где описанные выше модели уже реализованы и необходимо только определить параметры и подготовить данные, которые поступают на вход в качестве обучающих и тестирующих.

Сам процесс подготовки данных и моделей к обучению можно наблюдать на рис. 2.

Рассмотрим главные этапы данного процесса:

1. Нормализация. Так как данные для обучения содержат 29 разнообразных атрибутов, то их необходимо привести к общему виду, например, в числовой формат от -1 до 1. Для

этого применяются методы LabelEncoder для преобразования атрибута *Настройка*, который содержит в себе четыре разных текстовых значения, в числовой формат. И StandartScaler, который преобразовывает числовые атрибуты в единый формат. Оба метода имеются в библиотеке scikit-learn.

2. Полученная выборка делится на две части: обучающая и тестирующая в соотношении 70/30. Процесс обучения строится на обучающей выборке, а затем проверяется при помощи тестовой выборки.

3. Для эксперимента модели будут обучаться на данных, которые получили дополнительные примеры при помощи SMOTE и без них.

После этих шагов выполняется загрузка моделей с заранее полученными параметрами и начинается процесс обучения. Всего было получено 30 моделей, основанных на стандартных методах. Представленные результаты получены для данных с дополнительно сгенерированными примерами при помощи алгоритма SMOTE, так как полученные модели, на оригинальной выборке данных, получились переобученными.

После проведения тестирования моделей получились следующие результаты [18]:

Таблица 1. Результаты тестовых моделей

Название модели	Accuracy	F1
SVC	0.7954	0.8841
MLP	0.778	0.8738
KNN	0.8314	0.9079
CNB	0.6837	0.8018
Tree	0.8684	0.9208

Можно сделать вывод, что полученные стандартные модели показывают неплохой результат в классификации на полученных данных.

7. Создание модели нейронной сети

Далее рассмотрим возможность создания новой модели нейронной сети. В качестве инструмента для создания модели были выбраны Tensor-Flow \ Keras.

В качестве основы, на которой будет создаваться новая нейронная сеть, была выбрана модель: простая Sequential модель. Данная модель содержит в себе стандартный набор слоев, включая вход, выход, скрытые слои, слои нормализации и слои исключения, для предотвращения переобучения.

Каждый слой имеет набор параметров, которые необходимо подобрать, и так как этот процесс может занимать продолжительное время в случае ручного подбора, то было решено применить метод Роя Частиц (Particle Swarm Optimization) [19], [20], который позволяет в короткие сроки определить самые оптимальные настройки сети.

Процесс получения оптимальных настроек состоит в поэтапной оценке множества параметров, когда в ходе каждого этапа получаются оценки, которые сравниваются друг с другом.

В сетку параметров попали следующие настройки: решающая функция для скрытых слоев, функция оптимизации, количество нейронов в каждом слое.

Итоговая модель содержит 7 слоев:

1. Входной слой;
2. Слой с функцией нормализации – Adamax;
3. Скрытый слой с следующими параметрами:
 - а) число нейронов: 128;
 - б) преобразование входов Kernel: 29x128;
 - с) функция активации: SELU.
4. Скрытый слой с следующими параметрами:
 - а) число нейронов: 128;
 - б) преобразование входов Kernel: 128x128;
 - с) функция активации: RELU.
5. Dropout;
6. Скрытый слой с следующими параметрами:
 - а) число нейронов: 1
 - б) преобразование входов Kernel: 1x128;
 - с) функция активации: линейная.
7. Выходной слой.

Процесс обучения такой же, как и для стандартных моделей. Имеется обучающая выборка и тестирующая. В дополнение к этому необходимо указать количество итераций, которые применяются для обучения моделей. На каждой итерации происходит взвешивание оценки моделей, а данные подаются кусками по 256 записей.

В ходе экспериментов было обнаружено, что процесс обучения входит в стагнацию примерно на 500-й итерации.

В итоге новая модель получила следующие оценки:

Таблица 2. Значения метрик для модели нейронной сети

Метрика	Значение
Accuracy	0.9162
Precision	0.9340
Recall	0.8957
F1	0.91

По полученным результатам (табл. 2) можно сделать вывод, что данная модель показала себя лучше, чем стандартные модели.

В итоге все описанные модели (табл. 1 и табл. 2) применяются в разработанном приложении, то есть на выходе пользователь получает оценку не от одной модели, а сразу от нескольких, а также их результаты, что позволяет получить более качественную классификацию.

В дальнейшем имеется возможность добавления новых моделей в алгоритм для улучшения качества предсказаний.

Заключение

Таким образом, можно сделать вывод, что создание алгоритма для автоматизации поиска недостоверной информации на основе текстового анализа сообщений и анализа распространения новости в социальной сети – возможно.

Описанный алгоритм, применяющий предложенные модели, дает возможность выполнить оценку недостоверной информации с вероятностью более 90 %.

Высокий уровень вероятности оценки недостоверной информации позволяет прогнозировать востребованность предлагаемого алгоритма у пользователей различных социальных сетей.

Список источников

1. Pennycook G. The Psychology of Fake News. Trends in Cognitive Sciences. 2021. Vol. 25. P. 321–357. DOI: 10.1016/j.tics.2021.02.007.
2. Banda Juan M., Tekumalla Ramya, Wang Guanyu, Yu, Jingyuan Liu, Tuo Ding, Yuning, Artemova, Katya Tutubalina, Elena & Chowell Gerardo. A large-scale COVID-19 Twitter chatter dataset for open scientific research - an international collaboration (Version 67) [Data set]. Zenodo. DOI10.5281/zenodo.5000423.

3. Черняев А.А. 2019. Математическое моделирование оценки достоверности слухов в средствах массовой информации / А.А. Черняев, А.Г. Ивашко // Вестник Тюменского государственного университета. Физико-математическое моделирование. Нефть, газ, энергетика. 2019. Т. 5, № 4(20). С. 181–199. DOI 10.21684/2411-7978-2019-5-4-181-199. EDN SQYEWN.
4. Chernyaev A. Spryskov A. Ivashko A., Bidulya Y. A Rumor Detection in Russian Tweets. 2020. P. 108–118. DOI: 10.1007/978-3-030-60276-5_11.
5. Eismann K. Diffusion and persistence of false rumors in social media networks: implications of searchability on rumor self-correction on Twitter. Journal of Business Economics. 2021. Vol. 91. P. 1299–1329. DOI: 91. 10.1007/s11573-020-01022-9.
6. Vosoughi S. Automatic detection and verification of rumors on Twitter. 2015. P. 1–147.
7. Иванова Г.Ф. О мнениях и оценках / Г.Ф. Иванова // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2007. Т. 8, № 41. С. 25–31. EDN JXKQIX.
8. Емельянова О.Н. Бранная и вульгарная лексика в толковых словарях русского языка // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2015. № 4(34). С. 126–130. EDN VDKKMN.
9. Рамазанова Р.З. Вводно-модальные слова как средство выражения уверенности в современном русском языке // Филология и культура. 2020. № 2(60). С. 77–82. DOI 10.26907/2074-0239-2020-60-2-77-82. EDN RWAYJW.
10. Селезнёва Е.В. Сложноподчиненное предложение с придаточным условия: содержание и объем понятия // Филология на стыке научных эпох: сб. статей памяти доктора филол. наук, проф. Анатолия Михайловича Ломова / Автономная некоммерческая организация по оказанию издательских и полиграфических услуг. Воронеж: "Наука–Юни-пресс", 2020. С. 158–164. EDN HESCYX.
11. Шульга М.В. 2002. Количественная оценка в газетно-публицистическом тексте // Вестник МГУЛ – Лесной вестник. 2002. № 3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kolichestvennaya-otsenochnost-v-gazetno-publitsisticheskom-tekste> (дата обращения: 22.02.2023).
12. Туманова А.Б. Категория времени в современной науке: анализ и интерпретация / А.Б. Туманова, Т.В. Павлова, Н.Ю. Зуева // Неофилология. 2019. Т. 5, № 18. С. 131–138. DOI 10.20310/2587-6953-2019-5-18-131-138. EDN EAONIK.
13. Lachowicz D. Библиотека для Python Enchant. URL: <https://abiword.github.io/enchant/> (дата обращения: 22.02.2023).
14. Vicenzi A. Библиотека для Python Emojis. URL: <https://emojis.readthedocs.io/en/latest/> (дата обращения: 22.02.2023).
15. Jahanbakhsh-Nagadeh Z., Feizi-Derakhshi MR., Ramezani M. A model to measure the spread power of rumors. J Ambient Intell Human Comput. 2022. DOI: 10.1007/s12652-022-04034-1.
16. Castillo C., Mendoza M., Poblete B. Information credibility on Twitter. Proceedings of the 20th International Conference on World Wide Web. 2011. P. 675–684. 10.1145/1963405.1963500.
17. Chawla N., Bowyer K., Hall L., Kegelmeyer P. Smote: synthetic minority over-sampling technique. Journal of artificial intelligence research. 2002. Vol. 16. P. 321–357, DOI: 10.1613/jair.953.
18. Черняев А.А., Ивашко А.Г. Математическое моделирование оценки доверия к сообщению в социальных сетях на русском языке // Прикладная информатика. 2023. Т. 18, № 4. С. 121–132. DOI: 10.37791/2687-0649-2023-18-4-121-132.
19. Kumar A., Sangwan S.R., Nayyar A. Rumour veracity detection on twitter using particle swarm optimized shallow classifiers. Multimed Tools Appl 78, 2019. Vol. 78. P. 24083–24101. DOI: 10.1007/s11042-019-7398-6.
20. Kennedy J., Eberhart R. Particle swarm optimization. Proceedings of ICNN'95 – International Conference on Neural Networks, Perth, WA, Australia, 1995, pp. 1942–1948 Vol. 4, DOI: 10.1109/ICNN.1995.488968.

References

1. Pennycook, G. (2021), "The Psychology of Fake News", *Trends in Cognitive Sciences*, vol. 25, pp. 321-357. DOI: 10.1016/j.tics.2021. 02.007.
2. Banda Juan M., Tekumalla Ramya, Wang Guanyu Yu, Jingyuan Liu, Tuo Ding, Yuning, Artemova Katya Tutubalina, Elena & Chowell Gerardo. A large-scale COVID-19 Twitter chatter dataset for open scientific research - an

- international collaboration (Version 67) [Data set]. Zenodo. DOI10.5281/zenodo.5000423.
3. Chernyaev, A.A., Ivashko, A.G. (2019), "Mathematical modeling estimates of the reliability of rumors in mass media", *Vestnik Tyumenskogo gosudarstvennogo universiteta. Fiziko-matematicheskoe modelirovanie. Neft', gaz, energetika* = *Tyumen State University Herald. Physical and Mathematical Modeling. Oil, Gas, Energy*, vol. 5, no. 4(20), pp. 181-199. DOI: 10.21684/2411-7978-2019-5-4-181-199.
4. Chernyaev, A., Spryskov, A., Ivashko, A., Bidulya, Y.A. (2020), "Rumor Detection in Russian Tweets", pp. 108-118. DOI: 10.1007/978-3-030-60276-5_11.
5. Eismann, K. (2021), "Diffusion and persistence of false rumors in social media networks: implications of searchability on rumor self-correction on Twitter", *Journal of Business Economics*, vol. 91, pp. 1299-1329. DOI: 10.1007/s11573-020-01022-9.
6. Vosoughi, S. (2015), Automatic detection and verification of rumors on Twitter, pp.1-147.
7. Ivanova, G.F. (2007), "About opinions and evaluations", *Izvestiya Rossiyskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. A. I. Gertsena* = *Herzen university journal of humanities & sciences*, no. 41, pp. 25-31. EDN JXKQIX.
8. Emel'yanova, O.N. (2015), "Abusive and vulgar vocabulary in defining dictionaries of the russian language", *Vestnik Krasnoyarskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. V.P. Astaf'eva* = *Bulletin of Krasnoyarsk state pedagogical university named after V. P.*, no. 4(34), pp. 126-130. EDN VDKKMN.
9. Ramazanov, R.Z. (2020), "Parenthetic words as a means of expressing certitude in the modern russian language", *Filologiya i kul'tura* = *Philology and Culture*, no. 2(60), pp. 77-82. DOI 10.26907/2074-0239-2020-60-2-77-82. EDN PWAYJW.
10. Selezneva, E.V. (2020), "A complex subordinate sentence with a subordinate condition: the content and scope of the concept", *Filologiya na styke nauchnykh epokh: Sbornik statey pamyati doktora filologicheskikh nauk, professora Anatoliya Mikhaylovicha Lomova* = *Philology at the junction of scientific epochs: Collection of articles in memory of Doctor of Philological Sciences, Professor Anatoly Mikhailovich Lomov*, pp. 158-164. EDN HESCYX.
11. Shul'ga, M.V. (2002), "Quantitative evaluation in the newspaper and journalistic text", *Vestnik MGUL – Lesnoy vestnik* = *Forestry bulletin*, no. 3.
12. Tumanova, A.B. (2019), "The category of time in modern science: analysis and interpretation", *Neofilologiya* = *Neophilology*, vol. 5, no. 18, pp. 131-138. DOI 10.20310/2587-6953-2019-5-18-131-138. EDN EAONIK.
13. Lachowicz, D. Python Library Enchant. URL: <https://abiword.github.io/enchant/> (accessed: 22.02.2023).
14. Vicenzi, A. (2018). Python Library Emojis. URL: <https://emojis.readthedocs.io/en/latest/> (accessed: 22.02.2023).
15. Jahanbakhsh-Nagadeh, Z., Feizi-Derakhshi, MR., Ramezani, M. (2022), "A model to measure the spread power of rumors", *J Ambient Intell Human Comput*. DOI: 10.1007/s12652-022-04034-1.
16. Castillo, C., Mendoza, M., Poblete, B. (2011), "Information credibility on Twitter", *Proceedings of the 20th International Conference on World Wide Web*, pp. 675-684. 10.1145/1963405.1963500.
17. Chawla, N., Bowyer, K., Hall, L., Kegelmeyer, P. (2002), "Smote: synthetic minority over-sampling technique", *Journal of artificial intelligence research*, vol. 16, pp. 321-357. DOI: 10.1613/jair.953.
18. Chernyaev, A., Ivashko, A. (2023), "Mathematical modeling of the assessment of credibility in a message in social networks on Russian language", *Prikladnaya informatika* = *Journal of Applied Informatics*, vol.18, no. 4, pp. 121-132 DOI: 10.37791/2687-0649-2023-18-4-121-132.
19. Kumar, A., Sangwan, S.R., Nayyar, A. (2019), "Rumour veracity detection on twitter using particle swarm optimized shallow classifiers", *Multimed Tools Appl* 78, vol. 78, pp. 24083-24101. DOI: 10.1007/s11042-019-7398-6.
20. Kennedy, J., Eberhart, R. (1995), "Particle swarm optimization", *Proceedings of ICNN'95 – International Conference on Neural Networks, Perth, WA, Australia*, vol. 4, pp. 1942-1948. DOI: 10.1109/ICNN.1995. 488968.

Информация об авторах:

А. А. Черняев – аспирант, ассистент, инженер-исследователь кафедры программной и системной инженерии Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета (625003, Россия, г. Тюмень, ул. Володарского, 6), AuthorID: 1234543;

А. Г. Ивашко – доктор технических наук, профессор кафедры, программной и системной инженерии Института математики и компьютерных наук Тюменского государственного университета (625003, Россия, г. Тюмень, ул. Володарского, 6), AuthorID: 250554.

Information about the authors:

Alexander A. Chernyaev – Postgraduate, Assistant, Engineer-Researcher, Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University (Volodarskogo, 6, Tyumen, Russia, 625003), AuthorID: 1234543;

Alexander G. Ivashko – Doctor of Technical Sciences (Eng.), Professor of the Institute of Mathematics and Computer Sciences, Tyumen State University, (Volodarskogo, 6, Tyumen, Russia, 625003), AuthorID: 250554.

Научный периодический журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" зарегистрирован в 2007 г. как самостоятельное издание, являющееся продолжением серии журнала "Вестник Пермского университета", издаваемого с 1994 г.

В каждом номере научного журнала автору разрешается опубликование в любом разделе не более одной статьи, в том числе в соавторстве.

Статьи, оформленные в соответствии с нижеизложенными правилами, должны быть отправлены через **личный кабинет автора на сайте журнала**. Статьи отправляются в двух форматах: текстовый документ и pdf-файл без данных об авторе (для организации слепого рецензирования). Вместе с рукописью отправляются контактные данные авторов в свободной форме в текстовом документе (ФИО, должность, место работы с указанием полного адреса, e-mail, номер телефона), **сопроводительное письмо**, согласие **на обработку и хранение персональных данных** (от каждого соавтора рукописи) и **экспертное заключение о возможности открытого опубликования**. Для публикации статьи необходимо заполнить и подписать **договор**.

Аннотация статьи (на русском и английском языках) должна содержать основные краткие сведения: описание проблемы, включая цели и задачи исследования; методы исследования с указанием новизны, если имеется; полученные результаты и выводы. Объем аннотации примерно 250 слов

Текст статьи должен содержать разделы: Введение, Постановка задачи, Методы исследования, Результаты, Обсуждения, Заключение для русскоязычной статьи; Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion для англоязычной статьи. Объем рукописи – не менее 6 страниц машинописного текста. Рекомендуемое количество использованных источников в научной статье – 10-20, в обзорной статье – 20-50.

Оформление. Текст статьи необходимо оформить в редакторе **Word**. Формат листа, используемый для написания статьи – А4. Размеры верхнего и нижнего полей – 2.6 см, правого и левого – 2.5 см. Расстояние до верхнего и нижнего колонтитулов 1.25 см. Шрифтом Times New Roman Cyr, размер – 11 пт, межстрочный интервал – одинарный. Подписи к рисункам и таблицам набираются курсивом, в конце заголовков и ячеек таблицы точка не ставится. Формулы набираются в редакторе Microsoft Word Equation.

Структура статьи

Вид статьи (научная/обзорная)

УДК (шрифт Times New Roman – 10 пт).

DOI

Название статьи на русском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

Ф.И.О. автора (-ов) полностью

Место работы (с указанием подразделения), город и страна (шрифт Times New Roman – 10 пт), **e-mail**

Аннотация на русском языке (шрифт Times New Roman – 10 пт).

Ключевые слова на русском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 10 пт, курсивный).

Название статьи на английском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

На английском языке Ф.И.О. автора (-ов) полностью

Место работы (с указанием подразделения), город и страна (шрифт Times New Roman – 10 пт), **e-mail**

Аннотация на английском языке (шрифт Times New Roman – 10 пт).

Ключевые слова на английском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 10 пт, курсивный).

Основной текст статьи набирается в две колонки одинаковой ширины, расстояние между колонками – 0.5 см, абзацный отступ основного текста – 1.0 см (задается автоматически, не пробелами). Другие отступы не допускаются. Выравнивание текста по ширине.

Список источников оформляется в едином формате, в соответствии с ГОСТ Р 7.0.100–2018, без использования тире. Если в списке литературы используется источник из электронного ресурса, необходимо указать дату обращения. Ссылка на литературный источник указывается в тексте статьи в квадратных скобках после упоминания цитаты. Список использованных литературных источников необходимо представить на русском и английском языках (**References**). **Список литературы на латинице, называемый References**, готовится отдельно от Списка литературы и размещается сразу за указанным списком. Ссылки на зарубежные источники необходимо повторять в Списке литературы и References. В References недопустимо использовать российские ГОСТы. Необходимо следовать требованиям международных стандартов. Инструкция по оформлению списка литературы в латинице – References, стандарт "Harvard" находится по ссылке http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc.

ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ И ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Все рукописи проходят проверку в системе "Антиплагиат", на рассмотрение принимаются статьи со степенью оригинальности более 80 % для научных статей, 60 % для обзорных статей. Далее рукописи передаются на рецензирование двум специалистам в научной области исследования. При возникновении спорной ситуации назначается третий рецензент. Окончательное решение о публикации рукописи принимает главный редактор журнала.

Датой поступления статьи считается день ее отправки через личный кабинет на сайте журнала или по электронной почте журнала (главного редактора). Рукописи рассматриваются в порядке их поступления в течение одного месяца в зависимости от сложности ситуации и объема работы. Редакция оставляет за собой право без согласования с автором проводить литературную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла.

Одобренные статьи публикуются бесплатно. Полнотекстовая версия каждой рукописи выставляется на сайте журнала и в системе РИНЦ (e-library).

Scientific periodical journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" is published since 1994 in the series of the journal "Bulletin of Perm University". Then it was registered as an independent publication in 2007.

An author is allowed to publish no more than one article (also as co-author) in any section for each issue of the journal.

Article's structure should be accordant with the rules below and should be sent through the **author's personal account on the journal's website**. Articles should be sent in two formats: a text document and a pdf-file without information about the author(s) (for review). Authors contact data (name, position and place of work with address, e-mail, phone number in a text document), **the cover letter, consent for personal data processing and storage** (from each co-author) and **an expert letter on the open publication possibility** should be sent with the manuscript. Author(s) must make and sign **an agreement**.

Abstract (in Russian and English) should contain main information of research: a problem including the goals and objectives of the study; research methods with novelty indication, if any; significant results and findings. The abstract size is approximately 250 words.

Text should contain sections: Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion. The manuscript size is at least 6 typewritten pages. The used sources recommended number for research article is 10-20, in a review article - 20-50.

An article text must be formatted in the editor Word. The sheet format is A4. The top and bottom margins are 2.6 cm, the right and left margins are 2.5 cm. The distances to the header and footer are 1.25 cm. Times New Roman Cyr font, size – 11 pt, single spacing. Legends for figures and tables are typed in italics style. Formulas are typed in the editor Microsoft Word Equation.

The structure of the article

Article's type (research/review)

UDC (Times New Roman font – 10 pt).

TITLE in Russian (Times New Roman font – 16 pt, bold).

Name: author (s) name in full,

Place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 10 pt), **e-mail**

Abstract in Russian (Times New Roman font – 10 pt).

Keywords in Russian: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 10 pt, italic).

TITLE in English (Times New Roman font – 16 pt, bold).

In English author (s) name in full, place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 10 pt), **e-mail,**

Abstract in English (Times New Roman font – 10 pt).

Keywords in English: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 10 pt, italic).

The article text is typed in two columns of the same width, the distance between the columns is 0.5 cm, the paragraph indent is 1.0 cm (set automatically, not spaces). No other indents are allowed. Justify the text in width.

References are formed in a single format with using GOST R 7.0.100–2018 without a dash. If a source from an electronic resource is used, the author should indicate the request date. To indicate a source in text author uses square brackets after the quotation mention. References must be submitted **in Russian and English**. The References list in Latin, called References, is prepared separately from the References List in Russian and placed below. Foreign sources references should be repeated in the References Lists in Russian and English. It is inadmissible to use Russian GOSTs in References. It is necessary to follow the requirements of international standards. Instructions on the References in Latin script design – References,

Harvard standard can be found at http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc.

REVIEW AND PUBLICATION OF ARTICLES

All manuscripts are checked in the "Anti-Plagiarism" system, articles with the originality degree more than 80% for research, 60% for review are accepted for consideration. Then manuscripts are submitted for review by two specialists in the research scientific field. If a disputable situation arises, a third reviewer is appointed. The final decision on the manuscript publication is made by the editor-in-chief of the journal.

The receipt date of the article is the day of its submission through the personal account on the journal's website or by e-mail of the journal (or editor-in-chief). Manuscripts are reviewed in the order they are received within one month, review period may be changed depending on a situation complexity and a works amount. The journal editors can to edit the article text without basic meaning change.

Approved articles are published free. The full-text version of each manuscript is posted on the journal's website and in the RSCI system (e-library).

Научное издание

ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Математика. Механика. Информатика

Выпуск 1 (64)

2024

Адрес учредителя и издателя
614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ
Адрес редакции
614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ
Механико-математический факультет
e-mail: vestnik_mmi@psu.ru

Редактор Е.В. Шумилова
Корректор В.Е. Пирожкова
Компьютерная верстка Г.И. Кушниковой

Подписано в печать 22.03.2024. Выход в свет 29.03.2024
Формат 60 × 84/8. Усл. печ. л. 8,6. Тираж 500 экз. Заказ 46.

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Управление издательской деятельности
614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15. Тел. (342) 239-66-36
Отпечатано в типографии ПГНИУ. Тел. (342) 239-65-47

Подписной индекс журнала
«Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика»
в онлайн-каталоге «Урал-Пресс» – 015010
https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase_id=396133

Распространяется бесплатно и по подписке