

Учредитель: Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Научный журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" публикует оригинальные научные статьи, краткие сообщения и обзорные статьи по направлениям журнала на русском и английском языках, ранее не публиковавшиеся и не представленные для публикации в других изданиях. Все статьи проходят рецензирование членами редакционной коллегии журнала и внешними рецензентами.

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

БУЗМАКОВА М. М., к. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

МАЛАНИН В. В., д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

БАРУЛИНА М. А., д. ф.-м. н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

НУРБАКОВА Д. М., PhD in Computer Science; Национальный институт прикладных наук Лиона (National Institute of Applied Sciences of Lyon), Лион, Франция.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

БУЗМАКОВА М. М., к.ф.-м.н., доцент, **главный редактор**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

РУСАКОВА О. Л., к.ф.-м.н., доцент, **ответственный секретарь**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

АЛЕКСЕЕВ А. О., к.э.н., доцент; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

АПТУКОВ В. Н., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

АПУШКИНСКАЯ Д. Е., д.ф.-м.н.; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

БАРУЛИНА М. А., д.ф.-м.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

БИРЮКОВ А. Н., д.э.н., доцент; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;

БОРИСОВ В. В., д.т.н., профессор; Смоленский филиал национального исследовательского университета «МЭИ», Смоленск, Россия;

ВЕЧТОМОВ Е. М., д.ф.-м.н., профессор; Вятский государственный университет, Киров, Россия;

ГУСЕВ А. Л., д.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ДЕМИДОВ С. С., д.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

ИВАНОВ Д. В., д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

ИСАЕВ К. П., д.ф.-м.н.; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ИШКИН Х. К., д.ф.-м.н.; доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

КРИВОШЕЕВА О. А., д. ф.-м. н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

КОССОВИЧ Л. Ю., д.ф.-м.н., профессор; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

КУЗНЕЦОВ А. Г., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

МАЛАНИН В. В., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

МАТВЕЕНКО В. П., д.т.н., профессор, академик РАН; Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия;

МАХНЕВ А. А., д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

ПАЛКОВА И. В., д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;

ПЕСТРЕНИН В. М. к.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ПОЛОСКОВ И. Е., д.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

РУСАКОВ С. В., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

САВЧИН В. М., д.ф.-м.н., профессор; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;

СЕЛЕТКОВ И. П., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ТРУСОВ П. В., д.ф.-м.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

ТЮРИН С. Ф., д.т.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;

ХАЧАЙ М. Ю., д.ф.-м.н., профессор РАН, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;

ХЕННЕР Е. К., д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАО; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ФАЗУЛЛИН З.Ю., д.ф.-м.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ЧЕРНЫХ В. В., д.ф.-м.н., доцент; Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия;

ЧЕРНИКОВ А. В., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ЧИНЕНОВА В. Н., к.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;

ШАХМАМЕТОВА Г. Р., д.т.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ШВАРЦ К. Г., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ЮМАГУЛОВ М. Г., д.ф.-м.н., профессор; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;

ЯКОВЛЕВ В. И., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;

ЯСНИЦКИЙ Л. Н., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77 - 66787 от 08.08.2016.

Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ, eLIBRARY ID 28484).

Founder: Perm State University

The journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" publishes Full Articles, Short Communications Article and Review paper/perspectives on the journal's directions, which have not been previously published. The papers have been written in Russian and English. The papers are reviewed by the journal editorial board members and external reviewers.

EDITORIAL COUNCIL

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Perm State University, Perm, Russia;
NURBAKOVA D. M., PhD in Computer Science; National Institute of Applied Sciences of Lyon, France.

EDITORIAL BOARD

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Editor-in-Chief**; Perm State University, Perm, Russia;
RUSAKOVA O. L., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Executive Secretary**; Perm State University, Perm, Russia;
ALEKSEEV A. O., Candidate of Science in Economics, Associate Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
APTUKOV V. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
APUSHKINSKAYA D. E., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;
BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Perm State University, Perm, Russia;
BIRUKOV A. N., Doctor of Science in Economics, Associate Professor; Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;
BORISOV V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Smolensk Branch of National Research University "MEI", Smolensk, Russia;
VECHTOMOV E. M., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Vyatka State University, Kirov, Russia;
GUSEV A. L., Doctor of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
DEMIDOV S. S., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
IVANOV D. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
ISAEV K. P., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
ISHKIN H. K., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
KRIVOSHEEVA O. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
KOSSOVICH L. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
KUZNECOV A. G., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
MATVEENKO V. P., Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician of RAS; Institute of Continuous Media Mechanics, UrD RAS, Perm, Russia;

MAHNEV A. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS;
PAPKOVA I. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
PESTRENIN V. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
POLOSKOV I. E., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
RUSAKOV S. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
SAVCHIN V. M., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;
SELETKOV I. P., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
TRUSOV P. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
TURIN S. F., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
HACHAI M. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of RAS, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS, Yekaterinburg, Russia;
HENNER E. K., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAO; Perm State University, Perm, Russia;
FAZULLIN Z. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
CHERMNYH V. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia;
CHERNIKOV A. V., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
CHINENOVA V. N., Candidate of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
SHAHMAMETOVA G. R., Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
SHVARTS K. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
UMAGULOV M. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
YAKOVLEV V. I., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
YASNICKIY L. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia.

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor). Certificate of registration of the mass media PI No. FS 77 - 66787 dated 08.08.2016.

The journal is included in the national information and analytical system "Russian Science Citation Index" (eLIBRARY ID 28484).

С о д е р ж а н и е

«Математика»

- Ахмедова Ж.Б.** Об одной задаче управления переменной структурой с дробными производными Капуто..... 5
- Юмагулов М.Г., Васенина Н.А.** Спектральные свойства операторов системы "реакция-диффузия" и признаки бифуркаций..... 17
- Чень М., Махнёв А.А., Климин В.С.** Об автоморфизмах графов с массивами пересечений $\{44,40,12; 1,5,33\}$ и $\{48,35,9; 1,7,40\}$. 26

«Механика»

- Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С.** Системы управления с тиристорными преобразователями..... 34
- Макеев Н.Н.** Движение гиростата вокруг центра инерции в полувеклидовом пространстве..... 42

«Компьютерные науки и информатика»

- Бузмакова М.М., Воробьёв Е.А.** Моделирование распространения сетевого вируса в локальной компьютерной сети методами теории перколяции..... 54
- Панферова Е.В., Матюшин Р.А.** Сравнительная оценка методов кластеризации в работе с большими данными..... 61
- Информация для авторов..... 68

C o n t e n t s

«Mathematics»

- Ahmedova Zh. B.** On one Control Problem of a Variable Structure With Fractional Caputo Derivatives..... 5
- Yumagulov M. G., Vassenina N. A.** Spectral Properties of the "Reaction-Diffusion" System Operators and Bifurcations Signs..... 17
- Chen M., Makhnev A. A., Klimin V. S.** About Automorphisms of Graphs With Intersection Arrays $\{44,40,12; 1,5,33\}$ and $\{48,35,9; 1,7,40\}$ 26

«Mechanics»

- Ivanov G. G., Alferov G. V., Korolev V. S.** Control Systems With Thyristor Converters..... 34
- Makeev N. N.** The Gyrostat Motion Around the Inertia Center in the Semi-Euclidean Space..... 42

«Computer Science»

- Buzmakova M. M., Vorobiev E. A.** A Net Virus Spreading in a Local Computer Network Modeling With Using Percolation Theory Methods..... 54
- Panferova E. V., Matushin R. A.** Comparative Evaluation of Clustering Methods in Working With Big Data..... 61
- Information for authors 68

«Математика»

Научная статья

УДК 517.977.56

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-5-16

**Об одной задаче управления переменной структурой
с дробными производными Капуто****Жаля Билал кызы Ахмедова**

Бакинский государственный университет, г. Баку, Азербайджан

Институт Систем управления НАН Азербайджана, г. Баку, Азербайджан

jaleahmadova23@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления с переменной структурой, описываемая в различных отрезках времени различными обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями дробного порядка. Применяя аналог метода приращений, доказано необходимое условие оптимальности первого порядка. В случае выпуклости областей управления доказано линеаризованное условие максимума, а при открытости областей управления получен аналог уравнения Эйлера.

Ключевые слова: задача оптимального управления; функционал качества; функция Гамильтона–Понтрягина; аналог принципа максимума Л.С. Понтрягина; необходимое условие оптимальности; допустимое управление, линеаризованное условие максимума, аналог уравнения Эйлера

Для цитирования: Ахмедова Ж.Б. Об одной задаче управления переменной структурой с дробными производными Капуто // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 5–16. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-5-16.

Статья поступила в редакцию 08.04.2024; одобрена после рецензирования 25.05.2024; принята к публикации 11.06.2024.

«Mathematics»

Research article

**On one Control Problem of a Variable Structure
With Fractional Caputo Derivatives****Zhalya B. Ahmedova**

Baku State University, Baku, Azerbaijan

Institute of control system of the National academy of sciences of Azerbaijan, Baku, Azerbaijan

jaleahmadova23@gmail.com

Abstract. We consider an optimal control problem with a variable structure, described in different time intervals by various ordinary nonlinear fractional differential equations. Using an analogue of the incremental method, a necessary condition for first-order optimality is proved. In the case of convex control domains, a linearized maximum condition is proved, and in the case of open control domains, an analogue of the Euler equation is obtained.

Keywords: optimal control problem; quality functionality; Hamilton-Pontryagin function; analogue of the maximum principle of L.S. Pontryagin; necessary condition for optimality; admissible control, linearized maximum condition, analogue of Euler's equation

For citation: Ahmedova, Zh. B. (2024), "On one Control Problem of a Variable Structure With Fractional Caputo Derivatives", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(65), pp. 5-16. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-5-16.



Эта работа © 2024 Ахмедова Ж.Б. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

The article was submitted 08.04.2024; approved after reviewing 25.05.2024; accepted for publication 11.06.2024.

Введение

Задачи оптимального управления, описываемые различными дифференциальными, интегро-дифференциальными уравнениями с переменной структурой, или же задачи оптимального управления многоэтапными процессами или же задачи оптимального управления, описываемые различными дифференциальными, интегро-дифференциальными уравнениями постоянной структурой, широко исследованы. В этом направлении можно отметить работы [1–4].

В работе [5] рассмотрена одна задача оптимального управления с переменной структурой, но многоточечным функционалом качества. При различных предположениях на параметры рассматриваемой задачи доказаны аналоги принципа максимума Л.С. Понтрягина, линеаризованного условия максимума и аналог уравнения Эйлера.

Многочисленные свойства дробных операторов вызвали в последние годы большой интерес к дробному исчислению, а также к широкому кругу приложений, связанных моделированием областей подобных физических проблем. В последние годы особенно широко применяются дробные производные Римана–Лиувилля и Капуто. Простота применения этих производных привлекла внимание многих ученых. К настоящему времени задачи оптимального управления, описываемые различными дифференциальными уравнениями с дробными производными, интенсивно исследуются (см. например, [6, 7]).

В работах, например [6–9], изучены различные задачи оптимального управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с дробными производными.

В работе [10] исследована задача оптимального управления, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто, где функционал качества является многоточечным функционалом. Установлен аналог принципа максимума Понтрягина.

В предлагаемой работе рассмотрена дробная задача оптимального управления с переменной структурой, описываемой двумя системами дифференциальных уравнений.

Получен аналог принципа максимума Понтрягина.

В случае выпуклых областей управления доказан линеаризованный принцип максимума, а в случае открытости областей управления получен аналог уравнения Эйлера.

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается системой нелинейных уравнений:

$${}^{C_0}D_t^\alpha x = f(t, x, u), t \in T_1 = [t_0, t_1], \quad (1)$$

$${}^{C_1}D_t^\alpha y = g(t, y, v), t \in T_2 = [t_1, t_2] \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0, \quad (3)$$

$$y(t_1) = G(x(t_1)), \quad (4)$$

где

$${}^{C_0}D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{1 + \alpha - n}} d\tau,$$

$$n = [\alpha] + 1, \alpha \in R_+$$

левая дробная производная Капуто [9, 11, 12].

Здесь $\alpha \in [0, 1]$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)'$ – состояния управляемого объекта, $x(t) \in C^n([t_0, t_1])$, $y(t) \in C^n([t_1, t_2])$, x_0 – заданный постоянный вектор, $f(t, x, u) \left((g(t, y, v)) \right)$ – заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по x (y), $G(x)$ – заданная непрерывно-дифференцируемая m -мерная вектор-функция, $u(t)$ и $v(t)$ – соответственно r и q -мерные кусочно-непрерывные (с конечным числом точек разрыва первого рода) вектор-функции, управляющих воздействий, принимающие свои значения из заданных непустых и ограниченных множеств U и V , т.е.

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, t \in T_1, \\ v(t) &\in V \subset R^q, t \in T_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Требуется минимизировать следующий функционал качества:

$$J(u, v) = \varphi_1(x(t_1)) + \varphi_2(y(t_2)), \quad (6)$$

определенный на решениях задачи (1)–(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями.

Здесь $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ – заданные непрерывно-дифференцируемые скалярные функции.

Пару $(u^o(t), v^o(t))$, удовлетворяющую вышеприведенным свойствам, назовем допустимым управлением.

2. Вычисление приращения функционала качества

Пусть $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ – некоторый фиксированный, а $(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t), \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t), \bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta y(t))$ – произвольный допустимые процессы.

Тогда приращение функционала качества записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta J(u^o, v^o) &= J(\bar{u}, \bar{v}) - J(u^o, v^o) = \\ &= [\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1))] + \\ &\quad + [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))]. \end{aligned} \quad (7)$$

Ясно, что $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ является решением следующей задачи:

$${}_t^C D_t^\alpha \Delta x(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x^o(t), u^o(t)), \quad (8)$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \quad (9)$$

$${}_t^C D_t^\alpha \Delta y(t) = g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t, y^o(t), v^o(t)), \quad (10)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1)). \quad (11)$$

Пусть $\psi(t)$ и $p(t)$ пока произвольные n и m -мерные, соответственно, вектор-функции.

Умножая обе стороны уравнений (8) и (10) скалярно на $\psi(t)$ и $p(t)$, соответственно, и интегрируя обе стороны полученных соотношений по t от t_0 до t_1 и от t_1 до t_2 соответственно, введя аналоги функции Гамильтона–Понтрягина следующим образом:

$$H(t, x, u, \psi) = \psi' f(t, x, u),$$

$$M(t, y, v, p) = p' g(t, y, v),$$

далее, применяя формулу интегрирования по частям для интегралов Римана–Лиувилля [8, 9], а также учитывая условие (9), получим

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \psi'(t) {}_t^C D_t^\alpha \Delta x(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t) \Delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t) \Delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ &\quad - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) - \\ &\quad - {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_0) \Delta x(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ &\quad - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) - \\ &\quad - {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_0) \Delta x(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ &\quad - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] dt + \\ &\quad + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) - \\ &\quad - {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_0) \Delta x(t_0) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t) \Delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_1} = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ &+ {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) + {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_0) \Delta x(t_0) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ &+ {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ &\quad - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогично получим

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} p'(t) {}_t^C D_t^\alpha \Delta y(t) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} {}_t^C D_{t_2}^\alpha p'(t) \Delta y(t) dt + \\ &+ {}_t^C D_{t_2}^{1-\alpha} p(t_2) \Delta y(t_2) + {}_t^C D_{t_2}^{1-\alpha} p(t_1) \Delta y(t_1) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} {}_t^C D_{t_2}^\alpha p'(t) \Delta y(t) dt + \\ &+ {}_t^C D_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_2) \Delta y(t_2) + \\ &+ {}_t^C D_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_1) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ &\quad - M(t, y^o(t), v^o(t), p(t))] dt. \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (12), (13) из формулы приращения (7) получим, что

$$\begin{aligned} \Delta J(u, v) &= [\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi_1(x^o(t_1))] + \\ &+ [\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2))] + \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} {}_t^C D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ &+ {}_t^C D_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) - \\ &- \int_{t_0}^{t_1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ &\quad - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] dt + \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} {}_t^C D_{t_2}^\alpha p'(t) \Delta y(t) dt + \\ &+ {}_t^C D_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_2) \Delta y(t_2) + \end{aligned}$$

$$+ {}_t I_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_1) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t))] dt. \quad (14)$$

Используя формулу Тейлора, получим, что

$$\varphi_1(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) = \varphi'_x(x^o(t_1)) \Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|), \quad (15)$$

$$\varphi_2(\bar{y}(t_2)) - \varphi_2(y^o(t_2)) = \varphi'_y(y^o(t_2)) \Delta y(t_2) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned} & H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) = \\ & = H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) + \\ & + H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) = \\ & = H'_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) \Delta x(t) + o_3(\|\Delta x(t)\|) + H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ & - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) = \\ & = H'_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) \Delta x(t) + H'_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) \Delta x(t) - \\ & - H'_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) \Delta x(t) + \\ & + H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) + \\ & + o_3(\|\Delta x(t)\|), \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) = \\ & = M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) + M(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ & - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) = \\ & = M'_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) \Delta y(t) + o_4(\|\Delta y(t)\|) + \\ & + M(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) = \\ & = M'_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) \Delta y(t) + M'_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) \Delta y(t) - \\ & - M'_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) \Delta y(t) + \\ & + M(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) + \\ & + o_4(\|\Delta y(t)\|). \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь $\|\alpha\|$ норма вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)'$, определяемая формулой $\|\alpha\| =$

$\sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, а $o(\alpha)$, есть величина более высокого порядка чем α , т. е. $\frac{o(\alpha)}{\alpha} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Тогда формулу приращения (14) можно записать как

$$\begin{aligned} & \Delta J(u, v) = \varphi'_x(x^o(t_1)) \Delta x(t_1) + \varphi'_y(y^o(t_2)) \Delta y(t_2) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + \\ & + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) + \int_{t_0}^{t_1} {}_t D_{t_1}^\alpha \psi'(t) \Delta x(t) dt + \\ & + {}_t I_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) \Delta x(t_1) - \int_{t_0}^{t_1} H'_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)) \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))] dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [H_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))]' \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x(t)\|) dt + \int_{t_1}^{t_2} {}_t D_{t_2}^\alpha p'(t) \Delta y(t) dt + \\ & + {}_t I_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_2) \Delta y(t_2) + {}_t I_{t_2}^{1-\alpha} p'(t_1) [G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))] - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t))] dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} M'_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t)) \Delta y(t) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta y(t)\|) dt - \int_{t_1}^{t_2} [M_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - M_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t))]' \Delta y(t) dt. \quad (19) \end{aligned}$$

Ведем обозначение:

$$N(p(t_1), x) = p'(t_1) G(x).$$

Используя формулу Тейлора, имеем

$$N(p(t_1), \bar{x}(t_1)) - N(p(t_1), x^0(t_1)) = N'_x(p(t_1), x^0(t_1))\Delta x(t_1) + o_5(\|\Delta x(t_1)\|).$$

Предположим, что векторы функций $\psi(t)$ и $p(t)$ являются решениями следующей системы уравнений:

$${}_t^c D_{t_1}^\alpha \psi(t) = -H_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t)), \quad (20)$$

$${}_t I_{t_1}^{1-\alpha} \psi(t_1) = -\varphi_x(x(t_1)) + N'_x(p(t_1), x^0(t_1)), \quad (21)$$

$${}_t^c D_{t_2}^\alpha p(t) = -M_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t)), \quad (22)$$

$${}_t I_{t_2}^{1-\alpha} p(t_2) = -\varphi_y(y(t_2)). \quad (23)$$

Задачу (20)–(23) назовем сопряженной системой для рассматриваемой задачи.

Учитывая систему (20)–(23) из (19), получим, что

$$\begin{aligned} \Delta J(u, v) = & - \int_{t_0}^{t_1} [H(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ & - H(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))] dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ & - M(t, y^0(t), v^0(t), p(t))] dt - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} [H_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ & - H_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))] \Delta x(t) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} [M_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ & - M_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t))] \Delta y(t) dt + \\ & + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - \\ & - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x(t)\|) dt - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta y(t)\|) dt - \\ & - o_5(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \Delta_{\bar{u}} H[t, \psi] & \equiv H(t, x(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ & - H(t, x(t), u(t), \psi(t)), \\ \Delta_{\bar{v}} M[t, p] & \equiv M(t, y(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ & - M(t, y(t), v(t), p(t)). \end{aligned}$$

Тогда приращение функционала качества может быть представлено в виде

$$J(u(t) + \Delta u(t), v(t) + \Delta v(t)) -$$

$$\begin{aligned} -J(u(t), v(t)) = & - \int_{t_0}^{t_1} \Delta_{\bar{u}} H[t, \psi] dt - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}} M[t, p] dt + \\ & + \eta_1(\Delta u, \Delta v) + \eta_2(\Delta u, \Delta v). \quad (24) \end{aligned}$$

Здесь $\eta_1(\Delta u, \Delta v)$ и $\eta_2(\Delta u, \Delta v)$ остаток формулы приращения, т.е.

$$\begin{aligned} \eta_1(\Delta u, \Delta v) = & - \int_{t_0}^{t_1} [H_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ & - H_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))] \Delta x(t) dt + \\ & + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x(t)\|) dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2(\Delta u, \Delta v) = & - \int_{t_1}^{t_2} [M_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ & - M_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t))] \Delta y(t) dt + \\ & + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta y(t)\|) dt - \\ & - o_5(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned}$$

Пусть $\Delta u(t) \neq 0, \Delta v(t) = 0$. Тогда получим

$${}_t^c D_t^\alpha \Delta x(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - f(t, x^0(t), u^0(t)), \quad (25)$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \quad (26)$$

$${}_t^c D_t^\alpha \Delta y(t) = g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - g(t, y^0(t), v^0(t)), \quad (27)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)). \quad (28)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Delta x(t) & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \\ & \times \int_{t_0}^t \frac{f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - f(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau))}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} [f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - \\ & - f(\tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) + \\ & + f(\tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau)) - f(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau))] d\tau = \\ & = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} [f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - \end{aligned}$$

$$-f(\tau, x^0(\tau), \bar{u}(\tau))]d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times \Delta_{\bar{u}} f(\tau, x^0(\tau), u^0(\tau))d\tau, \quad (29)$$

$$\Delta y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \\ \times \int_{t_1}^t \frac{g(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - g(\tau, y^0(\tau), v^0(\tau))}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau \\ + G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} [g(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - \\ - g(\tau, y^0(\tau), \bar{v}(\tau)) + \\ + g(\tau, y^0(\tau), \bar{v}(\tau)) - g(\tau, y^0(\tau), v^0(\tau))]d\tau + \\ + G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)) = \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} [g(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - \\ - g(\tau, y^0(\tau), \bar{v}(\tau))]d\tau + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \Delta_{\bar{v}} g(\tau, y^0(\tau), v^0(\tau))d\tau \\ + G(\bar{x}(t_1)) - G(x^0(t_1)). \quad (30)$$

Так как, в силу сделанных предположений, функция $f(t, x, u)$ удовлетворяет условию Липшица по x , то, переходя к норме в (29), получаем, что

$$\|\Delta x(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times \|f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - f(\tau, x(\tau), \bar{u}(\tau))\|d\tau + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|\Delta_{\bar{u}} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\|d\tau \\ \leq L_1 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|\Delta x(\tau)\|d\tau + \\ + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times \|\Delta_{\bar{u}} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\|d\tau, \quad (31)$$

где $L_1 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

А из (30) получаем, что

$$\|\Delta y(t)\| \leq L_2 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|\Delta y(\tau)\|d\tau +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times \|\Delta_{\bar{v}} g(\tau, y^0(\tau), v^0(\tau))\|d\tau + \\ + L_3 \|\Delta x(t_1)\|, \quad (32)$$

где $L_2, L_3 = \text{const} > 0$ некоторые постоянные. Применяя к неравенству (31) аналог леммы Гронуолла–Беллмана [13], приходим к оценке

$$\|\Delta x(t)\| \leq L_4 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \times \\ \times \|\Delta_{\bar{u}} f(\tau, x(\tau), u(\tau))\|d\tau. \quad (33)$$

Аналогично из (32) получим

$$\|\Delta y(t)\| \leq \\ \leq L_5 \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} [\|\Delta y(\tau)\| + \right. \\ \left. + \|\Delta v(\tau)\|]d\tau + \|\Delta x(t_1)\| \right], \quad (34)$$

где $L_4, L_5 = \text{const} > 0$ некоторые постоянные.

Теперь пусть $\Delta u(t) = 0$, а $\Delta v(t) \neq 0$. При этом получим, что $\Delta x(t) = 0$, а $\Delta y(t)$ является решением задачи

$${}_t^c D_t^\alpha \Delta y(t) = g(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t)) - \\ - g(t, y(t), v(t)), \quad (35)$$

$$\Delta y(t_1) = 0. \quad (36)$$

По аналогии с доказательством оценки (34) доказывается справедливость оценки

$$\|\Delta y(t)\| \leq \\ \leq L_6 \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|\Delta_{\bar{v}} g[\tau]\|d\tau \quad (37)$$

где $L_6 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

3. Основной результат

Пусть $\theta \in [t_0, t_1)$ произвольная точка непрерывности управляющей функции $u(t)$, $w_1 \in U$ – произвольный вектор, а $\varepsilon > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\theta + \varepsilon < t_1$.

Специальное приращение управляющей функции $u(t)$ определим по формуле

$$\Delta u(t; \varepsilon) = \begin{cases} w_1 - u(t), & t \in [\theta, \theta + \varepsilon), \\ 0, & t \in T_1 \setminus [\theta, \theta + \varepsilon). \end{cases} \quad (38)$$

Пусть $(\Delta x(t; \varepsilon), \Delta y(t; \varepsilon))$ – специальное приращение траектории, отвечающее специальному приращению (38) управляющей функции $u(t)$.

Тогда из оценок (33), (34) следует, что

$$\begin{aligned}\|\Delta x(t; \varepsilon)\| &\leq L_7 \varepsilon, t \in T_1, \\ \|\Delta y(t; \varepsilon)\| &\leq L_8 \varepsilon, t \in T_2,\end{aligned}\quad (39)$$

где $L_7, L_8 = \text{const}$ некоторые положительные постоянные.

Принимая во внимание формулу (38) и оценки (39), из формулы приращения (24) получаем, что

$$\begin{aligned}J(u(t) + \Delta u(t; \varepsilon), v(t)) - J(u(t), v(t)) = \\ = -\varepsilon \Delta_{w_1} H[\theta, \psi] + o(\varepsilon).\end{aligned}\quad (40)$$

Теперь специальное приращение управляющей функции $v(t)$ определим по формуле

$$\begin{aligned}\Delta v(t; \mu) = \\ = \begin{cases} w_2 - v(t), & t \in [\xi, \xi + \mu), \\ 0, & t \in T_2 \setminus [\xi, \xi + \mu). \end{cases}\end{aligned}\quad (41)$$

Здесь $w_2 \in V$ — произвольный вектор, $\xi \in [t_1, t_2]$ произвольная точка непрерывности управляющей функции $v(t)$, а $\mu > 0$ произвольное достаточно малое число, такое, что $\xi + \mu < t_2$.

Ясно, что в этом случае специальное приращение $\Delta x(t; \mu)$ траектории $x(t)$ равно нулю, а для $\Delta y(t; \mu)$, т.е. для специального приращения траектории $y(t)$, отвечающее приращению (41) в силу оценки (37) имеет место оценка

$$\|\Delta y(t; \mu)\| \leq L_9 \mu, t \in T_2, \quad (42)$$

где $L_9 = \text{const} > 0$ некоторая постоянная.

Учитывая формулу (41) и оценку (42), из формулы приращения (24) получаем, что

$$\begin{aligned}J(u(t), v(t) + \Delta v(t; \mu)) - J(u(t), v(t)) = \\ = -\mu \Delta_{w_2} M[\xi, p] + o(\mu).\end{aligned}\quad (43)$$

Из разложений (40), (43) следует

Теорема 1. Для оптимальности допустимого управления $(u(t), v(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\begin{aligned}\max_{w_1 \in U} H(\theta, x(\theta), w_1, \psi(\theta)) = \\ = H(\theta, x(\theta), u(\theta), \psi(\theta)), \\ \max_{w_2 \in V} M(\xi, y(\xi), w_2, p(\xi)) = \\ = M(\xi, y(\xi), v(\xi), p(\xi))\end{aligned}$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $\xi \in [t_1, t_2]$ соответственно.

Теперь предположим, что множества U, V выпуклы, а $f(t, x, u), g(t, y, v)$ имеют непрерывные производные также по u, v соответственно.

Здесь и в дальнейшем мы используем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H[t, \psi]}{\partial u} &= \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \psi(t))}{\partial u}, \\ \frac{\partial M[t, p]}{\partial v} &= \frac{\partial M(t, y(t), v(t), p(t))}{\partial v}.\end{aligned}$$

Тогда, по аналогии с доказательством формулы приращения (24), доказывается, что

$$\begin{aligned}J(\bar{u}, v) - J(u, v) = \\ = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H[t, \psi]}{\partial u} \Delta u(t) dt + \eta_3(\Delta u, \Delta v),\end{aligned}\quad (44)$$

$$\begin{aligned}J(u, \bar{v}) - J(u, v) = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial M[t, p]}{\partial v} \Delta v(t) dt + \eta_4(\Delta u, \Delta v).\end{aligned}\quad (45)$$

Здесь $\eta_3(\Delta u, \Delta v)$ и $\eta_4(\Delta u, \Delta v)$ являются остаточными членами формулы приращения функционала, т.е.

$$\begin{aligned}\eta_3(\Delta u, \Delta v) = \\ = - \int_{t_0}^{t_1} [H_x(t, x^0(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - \\ - H_x(t, x^0(t), u^0(t), \psi(t))]' \Delta x(t) dt + \\ + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) - \int_{t_0}^{t_1} o_3(\|\Delta x(t)\|) dt, \\ \eta_4(\Delta u, \Delta v) = \\ = - \int_{t_1}^{t_2} [M_y(t, y^0(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ - M_y(t, y^0(t), v^0(t), p(t))]' \Delta y(t) dt + \\ + o_2(\|\Delta y(t_2)\|) - \int_{t_1}^{t_2} o_4(\|\Delta y(t)\|) dt - \\ - o_5(\|\Delta x(t_1)\|).\end{aligned}$$

Далее из оценок (31) и (32) получаем, что

$$\begin{aligned}\|\Delta x(t)\| &\leq L_{10} \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta u(t)\| dt, \\ \|\Delta y(t)\| &\leq L_{11} \int_{t_0}^{t_1} \|\Delta v(t)\| dt,\end{aligned}\quad (46)$$

где $L_i = \text{const} > 0, i = 10, 11$ некоторые постоянные.

А из оценки (37) получаем, что

$$\|\Delta y(t)\| \leq L_{12} \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta v(t)\| dt, \quad (47)$$

где $L_{12} = \text{const} > 0$ – некоторая постоянная.

Пусть $w_1(t) \in U$ – произвольная допустимая управляющая функция, а $\varepsilon \in [0,1]$ – произвольное число.

Тогда специальное приращение управляющей функции $u(t)$ можно определить по формуле

$$\Delta u(t; \varepsilon) = \varepsilon[w_1(t) - u(t)], t \in T_1. \quad (48)$$

Через $(\Delta x(t; \varepsilon), \Delta y(t; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение траектории $(x(t), y(t))$, отвечающее специальному приращению (48) управляющей функции $u(t)$.

Тогда, учитывая оценки (46) и формулу (44) из частичной формулы приращения, получаем, что

$$\begin{aligned} J(u(t) + \Delta u(t; \varepsilon), v(t)) - J(u(t), v(t)) &= \\ &= -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H[t, \psi]}{\partial u} [w_1(t) - u(t)] dt + \\ &\quad + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (49)$$

Если специальное приращение $\Delta v(t; \mu)$ допустимой управляющей функции $v(t)$ определим по формуле

$$\Delta v(t; \mu) = \mu[w_2(t) - v(t)],$$

где $\mu \in [0,1]$ произвольное число, а $w_2(t) \in V$ произвольная допустимая управляющая функция, то, учитывая также оценку (47) из формулы приращения (45), получаем, что

$$\begin{aligned} J(u(t), v(t) + \Delta v(t; \mu)) - J(u(t), v(t)) &= \\ &= -\mu \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial M[t, p]}{\partial v} [w_2(t) - v(t)] dt + \\ &\quad + o(\mu). \end{aligned} \quad (50)$$

С помощью разложений (49) и (50) доказывается

Теорема 2 (линеаризованный принцип максимума).

Если множества U и V открыты, а вектор-функции $f(t, x, u)$ и $g(t, y, v)$ непрерывно-дифференцируемы по (x, u) и (y, v) соответственно, то для оптимальности допустимого управления $(u(t), v(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H[t, \psi]}{\partial u} [w_1(t) - u(t)] dt &\leq 0, \\ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial M[t, p]}{\partial v} [w_2(t) - v(t)] dt &\leq 0 \end{aligned}$$

выполнялись для всех $w_1(t) \in U, t \in T_1$ и $w_2(t) \in V, t \in T_2$ соответственно.

Предположим, что множества U и V являются открытыми множествами.

В этом случае, используя формулы приращения (44) и (45), в случае открытости областей управления U и V получается аналог уравнения Эйлера, а также аналог условия Лежандра–Клебша.

Для этого вычислим первую вариацию функционала качества.

Пусть ε достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta u(t) \in R^r, t \in T_1$ произвольная r -мерная дискретная и ограниченная вектор-функция (вариация управляющей функции $u(t)$). Специальное приращение управляющих функций $u(t)$ и $v(t)$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u(t; \varepsilon) = \varepsilon \delta u(t), \\ \Delta v(t; \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (51)$$

Далее из формул (9), (11) получим, что

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \left[\frac{f_x(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \Delta x(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \Delta u(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \right] d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \times \\ &\quad \times o_6(\|\Delta x(\tau)\| + \|\Delta u(\tau)\|) d\tau, \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \Delta y(t) &= \\ &= G_x(x^o(t_1)) \Delta x(t_1) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t \frac{g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \Delta y(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t - \tau)^{\alpha-1} o_7(\|\Delta y(\tau)\|) d\tau + \\ &\quad + o_8(\|\Delta x(t_1)\|). \end{aligned} \quad (53)$$

Через $(\Delta x(t; \varepsilon), \Delta y(t; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение траектории $(x(t), y(t))$, отвечающее специальному приращению (51), и определим их следующим образом:

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon; t), \quad (54)$$

$$\Delta y_\varepsilon(t) = \varepsilon \delta y(t) + o(\varepsilon; t). \quad (55)$$

Здесь $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$ вариации траекторий (см., например, [14]), которые являются решениями, соответственно, следующих задач,

$$\begin{aligned} & \varepsilon \delta x(t) + o(\varepsilon, t) = \\ &= \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \left[\frac{f_x(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \Delta x(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \Delta u(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \right] d\tau + \\ & \quad + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{\alpha-1} \times \\ & \quad \times o_6(\|\Delta x(\tau)\| + \|\Delta u(\tau)\|) d\tau + o(\varepsilon, t), \\ & \varepsilon \delta y(t) + o(\varepsilon, t) = \varepsilon G_x(x^o(t_1)) \delta x(t_1) + \\ & + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t \frac{g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \Delta y(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau + \\ & + \frac{\varepsilon}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t (t - \tau)^{\alpha-1} o_7(\|\Delta y(\tau)\|) d\tau + \\ & + o_8(\|\Delta x(t_1)\|) + o(\varepsilon, t). \end{aligned}$$

Разделив обе стороны этих соотношений на $o(\varepsilon, t)$ и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ получим, что вектор-функции $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$ удовлетворяют соответственно соотношениям

$$\delta x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \left[\frac{f_x(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta x(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} + \right. \\ \left. + \frac{f_u(\tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) \delta u(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} \right] d\tau, \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & \delta y(t) = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^t \frac{g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \delta y(\tau)}{(t - \tau)^{1-\alpha}} d\tau + \\ & + G_x(x^o(t_1)) \delta x(t_1). \end{aligned} \quad (57)$$

Из интегральных уравнений (56) и (57) получаем, что $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$ является решением следующих линейных неоднородных дифференциальных систем уравнений дробного порядка:

$${}^C D_t^\alpha \delta x(t) = f_x(t, x^o(t), u^o(t)) \delta x(t) + f_u(t, x^o(t), u^o(t)) \delta u(t), \quad (58)$$

$$\delta x(t_0) = 0. \quad (59)$$

$${}^C D_t^\alpha \delta y(t) = G_x(x^o(t_1)) \delta x(t_1) + g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau)) \delta y(\tau), \quad (60)$$

$$\delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1)). \quad (61)$$

Уравнения (56) и (57) и задачи Коши (58)–(59) и (60)–(61) называются *уравнениями в вариациях для рассматриваемой задачи*.

А теперь, используя разложения (54) и (55) из формулы приращения (24), получим, что

$$\begin{aligned} & J(u^o(t) + \varepsilon \delta u(t), v^o(t)) - J(u^o(t), v^o(t)) = \\ &= -\varepsilon \int_{t_0}^{t_1} H'_u(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) dt + \\ & \quad + o(\varepsilon). \end{aligned} \quad (62)$$

А теперь специальное приращение допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$ определим по формуле

$$\begin{cases} \Delta u(t; \mu) = 0, \\ \Delta v(t; \mu) = \mu \delta v(t), t \in T_2. \end{cases} \quad (63)$$

Здесь μ – достаточно малое по абсолютной величине число, а $\delta v(t) \in R^q$, $t \in T_2$ произвольная q -мерная дискретная и ограниченная вектор-функция (вариация управляющей функции $v(t)$).

Далее через $(\Delta x_\mu(t), \Delta y_\mu(t))$ обозначим специальное приращение траектории $(x^o(t), y^o(t))$, отвечающее специальному приращению (63) допустимого управления $(u^o(t), v^o(t))$.

Ясно, что в этом случае $\Delta x_\mu(t) = 0$, а специальное приращение $\Delta y_\mu(t)$ траектории $y^o(t)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} \Delta y_\mu(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \\ & \times \int_{t_1}^t (t - s)^{\alpha-1} [g_y(t, s, y^o(s), v^o(s)) \Delta y_\mu(s) + \\ & + g_v(t, s, y^o(s), v^o(s)) \Delta v(s; \mu)] ds + o(\varepsilon; \mu). \end{aligned}$$

Используя выше использованные рассуждения, имеем

$$\Delta y_\mu(t) = \mu \delta z(t) + o(t; \mu), \quad (64)$$

где $\delta z(t)$ является решением следующего вариационного уравнения:

$$\delta z(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times$$

$$\times \int_{t_1}^t (t-s)^{\alpha-1} [g_y(t, s, y^o(s), v^o(s)) \delta y_\mu(s) + g_v(t, s, y^o(s), v^o(s)) \delta v(s; \mu)] ds. \quad (65)$$

Используя формулы (64), (65) из формулы приращения функционала (24) получим

$$\begin{aligned} J(u(t), v(t) + \Delta v(t; \mu)) - J(u(t), v(t)) = \\ = -\mu \int_{t_1}^{t_2} M'_u(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \delta v(t) dt + \\ + o(\mu). \end{aligned} \quad (66)$$

Из разложений (62), (66) следует, что первые вариации функционала качества (6) имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \delta^1 J(u^o, v^o; \delta u) = \\ = - \int_{t_0}^{t_1} H'_u(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \delta u(t) dt, \end{aligned} \quad (67)$$

$$\begin{aligned} \delta^1 J(u^o, v^o, \delta v) = \\ = - \left[\int_{t_1}^{t_2} M'_u(t, y^o(t), v^o(t), p^o(t)) \delta v(t) dt. \right] \end{aligned} \quad (68)$$

Учитывая основной результат вариационного исчисления (см., например, [14, 15]), получаем, что для оптимальности допустимого управления $(u_1(t), u_2(t))$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы соотношения

$$\delta^1 J(u, v; \delta u) = 0, \quad (69)$$

$$\delta^1 J(u, v; \delta v) = 0, \quad (70)$$

выполнялись для всех δu и δv соответственно.

Тождества (69) и (70) являются неявными необходимыми условиями оптимальности первого порядка.

Используя произвольность δu и δv , из тождеств (69) и (70), получаем справедливость условия оптимальности первого порядка, типа аналога уравнения Эйлера [14, 15].

Теорема 3 (аналог уравнения Эйлера). Если множества U и V открыты, то для оптимальности допустимого управления $(u(t), v(t))$ необходимо, чтобы соотношения

$$\frac{\partial H[\theta, \psi]}{\partial u} = 0, \quad (71)$$

$$\frac{\partial M[\xi, p]}{\partial v} = 0, \quad (72)$$

выполнялись для всех $\theta \in [t_0, t_1]$ и $\xi \in [t_1, t_2]$ соответственно.

Каждое допустимое управление, которое является решением уравнения Эйлера, называется *классической экстремалью*. Как

видно уравнения Эйлера (71)–(72), конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности при сделанных предположениях и являются необходимым условием оптимальности первого порядка.

Заключение

В статье рассматривается одна двухэтапная (с переменной структурой) задача оптимального управления, описываемая в различных отрезках времени различными обыкновенными нелинейными дифференциальными уравнениями дробным производным Капуто.

С помощью модифицированного варианта метода приращений, в рассматриваемой задаче построена формула приращения первого порядка минимизируемого функционала, учитывая его особенности и с помощью специальной вариации управления $(u^o(t), v^o(t))$ вычислена его первая вариация и, используя ее, доказано необходимое условие оптимальности первого порядка.

В случае выпуклости областей управления для рассматриваемой задачи управления доказано линеаризованное условие максимума, а при открытости областей управления получен аналог уравнения Эйлера.

Список источников

1. Мансимов К.Б., Рзаева В.Г. Квазиособые управления в задачах оптимального управления, описываемых гиперболическими интегро-дифференциальными уравнениями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 1(48). С. 13–20.
2. Габелко К.Н. Оптимизация многоступенчатых процессов. Аннотация дисс. на конкурс уч. канд. физ.-мат. наук. Иркутск, 1975. 17 с.
3. Масталиев Р.О. О задаче оптимального управления линейной системой с переменной структурой // Владикавказский математический журнал. 2016. Вып. 1. С. 63–70.
4. Муслумов В.Б. Условия оптимальности в одной системе с распределенными параметрами: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 2006. 21 с.
5. Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б. Об одной задаче оптимального управления с переменной структурой // Вестник Бакинского гос. университета. Серия физико-математических наук. 2022. № 3. С. 5–16.

6. Постнов С.С. Исследование задач оптимального управления динамическими системами дробного порядка методом моментов: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 2015. 26 с.
7. Bahaa G.M. Fractional optimal control problem for differential system with delay argument // *Advances in Difference Equations*. 2017. № 1. P. 32–51.
8. Agrawal O.P. A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems. *Nonlinear Dynamics*. 2004. № 38. P. 323–337.
9. Ali H.M., Pereira F.L., Gama S.M. A. A new approach to the Pontryagin maximum principle for nonlinear fractional optimal control problems // *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 2016. № 39. P. 3640–3649.
10. Мансимов К.Б., Ахмедова Ж.Б. Аналог принципа максимума Понтрягина в задаче оптимального управления системой дифференциальных уравнений с дробной производной Капуто и многоточечным критерием качества // *Вестник Пермского университета. 2022. Математика. Механика. Информатика. Вып. 3(58). С. 5–10.*
11. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional integrals and derivatives: Theory and applications, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland, 1993. 780 p.
12. Ахмедова Ж.Б. Принцип максимума Понтрягина для одной нелинейной дробной задачи оптимального управления // *Математический вестник Вятского государственного университета*. 2021. № 1(20). С. 5–11.
13. Lin S.Y. Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations // *Journal of Inequalities and Applications*. 2013. No 1.
14. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2011. 256 с.
15. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2018. 384 с.
2. Gabelko, K.N. (1975), "Optimization of multistage processes", *Abstract of the dissertation for the degree of Candidate of Phys.-Mat. Sciences*. Irkutsk, 17 p.
3. Mastaliev, R.O. (2016), "On the problem of optimal control of a linear system with a variable structure" *Vladikavkaz Mathematical Journal*, no. 1, pp. 63-70.
4. Muslumov, V.B. (2006), "Optimality conditions in one system with distributed parameters", *Abstract of dissertation for the degree of Candidate of Phys.-Mat. Sciences*, Baku, 2006, 21 p.
5. Mansimov, K.B. and Ahmedova, J.B. (2022), "About one task of optimal control with a variable structure", *Bulletin of Baku State University, series of physical and mathematical sciences*, no. 3, pp. 5-16.
6. Postnov, S.S. (2015), "Research of the optimum control tasks of the dynamic systems of the fractional order by the method of moments", *Author's abstract of the dissertation for the degree of candidate of physical and mathematical sciences*, Moscow, 26 p.
7. Bahaa, G.M. (2017), "Fractional optimal control problem for differential system with delay argument", *Advances in Difference Equations*, no. 1, pp. 32-51.
8. Agrawal, O.P. (2004), "A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems", *Nonlinear Dynamics*, no. 38, pp. 323–337.
9. Ali H.M., Pereira F.L. and Gama S.M. (2016), "A new approach to the Pontryagin maximum principle for nonlinear fractional optimal control problems", *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, no. 39, pp. 3640-3649.
10. Mansimov, K.B. and Akhmedova, J.B. (2022) "Analog of Pontryagin's maximum principle in the problem of optimal control of the system of differential equations with fractional Caputo derivative and multipoint quality criterion", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(58). pp. 5-10.
11. Samko, S.G., Kilbas, A.A. and Marichev O.I. (1993), *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*, Gordon and Breach Science publishers, Yverdon, Switzerland.
12. Akhmedova, J.B. (2021), "Pontryagin's maximum principle for one nonlinear fractional optimal control problem", *Mathematical Bulletin of Vyatka State University*, no. 1(20), pp. 5-11.

References

13. Lin, S.Y. (2013), "Generalized Gronwall inequalities and their applications to fractional differential equations", *Journal of Inequalities and Applications*, 549, no. 1.
14. Gabasov, R. and Kirillova, F.M. (2011), "Osobyе optimal'nye upravleniya" [Special optimal controls], Librocom, Moscow, Russia.
15. Alekseev, V.M., Tikhomirov, V.M. and Fomin, S.V. (2018), "Optimalnoe upravlenie" [*Optimal control*]. Fizmatlit, Moscow, Russia.

Информация об авторе:

Ж. Б. Ахмедова – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики факультета прикладной математики и кибернетики Бакинского государственного университета (1148, Азербайджан, г. Баку, ул. З. Халилова, 23), AuthorID: 1229288.

Information about the author:

Zhalya B. Ahmedova – Candidate of Sciences (Physical and Mathematical), Associate Professor of the Mathematical Cybernetics Department, the Applied Mathematics and Cybernetics Faculty, Baku State University (23, Z. Khalilov St., Baku, Azerbaijan, 1148), AuthorID: 1229288.

Научная статья

УДК 517.938

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-17-25

Спектральные свойства операторов системы "реакция-диффузия" и признаки бифуркаций

Марат Гаязович Юмагулов¹, Наталья Анатольевна Васенина²

^{1,2}Уфимский университет науки и технологий, г. Уфа, Россия

¹yum_mg@mail.ru

²zhiber.na@gmail.com

Аннотация. В статье рассматриваются дифференциальные уравнения, возникающие при моделировании систем типа "реакция-диффузия". Изучаются вопросы об устойчивости точек равновесия в критических случаях, а также о бифуркациях в окрестностях таких точек. Основное внимание уделяется изучению спектральных свойств операторов линеаризованной задачи. Установлена дискретность спектра, изучены свойства корневых и инвариантных подпространств, предложены формулы для собственных функций. В качестве приложения обсуждаются вопросы о признаках бифуркации кратного равновесия и бифуркации Андронова–Хопфа в окрестностях точек равновесия. Приводятся примеры, иллюстрирующие эффективность предложенных подходов в задачах исследования устойчивости и бифуркаций.

Ключевые слова: система "реакция-диффузия"; матрица диффузии; точка равновесия; устойчивость; бифуркация; собственные значения; граничные условия; линейный оператор

Для цитирования: Юмагулов М.Г., Васенина Н.А. Спектральные свойства операторов системы "реакция-диффузия" и признаки бифуркаций // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 17–25. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-17-25.

Статья поступила в редакцию 30.04.2024; одобрена после рецензирования 18.05.2024; принята к публикации 11.06.2024.

Research article

Spectral Properties of the "Reaction-Diffusion" System Operators and Bifurcations Signs

Marat G. Yumagulov¹, Natalia A. Vasenina²

^{1,2}UFA University of Science and Technology, Ufa, Russia

¹yum_mg@mail.ru

²zhiber.na@gmail.com

Abstract. The article discusses differential equations that arise when modeling reaction-diffusion systems. Questions about the stability of equilibrium points in critical cases, as well as about bifurcations in the vicinity of such points, are studied. The main attention is paid to the linearized problem operators spectral properties study. The spectrum discreteness was established, the root properties and invariant subspaces were studied, and formulas for eigenfunctions were proposed. As an application, questions about the multiple equilibrium bifurcation signs and Andronov–Hopf bifurcation in the vicinity of equilibrium points are discussed. Examples are given to illustrate the proposed approaches effectiveness in studying stability and bifurcations problems.

Keywords: reaction-diffusion system; diffusion matrix; equilibrium point; stability; bifurcation; eigenvalues; boundary conditions; linear operator



Эта работа © 2024 Юмагулов М.Г., Васенина Н.А. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

For citation: Yumagulov, M. G. and Vasenina, N. A. (2024), "Spectral Properties of the "Reaction-Diffusion" System Operators and Bifurcations Signs", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(65), pp. 17-25. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-17-25.

The article was submitted 30.04.2024; approved after reviewing 18.05.2024; accepted for publication 11.06.2024.

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается зависящая от параметра μ система "реакция-диффузия" (см., например, [1–6]), описываемая дифференциальным уравнением

$$\frac{dw}{dt} = f(w, \mu) + D(\mu)\Delta w, \quad w \in R^n, \quad (1)$$

в которой $f(w, \mu)$ – гладкая (непрерывно дифференцируемая) функция переменных w и μ , $D(\mu) = (d_{ij}(\mu))$ – матрица диффузии с положительными элементами, гладко зависящими от μ , Δ -оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$. Уравнение (1) изучается в параллелепипеде $\Omega = \{x: 0 \leq x_1 \leq \pi, 0 \leq x_2 \leq \pi, \dots, 0 \leq x_m \leq \pi\}$ с граничными условиями Неймана:

$$\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что система (1)–(2) имеет стационарное (т.е. не зависящее от времени t) решение $w = v(x, \mu)$, гладко зависящее от x и μ . Функция $w = v(x, \mu)$ является решением краевой задачи

$$f(w, \mu) + D(\mu)\Delta w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3)$$

В частности, если матрица $D(\mu)$ обратима, то функция $w = v(x, \mu)$ будет решением нелинейной краевой задачи Неймана для уравнения Пуассона. Решение $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) будем также называть *точкой равновесия* этой системы.

Если решение $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) не зависит от x , т.е. является функцией вида $w = v(\mu)$, то говорят, что точка равновесия $w = v(\mu)$ является *пространственно однородным* положением равновесия. В противном случае говорят о *пространственно неоднородном* положении равновесия $w = v(x, \mu)$.

Одной из наиболее интересных задач при изучении динамики системы (1)–(2) является задача о бифуркациях в окрестности ее точек равновесия. Этой задаче посвящены исследования многих авторов (см., например, [4–11] и имеющуюся там библиографию). Наиболее типичными здесь являются:

1) *бифуркация кратного равновесия* (когда спектр соответствующей линеаризованной системы проходит через нулевое собственное значение);

2) *бифуркация Андронова–Хопфа* (когда спектр проходит через пару чисто мнимых собственных значений).

Задача анализа динамики системы (1)–(2) в окрестности точки бифуркации (устойчивость возникающих решений, направленность бифуркаций, существование непрерывных ветвей бифуркационных решений и др.) требует проведения детального исследования свойств спектра соответствующей линеаризованной системы. Такие исследования проводились в ряде работ (см., например, [6, 7, 12, 13]). Однако многие возникающие здесь вопросы, на наш взгляд, изучены недостаточно, а некоторые и не обсуждались.

В настоящей работе рассматривается ряд свойств спектра линеаризованной задачи в окрестности точки равновесия $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) при бифуркационных значениях параметра μ . В качестве приложения рассматриваются соответствующие задачи для системы (1)–(2) при $n = 2$ и $n = 3$, т.е. для двух- и трехкомпонентных систем.

2. Вспомогательные сведения

Укажем функциональные пространства, в которых будет изучаться система (1)–(2).

Пусть $L_2(\Omega)$ – это гильбертово пространство вектор-функций $v(x)$, определенных в области Ω . Через $C(\Omega)$ и $C^2(\Omega)$ обозначим пространства непрерывных и дважды непрерывно дифференцируемых функций на Ω соответственно. Наконец, через $W_2^2(\Omega)$ будем обозначать соболевское пространство, являющееся пополнением пространства $C^2(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{W_2^2} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq 2} \|D^\alpha v(x)\|^2 dx_1 \dots dx_m \right)^{1/2}, \quad (4)$$

где $\|w\|$ – это евклидова норма векторов w из пространства R^n , а D^α – оператор дифференцирования

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m.$$

Определим множество

$$C_0^2(\Omega) = \left\{ v \in C^2 : \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \quad (5)$$

Оператор Лапласа $\Delta: C^2 \rightarrow C$ может быть (см., например, [7, 12]) расширен до замкнутого самосопряженного оператора $\Delta_0: L_2 \rightarrow L_2$ с областью определения G , образованного замыканием в W_2^2 множества (5). Область определения G оператора Δ_0 является банаховым пространством с нормой, определенной формулой (4).

Спектр оператора Δ_0 состоит из изолированных собственных значений $\lambda_k = -(k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2)$ (здесь k – мультииндекс: $k = k_1, k_2, \dots, k_m$, а k_j – целые неотрицательные числа) конечной кратности, при этом из системы собственных функций

$$e_k(x) = e_0 \cos(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \dots \cos(k_m x_m), \quad (6)$$

где $e_0 \in R^n$, можно составить ортонормированный базис в $L_2(\Omega)$. В частности, оператор Δ_0 имеет собственное значение $\lambda=0$.

Решениями системы (1)–(2) будем называть функции $w(x, t)$, которые:

1) при каждом фиксированном значении t являются элементами пространства $W_2^2(\Omega)$;

2) при каждом фиксированном значении $x \in \Omega$ являются непрерывно дифференцируемыми по t функциями;

3) удовлетворяют уравнению (1) и граничным условиям (2) при всех $t \geq 0$ и $x \in \Omega$.

В частности, точка равновесия $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) при каждом фиксированном значении μ является элементом пространства $W_2^2(\Omega)$.

3. Об устойчивости точки равновесия системы (1)–(2)

Точку равновесия $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) называют (см., например, [6, 12]) *устойчивой по Ляпунову*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\|v_0(x) - v(x, \mu)\|_{W_2^2} < \delta$, то решение $w(x, t, \mu)$ системы (1)–(2) удовлетворяет неравенству $\|w(x, t, \mu) - v(x, \mu)\|_{W_2^2} < \varepsilon$ для всех $t > 0$; здесь $w(x, t, \mu)$ – решение задачи Коши для системы (1)–(2) с начальным условием $w(x, 0, \mu) = v_0(x)$. Если кроме того выполняется условие $\|w(x, t, \mu) - v(x, \mu)\|_{W_2^2} \rightarrow 0$ при

$t \rightarrow \infty$, то точку равновесия $w = v(x, \mu)$ называют *асимптотически устойчивой*.

Для исследования устойчивости точки равновесия $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) могут быть использованы различные методы теории устойчивости решений дифференциальных уравнений параболического типа (см., например, [12–14]). Одним из основных здесь является метод, основанный на переходе к линеаризованной задаче:

$$\frac{dw}{dt} = A(x, \mu)w + D(\mu)\Delta w, \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (7)$$

в которой $A(x, \mu) = f'_w(v(x, \mu), \mu)$ – матрица Якоби вектор-функции $f(w, \mu)$, вычисленная в точке равновесия $w = v(x, \mu)$. Вопрос об устойчивости точки равновесия $w = v(x, \mu)$ может быть изучен на основе спектральных свойств линеаризованной системы (7).

В общей постановке, а именно, когда $w = v(x, \mu)$ является пространственно неоднородным положением равновесия системы (1)–(2), указанная задача достаточно сложна. Во-первых, для нахождения функции $w = v(x, \mu)$ требуется решить нелинейную краевую задачу (3). Во-вторых, в линеаризованной системе (7) матрица $A(x, \mu)$ зависит от пространственной переменной x , что существенно усложняет исследование спектра системы (7).

Ситуация упрощается, если $w = v(x, \mu)$ является пространственно однородным положением равновесия системы (1)–(2), т.е. является функцией вида $w = v(\mu)$. Для нахождения такого решения достаточно решить алгебраическое уравнение $f(w, \mu) = 0$. При этом в линеаризованной системе (7) матрица $A(x, \mu)$ уже не будет зависеть от пространственной переменной x .

4. Спектральные свойства линеаризованной задачи

Пусть точка равновесия $w = v(x, \mu)$ системы (1)–(2) является пространственно однородным положением равновесия, т.е. не зависит от x . Можно считать, что $v(x, \mu) = 0$.

В силу указанного предположения система (1)–(2) может быть представлена в виде

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + D(\mu)\Delta w + h(w, \mu), \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8)$$

в котором $A(\mu) = f'_w(0, \mu)$ – квадратная матрица порядка n , а нелинейность $h(w, \mu)$ удовлетворяет соотношению: $\|h(w, \mu)\| =$

$o(\|w\|)$, $\|w\| \rightarrow 0$, равномерно по μ . Соответственно, линеаризованная система имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + D(\mu)\Delta w, \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9)$$

Далее, считая параметр μ фиксированным, для простоты обозначений положим $A = A(\mu)$ и $D = D(\mu)$. Рассмотрим действующий в $L_2(\Omega)$ линейный оператор

$$S = A + D\Delta : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega) \quad (10)$$

с областью определения G .

В силу указанных выше свойств оператора Лапласа и основных предположений о системе (1)–(2) верна следующая

Теорема 1. *Оператор (10) с областью определения G является замкнутым.*

Перейдем к обсуждению спектральных свойств оператора (10).

Теорема 2. *Спектр оператора (10) является дискретным, то есть состоит только из собственных значений. При этом множество собственных значений оператора (10) совпадает с множеством собственных значений всех матриц*

$$B_k = A - (k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2)D, \quad (11)$$

здесь k – мультииндекс: $k = k_1, k_2, \dots, k_m$, а k_j – целые неотрицательные числа.

Приведем схему доказательства теоремы 2. Ограничимся рассмотрением случая $m = 2$; тогда матрицы (11) принимают вид

$$B_{kl} = A - (k^2 + l^2)D, \quad (12)$$

где k, l – целые неотрицательные числа.

В рассматриваемом случае оператор $\Delta : L_2 \rightarrow L_2$ является самосопряженным с собственными значениями $\lambda_{k,l} = -(k^2 + l^2)$, а собственные функции (см. также (6))

$$\begin{aligned} e_{k,l}(x) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(kx_1)\cos(lx_2), \\ g_{k,l}(x) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(kx_1)\cos(lx_2) \end{aligned} \quad (13)$$

образуют ортогональный базис в L_2 . Обозначим через $E_{k,l}$ двумерные подпространства пространства L_2 с базисом из функций (13). Подпространства $E_{k,l}$ являются инвариантными для оператора (10). Поэтому спектр σ оператора (10) представляется в виде $\sigma = \bigcup_{k,l=0}^{\infty} \sigma_{k,l}$, где $\sigma_{k,l} = \sigma(A + D\Delta : E_{k,l} \rightarrow E_{k,l})$. Отсюда и следует справедливость теоремы 2.

Из теоремы 2 и общей теории устойчивости решений дифференциальных уравнений параболического типа (см., например, [9, 10]) следует, что верна

Теорема 3. *Пусть вещественные части всех собственных значений λ матриц (11) удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda < -\alpha_0$ при некотором положительном α_0 . Тогда нулевое положение равновесия $w = 0$ системы (8) является асимптотически устойчивым. Если же хотя бы одна из матриц (11) имеет собственное значение с положительной вещественной частью, то положение равновесия $w = 0$ является неустойчивым.*

Обсудим теперь вопрос о кратностях собственных значений оператора (10) и о соответствующих собственным функциям. С этой целью по матрицам (11) определим числа

$$\rho_k = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2. \quad (14)$$

Множество Z_0 чисел вида (14) является подмножеством множества Z_+ всех целых неотрицательных чисел, при этом Z_0 не совпадает с Z_+ . Отметим также, что числам ρ_k из множества Z_0 могут соответствовать как один, так и два и более мультииндексов $k = k_1, k_2, \dots, k_m$.

Наряду с множествами Z_+ и Z_0 , определим также множество Z_1 , состоящее из тех $\rho \in Z_0$, для которых существует единственный мультииндекс $k = k_1, k_2, \dots, k_m$ такой, что $\rho = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$. Наконец, через Z_2 обозначим множество тех $\rho \in Z_0$, для которых существует два или более мультииндексов $k = k_1, k_2, \dots, k_m$ таких, что $\rho = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$.

Например, в случае $m = 2$, когда матрицы (11) принимают вид (12), имеем:

$$Z_0 = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, \dots\}$$

$$Z_1 = \{0, 2, 8, 18, \dots\}, \quad Z_2 = \{1, 4, 5, 9, \dots\}.$$

Замечание 1. Отметим, что при $m \geq 4$ имеет место равенство $Z_+ = Z_0$. Поэтому в силу теоремы 2 при $m \geq 4$ множество собственных значений оператора (10) совпадает с множеством собственных значений всех матриц $B_j = A - jD$, $j \in Z_+$.

Из теоремы 2 вытекает справедливость следующих утверждений.

Теорема 4. *Пусть $\rho_0 \in Z_1$ и пусть $k^0 = k_1, k_2, \dots, k_m$ – единственный мультииндекс такой, что $\rho_0 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2$. Пусть λ_0 – собственное значение матрицы (11) при мультииндексе k^0 .*

Пусть матрицы (11) при других мультииндексах не имеют собственного значения λ_0 . Тогда оператор (10) имеет собственное значение λ_0 той же алгебраической и геометрической кратности и того же индекса, что и матрица (11) при мультииндексе k^0 .

Следствие 1. Пусть в условиях теоремы 4 число λ_0 является простым собственным значением матрицы (11) при мультииндексе k^0 . Пусть e_0 – соответствующий собственный вектор. Тогда оператор (10) имеет простое собственное значение λ_0 , при этом соответствующей собственной функцией будет функция

$$e_{k^0}(x)e_0 \cos(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \dots \cos(k_m x_m).$$

Теорема 5. Пусть $\rho_0 \in Z_2$ и пусть существует точности два разных мультииндекса $k^0 = k_1, k_2, \dots, k_m$ и $l^0 = l_1, l_2, \dots, l_m$ таких, что $\rho_0 = k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_m^2 = l_1^2 + l_2^2 + \dots + l_m^2$. Пусть λ_0 – простое собственное значение матрицы (11) при мультииндексе k^0 (или, что то же самое, при мультииндексе l^0). Пусть e_0 – соответствующий собственный вектор. Пусть, наконец, остальные матрицы (11) при других мультииндексах не имеют собственного значения λ_0 . Тогда оператор (10) имеет полупростое собственное значение λ_0 кратности два, при этом соответствующими собственными функциями будут функции

$$e_{k^0}(x)e_0 \cos(k_1 x_1) \cos(k_2 x_2) \dots \cos(k_m x_m), \\ e_{l^0}(x) = e_0 \cos(l_1 x_1) \cos(l_2 x_2) \dots \cos(l_m x_m).$$

Аналогичные утверждения имеет место и в ситуации, когда для $\rho_0 \in Z_2$ существует более двух разных мультииндексов.

5. Диффузионная неустойчивость и бифуркации

Важным понятием при изучении динамики системы (1)–(2) в окрестностях ее точек равновесия является понятие диффузионной неустойчивости (см., например, [1–3, 6, 15, 16]).

Приведем соответствующие понятия в удобном для нас виде. Для простоты ограничимся рассмотрением случая $m = 2$; тогда матрицы (11) принимают вид (12).

Будем говорить, что в окрестности точки равновесия $w = 0$ системы (8) при $\mu = \mu_0$ имеет место (k_0, l_0) – диффузионная неустойчивость (здесь $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$), если:

а) матрица $B_{k_0 l_0}(\mu_0)$ имеет собственное значение λ_0 , такое, что $\operatorname{Re} \lambda_0 > 0$;

б) все остальные матрицы $B_{kl}(\mu_0)$ являются устойчивыми.

Здесь используется стандартное понятие: квадратную матрицу B называют устойчивой, если все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.

Основными двумя случаями диффузионной неустойчивости являются ситуации, когда условие а) принимает один из видов:

а1) матрица $B_{k_0 l_0}(\mu_0)$ имеет простое вещественное собственное значение $\lambda_0 > 0$, а остальные ее собственные значения λ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda < 0$;

а2) матрица $B_{k_0 l_0}(\mu_0)$ имеет пару комплексно сопряженных собственных значений $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ таких, что $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, а остальные ее собственные значения λ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Диффузионную неустойчивость, отвечающую случаю а1), часто называют *тьюринговской неустойчивостью*, а диффузионную неустойчивость, отвечающую случаю а2), называют *волновой неустойчивостью*.

Тьюринговская неустойчивость приводит к формированию у системы (8) периодических в пространстве и стационарных во времени решений, называемых *диссипативными структурами*. Другими словами, тьюринговская неустойчивость приводит к возникновению у системы (8) в окрестности нулевой точки равновесия новых пространственно неоднородных положений равновесия, которые являются периодическими в пространстве. Возникновение таких структур часто называют *бифуркацией Тьюринга*.

Волновая неустойчивость приводит к формированию у системы (8) периодических в пространстве и времени решений. Следует отметить, что в двухкомпонентной системе (т.е. когда $n = 2$) возможна лишь тьюринговская неустойчивость. Волновая неустойчивость может возникнуть только при $n > 2$.

Понятие диффузионной неустойчивости тесно связано с понятием точки бифуркации. А именно, следуя общей теории бифуркаций динамических систем (см., например, [7, 8, 17]) введем следующие понятия.

Будем говорить, что в окрестности точки равновесия $w = 0$ системы (5) при $\mu = \mu_0$ имеет место (k_0, l_0) – бифуркация кратного равновесия (здесь $k_0^2 + l_0^2 \geq 0$), если:

– матрица $B_{k_0 l_0}(\mu_0)$ имеет простое вещественное собственное значение $\lambda_0 = 0$, а остальные ее собственные значения λ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda < 0$;

– все остальные матрицы $B_{kl}(\mu_0)$ являются устойчивыми.

Будем говорить, что в окрестности точки равновесия $w = 0$ системы (5) при $\mu = \mu_0$ имеет место (k_0, l_0) – бифуркация Андронова–Хопфа (здесь $k_0^2 + l_0^2 \geq 0$), если:

– матрица $B_{k_0 l_0}(\mu_0)$ имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ таких, что $\beta > 0$, а остальные ее собственные значения λ удовлетворяют неравенству $\operatorname{Re} \lambda < 0$;

– все остальные матрицы $B_{kl}(\mu_0)$ являются устойчивыми.

Таким образом, (k_0, l_0) – тьюринговскую неустойчивость и соответствующую бифуркацию Тьюринга можно характеризовать как следствие перехода параметра μ через значение $\mu = \mu_0$, где μ_0 – точка (k_0, l_0) – бифуркации кратного равновесия. Аналогично, (k_0, l_0) – волновую неустойчивость можно характеризовать как следствие перехода параметра μ через значение $\mu = \mu_0$, где μ_0 – точка (k_0, l_0) – бифуркации Андронова–Хопфа $\mu = \mu_0$.

Обратим также внимание на то, что в определениях (k_0, l_0) – бифуркаций числа k_0 и l_0 могут одновременно равняться нулю, в отличие от определений (k_0, l_0) – диффузионной неустойчивости, в которых предполагается, что $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$. Другими словами, диффузионная неустойчивость предполагает устойчивость системы (8) в отсутствие диффузии.

6. Признаки бифуркаций: двухкомпонентные системы

Представляет интерес вопрос о признаках (k_0, l_0) – бифуркаций в системе (8), при этом (с точки зрения приложений) особый интерес вызывает случай, когда $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$.

Обсудим некоторые аспекты указанного вопроса для ситуаций, когда система (8) является двух- и трехкомпонентной, а пространственная переменная является двумерной, т.е. когда $n = m = 2$ и $n = 3, m = 2$.

Рассматриваемый вопрос близок по постановке к аналогичным вопросам о признаках тьюринговской и волновой неустойчивости (см., например, [15, 16] и имеющуюся там библиографию).

Рассмотрим сначала случай, когда система (8) является двухкомпонентной, а именно, когда $n = m = 2$. Пусть для простоты матрица диффузии $D(\mu)$ является диагональной. В этом случае соответствующая линеаризованная система (9) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= A(\mu)w + D(\mu)\Delta w, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} &= 0, \quad w \in R^2, \end{aligned} \quad (15)$$

где Δ – оператор Лапласа,

$$\begin{aligned} A(\mu) &= (a_{ij}(\mu))_{i,j=1}^2, \\ D(\mu) &= \begin{pmatrix} d_1(\mu) & 0 \\ 0 & d_2(\mu) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обсудим сначала вопрос о признаках (k_0, l_0) – бифуркации кратного равновесия в рассматриваемой двухкомпонентной системе (8) при $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$. Считая значение $\mu = \mu_0$ в этой системе и, соответственно, в линеаризованной системе (15) фиксированным, положим $A_0 = A(\mu_0)$, $a_{ij} = a_{ij}(\mu_0)$ и $D_0 = D(\mu_0)$, $d_j = d_j(\mu_0)$.

Далее, определим числа

$$\rho_0 = k_0^2 + l_0^2, \quad \rho_1 = \frac{a_{11}d_2 + a_{22}d_1}{d_1d_2} - \rho_0.$$

Прямым подсчетом можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 6. Пусть $m = n = 2$. Значение $\mu = \mu_0$ будет точкой (k_0, l_0) – бифуркации кратного равновесия двухкомпонентной системы (8) при $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$ тогда и только тогда, когда при $\mu = \mu_0$, во-первых, выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A_0 &< 0, \\ \det A_0 &= -\rho_0^2 d_1 d_2 + \rho_0 (a_{11} d_2 + a_{22} d_1) > 0, \end{aligned}$$

во-вторых, промежуток $[\rho_1, \rho_0)$ (если $\rho_1 < \rho_0$) или промежуток $(\rho_0, \rho_1]$ (если $\rho_1 > \rho_0$) не содержит целых чисел, представимых в виде $k^2 + l^2$.

Несложно видеть, что если коэффициенты диффузии d_1 и d_2 одного порядка, то условия этой теоремы не могут быть выполнены. Другими словами, для реализации (k_0, l_0) – бифуркации кратного равновесия и, соответственно, тьюринговской неустойчивости требуется, чтобы коэффициенты диффузии d_1 и d_2 сильно отличались друг от друга.

В качестве примера рассмотрим распределенную модель "брюсселятор" (см., например, [4, 7, 8]), описываемую двумерной системой уравнений

$$\begin{cases} u_t' = (\mu - 1)u + a^2 v + d_1 \Delta u + u^2 v, \\ v_t' = -\mu u - a^2 v + d_2 \Delta v - u^2 v, \end{cases} \quad (16)$$

относительно неизвестных функций $u = u(x, y, t)$ и $v = v(x, y, t)$; здесь α, μ, d_1 и d_2 – положительные коэффициенты, Δ – оператор Лапласа: $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Эту систему будем изучать в квадрате $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ с граничными условиями Неймана $\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0$.

Система (16) представима в виде (8) при

$$w = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, A(\mu) = \begin{bmatrix} \mu - 1 & a^2 \\ -\mu & -a^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix},$$

$$h(w) = \begin{bmatrix} u^2 v \\ -u^2 v \end{bmatrix}.$$

Система (16) имеет нулевую точку равновесия $u = v = 0$. В отсутствие диффузии (т.е. когда $d_1 = d_2 = 0$) эта точка равновесия устойчива, если $\mu < a^2 + 1$. При переходе к системе с диффузией (т.е. когда $d_1 > 0, d_2 > 0$) положение равновесия $u = v = 0$ уже может быть неустойчивым и, как следствие, привести к бифуркациям.

Пусть $\mu_0 = 2, a^2 = 2, d_1 = \frac{1}{4}, d_2 = 3$. Тогда при $k_0 = l_0 = 1$ получим

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \rho_0 = 2,$$

$$\rho_1 = \frac{10}{3}.$$

Промежуток $(\rho_0, \rho_1]$ не содержит целых чисел вида $k^2 + l^2$. Поэтому все условия теоремы 6 выполнены. Следовательно, значение $\mu_0 = 2$ является точкой бифуркации (k_0, l_0) – бифуркации кратного равновесия системы (16) при $k_0 = l_0 = 1$.

7. Признаки бифуркаций: трехкомпонентные системы

Рассмотрим теперь случай, когда система (8) является трехкомпонентной, а именно, когда $n = 3, m = 2$.

Пусть для простоты матрица диффузии $D(\mu)$ является диагональной. В этом случае соответствующая линеаризованная система (9) имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = A(\mu)w + D(\mu)\Delta w, \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$w \in R^3, \quad (17)$$

где Δ – оператор Лапласа,

$$A(\mu) = (a_{ij}(\mu))_{i,j=1}^3, \quad D(\mu) = \begin{pmatrix} d_1(\mu) & 0 & 0 \\ 0 & d_2(\mu) & 0 \\ 0 & 0 & d_3(\mu) \end{pmatrix}.$$

Как и в случае двухкомпонентных систем, считая значение $\mu = \mu_0$ фиксированным, положим: $A_0 = A(\mu_0), a_{ij} = a_{ij}(\mu_0)$ и $D_0 = D(\mu_0), d_j = d_j(\mu_0)$. Определим семейство матриц $B_{kl} = A_0 - (k^2 + l^2)D_0$.

Наконец, положим

$$a_0 = -\text{tr } A_0, \quad b_0 = b_1 + b_2 + b_3, \quad c_0 = -\det A_0;$$

$$a_{k,l} = -\text{tr } B_{k,l}, \quad b_{k,l} = b_{1,k,l} + b_{2,k,l} + b_{3,k,l},$$

$$c_{k,l} = -\det B_{k,l};$$

здесь b_1, b_2, b_3 и $b_{1,k,l}, b_{2,k,l}, b_{3,k,l}$ – диагональные миноры второго порядка матриц A_0 и B_{kl} соответственно.

Прямым подсчетом можно убедиться в справедливости следующих утверждений.

Теорема 7. Пусть $m = 3, n = 2$. Значение $\mu = \mu_0$ будет точкой (k_0, l_0) – бифуркации кратного равновесия трехкомпонентной системы (8) при $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$ тогда и только тогда, когда выполнены условия: $a_0 > 0, c_{k_0, l_0} = 0$, при этом

$$c_{k,l} > 0 \text{ для любых } (k, l) \neq (k_0, l_0), a_{k,l}b_{k,l} > c_{k,l} \text{ для любых } (k, l). \quad (18)$$

Теорема 8. Пусть $m = 3, n = 2$. Значение $\mu = \mu_0$ будет точкой (k_0, l_0) – бифуркации Андронова–Хопфа трехкомпонентной системы (8) при $k_0^2 + l_0^2 \geq 1$ тогда и только тогда, когда выполнены условия: $a_0 > 0, a_{k_0, l_0}b_{k_0, l_0} = c_{k_0, l_0}$, при этом

$$c_{k,l} > 0 \text{ для любых } (k, l),$$

$$a_{k,l}b_{k,l} > c_{k,l} \text{ для любых } (k, l) \neq (k_0, l_0). \quad (19)$$

В приложениях основную сложность представляет проверка условий (18) и (19). Однако, как показывают несложные преобразования, эти условия можно свести к задаче решения неравенства для многочлена третьей степени относительно неотрицательной величины $x = k^2 + l^2 \geq 0$. А эта задача, в свою очередь, может быть сведена к исследованию производной от этого многочлена, т.е. к решению квадратичных неравенств.

Анализ условий (18) и (19) показывает, что условия теорем 7 и 8 могут выполняться в чрезвычайно узком диапазоне значений коэффициентов диффузии. А именно, как правило, для их выполнения один из коэффициентов должен существенно превосходить два других.

В качестве примера рассмотрим матрицы

$$A_0 = \begin{pmatrix} -100 & 0 & 870 \\ 50 & 0 & 479 \\ 10 & 0 & 95 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0,00283 & 0 & 0 \\ 0 & 0,00283 & 0 \\ 0 & 0 & 0,975 \end{pmatrix}.$$

В этом примере матрица B_{11} имеет собственные значения $\lambda_{1,2} \approx \pm 20i$, $\lambda_3 \approx -7$, а остальные матрицы $B_{k,l} = A_0 - (k^2 + l^2)D_0$ являются устойчивыми. Потому для соответствующей трехкомпонентной системы (8) имеет место (k_0, l_0) -бифуркация Андронова–Хопфа при $k_0 = l_0 = 1$.

Список источников

1. *Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии* / Ю.М. Свирижев. М.: Наука, 1987. 368 с.
2. *Mathematical Biology* / Murray J.D. New York, Springer-Verlag Springer-Verlag, 3d edition, vol. I, 2007, vol. II, 2008.
3. *Лекции по математическим моделям в биологии* / Г.Ю. Ризниченко. М.–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 296 с.
4. *Нелинейные колебания и волны* / П.С. Ланда. М.: Книжный дом "Либроком", 2015. 552 с.
5. *Колебания и бегущие волны в химических системах* / Р. Филд, М. Бургер. М.: Мир, 1988. 328 с.
6. *Динамические системы и модели биологии* / А.С. Братусь, А.С. Новожилов, А.П. Платонов. М.: Физматлит, 2010. 400 с.
7. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла* / Б. Хассард, Н. Казаринов, И. Ван. М.: Мир, 1985, 280 с.
8. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения* / Дж. Марсден, М.М. Мак-Кракен: Мир, 1980. 368 с.
9. Горюнов В.Е. Бифуркация Андронова–Хопфа в одной биофизической модели реакции Белоусова // Моделирование и анализ информационных систем. 2018. Т. 25, № 1. С. 63–70.
10. Юмагулов М.Г., Сидельникова Н.А. Системы типа "реакция-диффузия" признаки устойчивости и бифуркаций // Вестник Башкирского университета. Т. 28, № 4. 2023. С. 303–309.
11. Yumagulov M.G., Abushahmina G.R., Gusarova N.I. Lyapunov quantities for Andronov-Hopf bifurcation problem in reaction-diffusion system // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, № 15. P. 3567-3573.
12. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений* / Д.М. Хенри. М.: Мир, 1985. 376 с.

13. *Методы современной математической физики. Анализ операторов* / М. Рид, Б. Саймон. М.: Мир, 1982. Т. 4. 428 с.
14. *Основные дифференциальные уравнения математической физики* / А.В. Жиббер, Г.З. Мухаметова, Н.А. Сидельникова. Уфа: РИЦ БашГУ, 2020. 301 с.
15. Борина М.Ю., Полежаев А.А. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентной модели типа реакция-диффузия // Компьютерные исследования и моделирование. Т. 3, № 2. 2011. С. 135–146.
16. Еленин Е.Г., Куркина Е.С. Диффузионная неустойчивость в трехкомпонентных системах типа реакция-диффузия. Реакция (NO+CO)/Pt(100) // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 8. С. 17–32.
17. *Введение в нелинейную динамику: теория, приложения, модели* / М.Г. Юмагулов. Санкт-Петербург: Лань, 2022. 368 с.

References

1. Svirezhev, Yu.M. (1987), "Nelinejnye volny, dissipativnye struktury i katastrofy v ekologii" [Nonlinear waves, dissipative structures and disasters in ecology], Nauka, Moscow, Russia.
2. Murray, J.D. (2007), (2008), *Mathematical Biology*, 3d edition, vol. I, vol. II, Springer-Verlag Springer-Verlag, New York, USA.
3. Rznichenko, G.Yu. (2002), "*Lekcii po matematicheskim modelyam v biologii*" [Lectures on mathematical models in biology], Regular and chaotic dynamics, Moscow-Izhevsk, Russia.
4. Landa, P.S. (2015), "*Nelinejnye kolebaniya i volny*" [Nonlinear oscillations and waves], Book house "LIBROKOM", Moscow, Russia.
5. Field, R and Burger, M. (1988), "*Kolebaniya i begushchie volny v himicheskikh sistemah*" [Oscillations and traveling waves in chemical systems], Mir, Moscow, Russia.
6. Bratus, A.S., Novozhilov, A.S. and Platonov, A.P., (2010), "*Dinamicheskie sistemy i modeli biologii*" [Dynamic systems and models of biology], FIZMATLIT, Moscow, Russia.
7. Hassard, B., Kazarinov, N. and Wang, I. (1985), "*Teoriya i prilozheniya bifurkacii rozhdeniya cikla*" [Theory and applications of cycle birth bifurcation], Mir, Moscow, Russia.
8. Marsden J. and McCracken M. (1980), "*Bifurkaciya rozhdeniya cikla i ee prilozheniya*" [Bifurcation of the birth of a cycle and its applications], Mir, Moscow, Russia.

9. Goryunov, V.E. (2018.), "Andronov–Hopf bifurcation in one biophysical model of the Belousov reaction", *Modeling and analysis of information systems*, vol. 25, no. 1, pp. 63-70.
10. Yumagulov, M.G. and Sidelnikova, N.A. (2023), "Systems of the "reaction-diffusion" type: signs of stability and bifurcations", *Bulletin of the Bashkir University*, vol. 28, no. 4, pp. 303-309.
11. Yumagulov, M.G., Abushahmina, G.R. and Gussarova, N.I. (2021), "Lyapunov quantities for Andronov–Hopf bifurcation problem in reaction-diffusion system", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, vol. 42, no. 15, p. 3567-3573.
12. Henry, D. (1985), "Geometricheskaya teoriya polulinejnyh parabolicheskikh uravnenij" [Geometric theory of semi-linear parabolic equations], Mir, Moscow, Russia.
13. Reed, M. and Simon, B. (1982), "Metody sovremennoj matematicheskoy fiziki. Analiz operatorov" [Methods of modern mathematical physics. Operator analysis], vol. 4, Mir, Moscow, Russia.
14. Zhiber, A.V., Mukhametova, G.Z. and Sidelnikova, N.A. (2020), "Osnovnye differentsial'nye uravneniya matematicheskoy fiziki" [Basic differential equations of mathematical physics], RIC BashSU, Ufa, Russia.
15. Borina, M.Yu. and Polezhaev, A.A. (2011), "Diffusion instability in a three-component reaction-diffusion model", *Computer research and modeling*, vol. 3, no. 2, p. 135-146.
16. Elenin, E.G. and Kurkina, E.S. (1994), "Diffusion instability in three-component systems of the reaction-diffusion type. Reaction (NO+CO)/Pt(100)", *Mathematical modeling*, vol. 6, no. 8, pp. 17–32.
17. Yumagulov, M.G. (2022), "Vvedenie v nelinejnyuyu dinamiku: teoriya, prilozheniya, modeli" [Introduction to nonlinear dynamics: theory, applications, models], Lan, St. Petersburg, Russia.

Информация об авторах:

М. Г. Юмагулов – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высокопроизводительных вычислений и дифференциальных уравнений, Уфимский университет науки и технологий (450076, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.);

Н. А. Васенина – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высокопроизводительных вычислений и дифференциальных уравнений, Уфимский университет науки и технологий (450076, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, 32.).

Information about the authors:

Marat G. Yumagulov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of High-Performance Computing and Differential Equations, Ufa University of Science and Technology (32, Zaki Validi St., Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia, 450076);

Natalia A. Vasenina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent, Department of High-Performance Computing and Differential Equations, Ufa University of Science and Technology (32, Zaki Validi St., Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia, 450076).

Научная статья

УДК 519.17

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-26-33

Об автоморфизмах графов с массивами пересечений $\{44,40,12; 1,5,33\}$ и $\{48,35,9; 1,7,40\}$

Минчжу Чень¹, Александр Алексеевич Махнёв², Василий Семенович Климин³¹Университет провинции Хайнань, Хэйкоу, Китай¹mzchen@hainanu.edu.cn²Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия²makhnev@imm.uran.ru³Уральский федеральный университет, г. Екатеринбург, Россия³kliminvasily@yandex.ru

Аннотация. Дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 с сильно регулярными графами Γ_2 и Γ_3 имеет массив пересечений $\{r(c_2+1)+a_3, r, c_2, a_3+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$ (М.С. Нирова). Для дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и степени 44 имеется точно 7 допустимых массивов пересечений. Для каждого из них граф Γ_3 сильно регулярен. Для массива пересечений $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$ имеем $a_3 = 4, c_2 = 3, r = 10$, Γ_2 имеет параметры $(540, 440, 358, 360)$ и Γ_3 имеет параметры $(540, 55, 10, 5)$. Граф не существует (Кулен-Пак). Для массива пересечений $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ имеем $a_3 = 2, c_2 = 5, r = 7$, Γ_3 имеет параметры $(375, 22, 5, 1)$ и не существует (его окрестность вершины является объединением изолированных 6-клик). В этой статье найдены возможные автоморфизмы графов с массивами пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$ и $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$.

Ключевые слова: дистанционно регулярный граф; сильно регулярный графа; массив пересечений

Для цитирования: Чень М., Махнёв А.А., Климин В.С. Об автоморфизмах графов с массивами пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$ и $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 26–33. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-26-33.

Благодарности: работа выполнена при поддержке естественно-научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

Статья поступила в редакцию 09.03.2024; одобрена после рецензирования 02.05.2024; принята к публикации 11.06.2024.

Research article

About Automorphisms of Graphs With Intersection Arrays $\{44,40,12; 1,5,33\}$ and $\{48,35,9; 1,7,40\}$

Minzhu Chen¹, Alexander A. Makhnev², Vasiliy S. Klimin³¹Hainan University, Haikou, China¹mzchen@hainanu.edu.cn²Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, Russia²makhnev@imm.uran.ru³Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia³kliminvasily@yandex.ru

Эта работа © 2024 Чень М., Махнёв А.А., Климин В.С. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. Distance-regular graph Γ of diameter 3 with strongly regular graphs Γ_2 and Γ_3 has intersection array $\{r(c_2+1)+a_3, r c_2, a_3+1; 1, c_2, r(c_2+1)\}$ (M.S. Nirova). For distance-regular graph Γ of diameter 3 and degree 44 there are exactly 7 feasible intersection arrays. For each of them graph Γ_3 is strongly regular. For intersection array $\{44, 30, 5; 1, 3, 40\}$ we have $a_3 = 4, c_2 = 3, r = 10$, Γ_2 has parameters $(540, 440, 358, 360)$ and Γ_3 has parameters $(540, 55, 10, 5)$. Graph does not exist (Koolen-Park). For intersection array $\{44, 35, 3; 1, 5, 42\}$ graph Γ_3 has parameters $(375, 22, 5, 1)$ and does not exist (its neighbourhood of vertex is the union of isolated 6-cliques). In this paper it is found automorphisms of graphs with intersection arrays $\{44, 40, 12; 1, 5, 33$ and $48, 35, 9; 1, 7, 40\}$.

Keywords: distance-regular graph; strongly regular graph; intersection array

For citation: Chen, M., Makhnev, A.A. and Klimin, V.S. (2024), "About Automorphisms of Graphs With Intersection Arrays $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$ and $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ ", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(65), pp. 26-33. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-26-33.

Acknowledgments: the work was supported by the Natural Science Foundation of China (Project No. 12171126) and a grant from the Laboratory of Engineering Modeling and Statistical Computing of Hainan Province.

The article was submitted 09.03.2024; approved after reviewing 02.05.2024; accepted for publication 11.06.2024.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i -окрестность вершины a , то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a . Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ – граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ . Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется μ -подграфом (λ -подграфом).

Если Γ – граф диаметра d и $i \leq d$, то через Γ_i обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ , в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии i в Γ .

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k* , если степень любой вершины a из Γ равна k . Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами (v, k, λ)* , если он содержит v вершин, регулярен степени k , и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ – *вполне регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ)* , если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a, b , находящихся на расстоянии 2 в Γ . Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через

$c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$.

Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$* , если значения $b_i(u, w)$ и $c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i=0, \dots, d$ [1]. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 – это степень графа, $c_1 = 1$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно транзитивным*, если для любого $i \in \{0, \dots, d\}$ и для любых двух пар вершин (u, w) и (y, z) с $d(u, w) = d(y, z) = i$ найдется автоморфизм g графа Γ такой, что $(u^g, w^g) = (y, z)$.

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\text{Fix}(X)$ обозначается подмножество всех вершин графа Γ , неподвижных относительно любого автоморфизма из X . Имеется точно 7 допустимых массивов пересечений дистанционно регулярных графов степени 44. В [2] доказано, что для пяти из них графы не существуют.

В данной работе найдены возможные автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$.

Теорема 1. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g – элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда Ω не является кликой, Ω не является объединением по крайней мере двух изолированных клик и верно одно из утверждений:

(1) Ω – пустой граф, либо (i) $p=7$, $\alpha_3(g) = 35s'$, $\alpha_1(g) = 35t'$, $\alpha_2(g) = 35(175 - s' - t')$ и

- $t'+3s'+1$ делится на 8, либо
- (ii) $p=5$, $\alpha_3(g) = 5s$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_2(g) = 5(10s - s - t)$ и $3t+s - 3$ делится на 8, либо
- (iii) $p=3$, $\alpha_3(g) = 15s'$, $\alpha_1(g) = 15t'$, $\alpha_2(g) = 15(35 - s' - t')$ и $3t' + s' - 1$ делится на 8;
- (2) Ω является m -кликкой, $m=5$, $p=2$, $\alpha_3(g) = 320$ и $\alpha_1(g) = 10t'$, где $t' = 4, 8, 12, 16, 20$;
- (3) Ω содержит геодезический 2-путь и $p \leq 5$.

Следствие 1. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$ не являются реберно симметричным.

Проведем ревизию результатов из [3] об автоморфизмах дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ с помощью теории характеров, примененной к группам автоморфизмов графов Γ_2 и Γ_3 .

Теорема 2. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$, g – элемент из G простого порядка p и $\Omega = \text{Fix}(g)$. Тогда Ω не является кликой, $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и верно одно из утверждений:

- (1) Ω – пустой граф, $p=7$, $\alpha_3(g) = 35s'$, $\alpha_1(g) = 35t'$ и $t'+3s'+1$ делится на 8, либо
- (2) Ω является 4-кликкой и состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3, $p=3$, $\alpha_1(g) = 21t'+3$, $\alpha_3(g) = 21s'+6$ и $-1 - 2t'+s'$ делится на 6;
- (3) Ω содержит две вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ и $p \leq 7$.

Следствие 2. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$ – неразрешимая группа, действующая транзитивно на множестве вершин графа Γ , $K = O_7(G)$, $\bar{T}$ – цокль группы $G = G/K$. Тогда $\bar{T}$ содержит единственную компоненту $\bar{L}$, точно действующую на K , $\bar{L} \simeq L_2(7)$, $|K| = 7^3$ или $\bar{L} \simeq SL_2(7)$, $|K| = 7^2$.

1. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Лемма 1.1. Пусть Γ является дистанционно регулярным графом с целыми собственными значениями, g – автоморфизм графа Γ простого порядка p , и χ – характер проекции мономиального представления на подпространство размерности t собствен-

ных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l , не кратного p и $t - \chi(g)$ делится на p .

Доказательство. Это лемма 2 из [4].

Лемма 1.2. Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$. Тогда Γ имеет спектр $\{44^1, 9^{132}, -1^{308}, -11^{84}\}$, для чисел пересечения графа Γ верны равенства

$$p_{11}^1 = 3, p_{21}^1 = 40, p_{32}^1 = 96, p_{22}^1 = 216, p_{33}^1 = 32, p_{11}^2 = 5, p_{12}^2 = 27, p_{13}^2 = 12, p_{32}^2 = 84, p_{22}^2 = 240, p_{33}^2 = 32, p_{12}^3 = 33, p_{22}^3 = 231, p_{13}^3 = 11, p_{23}^3 = 88, p_{33}^3 = 28;$$

и Γ имеет дуальную матрицу собственных значений

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 132 & 27 & 3/4 & -99/8 \\ 308 & -7 & -7 & 77/4 \\ 84 & -21 & 21/4 & -63/8 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Прямые вычисления.

Ввиду леммы 1.2 граф Γ_3 сильно регулярен с параметрами $(525, 128, 28, 32)$.

2. Характеры конечных групп и автоморфизмы дистанционно регулярных графов

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [5]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathcal{R})$ с d классами, где X – множество вершин графа, R_0 – отношение равенства на X и для $i \geq 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X , в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$.

Пусть A_i – матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ – единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_k$ для чисел пересечений p_{ij}^l .

Пусть P_i – матрица, в которой на месте (j, k) стоит p_{ij}^k . Тогда собственные значения $p_1(0), \dots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \dots, m_d$. Матрицы P и Q , у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j) / k_i$ соответственно, называются первой и второй (дуальной) матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = |X|I$.

Предложение 2.1. Пусть u_j и w_j – левый и правый собственные векторы матрицы P_1 , отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда кратность m_j собственного значения $p_1(j)$ равна $v/\langle u_j, w_j \rangle$.

Доказательство. См. теорему 17.12 из [6]. Фактически, из доказательства теоремы 17.12 следует, что w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q .

Подстановочное представление группы $G = \text{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, C)$. Пространство C^v является ортогональной прямой суммой собственных G -инвариантных подпространств $W_0, \dots, W_d$ матрицы смежности A графа Γ . Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A , поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$ -инвариантным.

Пусть χ_i – характер представления ψ_{W_i} . Тогда (см. § 3.7 [5]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) v^{-1} \sum_{j=0}^d Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ – число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ – число рациональное, то $\chi_i(g)$ – целое число.

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 2.1. Пусть $g \in G$, χ_1 – характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности 132, χ_2 – характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности 308. Тогда

$$\begin{aligned} \chi_1(g) &= (11\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/40 - 99/8, \\ \chi_2(g) &= (3\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 5 - 7. \end{aligned}$$

Доказательство. По лемме 1.2 имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 132 & 27 & 3/4 & -99/8 \\ 308 & -7 & -7 & 77/4 \\ 84 & -21 & 21/4 & -63/8 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = 1/525 (132\alpha_0(g) + 27\alpha_1(g) + 3\alpha_2(g)/4 - 99\alpha_3(g)/8)$.

Так как

$$\alpha_3(g) = 525 - \alpha_0(g) - \alpha_1 - \alpha_3(g), \text{ то}$$

$$\chi_1(g) = (11\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/40 - 99/8.$$

Далее, $\chi_2(g) = 1/525$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 525 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (3\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 5 - 7$. Лемма доказана.

Пусть Γ – сильно регулярный граф с параметрами $(525, 128, 28, 32)$ и спектром $128^1, 8^{308}, -12^{216}$, $G = \text{Aut}(\Gamma)$.

Лемма 2.2. Пусть $g \in G$, φ – характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности 216. Тогда

$$\varphi(g) = (2\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/4 - 5 + 6.$$

Доказательство. По лемме 1.2 имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 308 & 77/4 & -7 \\ 216 & -81/4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi(g) = 1/525$. Так как $\alpha_2(g) = 525 - \alpha_0(g) - \alpha_1$, то $\varphi(g) = (2\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/4 - 5 + 6$. Лемма доказана.

Если $\Gamma = \tilde{\Gamma}_2$ для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$, то $\alpha_1'(g) = \alpha_1(g) + \alpha_3(g)$.

3. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$

В этом параграфе предполагается, что Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{44, 40, 12; 1, 5, 33\}$, g – автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \text{Fix}(g)$.

Из равенств

$$\begin{aligned} \chi_1(g) &= (11\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) + \alpha_3(g))/40 - 99/8, \\ \chi_2(g) &= (3\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/4 - 5 - 7, \\ \varphi(g) &= (8\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/20 + 6 \end{aligned}$$

следует, что $\alpha_0(g) + 3\alpha_1(g) + \alpha_3(g)$ и $2\alpha_0(g) + \alpha_3(g)$ делятся на 5 и $8\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$ делится на 20.

Сложив два последних равенства, получим, что $10\alpha_0(g) - \alpha_1(g)$ делится на 5, в частности, $\alpha_1(g)$ делится на 5.

Вычитая из второго равенства первое, получим, что $\alpha_0(g)$ делится на 5.

Итак, $\alpha_3(g) = 5s$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_0(g) = 5r$, $t+r$ делится на 4.

Лемма 3.1. Если Ω является пустым графом, то либо

$$(1) \ p=7, \alpha_3(g) = 35s', \alpha_1(g) = 35t', \alpha_2(g) = 35(175 - s' - t') \text{ и } t'+3s'+1 \text{ делится на } 8,$$

либо (2) $p=5$, $\alpha_3(g) = 5s$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_2(g) = 5(105 - s - t)$ и $3t+s-3$ делится на 8, $3t+s$ делится на 5, либо

(3) $p=3$, $\alpha_3(g) = 15s'$, $\alpha_1(g) = 15t'$, $\alpha_2(g) = 15(35 - s' - t')$ и $3t'+s'-1$ делится на 8.

Доказательство. Так как $525 = 21 \cdot 25$, то $p \in \{3, 5, 7\}$.

Если $p=7$, то $525 - 5r$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 35t'$, $\alpha_3(g) = 35s'$ и $\alpha_2(g) = 35(175 - s' - t')$. Далее, $\chi_1(g) = (21t'+7s' - 99)/8$, поэтому $5t'+15s'+5$ делится на 8. По лемме 1.1 $132 - (21t'+7s' - 99)/8$ делится на 7.

Если $p=5$, то $\alpha_3(g) = 5s$, $\alpha_1(g) = 5t$ и $\alpha_0(g) = 5r$. Далее, $\chi_1(g) = (3t+s - 99)/8$, поэтому $3t+s-3$ делится на 8 и $132 - (3t+s - 99)/8$ делится на 5, поэтому $3t+s$ делится на 5.

Если $p=3$, то $\alpha_3(g) = 15s'$, $\alpha_1(g) = 15t'$ и $\alpha_2(g) = 15(35 - t' - s')$. Далее, $\chi_1(g) = (9t'+3s' - 99)/8$, поэтому $3t'+s'-1$ делится на 8.

Лемма 3.2. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) если Ω является m -кликкой, то $m=5$, $p=2$, $\alpha_3(g) = 320$ и $\alpha_1(g) = 10t'$, где $t'=4, 12, 20$;

(2) Ω не является кокликкой;

(3) Ω не является объединением по крайней мере двух изолированных клик.

Доказательство. Пусть Ω является m -кликкой. Тогда $m=5$, p делит 520 и число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $5 \cdot 40 = 200$. Поэтому имеется 200 вершин, смежных с единственной вершиной из Ω и 320 вершин, несмежных с вершинами из Ω . Таким образом, $p=2, 5$.

Так как $p_{33}^1 = 32$, то $p \neq 5$. Из равенств $p_{11}^1 = 3$, $p_{11}^2 = 5$ следует, что $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 200$, $\alpha_3(g) = 320$. С другой стороны, $\alpha_3(g) = 10s'$, $\alpha_1(g) = 10t'$ и $\alpha_2(g) = 520 - 10t' - 10s'$, поэтому $s'=32$. Наконец, $\chi_1(g) = (11 + 6t'+2s' - 99)/8$, число $132 - (11 + 6t'+2s' - 99)/8$ четно и $t'=4, 12, 20$.

Пусть Ω является n -кокликкой. Тогда $p=2, 11$. Если Ω содержит две вершины на расстоянии 2, то $p=5$, противоречие. Значит, Ω состоит из вершин, попарно находящихся на расстоянии 3.

Так как, $p_{22}^3 = 231$, $p_{33}^3 = 28$, то $p=7$, противоречие.

Пусть Ω является объединением по крайней мере двух изолированных клик. Тогда порядки максимальных клик из Ω равны m , p

делит 40 и $4 - m$, поэтому $p=2$, $m=2, 4$. Противоречие с тем, что $\lambda=3$.

Лемма 3.3. *Если Ω содержит геодезический 2-путь, то $p \leq 5$.*

Доказательство. Пусть $p \geq 7$. В графе Ω имеем $\lambda=3$, $\mu=5$, поэтому Ω является вполне регулярным графом с параметрами $v', k', \lambda'=3$, $\mu'=5$ и $k'(k' - 4) = 5k_2'$.

Число ребер в Γ между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $v'(44 - k')$, но не больше $525 - v'$.

Если $p=7$, то $k'=7l+2$, v' делится на 7. Допустим, что k' делится на 5. Тогда $k'=30$ и $14v' \leq 525 - v'$, поэтому $v' \leq 35$, противоречие. Если же $k' - 4$ делится на 5, то $k'=9$, противоречие с тем, что число $k'\lambda'$ нечетно.

Если $p=11$, то $k'=11l$, $v' + 3$ делится на 11. Далее, $k' - 4$ делится на 5 и $k'=44$, противоречие.

Если $p=13$, то $k' = 13l + 5$, $v' - 5$ делится на 13. Далее, либо $k'=5$, противоречие с тем, что число $k'\lambda'$ нечетно, либо $k' - 4$ делится на 5. В последнем случае $k'=44$, противоречие.

Если $p=17$, то $k' = 17l + 10$, $v' + 2$ делится на 17. Далее, либо $k'=10$, либо $k' - 4$ делится на 5. В последнем случае $k'=44$, противоречие. В первом случае $k_2'=12$, число ребер в Γ между Ω и $\Gamma - \Omega$ равно $34v'$, но не больше $525 - v'$ и $v' \leq 15$, противоречие.

Если $p=19$, то $k' = 19l + 5$, $v' - 5$ делится на 19. Далее, либо $k'=5$, противоречие с тем, что число $k'\lambda'$ нечетно, либо $k' - 4$ делится на 5. В последнем случае $k'=24$, $k_2'=96$ и $20v' \leq 525 - v'$, противоречие.

Ввиду лемм 3.1–3.3 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$ и Γ не является реберно симметричным графом. Следствие 1 доказано.

4. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {48, 35, 9; 1, 7, 40}

В этом параграфе предполагается, что -дистанционно регулярный граф с массивом пересечений {48, 35, 9; 1, 7, 40}.

Этот граф имеет $v = 1 + 48 + 240 + 54 = 343 = 7^3$ вершин и спектр $48^1, 13^{56}, -1^{216}, -8^{70}$.

Для этого графа имеем $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/42 - 7/6$, $\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/14 - 9/2$, где χ_1 - проекция ψ на подпространство размерности 56,

χ_2 – проекция ψ на подпространство размерности 216.

Числа пересечений графа Γ равны
 $p_{11}^1 = 12, p_{21}^1 = 35, p_{32}^1 = 45, p_{22}^1 = 160, p_{33}^1 = 9,$
 $p_{11}^2 = 7, p_{12}^2 = 32, p_{13}^2 = 9, p_{32}^2 = 36, p_{22}^2 = 171,$
 $p_{33}^2 = 9,$
 $p_{12}^3 = 40, p_{22}^3 = 160, p_{13}^3 = 8, p_{23}^3 = 40, p_{33}^3 = 5.$

Отсюда Γ_2 – сильно регулярный граф с параметрами (343,102,21,34) и спектром $102^1, 4^{272}, -17^{70}$.

Пусть Δ – сильно регулярный граф с параметрами (343,102,21,34)

Лемма 4.1. Пусть $G = \text{Aut}(\Delta)$, $g \in G$, φ – характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности 70.

Тогда $\varphi(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha'_1(g))/21 + 14/3$.

Доказательство. По лемме 1.2 имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 272 & 32/3 & -17/3 \\ 70 & -35/3 & 14/3 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\varphi(g) = 1/343$.

Так как $\alpha_2(g) = 343 - \alpha_0(g) - \alpha_1$, то $\varphi(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/21 + 14/3$. Лемма доказана.

Если $\Delta = \Gamma_2$ для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {48,35,9; 1,7,40}, то $\alpha'_1(g) = \alpha_1(g) + \alpha_3(g)$. Далее, Γ_3 – сильно регулярный граф с параметрами (343,54,5,9) и спектром $54^1, 5^{216}, -9^{126}$. Пусть Σ – сильно регулярный граф с параметрами (343,54,5,9).

Лемма 4.2. Пусть $g \in G$, $G = \text{Aut}(\Sigma)$, ω – характер проекции представления ψ на собственное подпространство размерности 126.

Тогда $\omega(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha''_1(g))/14 + 7/2$.

Доказательство. По лемме 1.2 имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 216 & 20 & -9/2 \\ 126 & -21 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\omega(g) = 1/343$.

Так как $\alpha_2(g) = 343 - \alpha_0(g) - \alpha_1$, то $\omega(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/14 + 7/2$. Лемма доказана.

Если $\Sigma = \Gamma_3$ для дистанционно регулярного графа с массивом пересечений {48,35,9; 1,7,40}, то $\alpha''_1(g) = \alpha_3(g)$.

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф с массивом пересечений {48,35,9; 1,7,40}, $G = \text{Aut}(\Sigma)$, g – элемент простого порядка p из G , $\Omega = \text{Fix}(g)$.

Тогда

$$\varphi(g) = (4\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g))/21 + 14/3,$$

$$\omega(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_3(g))/14 + 7/2.$$

Лемма 4.3. Выполняются следующие утверждения:

(1) если Ω – пустой граф, то $p=7$, $\alpha_1(g) = \alpha_3(g) = 49$;

(2) подграф Ω не является кликой;

(3) если Ω является m -кликкой, то $p=3$, $m=4$, $\alpha_1(g) = 21t'+3$, $\alpha_3(g) = 21s'+6$ и $-1 - 2t'+s'$ делится на 6;

(4) если Ω содержит ребро, то Ω содержит две вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ .

Доказательство. Если Ω – пустой граф, то с учетом равенства $v = 7^3$ имеем $p=7$. По лемме 4 из [3] имеем $\alpha_1(g) = 49(2s+1)$. Для $\alpha_3(g) = 7t$ получим $\chi_1(g) = (28s+14 - t - 7)/6$, $-2s - t+1$ делится на 6 и $56 - \chi_1(g) = 56 - (28s+14 - t - 7)/6$ делится на 7. Отсюда $t=7t'$, $\alpha_3(g) = 49t'$, $2s+1+t' \leq 7$ и $-2s - t'+1$ делится на 6, поэтому $s=0, t'=1$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (t - 9)/2$ и t нечетно.

Пусть Ω является n -кликкой. По лемме 4 из [3] имеем $p=2$, $n=7$ и $\alpha_1(g) = 28l$. Для различных вершин $d, e \in \Omega$ из равенства $p_{33}^1 = 9$ следует, что $\Gamma_3(d) \cap \Gamma_3(e)$ пересекает Ω , противоречие.

Пусть Ω является m -коккликой. Если две вершины $d, e \in \Omega$ находятся на расстоянии 2 в Γ , то равенство $p_{11}^2 = 7$ влечет $p=7$. Возникает противоречие с тем, что тогда $k=44$ должно делиться на 7. Значит, любые две вершины $d, e \in \Omega$ находятся на расстоянии 3 в Γ .

Так как Γ_3 – сильно регулярный граф с параметрами (343,54,5,9), то либо $p=5$, $m=2$, противоречие, либо $\Gamma_3(d) \cap \Gamma_3(e)$ содержит 2 вершины из Ω , $p=3$ и $m=4$. Положим $\alpha_3(g) = 3s$.

Тогда $\chi_2(g) = (36 + \alpha_3(g))/14 - 9/2$, поэтому $s=7s'+2$ и s' нечетно. Далее, $\chi_1(g) = (28 + 2\alpha_1(g) - 21s' - 6)/42 - 7/6$, $\alpha_1(g) = 7t + 3$, $2t - 3s' - 3$ делится на 6 и $t=3t'$. Отсюда $\chi_1(g) = (2t' - s' - 1)/2$ и $56 - \chi_1(g) = 56 - (2t' - s' - 1)/2$ делится на 3.

Итак, $\alpha_1(g) = 21t' + 3$, $\alpha_3(g) = 21s'+6$ и $-1 - 2t'+s'$ делится на 6.

Пусть Ω содержит ребро $\{e, f\}$. Если в Ω нет двух вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ , то Ω является объединением l изолированных клик, и любые две вершины из разных максимальных клик находятся на расстоянии 3 в Γ .

Пусть $d, e \in \Omega$ – вершины на расстоянии 3. Тогда равенство $p_{33}^3 = 5$ влечет $l=2$, $p=5$ или $l=3$, $p=2,3$.

Если $p=3$, то равенство $p_{33}^3 = 5$ влечет, что порядки максимальных клик из Ω равны 3. Противоречие с тем, что $|\Gamma - \Omega| = 343 - 9$ не делится на 3.

Если $p=5$, то из действия g на $[d]$ следует, что порядки максимальных клик из Ω равны 5, а из равенства $p_{33}^1 = 9$ следует, что порядки максимальных клик из Ω равны 4, противоречие.

Если $p=2$, то равенство $p_{11}^1 = 12$ влечет, что порядки максимальных клик из Ω четны, противоречие с действием g на $[e]$.

Лемма 4.4. Если Ω содержит две вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ , то $p \leq 7$.

Доказательство. Пусть Ω содержит две вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ . По лемме 7 из [3] имеем $p \leq 11$.

Пусть $p=11$. Тогда Γ_3 индуцирует на Ω вполне регулярный граф с параметрами $(v', k', 5, 9)$, где $54 - k'$ и $343 - v'$ делятся на 11.

Так как $k'(k' - 6) = 9k_2'$, то 9 делит $k'(k' - 6)$. Отсюда 3 делит k' и $18 - k'/3$ делится на 11, поэтому $k'=21$, $k_2'=35$.

Число ребер в графе Γ_3 между Ω и $\Gamma_3 - \Omega$ не меньше $57 \cdot 33$, но не больше $343 - 57 = 286$, противоречие. Теорема 2 доказана.

Докажем следствие 2.

Пусть Γ – граф, удовлетворяющий условиям следствия 2, $G = \text{Aut}(\Gamma)$ – неразрешимая группа, действующая транзитивно на множестве вершин графа Γ , $K = O_7(G)$, $\bar{T}$ – цокль группы $\bar{G} = G/K$.

Тогда $\bar{T}$ содержит единственную компоненту $\bar{L}$, точно действующую на K . Применим следствие 1 из [3]. Если группа $\bar{L}$ изоморфна A_5, A_6 или $\text{PSp}_4(3)$, то $|K| = 7^4$, $|\bar{T} : \bar{T}_a| = 7^3$. Противоречие с действием $\bar{T}_a$ на K_a . Итак, группа $\bar{L}$ изоморфна либо $L_2(7)$ и $|K| = 7^3$, либо $\text{SL}_2(7)$ и $|K| = 7^2$ (см. [6]). Следствие 2 доказано.

Список источников

1. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-Regular Graphs, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. 1989.
2. Чень Минчжу, Махнев А.А., Климин В.С. О дистанционно регулярных графах диаметра 3 и степени 44.
3. Makhnev A.A., Bitkina V.V., Gutnova A.K., Automorphisms of a distance regular graph with intersection array $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ // Vladikavkaz. Mat. Zh. 2020. Vol. 22, №. 2. P. 24–33.
4. Гаврилюк А.Л., Махнев А.А. Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Доклады РАН. 2010. Т. 432, № 5. С. 583–587.
5. Cameron P.J. Permutation Groups. London Math. Soc. Student Texts № 45. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
6. Cameron P.J., van Lint J. Graphs, Codes and Designs. London Math. Soc. Student Texts № 22. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1991.
7. Wilson R., Walsh P., Tripp J., Suleiman I., Parker R., Norton S., Nickerson S., Linton S., Bray J., Abbott R. ATLAS of Finite Group Representations – Version 3, 2008.

References

1. Brouwer, A.E., Cohen, A.M. and Neumaier A. (1989), *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg New York.
2. Chen, Minzhu, Makhnev, A.A. and Klimin V.S., "On distance-regular graphs of diameter 3 and degree 44".
3. Makhnev, A.A., Bitkina, V.V. and Gutnova A.K. (2020), "Automorphisms of a distance regular graph with intersection array $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ ", *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, vol. 22, no. 2, pp. 24–33.
4. Gavriluk, A. L. and Makhnev, A. A. (2010), "On Automorphisms of Distance-Regular Graphs with Intersection Array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ ", *Doklady Mathematics*, vol. 432, no. 5, pp. 583–587.
5. Cameron, P.J. (1999), *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts № 45, Cambridge, Cambridge Univ. Press.
6. Cameron, P.J. and van Lint J. Graphs (1991), *Codes and Designs*. London Math. Soc. Student Texts № 22, Cambridge, Cambridge Univ. Press.

7. Wilson, R., Walsh, P., Tripp, J., Suleiman, I., Parker, R., Norton, S., Nickerson, S., Linton, S., Bray, J. and Abbott, R. (2008), "ATLAS of Finite Group Representations – Version 3".

Информация об авторах:

М. Чень – кандидат физико-математических наук, доцент Университета провинции Хайнань, Хэйкоу, Китай;

А. А. Махнев – доктор физико-математических наук, профессор, член-корр. РАН, главный научный сотрудник Института математики и механики УрО РАН (620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д. 16), AuthorID: 2970;

В. С. Климин – аспирант Уральского федерального университета (620075, Россия, г. Екатеринбург, просп. Ленина, д. 51).

Information about the authors:

Minzhu Chen – Candidate of Sciences (physical and mathematical), associate professor at Hainan University, Haikou, China;

Alexander A. Makhnev – Doctor of Sciences (physical and mathematical), Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Chief Researcher at the Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg, Russia, 620990), AuthorID: 2970;

Vasiliy S. Klimin – postgraduate student at Ural Federal University (51, prosp. Lenina, Yekaterinburg, Russia, 620075).

«Механика»

Научная статья

УДК 517.977

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-34-41

Системы управления с тиристорными преобразователями**Геннадий Григорьевич Иванов¹, Геннадий Викторович Алфёров²,****Владимир Степанович Королёв³**^{1, 2, 3}Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Россия¹guennadi.ivanov@gmail.com²g.alferov@spbu.ru³v.korolev@spbu.ru

Аннотация. В статье рассматриваются системы, в контуре управления которых содержатся тиристорные преобразователи или особый вид системы косвенного управления. Приведен пример построения автоколебаний в системе, описывающей поведение электрических устройств с использованием таких элементов в контуре управления. Предложены критерий орбитальной устойчивости и метод синтеза стабилизирующих управлений. Представлены условия существования орбитальной асимптотической устойчивости и устойчивости по Ляпунову для периодических решений с заданным периодом. Синтезирован контур управления, обеспечивающий существование таких решений. Для структурно-линейных систем приведены примеры автоколебаний. Построены решения для автоколебаний заданного периода.

Ключевые слова: негладкий анализ; системы переменной структуры; управление; тиристорные преобразователи; автоколебания

Для цитирования: Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С. Системы управления с тиристорными преобразователями // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 34–41. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-34-41.

Статья поступила в редакцию 19.02.2024; одобрена после рецензирования 23.05.2024; принята к публикации 17.06.2024.

«Mechanics»

Research article

Control Systems With Thyristor Converters**Gennadiy G. Ivanov¹, Gennady V. Alferov², Vladimir S. Korolev³**^{1, 2, 3}St. Petersburg State University, St. Petersburg, Peterhof, Russia¹guennadi.ivanov@gmail.com²g.alferov@spbu.ru³v.korolev@spbu.ru

Abstract. The article discusses systems whose control circuit contains thyristor converters or a special type of indirect control system. An example of constructing self-oscillations in a system describing the behavior of electrical devices using such elements in a control loop is given. The criterion of orbital stability and the method of synthesis of stabilizing controls are proposed. The conditions for the existence of orbital asymptotic stability and Lyapunov stability for periodic solutions with a given period are presented. A control loop has been synthesized that ensures the existence of such solutions. Examples of self-oscillations are given for structurally linear systems. Solutions for self-oscillations of a given period are constructed.



Эта работа © 2024 Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Keywords: non-smooth analysis; systems of variable structure; control; self-oscillations; thyristor converters

For citation: Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Korolev V. S. (2024), "Control Systems With Thyristor Converters", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(65), pp. 34-41. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-34-41.

The article was submitted 19.02.2024; approved after reviewing 23.05.2024; accepted for publication 17.06.2024.

Введение

В работе рассмотрена задача стабилизации программных движений систем, в контур управления которых включены тиристорные преобразователи. Класс систем, названных системами переменной структуры (СПС), включается в класс вызывающих в настоящее время все возрастающий интерес так называемых *трансформирующихся систем*, которые можно трактовать как системы переменной структуры.

Толчком к появлению теории систем с переменной структурой послужило предложение использовать нелинейную коррекцию, в соответствии с которой в зависимости от состояния системы управления параметры обратной связи скачкообразно менялись [1–3]. Идея оказалась крайне плодотворной и стала систематически применяться для улучшения качества регулирования при решении самых разнообразных задач управления [4–9]. Для систем второго порядка С.В. Емельяновым вводятся основные режимы работы СПС: движение по вырожденным траекториям, режим переключений и режим скольжения по прямой переключения структур. Были предложены критерии орбитальной устойчивости и метод синтеза стабилизирующих управлений. Рассматривалась задача построения режима автоколебаний. Для структурно-линейных систем были приведены примеры построения автоколебаний [10]

В работах [9–16] для структурно-линейной системы, описывающей с достаточной степенью точности поведение системы, в контуре управления которых содержатся транзисторные ключи (своего рода системы прямого регулирования), рассматривалась задача построения режима автоколебания.

Подобные системы можно рассматривать как примеры использования общей теории, они представлены в [17–28]. В настоящей статье рассмотрен еще один пример использования теории для построения автоколебаний в системе, описывающей поведение электротехнических устройств, содержащих в

контуре управления особые тиристорные преобразователи.

Будут выписаны условия существования орбитальной асимптотической устойчивости и устойчивости по Ляпунову для периодических решений с заданным периодом и осуществлен синтез контура управления, обеспечивающего наличие таких решений. Обращение к этой задаче объясняется тем, что в качестве элементной базы для устройств частотного управления электродвигателями используются силовые тиристоры и транзисторы.

Сферой применения преобразователей на тиристорах являются мощные электроприводы с высокими требованиями к перегрузочной способности. Благодаря способности выдерживать ток на порядок выше номинального значения, устройства широко используются в приводах механизмов при высоких напряжениях, например, в грузоподъемных машинах, высокоинерционном промышленном оборудовании. Элементная база тиристорных преобразователей стоит значительно дешевле силовых быстродействующих транзисторов. Мощность преобразователей с непосредственной связью практически не ограничена. Такие электроприводы можно легко модернизировать путем подключения дополнительных тиристорных модулей.

Исследование управляемых систем переменной структуры

Рассмотрим электротехническое устройство, в контуре управления которого имеются два тиристорных преобразователя, а именно: проанализируем систему, поведение которой с достаточной степенью точности описывается соотношениями

$$\frac{dy}{dt} = Ay + b(I_1 - I_2), \quad (1)$$

$$\frac{dI_i}{dt} = C^{-1}(I_1 - I_2), \quad \frac{dI_i}{dt} = u_i \phi_i, \quad (2)$$

$$u_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2;$$

$$\phi_1 = L_1^{-1}(E - U - d^* y),$$

$$\phi_2 = L_2^{-1}(U + d^* y).$$

Здесь y – n -вектор фазовых переменных объектов управления; U, I_1, I_2 (напряжение, токи) – переменные, описывающие поведение двух тиристоров; A ($A \in Z_-$), b, d – постоянные матрица и векторы размерностью соответственно $n \times n$ и n ; L_1, L_2, C, E (индуктивности, емкость, ЭДС источника питания) – связанные с тиристорами положительные константы; u_i – управления, которые зависят как от управляющих сигналов $v_i \equiv v_i(y, U, I_1, I_2)$, так и от особенностей тиристоров, именно: если $u_i = 0$, то $I_i = 0$. Переход со значения $u_i = 0$ на значение $u_i = 1$ осуществляется в момент, когда впервые одновременно выполняются два условия:

$$v_i \geq 0, \phi_i > 0. \quad (3)$$

Переход со значения $u_i = 1$ на значение $u_i = 0$ осуществляется в момент, когда наступает равенство:

$$I_i = 0. \quad (4)$$

Задача построения автоколебания в системе (1)–(4): необходимо выбрать параметры L_1, L_2, C, E и управляющие сигналы v_i в виде линейных функций переменных y, U, I_1, I_2 таким образом, чтобы у системы (1)–(4) существовало орбитально асимптотически устойчивое и устойчивое по Ляпунову периодическое решение с заданными периодом и амплитудой. При решении задачи построения автоколебаний в системе мы ограничим себя классом T – периодических программных решений, для которых на периоде T каждый тиристор включается и выключается только один раз. При этом мы рассмотрим два типа этих решений, отличающихся друг от друга структурой программного управления $w^p(t)$, имеющего соответственно один из видов

$$w^p(t) = w^1(t), \quad w^1(t) \equiv \begin{cases} w_{3,t} \in [t_{0j}^p, t_{1j}^p), \\ w_{1,t} \in [t_{1j}^p, t_{2j}^p), \\ w_{3,t} \in [t_{2j}^p, t_{3j}^p), \\ w_{2,t} \in [t_{3j}^p, t_{3j}^p); \end{cases} \quad (5)$$

$$w^p(t) = w^2(t), \quad w^2(t) \equiv \begin{cases} w_{1,t} \in [t_{0j}^p, t_{1j}^p), \\ w_{4,t} \in [t_{1j}^p, t_{2j}^p), \\ w_{2,t} \in [t_{2j}^p, t_{3j}^p), \\ w_{4,t} \in [t_{3j}^p, t_{3j}^p); \end{cases} \quad (6)$$

$$t_{ij}^p = t_i + jT, \quad t_4 = t_0 + T,$$

$$i = 0, 1, \dots, 4, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Общим для этих управлений является то, что в начальный момент t_0 включается первый тиристор. Кроме того, для простоты будем строить периодические решения, обладающие свойством центральной симметрии, правда, для смещенного центра не для всех фазовых переменных. Для этого будем считать, что $L_1 = L_2 = L$, т. е. тиристоры одинаковы.

Управляемую трансформирующуюся систему, описываемую обыкновенным дифференциальным уравнением, можно записывать в общем случае так:

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y, u, w), \quad (8)$$

где w – принимающее m разных значений w_i кусочно-постоянное управление верхнего уровня, которое определяет изменение структуры трансформирующейся системы: u – управление нижнего уровня, которое является истинным управлением и выбирается с учетом дополнительных условий или определенных соображений. При таком описании трансформирующихся систем здесь рассматриваются подобные системы с уже выбранным управлением u .

Решать задачу построения автоколебания в системе (1)–(4) будем по той же схеме, а именно сформулируем аналоги утверждений для управления в системе тиристорными преобразователями. Выпишем системы соответствующего вида и условия перехода от одного значения управления $w^p(t)$ к другому применительно к управлениям (5)–(7), причем в принятой ранее форме, а затем докажем аналоги теорем работы [10].

Для решения задачи построения автоколебания в системе (1)–(4) положим

$$l_{1*} = L_1^{-1}, \quad l_{2*} = L_2^{-1}, \quad l_{3*} = l_{1*} + l_{2*}, \quad l_{4*} = 0, \quad (9)$$

$$l_* = L^{-1}, \quad c_* = C^{-1},$$

$$E_* = l_{1*} l_{2*} l_{3*}^{-1} E,$$

$$y_{n+1} = U - l_{2*}^{-1} E_*,$$

$$y_{n+2} = I_1 - I_2,$$

$$y_{n+3} = 2l_{3*}^{-1} (l_{2*} I_1 + l_{1*} I_2).$$

Тогда систему (1)–(2) можно переписать так:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + by_{n+2}, \quad (10)$$

$$\frac{dy_{n+1}}{dt} = c_* y_{n+2}, \quad (11)$$

$$\frac{dy_{n+2}}{dt} = \begin{cases} E_* - l_{1*}(d^*y + y_{n+1}), & w=w_1, \\ E_* - l_{2*}(d^*y + y_{n+1}), & w=w_2, \\ -l_{3*}(d^*y + y_{n+1}), & w=w_3, \\ -l_{4*}(d^*y + y_{n+1}), & w=w_3; \end{cases} \quad (12)$$

$$\frac{dy_{n+3}}{dt} = \begin{cases} 2l_{2*}l_{3*}^{-1}[E_* - l_{1*}(d^*y + y_{n+1})], & w=w_1, \\ 2l_{2*}l_{3*}^{-1}[E_* - l_{2*}(d^*y + y_{n+1})], & w=w_2, \\ 2E_*, & w=w_3, \\ -l_{4*}(d^*y + y_{n+1}), & w=w_3; \end{cases} \quad (13)$$

Чтобы записать систему (10) в векторной форме, введем обозначения, полагая

$$A^{\sim}(w) = \{A_i^{\sim} |_{w=w_i}\},$$

$$A_i^{\sim} = \begin{pmatrix} A & 0_{n1} & b \\ 0_{1n} & 0 & c_* \\ -l_{i*}d^* & -l_{i*} & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

$$\tilde{A}^{\sim}(w) = \{\tilde{A}_i^{\sim} |_{w=w_i}\},$$

$$\tilde{A}_1^{\sim} = \begin{pmatrix} A_1^{\sim} & 0_{n+2,1} \\ 2l_{2*}l_{3*}^{-1}(A_1^{\sim})_{n+2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_2^{\sim} = \begin{pmatrix} A_2^{\sim} & 0_{n+2,1} \\ 2l_{1*}l_{3*}^{-1}(A_2^{\sim})_{n+2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_3^{\sim} = \begin{pmatrix} A_3^{\sim} & 0_{n+2,1} \\ 0_{1,n+2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_4^{\sim} = \begin{pmatrix} A_4^{\sim} & 0_{n+2,1} \\ 0_{1,n+2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}^{\sim}(w) = \{\tilde{b}_i^{\sim} |_{w=w_i}\},$$

$$\tilde{b}_1^{\sim} = -\tilde{b}_2^{\sim} = (E_{n+2})^{n+2}, \quad \tilde{b}_3^{\sim} = \tilde{b}_4^{\sim} = 0_{n+2,1},$$

$$\tilde{b}^{\sim}(w) = \{\tilde{b}_i^{\sim} |_{w=w_i}\},$$

$$\tilde{b}_1^{\sim*} = \{b_1^{\sim*}, 2l_{2*}l_{3*}^{-1}\}, \quad \tilde{b}_2^{\sim*} = \{b_2^{\sim*}, 2l_{1*}l_{3*}^{-1}\},$$

$$\tilde{b}_3^{\sim*} = \{b_3^{\sim*}, 2\}, \quad \tilde{b}_4^{\sim*} = \{b_4^{\sim*}, 0\},$$

$$\tilde{y}^{\sim} = \{y^*, y_{n+1}, y_{n+2}\}, \quad \tilde{y}^{\sim*} = \{y^{\sim*}, y_{n+3}\},$$

$$\tilde{\xi}^{\sim} = E_*^{-1}y^{\sim}, \quad \tilde{\xi}^{\sim*} = E_*^{-1}y^{\sim*},$$

Тогда данную систему можно переписать так:

$$\frac{d\tilde{y}^{\sim}}{dt} = A^{\sim}(w)y^{\sim} + E_*\tilde{b}^{\sim}(w),$$

а вектор-функция $\tilde{\xi}^{\sim}$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{d\tilde{\xi}^{\sim}}{dt} = f_i(\tilde{\xi}^{\sim}).$$

Таким образом, в нашем случае система примет вид

$$\frac{d\tilde{\xi}^{\sim}}{dt} = f_i(\tilde{\xi}^{\sim}) = A_i^{\sim}\tilde{\xi}^{\sim} + b_i^{\sim}, \quad (14)$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Учтем теперь условие (8), в силу которого выполняется $l_{1*} = l_{2*} = l_*$.

Тогда параметр E_* , последний элемент вектор-функции $\tilde{b}^{\sim}(w)$ и последние строки матриц $A^{\sim}(w)$, $\tilde{A}^{\sim}(w)$ запишутся так:

$$E_* = \frac{1}{2}l_*E,$$

$$(\tilde{b}_1^{\sim})_{n+3} = (\tilde{b}_2^{\sim})_{n+3} = 1, (\tilde{b}_3^{\sim})_{n+3} = 2,$$

$$(\tilde{b}_4^{\sim})_{n+3} = 0,$$

$$(A_1^{\sim})_{[n+2]} = (A_2^{\sim})_{[n+2]} = \frac{1}{2}(A_3^{\sim})_{[n+2]} =$$

$$\{-l_*d^*, -l_*, 0\}, (A_4^{\sim})_{[n+2]} = 0_{1,n+2},$$

$$(\tilde{A}_1^{\sim})_{[n+3]} = (\tilde{A}_2^{\sim})_{[n+3]} = \{(A_1^{\sim})_{[n+2]}, 0\},$$

$$(\tilde{A}_3^{\sim})_{[n+3]} = (\tilde{A}_4^{\sim})_{[n+3]} = 0_{1,n+3}.$$

Прежде чем обратиться к соотношениям (2)–(4) учтем также то обстоятельство, что мы будем искать T -периодические решения систем (12)–(13), обладающие центральной симметрией для вектор-функций $\tilde{y}^p(t)$, $\tilde{\xi}^p(t)$, т.е. удовлетворяющие условиям

$$\tilde{\xi}^p\left(t \pm \frac{T}{2}\right) = E_*^{-1}\tilde{y}^p\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \equiv \tilde{\xi}^p(t)$$

$$= E_*^{-1}\tilde{y}^p(t).$$

Как можно заметить, для таких периодических решений соотношение (7) примет вид

$$t_{ij}^p = t_i + jT, \quad i = 0, \dots, 4, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

$$t_1 = t_0 + \vartheta, \quad \vartheta \in \left(0, \frac{T}{2}\right),$$

$$t_2 = t_0 \pm \frac{T}{2}, \quad t_3 = t_1 \pm \frac{T}{2}, \quad t_4 = t_0 + T.$$

Итак, преобразуем соотношения (2)–(4), для чего величины v_i , φ_i , I_i запишем в следующей форме:

$$v_i = E_*v_{i*}, \quad v_{i*} = \tilde{\xi}\tilde{\mu}_i^* - v_i,$$

$$\varphi_i = E_*\varphi_{i*}, \quad \varphi_{i*} = 1 + \tilde{\xi}\tilde{\mu}_{i+2}^*,$$

$$I_i = -E_*I_{i*}, \quad I_{i*} = \tilde{\xi}\tilde{\mu}_{i+4}^*,$$

После подробного изложения процесса формирования соответствующих условий для построения программных решений и при использовании необходимых удобных обозначений можно доказать следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть величины $w^p(t)$ удовлетворяют условиям (5)–(6) и соотношениям (7), тогда вектор-функции $x(t) = Ey(t)$ удовлетворяют системе (3) с условиями переключения тиристорных на плоскостях переключения управлений, а вектор-функция будет T -периодическим решением системы с амплитудой, пропорциональной параметру E .

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и соотношения (3) определяются по формулам (3)–(4), тогда вектор-функции $x(t^*)$ будет орбитально асимптотически устойчивым и устойчивым по Ляпунову T -периодическим решением системы.

Теорема 3. Пусть существуют константы λ_l , удовлетворяющие условиям

$$|\lambda_l| < 1 \quad (l = 1, 2, \dots, n + 2)$$

и m -периодическая ($m = 2$) вектор-функция $v(\sigma)$ размерностью $(n + 3)$, такие, что при $x(t^*)$ выполнены все условия теоремы. Тогда задача построения автоколебания в системе разрешима.

Дополнительные ограничения были наложены на параметры системы (1) и ограничения (5), (6) на моменты переключения управления $w^p(t)$. В результате искомое периодическое решение определяется однозначно в отношении его орбиты. Если ограничения снять, сохранив лишь условие (7), связанное с периодичностью искомых программных решений, то окажется, что такие периодические решения будут определяться по тем же формулам, в которых вектор x_0 следует заменить вектором $x(t_0) = x(T + t_0)$, который находится из соотношения (4).

Заключение

Толчком к проведению изложенных здесь исследований явилась потребность в разработке методов построения автоколебаний для системы с тиристорными преобразователями, описывающей процессы излучения мощного радиопередатчика.

Здесь рассмотрены лишь такие движения, для которых программное управление меняет свое значение бесконечное число раз.

Вызвано это тем обстоятельством, что в противном случае по истечении некоторого конечного времени все решения системы (1) становились бы решениями системы при некотором фиксированном значении параметра i .

Следовательно, рассмотренные здесь задачи сводились бы к констатации факта, что орбитально асимптотически устойчиво или нет программное движение данной фиксированной системы.

Список источников

1. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. М.: Наука, 1967.
2. Емельянов С.В. Системы переменной структуры – ключ к открытию новых типов обратной связи // Нелинейная динамика и управление. М.: Физматлит, 2013. № 8. С. 5–24.

3. Емельянов С.В., Таран В.А. К вопросу использования инерционных звеньев для построения одного класса систем автоматического регулирования с переменной структурой // Автоматика и телемеханика, 1963. Т. 24, вып. 1. С. 33–46.
4. Емельянов С.В., Уткин В.И. Применение систем автоматического регулирования с переменной структурой для управления объектами, параметры которых изменяются в широких пределах // Кибернетика и Теория Регулирования. Докл. АН СССР, 1963. Т. 152, № 2. С. 299–301.
5. Беркович Е.И. Тиристорные преобразователи высокой частоты. Л.: Энергия, 1973.
6. Смирнов Е.Я. О стабилизации программных движений систем переменной структуры // Вестник Ленингр. ун-та ЛГУ. Сер. мат., мех., астр. 1990. Вып. 1. С. 40–43.
7. Уткин В.И. Системы с переменной структурой, состояние проблемы, перспективы // Автоматика и Телемеханика. 1983, 9. С. 5–25.
8. Цыпкин Я.З. Теория импульсных систем. М.: Физматгиз, 1958.
9. Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Ефимова П.А. Устойчивость селекторнолинейных дифференциальных включений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 2(37). С. 25–30.
10. Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С. Стабилизация программных движений систем переменной структуры // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2(61). С. 16–28.
11. Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С. Системы с транзисторными ключами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2020. Вып. 2 (49). С. 14–18.
12. Alferov G., Ivanov G., Efimova P., Sharlay A. Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of hysteresis type (2017) AIP Conference Proceedings, 1863, P. 080003. DOI: 10.1063/1.4992264.
13. Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A. The structural study of limited invariant sets of relay stabilized system (Book Chapter) (2017) Mechanical Systems: Research, Applications and Technology, pp. 101–164.
14. Alferov G.V., Ivanov G.G., Efimova P.A., Sharlay A.S. Stability of linear systems with multitask righthand member (Book Chapter) (2018) Stochastic Methods for Estimation and

- Problem Solving in Engineering, pp.74–112. DOI: 10.4018/978-1-5225-5045-7.ch004.
15. Ivanov G., Alferov G., Sharlay A., Efimova P. Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System, in International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, 2017, AIP Conference Proceedings. Vol. 48 1863, p. 080002. DOI: 10.1063/1.4992263.
 16. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. About stability of selector linear differential inclusions (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P.150013, DOI: 10.1063/1.5079216.
 17. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differential Equations, Mathematics. 2018. Vol. 6, no. 9, P.171, DOI: 10.3390/math 6090171.
 18. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements. (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150014. DOI: 10.1063/1.5079217.
 19. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V., Selitskaya E. A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis. (2019) Mathematics, 7(8), 677.
 20. Korolev V. Properties of solutions of nonlinear equations of mechanics control systems, in 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017 - IEEE Conference Proceedings. P. 7973973.
 21. Ivanov G., Alferov G., Efimova P. Integrability of nonsmooth one-variable functions // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov), CNSA 2017 – Proceedings, 7973965.
 22. Ivanov G., Alferov G., Gorovenko P., Sharlay A. Estimation of periodic solutions number of first-order differential equations (2018) AIP Conference Proceedings, 1599. 080006.
 23. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Sharlay A. About stability of selector linear differential inclusions (2018) AIP Conference Proceedings, 2040. P. 150013. DOI: 10.1063/1.5079216.
 24. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V. Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations. AIP Conference Proceedings, 2020. 2293, 060004.
 25. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V. About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations AIP Conference Proceedings, 2020. 2293, 060005.
 26. Kadry S., Alferov G., Korolev V., Shymanchuk D. Mathematical models of control processes and stability in problems of mechanics AIP Conference Proceedings. 2022, 2425. 080004.
 27. Kadry S., Alferov G., Ivanov G., Korolev V. Study of control systems with transistor keys. AIP Conference Proceedings, 2022. 2425, 080003.
 28. Иванов Г.Г., Алфёров Г.В., Королёв В.С. Исследование решений линейной одно-родной системы дифференциальных уравнений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 1(60). С. 47–53. DOI: 10.17072/1993-0550-2023-1-47-53.

References

1. Emel'yanov, S.V. (1967), *Sistemy avtomaticheskogo upravleniya s peremennoj strukturoj* [Automatic control systems with variable structure], Nauka, Moscow, Russia.
2. Emel'yanov, S.V. (2013), "Variable structure systems are the key to unlocking new types of feedback", *Nelinejnaya dinamika i upravlenie*. Vyp. 7. M.: Fizmatlit, no. 8, pp. 5-24.
3. Emel'yanov, S.V. and Taran, V. A., (1963), "Toward the use of inertial links for the construction of one class of automatic control systems with variable structure", *Avtomat. i telemekh.*, T. 24, issue 1, pp. 33-46.
4. Emel'yanov, S.V. and Utkin, V.I., (1963), "Application of automatic control systems with variable structure for controlling objects whose parameters change within wide limits", *Kibernetika i Teoriya Regulirovaniya. Dokl. AN SSSR*, T. 152, no. 2, pp. 299-301.
5. Berkovich, E.I., (1973), *High frequency thyristor converters* [Tiristornye preobrazovateli vysokoj chastoty], Energiya, Leningrad.
6. Smirnov, E.Ya. (1990), "On stabilization of program motions of systems of variable structure", *Vestn. Leningr. un-ta LGU. Ser. mat., mekh., astr.*, issue 1, pp.40-43.
7. Utkin, V.I., (1983), "Systems with variable structure, state of the problem, perspectives", *Avtomatika i Telemekhanika*, no. 9, pp. 5-25.

8. Cypkin, Ya. Z. (1958), *Theory of impulse systems* [Teoriya impul'snyh system], Fizmatgiz, Moscow, Russia.
9. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Korolev, V. S. (2017), "Stability of selector-linear differential inclusions", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(37), pp. 25-30.
10. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Korolev, V. S. (2023), "Program Motions Stabilization of Variable Structure Systems", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(61), pp. 16-28.
11. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Korolev, V. S. (2020), "Systems with transistorized keys", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(49), pp. 14-18.
12. Alferov, G., Ivanov, G., Efimova, P. and Sharlay, A. (2017), "Study on the structure of limit invariant sets of stationary control systems with nonlinearity of hysteresis type", *AIP Conference Proceedings*, pp. 080003. DOI: 10.1063/1.4992264.
13. Alferov, G.V., Ivanov, G.G. and Efimova, P.A. (2017), "The structural study of limited invariant sets of relay stabilized system (Book Chapter) ", *Mechanical Systems: Research, Applications and Technology*, pp. 101–164.
14. Alferov, G.V., Ivanov, G.G., Efimova, P.A. and Sharlay, A.S. (2018), "Stability of linear systems with multitask righthand member (Book Chapter) ", *Stochastic Methods for Estimation and Problem Solving in Engineering*, pp. 74–112. DOI: 10.4018/978-1-5225-5045-7.ch004.
15. Ivanov, G., Alferov, G., Sharlay, A. and Efimova, P. (2017), "Conditions of Asymptotic Stability for Linear Homogeneous Switched System", *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, vol. 48(1863), p. 080002. DOI:10.1063/1.4992263.
16. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Sharlay, A. (2018), "About stability of selector linear differential inclusions", *AIP Conference Proceedings*, 2040, P.150013, DOI:10.1063/1.5079216.
17. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Sharlay, A. (2018), "Almost Periodic Solutions of First-Order Ordinary Differential Equations", *Mathematics*, vol. 6, no. 9, p.171, DOI:10.3390/math 6090171.
18. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Sharlay, A. (2018), "Stabilization of the program motion of control object with elastically connected elements", *AIP Conference Proceedings*, 2040, p. 150014. DOI:10.1063/1.5079217.
19. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G., Korolev, V. and Selitskaya E. (2019), "A new method to study the periodic solutions of the ordinary differential equations using functional analysis", *Mathematics*, 7(8), p. 677.
20. Korolev, V. (2017), "Properties of solutions of nonlinear equations of mechanics control systems" *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov)*, *CNSA 2017 - IEEE Conference Proceedings*. P. 7973973.
21. Ivanov, G., Alferov, G. and Efimova, P. (2017), Integrability of nonsmooth one-variable functions", *2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (Dedicated to the Memory of V.F. Demyanov)*, *CNSA 2017 - Proceedings*, P. 7973965.
22. Ivanov, G., Alferov, G., Gorovenko, P. and Sharlay, A. (2018), "Estimation of periodic solutions number of first-order differential equations", *AIP Conference Proceedings*, 1959, P. 080006.
23. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Sharlay, A. (2018), "About stability of selector linear differential inclusions", *AIP Conference Proceedings*, 2040, P. 150013. DOI: 10.1063/1.5079216.
24. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Korolev, V. (2020), "Investigation of the stability of solutions of systems of ordinary differential equations", *AIP Conference Proceedings*, 2293, P. 060004.
25. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G. and Korolev V. (2020), "About of the asymptotical stability of solutions of systems of ordinary differential equations", *AIP Conference Proceedings*, 2293, P. 060005.
26. Kadry, S., Alferov, G., Korolev, V. and Shymanchuk, D. (2022), "Mathematical models of control processes and stability in problems of mechanics", *AIP Conference Proceedings*, 2425, P. 080004.
27. Kadry, S., Alferov, G., Ivanov, G., and Korolev, V. (2022), "Study of control sys-

- tems with transistor keys", *AIP Conference Proceedings*, 2425, P. 080003.
28. Ivanov, G. G., Alferov, G. V. and Korolev V.S. (2023), "The Differential Equations Linear Homogeneous System Solutions Investigation", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(60), pp. 47-53.

Информация об авторах:

Г. Г. Иванов – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, кафедра механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID: 116900;

Г. В. Алфёров – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID: 2873;

В. С. Королёв – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры механики управляемого движения, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Петергоф, Университетский пр., д. 35), AuthorID: 7342.

Information about the authors:

Gennadiy G. Ivanov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Department of Mechanics of Controlled Motion, St. Petersburg State University (35, Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID: 116900;

Gennadiy V. Alferov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35, Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID: 2873;

Vladimir S. Korolev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Controlled Motion Mechanics, St. Petersburg State University (35, Universitetsky Pr., Peterhof, St. Petersburg, Russia, 198504), AuthorID: 7342.

Научная статья

УДК 531.9; 514.853

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53

Движение гиригостата вокруг центра инерции в полувеклидовом пространстве

Николай Николаевич Макеев

г. Саратов, Россия

nmakeyev@mail.ru

Аннотация. Исследуется инерционное движение гиригостата в полувеклидовом пространстве с заданными индексом и дефектом. Гиригостат с постоянным гиригостатическим моментом движется так, что его носитель вращается вокруг неподвижного центра инерции. Получены критерии существования регулярных движений как условия наличия осевой структурно-кинетической симметрии гиригостата. Исследованы свойства нутационного, прецессионного, колебательно-вращательного движений и дано их описание в конфигурационном и фазовом пространствах. Определены квадратичные зависимости параметров движения гиригостата в эллиптических функциях времени. Найдены параметрические уравнения годографов векторов угловой скорости и кинетического момента. Исследование проведено для случая собственного вектора кинетического момента гиригостата.

Ключевые слова: гиригостат; полувеклидово пространство; регулярное движение; сферическое движение; годограф вектора

Для цитирования: Макеев Н.Н. Движение гиригостата вокруг центра инерции в полувеклидовом пространстве // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 42–53. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53.

Статья поступила в редакцию 25.04.2024; одобрена после рецензирования 20.05.2024; принята к публикации 11.06.2024.

Research article

The Gyrostat Motion Around the Inertia Center in the Semi-Euclidean Space

Nikolay N. Makeev

Saratov, Russia

nmakeyev@mail.ru

Abstract. The inertial motion of a gyrostat in a semi-Euclidean space with given index and defect is studied. A gyrostat with a constant gyrostatic moment moves so that its carrier rotates around a fixed center of inertia. Criteria for the existence of regular motions are obtained as a condition for the presence of axial structural-kinetic symmetry of the gyrostat. The properties of nutational, precessional, vibrational-rotational motions are studied and their description in configuration and phase spaces is given. The quadratic dependences of the gyrostat motion parameters in elliptic functions of time are determined. Parametric equations of hodographs of angular velocity and kinetic momentum vectors are found. The study was carried out for the case of the gyrostat angular momentum eigenvector.

Keywords: gyrostat; semi-Euclidean space; regular movement; spherical movement; vector hodograph

For citation: Makeev, N. N. (2024), "Motion of a Gyrostat Around the Center of Inertia in Semi-Euclidean Space", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(65), pp. 42-53. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53.

The article was submitted 25.04.2024; approved after reviewing 17.05.2024; accepted for publication 11.06.2024.



Эта работа © 2024 Макеев Н.Н. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Введение

Фундаментальное направление в рациональной механике – механика неевклидовых пространств – является необходимой составной частью современной механики твердого тела и сложной механической системы. Это научное направление увеличивает многообразие механических явлений, расширяя границы области действия классической механики Галилея–Ньютона, исторически построенной для евклидова пространства.

Появлению и развитию этого направления исследований способствовали выдающиеся работы Н.И. Лобачевского, А.П. Котельникова, У.К. Клиффорда, Н.Е. Жуковского, А.П. Широкова, в которых содержались новые свойства, описания и интерпретация открытых ими закономерностей и механических явлений.

В настоящей работе проведено исследование интегрального многообразия динамической системы гиригата, на который не влияют внешние моментно-силовые факторы. Такое исследование позволяет получить картину и свойства движения, происходящего без влияния на гиригата внешнего моментно-силового воздействия.

1. Предварительные положения

Согласно классификации, применяемой в проективной геометрии, рассматриваемое здесь пространство является действительным аффинным трехмерным пространством с индексом 2 и дефектом 0. Оно может быть определено и как полугиперболическое пространство с несобственной абсолютной плоскостью.

В настоящей работе под движением гиригата (в смысле механического движения) понимается перемещение его тела-носителя как абсолютно твердого тела. При этом все необходимые геометрические объекты и связанные с ними геометрические построения, вводимые в публикациях различными способами, приняты здесь согласно схеме, установленной в работе [1].

Вследствие существующего гомеоморфизма задача о движении гиригата в плоскости Лобачевского эквивалентна задаче о его вращении вокруг неподвижного полюса в полуевклидовом пространстве с метрическим тензором $g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$, отнесенном к пространству конфигураций тела, с компонентами $g_{11} = g_{22} = -1$, $g_{33} = 1$ при $i = j$; $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Здесь $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) – орты осей заданной координатной системы в данном пространстве.

Согласно проективной модели Э. Бельтрами–Ф. Клейна, плоскость Лобачевского наглядно представляется в виде внутренних точек абсолюта гиперболической плоскости

$$g_{ij}x^i x^j \equiv -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0,$$

где x^i, x^j – контравариантные координаты.

Под гиригатам в полуевклидовом пространстве в общепринятом смысле понимается гиригата, расположенный внутри изотропного конуса этого пространства, а под неподвижным полюсом O , совпадающим с центром инерции, относительно которого движется гиригата, – вершина данного конуса.

Тогда для радиусов-векторов точек гиригата существует условие $\mathbf{r}_s^2 = g_{ij}r_s^i r_s^j > 0$ и данные векторы, по определению, являются собственными.

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в неподвижном полюсе O : ортобазис Γ_0 , неподвижный относительно инерциального конфигурационного пространства гиригата, и ортобазис $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, неизменно связанный с телом-носителем гиригата, оси Ox_j которого совмещены с его главными в полюсе O осями приведенного (по Жуковскому) тензора инерции гиригата.

Обозначим: A_j – диагональные элементы матрицы тензора инерции, являющиеся главными центральными моментами инерции, соответствующими собственным значениям оператора инерции гиригата; $\mathbf{G}(G_j)$ – кинетический момент гиригата относительно полюса O ; $\mathbf{k}(k_j)$ – постоянный гиригата статический вектор-момент, заданный проекциями k_j на оси ортобазиса Γ ; главные центральные моменты инерции гиригата A_1, A_2 – моменты относительно не изотропных (идеальных) главных осей Ox_1, Ox_2 , а момент A_3 – относительно собственной главной оси инерции Ox_3 ; $\omega(\omega_j)$ – абсолютная угловая скорость тела-носителя. Здесь и всюду далее текущий индекс j последовательно принимает значения $j = 1, 2, 3$. В частности, символ (ω_j) кратко обозначает всю совокупность значений $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Пусть $\mathbf{e}_j$ ($j=1, 2, 3$) – орты осей базиса Γ . Тогда вектор угловой скорости носителя гиростата и его кинетический вектор-момент относительно полюса O представляются в виде, соответственно,

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{G} = G_1 \mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2 + G_3 \mathbf{e}_3.$$

Отсюда следует:

$$G_j = A_j \omega_j + k_j = G s_j \quad (j=1, 2, 3), \quad (1)$$

где $G = |\mathbf{G}| \neq 0$, s_j – соответствующие направляющие косинусы, для которых имеет место тривиальное тождество

$$\|\mathbf{s}\|^2 \equiv -s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 = \ell. \quad (2)$$

Здесь постоянная $\ell = (1, -1, 0)$ для случаев, при которых вектор $\mathbf{G}$ и его орт $\mathbf{s}$ – собственные, идеальные и изотропные, соответственно [1].

Следуя конструкционной схеме построения параметров ориентации базового вектора в полуевклидовом пространстве, принятой в работе [1], введем аналоги классических углов Эйлера $\lambda, \vartheta, \varphi$, определяющих ориентацию ортобазиса Γ относительно Γ_0 . Для собственного орта $\mathbf{s}$ имеем равенства [2]:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= [s_1, s_2, s_3] = \\ &= [\text{sh } \vartheta \sin \varphi, \text{sh } \vartheta \cos \varphi, -\text{ch } \vartheta], \end{aligned} \quad (3)$$

удовлетворяющие соотношению (2). Здесь параметры ориентации ϑ, φ по аналогии с классическими углами Эйлера будем называть *параметрами нутации и собственного вращения*, соответственно. При этом данные параметры (как и их классические аналоги), согласно способу их построения, являются безразмерными величинами.

Из равенств (1), (3) следуют зависимости вида $\omega_j(\lambda, \vartheta, \varphi)$ ($j=1, 2, 3$), являющиеся аналогами кинематических уравнений Эйлера, составленными относительно осей координатного базиса Γ .

Для собственного вектора $\mathbf{s}$ имеем [1]:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\lambda} \text{sh } \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ \omega_2 &= \dot{\lambda} \text{sh } \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ \omega_3 &= -(\dot{\lambda} \text{ch } \vartheta + \dot{\varphi}), \end{aligned} \quad (4)$$

где λ – параметр прецессии, являющийся аналогом угла прецессии в классификации углов Эйлера для евклидова пространства.

Введем вектор $\mathbf{W}$, являющийся проекцией скорости $\boldsymbol{\omega}$ на координатную плоскость Ox_1x_2 базиса Γ . Тогда, в силу равенств (4), имеем

$$\|\mathbf{W}\|^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 = (\dot{\lambda} \text{sh } \vartheta)^2 + \dot{\vartheta}^2. \quad (5)$$

Равенство (5) может применяться для анализа регулярных движений, рассматриваемых далее.

Рассмотрим функции:

$$\begin{aligned} K_1(\varphi) &= a_1 \sin^2 \varphi + a_2 \cos^2 \varphi, \\ K_2(\varphi) &= a_1 \cos^2 \varphi + a_2 \sin^2 \varphi, \\ N_1(\varphi) &= a_1 k_1 \sin \varphi + a_2 k_2 \cos \varphi, \\ N_2(\varphi) &= a_1 k_1 \cos \varphi - a_2 k_2 \sin \varphi, \\ m &= a_1 - a_2, \quad m_3 = a_3 k_3. \end{aligned} \quad (6)$$

В равенствах (6) и всюду далее обозначено:

$$a_j = A_j^{-1} \quad (j=1, 2, 3).$$

Для собственного вектора $\mathbf{G}$, согласно равенствам (1), (3), получаем [2]

$$\begin{aligned} (G_1, G_2, G_3) &= \\ &= G(\text{sh } \vartheta \sin \varphi, \text{sh } \vartheta \cos \varphi, -\text{ch } \vartheta). \end{aligned} \quad (7)$$

Исключая из системы равенств (1), (4) величины ω_j , в силу соотношений (3), (6), получаем систему уравнений, из которой находим [2]:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= GK_1(\varphi) - N_1(\varphi) \text{sh}^{-1} \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= mG \text{sh } \vartheta \sin \varphi \cos \varphi - N_2(\varphi), \\ \dot{\varphi} &= [a_3 - K_1(\varphi)]G \text{ch } \vartheta + \\ &+ N_1(\varphi) \text{cth } \vartheta + m_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Уравнения (8) заданы в односвязной регулярной ограниченной области, исключаящей особую точку $\vartheta = 0$.

Целью настоящей работы является определение характера инерционного движения гиростата путем нахождения аналитической зависимости вида $\Phi = \Phi(t)$, а также установление условий реализации его регулярных состояний, существующих в инерционном движении.

Здесь $\Phi = [\lambda(t), \vartheta(t), \varphi(t)]$ – вектор параметров ориентации – аналогов классических углов Эйлера.

Поставленная цель достигается на основе уравнений системы (8) с применением принятых предпосылок.

2. Регулярные движения

Под *регулярным движением* гиростата (или *движением типа регулярного*) понимается режим его состояния, при котором функции – параметры ориентации и (или) их производные по времени – постоянны за время движения. При этом данные постоянные выражаются через заданные инерционно-кинетические характеристики гиростата и начальные кинематические условия его движения.

Регулярные движения гиростата относятся к простейшим угловым (в обобщенном смысле) движениям и являются аналогами соответствующих движений, совершаемых в евклидовом пространстве.

Рассмотрим условия существования регулярных движений гиростата, реализуемых относительно ортобазиса Γ . Следующие определения движений гиростата приводятся для значений времени $t \in [0, +\infty)$.

Определение 1. Движение, при котором выполняются условия

$$\dot{\lambda}(t) = b_1, \quad \dot{\varphi}(t) = b_2, \quad \dot{\vartheta}(t) = b_3, \quad (9)$$

где b_j ($j=1, 2, 3$) – постоянные величины, называется *регулярной прецессией*.

В дальнейшем под величинами b_j всюду понимаются известные постоянные.

Обозначим:

$$a = A^{-1}, \quad Q = aG \quad (A = A_1 = A_2).$$

Теорема 1. Для того чтобы гириостат, движущийся по инерции, совершал регулярную прецессию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$A_1 = A_2 = A, \quad k_1 = k_2 = 0. \quad (10)$$

Доказательство. Необходимость.

Пусть выполняются ограничения (9). Тогда, согласно уравнениям системы (8), получаем равенства, тождественно удовлетворяющиеся при условиях (10).

Достаточность. Если выполняются условия (10), то в силу уравнений системы (8) получаем тождественные равенства (9), где

$$b_1 = Q, \quad b_2 = m_p, \quad b_3 = \vartheta_0 \neq 0, \quad (11)$$

$$m_p = (a_3 - a)G \operatorname{ch} \vartheta_0 + m_3.$$

Здесь m_p – угловая скорость собственного

вращения носителя гиростата.

Следствие 1. Согласно равенствам (11) имеем:

$$\lambda(t) = \lambda_0 + Qt, \quad \vartheta(t) = \vartheta_0 \neq 0, \quad (12)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 + m_p t,$$

причем нулевой индекс здесь и всюду далее относится к значению $t = 0$. В этом случае, согласно условиям (10), гириостат обладает кинетической симметрией относительно оси Ox_3 ортобазиса Γ .

Определение 2. Движение, при котором выполняются условия

$$\lambda(t) = b_1, \quad \dot{\varphi}(t) = b_2, \quad \dot{\vartheta}(t) = b_3, \quad (13)$$

называется *регулярной нутацией*.

Теорема 2. Регулярная нутация гириостата при его движении по инерции не существует.

Доказательство. Из первого уравнения системы (8), согласно условиям (13), следует противоречивое условие $G = 0$, в силу чего движение, удовлетворяющее этим условиям, динамически невозможно.

Определение 3. Движение, при котором выполняются условия

$$\dot{\lambda}(t) = b_1, \quad \dot{\vartheta}(t) = b_3, \quad \varphi(t) = b_2, \quad (14)$$

называется *регулярным маятниковым движением* (РМД).

Теорема 3. Для того чтобы гириостат, движущийся по инерции, совершал РМД, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (10) и $m_p = 0$, где величина m_p определяется равенством (11).

Доказательство. Необходимость.

Пусть выполняются ограничения (14). Тогда, согласно уравнениям системы (8), получаем равенства, тождественно удовлетворяющиеся при условиях (10) и $m_p = 0$.

Достаточность. Если выполняются условия (10) и $m_p = 0$, то, в силу уравнений системы (8), получаем тождественные равенства (14), где

$$b_1 = Q, \quad b_2 = \varphi_0, \quad b_3 = 0. \quad (15)$$

Следствие 2. Согласно равенствам (15) получаем первые два равенства (12), $\varphi(t) = \varphi_0$ и, согласно определяющему условию $m_p = 0$, в этом движении имеем

$$k_3 = (1 - A^{-1}A_3)G \operatorname{ch} \vartheta_0.$$

В силу этого, если при условиях теоремы 3

гиростат обладает центральной кинетической симметрией

$$A_j = A \quad (j=1, 2, 3), \quad (16)$$

то необходимо, чтобы $k_3 = 0$. В этом случае имеем $\mathbf{k} = 0$ и гиростат кинетически возникает в твердое тело.

Определение 4. Движение, при котором выполняются условия

$$\dot{\lambda}(t) = b_1, \quad \vartheta(t) = b_3, \quad (17)$$

называется *полурегулярной прецессией* по Гриоли (Rev. Roum. 1970; (15:2):249–255).

Теорема 4. Для того чтобы гиростат, движущийся по инерции, совершал полурегулярную прецессию, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (10).

Доказательство. Необходимость.

Пусть выполняются ограничения (17). Тогда, согласно уравнениям системы (8), получаем равенства, тождественно удовлетворяющиеся при условиях (10).

Достаточность. Если выполняются условия (10), то, в силу уравнений системы (8), получаем тождества (17), где

$$b_1 = Q, \quad b_3 = \vartheta_0 \neq 0. \quad (18)$$

Следствие 3. Согласно равенствам (18) имеем:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + m_p t. \quad (19)$$

Определение 5. Движение, при котором выполняются условия

$$\lambda(t) = b_1, \quad \dot{\vartheta}(t) = b_3, \quad (20)$$

называется *полурегулярной нутацией*.

Теорема 5. Полурегулярная нутация гиростата при его движении по инерции не существует.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2, в котором получено противоречивое условие $G = 0$. В силу этого движение, удовлетворяющее условиям (20), динамически невозможно.

Аналогичным образом можно показать, что для гиростата, находящегося в инерционном состоянии, существуют движения, при которых выполняются условия

$$\begin{aligned} [\dot{\lambda}(t) = b_1, \quad \varphi(t) = b_2], \\ [\varphi(t) = b_2, \quad \dot{\vartheta}(t) = b_3], \end{aligned} \quad (21)$$

соответствующие маятниковым движениям первого и второго рода, соответственно.

Для движений (21) имеем, соответственно, $b_1 = Q$, $b_3 = 0$ и в обоих случаях движения получаем $b_2 = \varphi_0$, $\vartheta(t) = \vartheta_0$, $m_p = 0$.

3. Основная динамическая система

Согласно основным предпосылкам, принятым для инерционного движения гиростата, выполняются законы сохранения его кинетического момента и кинетической энергии, выражающиеся тождественными равенствами

$$- \sum_{j=1}^2 G_j^2(\omega_j) + G_3^2(\omega_3) = \ell G^2, \quad (22)$$

$$\sum_{j=1}^3 A_j \omega_j^2 = D^2, \quad (23)$$

являющимися интегралами модуля кинетического момента и кинетической энергии гиростата. Здесь величины G_j определяются равенствами (1); ℓ – маркировочный параметр, содержащийся в равенстве (2); $D > 0$ – постоянная интегрирования.

Примем условия

$$A_1 = A_2 = A > A_3 \quad (24)$$

и введем постоянные H, α, β такие, что

$$\begin{aligned} H = \sqrt{m_3^2 - m_2^2} > 0, \quad m_2 = ak, \\ \text{th } \alpha = m_3^{-1} m_2, \quad \text{tg } \beta = k_1 k_2^{-1}, \\ k_3 \geq 0, \quad k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно равенствам (24), (25), получаем:

$$\begin{aligned} (k_1, k_2) = AH g_1 (\sin \beta, \cos \beta), \\ k_3 = A_3 H g_2, \quad (g_1, g_2) = (\text{sh } \alpha, \text{ch } \alpha). \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь и всюду далее принимается $\alpha > 0$.

Система уравнений (8) в силу соотношений (24)–(26) при $\vartheta > 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= Q - H g_1 \cos(\varphi - \beta) \text{sh}^{-1} \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= H g_1 \sin(\varphi - \beta), \\ \dot{\varphi} &= H [g_1 \cos(\varphi - \beta) \text{cth } \vartheta + \\ &\quad + 2c \text{ch } \vartheta + g_2], \end{aligned} \quad (27)$$

$$c = (a_3 - a)(2H)^{-1} G$$

и далее называется *основной динамической системой* (ОДС).

Предметом дальнейшего рассмотрения является интегральное многообразие уравнений инерционного движения гиростата, которое следует определить согласно ОДС (27).

Уравнения (27) образуют нелинейную стационарную систему эволюционного типа, содержащую пять независимых кинетических параметров. Поскольку для этой системы существуют независимые алгебраические первые интегралы (22), (23), находящиеся в инволюции, то эта система уравнений является интегрируемой по Лиувиллю и интегрируется в квадратурах.

Ставится задача: определить в односвязной регулярной области гладкие аналитические зависимости вида $\lambda(t)$, $\vartheta(t)$, $\varphi(t)$, совокупность которых составляет решение ОДС (27), удовлетворяющее начальным условиям $[\lambda(0), \vartheta(0), \varphi(0)] = [\lambda_0, \vartheta_0, \varphi_0]$.

4. Нутационное движение

Рассмотрим инерционное движение гиристок в режиме непрерывного изменения угла нутации (движение по углу ϑ).

Для системы уравнений (27) существует интеграл энергии (23), который в силу соотношений (5), (23)–(26) представляется равенством

$$c \operatorname{ch}^2 \vartheta + g_1 \operatorname{sh} \vartheta \cos(\varphi - \beta) + g_2 \operatorname{ch} \vartheta = h, \quad (28)$$

где выражение для параметра c дано в соотношениях (27).

Из второго уравнения ОДС (27), согласно интегралу (28), следует определяющее для величины $u = \operatorname{ch} \vartheta$ уравнение

$$\dot{u}^2 = \Omega^2 P(u), \quad (29)$$

где

$$P(u) = -u^4 + \sum_{k=0}^3 c_k u^k \quad (30)$$

– полином с коэффициентами

$$c_0 = -l(g_1^2 + h^2), \quad c_1 = 2g_2 l h, \\ c_2 = l(2ch - 1), \quad c_3 = -2g_2 \sqrt{l}, \quad l = c^{-2}.$$

В уравнении (29) величина $\Omega = cH$ – постоянная с размерностью угловой скорости.

Согласно соотношению (29), область изменения переменной ϑ , для которой реализуется движение по углу ϑ , определяется условием $P(u) \geq 0$ при $u > 1$, что соответствует ограничению

$$g_1^2 (u^2 - 1) - p_1(u) \geq 0, \\ p_1(u) = cu^2 + g_2 u - h.$$

Уравнение (29) имеет первый интеграл

$$J(u) \equiv \int \frac{du}{\sqrt{P(u)}} = \Omega t + C, \quad (31)$$

где C – постоянная интегрирования.

Интеграл в равенстве (31) приводится к неполному эллиптическому интегралу первого рода, выраженному в нормальной форме Лежандра. Для полинома P , не содержащего кратных нулей, это приведение выполняется стандартным приемом [3, с. 96]; в случае кратных корней интеграл представляется в элементарных (гиперболических и круговых) функциях.

Преобразуем фазовую плоскость $U = (u, \dot{u})$, относя величину $\dot{u}$ к постоянной Ω и оставляя для преобразованной переменной прежнее обозначение. Тогда величины $u, \dot{u}$ будут безразмерными переменными. В силу униформизационных свойств функций [4, с. 324] можно показать, что траектории изображающей точки на фазовой плоскости U однозначно определяются параметрическими уравнениями

$$u(w) = u_p + g_0 [\wp(w) - g]^{-1}, \\ u'(w) = -g_0 \wp'(w) [\wp(w) - g]^{-2}. \quad (32)$$

В равенствах (32) обозначено:

$$g_0 = \frac{1}{4} P'(u_p), \quad g = \frac{1}{24} P''(u_p),$$

$$w(u) = \int_{u_p}^u \frac{ds}{\sqrt{P(s)}},$$

$$\wp'(w) = \pm \sqrt{4\wp^3(w) - q_2 \wp(w) - q_3},$$

s, w – переменная интегрирования и униформизирующая переменная, соответственно; u_p – простой корень полинома P , $\wp$ – символ эллиптической функции Вейерштрасса с алгебраическими инвариантами:

$$q_2 = \frac{1}{12} (c_2^2 - 3c_1 c_3 - 12c_0), \\ q_3 = -\frac{1}{108} c_2^3 + \frac{1}{48} (c_1 c_2 c_3 - \\ - c_0 D_c) + \frac{1}{16} c_1^2, \\ D_c = 3c_3^2 + 8c_2. \quad (33)$$

В равенствах (32) штрих – символ дифференцирования по указанной переменной.

На фазовой плоскости U параметрические уравнения (32) определяют уникальную кривую (кривую нулевого рода), координаты регулярных точек которой представляются в виде рациональной функции параметра [4, с. 324].

Полагая, что все корни полинома P – действительные и простые и, обращая зависимость (31), в результате получаем

$$u(\tau) = u_p + g_0 [\wp(\tau + w_0) - g]^{-1}, \quad (34)$$

где $w_0 = w(u_0)$, $u_0 = \operatorname{ch} \mathcal{G}_0 \neq u_p$,

причем $\wp(w_0) = g + g_0(u_0 - u_p)^{-1}$.

Рассмотрим фазовый портрет гиростата на плоскости U . Структура фазовых траекторий определяется видом квазипотенциальной (гиростатической) функции P в зависимости от значений параметров c_j ($j = 0, \dots, 3$).

Многообразие данных траекторий является трехпараметрическим множеством плоских алгебраических кривых четвертого порядка, определяемых уравнением (29).

Стационарные и критические точки функции P устанавливаются уравнениями $P' = 0$, $P'' = 0$, имеющими вид

$$\begin{aligned} -4u^3 + 3c_3u^2 + 2c_2u + c_1 &= 0, \\ 6u^2 - 3c_3u - c_2 &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Эти уравнения в пространстве параметров c_1, c_2, c_3 определяют *сепаратрисную поверхность*, разделяющую область определения функции $P(u)$ на подобласти, содержащие различные виды ее экстремумов.

Выражая из системы уравнений (35) параметры c_2, c_3 , в результате получим параметрические уравнения данной поверхности

$$\begin{aligned} c_2 &= -(2u^2 + c_1u^{-1}), \\ c_3 &= \frac{1}{3}(8u + c_1u^{-2}), \end{aligned} \quad (36)$$

являющейся алгебраической поверхностью.

Рассматривая уравнения сечений этой поверхности плоскостями вида $c_1 = \text{const}$ как уравнения множества кривых, расположенных на плоскости (c_2, c_3) , получаем *сепаратрисную кривую* – квадратичную параболу с уравнением

$$c_2 = -\frac{9}{32}c_3^2.$$

При $c_1 \neq 0$ кривая (36) является эквидистантой данной параболы с параметром эквидистантности c_1 .

Плоскость U содержит фазовые траектории с двойными особыми точками, имеющими координаты $u = u_c, \dot{u} = 0$, где u_c – общий корень полиномов $P(u), P'(u)$.

Пусть z_1, z_2 – значения величины u такие, что в области $D_c > 0$ плоскости U имеем

$$(z_1, z_2) = \frac{1}{4} \left(c_3 \pm \sqrt{\frac{1}{3}D_c} \right),$$

где параметр D_c определяется равенством (33). Тогда при $z_1 < u_c < z_2$ на плоскости U находится узловая точка, а при $u_c < z_1, u_c > z_2$ имеется изолированная точка. При этом угловые коэффициенты касательных, проведенных к фазовой траектории в узловой точке, равны

$$(r_1, r_2) = \pm \Omega(c_2 + 3c_3u_c - 6u_c^2)^{1/2}.$$

При $u_c = z_1$ или при $u_c = z_2$ на фазовой траектории расположена точка возврата.

В области $D_c < 0$ плоскость U содержит только изолированную точку, тогда как на границе $D_c = 0$ этой области расположена либо точка возврата, если $u_c = z_1$, либо изолированная точка, если $u_c = z_2$.

В приведенных соотношениях всюду полагается $\alpha > 0$.

При критическом значении $\alpha = 0$ имеет место регулярная прецессия гиростата, условия существования которой определяются теоремой 1, ограничениями (10) и характеризуются равенствами (11), (12). Из первого интеграла (28) следует:

$$u_0 = (2c)^{-1}(1 + \sqrt{1 + 4hc}),$$

где c, h – заданные положительные параметры. Это равенство определяет величину параметра положения $\mathcal{G}_0 = \operatorname{Arch} u$ в данной прецессии, причем $u_0 > (2c)^{-1}$.

Согласно зависимости (34), нутационное движение гиростата является периодическим

с периодом (в натуральном времени t), равным

$$T = 4K(k_p)(\Omega\sqrt{e_1 - e_3})^{-1}, \quad (37)$$

где K – символ полного эллиптического интеграла первого рода с модулем

$$k_p = \sqrt{\frac{e_1 + 2e_2}{e_1 - e_3}} \quad (e_1 > e_3).$$

Таким образом, в нутационном движении ось кинетической симметрии гиригостата совершает периодическое с периодом T по (37) движение в области, расположенной между двумя соосными круговыми конусами с вершинами в полюсе O и с углами при вершинах $2\vartheta_1, 2\vartheta_2$. Эти конусы находятся внутри изотропного конуса данного пространства и имеют общую ось симметрии, определяемую вектором $\mathbf{G}$.

5. Прецессионное движение

Исследуем инерционное движение гиригостата в режиме непрерывного изменения угла прецессии (движение по углу λ). Движение в этом режиме определяется зависимостью вида $\lambda(\tau)$, которая, согласно первому уравнению системы (27), выражается соотношением

$$\lambda(\tau) = \lambda_0 + \Omega^{-1}Q\tau - c^{-1} \int_0^\tau \frac{q(u)}{u^2 - 1} ds, \quad (38)$$

где обозначено

$$\tau = \Omega t, \quad q(u) = cu^2 - g_2u - h. \quad (39)$$

Применяя зависимость (34) и формулу интегрирования дробно-линейного выражения как функции от $\wp(\tau)$ [3, с. 130], в результате, согласно равенству (38), получаем:

$$\lambda(\tau) = \lambda_0 + B\tau - [m_1 I_1(\tau) + m_2 I_2(\tau)]. \quad (40)$$

В равенстве (40) обозначено:

$$B = \Omega^{-1}Q - 1, \quad n_c = c - h,$$

$$m_1 = (2c)^{-1}(n_c - g_2),$$

$$m_2 = -(2c)^{-1}(n_c + g_2),$$

$$I_k(\tau) = n_k^{-1}\theta - D_k[Z_k(\theta) + 2\theta\zeta(v_k)],$$

$$Z_k(\theta) = \ln \frac{\sigma(\theta - v_k)}{\sigma(\theta + v_k)}, \quad \theta = \tau + w_0,$$

$$(n_1, n_2) = (u_p - 1, u_p + 1), \quad \rho_k = \wp'(v_k)$$

$$(k = 1, 2),$$

$$D_1 = g_0[(u_p - 1)^2 \rho_1]^{-1},$$

$$D_2 = g_0[(u_p + 1)^2 \rho_2]^{-1}.$$

Здесь σ, ζ – символы функций Вейерштрасса, функционально связанных с функцией Вейерштрасса $\wp(\tau)$ [3, с. 128]; v_1, v_2 – характерные постоянные, определяемые равенствами

$$\rho_1 = g - g_0(u_p - 1)^{-1} \quad (u_p > 1),$$

$$\rho_2 = g - g_0(u_p + 1)^{-1},$$

а функция $\wp'(w)$ устанавливается равенством, относящимся к соотношениям (32).

Согласно равенству (40), величина параметра прецессии λ является алгебраической суммой секулярной части с безразмерным временем τ и нелинейного дополнения. Следовательно, прецессия оси кинетической симметрии гиригостата является составным движением, образованным наложением нестационарного нелинейного аддитивного фактора на равномерное прецессирование в конфигурационном пространстве оси гиригостата с угловой скоростью B .

В некоторых частных случаях вид зависимости (40) может быть упрощен. В частности, если действительный или мнимый основные периоды функции $\wp(\tau)$ бесконечны, то эта функция, а также связанные с ней функции $\sigma(\tau), \zeta(\tau)$, вырождаются в гиперболические и круговые тригонометрические функции (это соответствует случаям кратных корней e_j стандартного полинома Вейерштрасса [3]).

Обозначим $N = c^2 - 3c_1c_3$. В случаях, для которых основные периоды функции $\wp(\tau)$ бесконечны, когда коэффициенты полинома $P(u)$ связаны ограничениями

$$N - 12c_0 = 0,$$

$$\frac{4}{9}c_2^3 + \left(\frac{1}{12}ND_c - c_1c_2c_3\right) - 3c_1^2 = 0,$$

имеем $q_2 = q_3 = 0, e_j = 0$, откуда следует, согласно [3, с. 128]:

$$\wp(\theta) \sim \theta^{-2}, \quad \zeta(\theta) \sim \theta^{-1}, \quad \sigma(\theta) \sim \theta.$$

В этих случаях имеет место особый вид движения гиростата в данном пространстве – *вырожденная прецессия*.

Рассмотрим свойства движения по параметру λ . Обозначим:

$$N_r = g_r H \quad (r = 1, 2).$$

Из первого уравнения системы (27) и интеграла энергии (28) следует:

$$\dot{\lambda}(u) = \lambda_p + H(u^2 - 1)^{-1} p_2(u), \quad (41)$$

$$p_2(u) = g_2 u - n_c, \quad \lambda_p = Q - \Omega,$$

откуда находим, что $\dot{\lambda}(u_s) = 0$, где u_s – простой действительный корень уравнения

$$\begin{aligned} \lambda_p u^2 + N_2 u + h_q &= 0, \\ h_q &= D - Q. \end{aligned} \quad (42)$$

Согласно уравнению (42), при $\lambda_p = 0$ имеем:

$$u_s = -N_2^{-1} h_q, \quad h_q + N_2 \leq 0 \quad (h_q < 0),$$

тогда как при $\lambda_p \neq 0$ беспрецессионное движение, существующее для

$$D_s = N_2^2 - 4\lambda_p h_q \geq 0,$$

реализуется при значениях

$$u_s = (2\lambda_p)^{-1} (-N_2 \pm \sqrt{D_s}). \quad (43)$$

В равенстве (43) знак перед радикалом выбирается из условия $u_s > 0$.

Определим область значений переменной u , для которых реализуется прецессионное движение. Условие $\dot{\lambda}(u) > 0$ выполняется: для значений $\lambda_p > 0$ – на открытом множестве $(1 < u < u_1) \cup (u > u_2)$, а для значений $\lambda_p < 0$ – на интервале $(u_1 < u < u_2)$.

Ограничение $\dot{\lambda}(u) < 0$ выполняется: при $\lambda_p > 0$ – на множестве $(u_1 < u < u_2)$, а при $\lambda_p < 0$ – на интервале $(1 < u < u_1) \cup (u > u_2)$. Здесь знаки величины $\dot{\lambda}$ относятся к прямому и обратному (по направлениям) прецессионному движению, соответственно.

В силу равенства (41) составим производную функцию

$$\ddot{\lambda}(u) = -N_2(u^2 - 1)^{-2} F(u)\dot{u}, \quad (44)$$

где обозначено

$$F(u) = u^2 - h_p u + 1, \quad h_p = 2g_2^{-1} n_c,$$

и примем условие $D > \Omega$. Тогда функция $F(u)$ является положительно определенной для значений $u \in (1, +\infty)$ и, согласно уравнению (44), имеем $\ddot{\lambda}(u) > 0$ при $\pi + \beta < \varphi < 2\pi + \beta$ и $\ddot{\lambda}(u) < 0$ для $\beta < \varphi < \pi + \beta$. Далее интервал данных значений периодически повторяется через $n\pi$ ($n = 1, \dots$). Этим определяются интервалы ускорения и замедления скорости прецессирования оси кинетической симметрии гиростата.

6. Колебательное и вращательное движения

Можно показать, что в условиях принятых предпосылок существуют режимы колебательных и вращательных движений гиростата по углу φ , реализуемых при определенных условиях. Для нахождения этих условий установим структуру фазовых траекторий на плоскости переменных (ϑ, φ) .

Портрет фазовых траекторий, соответствующих множеству значений параметра h (параметра уровня) интеграла энергии (28), зависит от области расположения значений параметров c, α на этой плоскости. Следовательно, определяющими структурными параметрами режима движения гиростата являются параметры h, c, α .

Из множества возможных значений параметра h в силу интеграла (28) выделим значение $h_c = c + g_2$, достигаемое в особом случае, когда $\vartheta = 0$. Этому значению соответствует фазовая траектория, являющаяся сепаратрисой, разделяющей области существования колебательного режима движения гиростата по углу φ от вращательного.

Охватываемый этой сепаратрисой колебательный цикл движения в предельном случае вырождается в точку статического равновесия, положение которой на фазовой плоскости определяется значением параметра h .

Уравнение данной сепаратрисы на плоскости (ϑ, φ) при $\alpha > 0$ имеет вид:

$$\cos \varphi(\xi) = g_1^{-1} (2c \operatorname{ch}^2 \xi + g_2) \operatorname{th} \xi, \quad (45)$$

где обозначено $\xi = \vartheta/2$.

В случаях, при которых фазовая точка имеет траекторию, даже частично совпадающую с сепаратрисой (45), на участках совпадения гиростат движется в критическом режиме.

Этот режим можно интерпретировать движением уединенной стационарной волны неизменного профиля (бегущей волны), движущейся в среде без диссипации. Данная волна является кинком – солитоном Кортвега-де Фриза.

В области фазовой плоскости, прилегающей к сепаратрисе, движение фазовой точки имеет характер, аналогичный свойствам перемещения кноидальной волны – периодической солитонной решетки, определяемой функцией кинка:

$$\Phi(\xi) = \text{ch}^{-2} \xi.$$

Из второго и третьего уравнения системы (27) согласно равенству (28) имеем:

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = [\Phi_2(\varphi)]^{-1} \Phi_1(\vartheta, \varphi), \quad (46)$$

$$\Phi_1(u) = (2cu + g_2)(u^2 - 1) - (cu^2 + g_2u - h)u,$$

$$\Phi_2(\varphi) = g_1(u^2 - 1) \sin(\varphi - \beta) \quad (\alpha > 0, \varphi - \beta > 0),$$

где функция $\varphi(u)$ определяется формулой (28).

Фазовая плоскость (ϑ, φ) , согласно уравнению (46), содержит множество стационарных точек $u = u_c$, определяемых уравнением

$$3cu_c^3 - 2g_2u_c^2 - (2c + h)u_c + g_2 = 0, \quad (47)$$

где $u_c = \text{ch } \vartheta_c$, и множество особых точек вида

$$\varphi_* = \beta \pm n\pi \quad (n = 0, 1, \dots).$$

В силу равенства (47) для критического значения $u_c = 1$ существуют двойные особые точки, являющиеся узловыми точками с угловыми коэффициентами касательных в них к фазовым траекториям, равными

$$v_n = (-1)^n (2g_1)^{-1} (g_2 - c).$$

В этом же случае начало координат фазовой плоскости содержит дикритический узел.

Для определения явной зависимости вида $\varphi(u)$ применим первый интеграл (28), представленный в виде

$$\cos(\varphi - \beta) = \frac{q_s(u)}{g_1 \sqrt{u^2 - 1}} \equiv V_1(u), \quad (48)$$

где принято

$$q_s(u) = h - g_2u - cu^2, \quad \alpha > 0, u > 1.$$

Согласно второму уравнению системы (27) и уравнению (29), получаем:

$$\sin(\varphi - \beta) = \frac{c}{g_1} \sqrt{\frac{P(u)}{u^2 - 1}} \equiv V_2(u), \quad (49)$$

при этом из соотношений (48), (49) следует:

$$\begin{aligned} \sin \varphi(u) &= V_1(u) \sin \beta + V_2(u) \cos \beta, \\ \cos \varphi(u) &= V_1(u) \cos \beta - V_2(u) \sin \beta. \end{aligned} \quad (50)$$

Искомая параметрическая зависимость для угла φ определяется системой, составленной из любого равенства (50) и уравнения (31).

7. Годографы векторов скорости и кинетического момента

Получим параметрические уравнения годографа вектора ω , представленные относительно координатных осей ортобазиса Γ . Для собственного вектора $\mathbf{G}$ из равенств (4), согласно соотношениям (27), (48), (49), получаем:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= Q \text{sh } \vartheta \sin \varphi - N_1 \sin \beta, \\ \omega_2 &= Q \text{sh } \vartheta \cos \varphi - N_1 \cos \beta, \\ \omega_3 &= N_2 - Q_3 \text{ch } \vartheta, \end{aligned} \quad (51)$$

где обозначено $Q_3 = a_3 G$.

Из соотношений (51) в силу выражений (50) при $\alpha > 0$ следует:

$$\begin{aligned} \omega_1(u) &= Q_1 [q(u) \sin \beta + \Phi(u) \cos \beta] - N_1 \sin \beta, \\ \omega_2(u) &= Q_1 [q(u) \cos \beta - \Phi(u) \sin \beta] - N_1 \cos \beta, \\ \omega_3(u) &= N_2 - Q_3 u, \end{aligned} \quad (52)$$

где обозначено

$$Q_1 = g_1^{-1} Q, \quad \Phi(u) = c \sqrt{P(u)},$$

а функция $q(u)$ определяется соотношением (39).

Присоединяя к равенствам (52) выражение (31), получаем систему параметрических уравнений с параметром u , определяющую зависимости вида $\omega_j(t)$.

Из уравнений (52) следует

$$(\omega_1 + \mu_1)^2 + (\omega_2 + \mu_2)^2 = Q^2(u^2 - 1), \quad (53)$$

где обозначено

$$(\mu_1, \mu_2) = N_1 (\sin \beta, \cos \beta).$$

Соотношение (53) в пространстве квази-координат ω_j при фиксированном значении $u(\mathcal{G}) = u_*$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными координатной оси Ox_3 ортобазиса Γ . Эта поверхность является круговым цилиндром, содержащим в сечении плоскостью $\omega_3 = \text{const}$ ($\mathcal{G} = \text{const}$) окружность радиуса $Q\sqrt{u_*^2 - 1}$ – проекцию годографа вектора ω на плоскость, нормальную оси этого цилиндра.

Таким образом, данная поверхность является несущей для годографа вектора скорости.

Из равенств (1), (24), (26) следуют соотношения для компонент вектора $\mathbf{G}(G_j)$:

$$\begin{aligned} G_1(u) &= A[\omega_1(u) + N_1 \sin \beta], \\ G_2(u) &= A[\omega_2(u) + N_1 \cos \beta], \\ G_3(u) &= A_3[\omega_3(u) + N_2], \end{aligned} \quad (54)$$

которые, аналогично предыдущему, определяют годограф вектора $\mathbf{G}$ относительно координатных осей ортобазиса Γ .

При этом выражения для величин $\omega_j(u)$ в явном виде устанавливаются равенствами (52).

В силу линейной зависимости (54) между соответствующими компонентами ω_j, G_j заключаем, что годографы векторов $\omega, \mathbf{G}$ и их годографические несущие поверхности, как геометрические фигуры, подчиняются закону невырожденного аффинного преобразования.

Это преобразование является композицией центроаффинного преобразования с центром, совпадающим с центром инерции гиростата. В этом смысле данные годографы и их несущие поверхности являются обобщенно-подобными геометрическими фигурами.

Заключение

Инерционное движение гиростата относится к его простейшим движениям, совершаемым без воздействия внешних моментно-силовых факторов. Это обстоятельство позволяет при анализе влияния внешних сил на движение гиростата разделить динамические эффекты, порожденные внешними силами, от эффектов, обусловленных инерционным движением.

Свойства инерционного движения гиростата, совершаемого в евклидовом пространстве, исследованы в аналогичной задаче, содержащейся в работе [5]. Ее динамическим аналогом является задача, относящаяся к полувеклидову пространству, приведенная в настоящей работе. Эта задача рассмотрена для случая, при котором вектор кинетического момента гиростата является собственным.

Движения гиростата в других случаях, при которых этот вектор является идеальным или изотропным, требуют отдельного исследования. Следует отметить, что, в отличие от рассмотренного в данной статье случая, квадраты норм векторов $\|\mathbf{s}\|^2 = \ell$, $\|\mathbf{G}\|^2 = \ell G^2$ для упомянутых случаев являются разными по величине: значения характерного маркировочного параметра $\ell = (-1, 0)$ имеют место для идеальных и изотропных векторов, соответственно. Это различие распространяется и на соотношения связи между величинами ω_j и параметрами положения гиростата в конфигурационном пространстве.

Данные соотношения являются аналогами кинематических уравнений Эйлера, существующих для твердого тела в евклидовом пространстве. Исследование инерционного движения гиростата с применением подвижных годографов векторов его скорости и кинетического момента открывает возможность проведения анализа динамических свойств в касательном пространстве.

Список источников

1. Косогляд Э.И. Движение твердого тела под действием сил на плоскости Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1970, № 9 (100). С. 59–68.
2. Макеев Н.Н. Квадратуры геометрической теории динамики гиростата // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Пермь: Пермский ун-т. 2012. Вып. 44. С. 87–104.
3. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.
4. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. В 2 ч. М.: Физматлит, 1963. Ч. 2. 516 с.
5. Смольников Б.А. Движение вокруг центра инерции твердого тела с вращающимися маховиками // Прикладная математика и механика. 1966. Т. 30, вып. 4. С. 625–635.

References

1. Kosoglyad, E.I. (1970), "Dvizhenie tverdogo tela pod deystviem sil na ploskosti Lobachevskogo", *Izvestiya vuzov. Matematika*, no. 9(100), pp. 59-68.
2. Makeev, N.N. (2012), "Kvadratury geometricheskoy teorii dinamiki girostata", *Problemy mekhaniki i upravleniya. Nelineynye dinamicheskie sistemy: mezhvuz. sb. nauch. tr.*, vol. 44, pp. 87-104.
3. Yanke, E., Emde, F. and Lesh, F. (1964), "Spetsial'nye funktsii" [Special functions], Nauka, Moscow, Russia.
4. Uitteker, E.T. and Watson, DZh. N. (1963), "Kurs sovremennogo analiza. V 2 Ch." [A course in modern analysis. In 2 parts], Fizmatlit, Moscow, Russia.
5. Smol'nikov, B.A. (1966), "Dvizhenie vokrug tsentra inertsii tverdogo tela s vrashchayushchimisya makhovikami", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, vol. 30, no. 4, pp. 625-635.

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев – доктор физико-математических наук, профессор (410000, Россия, г. Саратов), AuthorID: 374535.

Information about the author:

Nikolay N. Makeev – Doctor of physical and Mathematical Sciences, Professor (Saratov, Russia, 410000), AuthorID: 374535.

«Компьютерные науки и информатика»

Научная статья

УДК 004.94

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-54-60

**Моделирование распространения сетевого вируса
в локальной компьютерной сети методами теории перколяции****Мария Михайловна Бузмакова¹, Егор Александрович Воробьев²**^{1,2}Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия¹mbuzmakova@psu.ru²teddehhh.study@gmail.com

Аннотация. В рамках работы исследовано распространение сетевого вируса в локальной компьютерной сети. Были предложены две перколяционные модели, описывающие два вида сетей: проводные и беспроводные. Порог перколяции соответствует доле зараженных компьютеров в сети, при которой сеть теряет работоспособность. Для моделей были разработаны и реализованы алгоритмы заполнения решетки занятыми узлами, распределения занятых узлов по кластерам, поиска перколяционного кластера, определения порога перколяции. Был проведен численный эксперимент по оценке порога перколяции и его зависимость от различных характеристик вируса.

Ключевые слова: теория перколяции; компьютерный вирус; сетевой вирус; компьютерное моделирование

Для цитирования: Бузмакова М.М., Воробьев Е.А. Перколяционная модель распространения сетевого вируса // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 54–60. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-54-60.

Статья поступила в редакцию 25.04.2024; одобрена после рецензирования 13.05.2024; принята к публикации 15.05.2024.

«Computer Science»

Research article

**A Net Virus Spreading in a Local Computer Network Modeling
With Using Percolation Theory Methods****Mariya M. Buzmakova¹, Egor A. Vorobiev²**^{1,2}Perm State University, Perm, Russia¹mbuzmakova@psu.ru²teddehhh.study@gmail.com

Abstract. A net virus spreading in a local computer network is investigated in this paper. Two percolation models were proposed to describe two types of networks: wired and wireless. The percolation threshold corresponds to the fraction of infected computers in the network at which the network loses its operability. Algorithms for lattice filling by occupied nodes, for distributing occupied nodes into clusters, for searching a percolation cluster and for the percolation threshold determining were developed and implemented for the models. A numerical experiment was conducted to estimate the percolation threshold and its dependence on various virus characteristics.

Keywords: percolation theory; computer virus; net virus; computer modeling



Эта работа © 2024 Бузмакова М.М., Воробьев Е.А. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

For citation: Buzmakova, M. M. and Vorobiev, E. A. (2024), "A Net Virus Spreading in a Local Computer Network Modeling With Using Percolation Theory Methods", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(65), pp. 54-60. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-54-60.

The article was submitted 25.04.2024; approved after reviewing 13.05.2024; accepted for publication 15.05.2024.

Введение

Стремительное развитие информационных технологий сопровождается постоянным обменом информацией, что, в свою очередь, сопровождается и распространением компьютерных вирусов. Несмотря на богатство анти-вирусных программ, каждый день возникают все новые и новые угрозы. Актуальным является изучение распространения вирусов в компьютерных сетях с целью его своевременного обнаружения, предотвращения и дальнейшей защиты.

Начало всех исследований в области компьютерной вирусологии было положено в 1940-х гг., когда Джон фон Нейман поставил перед собой задачу построения модели машины, сложность которой могла бы возрасти подобно биологическим организмам в условиях естественного отбора. Предположительно, такая задача была поставлена для того, чтобы вычислительные машины смогли развиваться самостоятельно с течением времени. Но на тот момент не было реализации подобной модели, поэтому в данном направлении проводились дополнительные исследования.

Первая попытка реализации была совершена Лайонелом Пенроузом в 1957 г. Английский психиатр, медицинский генетик и математик впервые показал пример самовоспроизводящейся механической структуры [1]. Логическая часть его идеи была основана теории фон Неймана, а физическая часть заключалась в том, чтобы создать простые блоки или кирпичики с такими свойствами, чтобы из них можно было построить самовоспроизводящийся механизм.

Спустя несколько лет в 1966 г. Артур Беркс опубликовал книгу "Теория самовоспроизводящихся автоматов" на основе лекций фон Неймана [2], в которой были изложены основные идеи для реализации такого механизма в машинной среде.

В настоящее время компьютерный вирус определяется как программа, целью которой является распространение своих копий. Компьютерные вирусы классифицируются по признакам среды обитания, способу заражения, методам распространения, организации

программного кода и деструктивным возможностям [3].

Развитие информационных сетей, объединяющих несколько рядом стоящих компьютеров, способствовало появлению вируса, представляющего угрозу компьютерной инфраструктуре, в которой находятся десятки или даже сотни работающих вычислительных устройств. В отличие от загрузочных и файловых вирусов, сетевой вид обладает свойством самораспространения без использования внешних устройств передачи данных. Такой вид относят к классу вирусов-червей. Проводятся исследования по изучению распространения вирусов [например, 4–9]. Разными авторами предложены оригинальные и модифицированные эпидемиологические модели. При анализе работ в данном направлении наблюдается тенденция к востребованности методов теории перколяции. Использование перколяционных свойств для большого разнообразия существующих архитектур компьютерных сетей и методов атак злоумышленников может способствовать совершенствованию методов антивирусной защиты от нападения, вследствие чего снизится количество успешных атак на информационную инфраструктуру.

Целью настоящей работы является исследование распространения сетевого вируса в локальной сети с использованием подходов теории перколяции. Для достижения цели авторами были предложены и исследованы две перколяционные модели распространения сетевого вируса в локальной компьютерной сети, описывающие два вида сетей: проводные и беспроводные. Порог перколяции соответствует доле зараженных компьютеров в сети, при которой сеть теряет работоспособность.

Постановка задачи

В рамках данной работы предложены и исследованы две решеточные перколяционные модели распространения сетевого вируса в локальной компьютерной сети, описывающие два вида сетей: беспроводные и проводные.

В первой модели беспроводная локальная сеть представлена в виде наиболее распростра-

ненной сети ячеистой топологии, которая описывается простой квадратной решеткой.

Линейный размер решетки – N . Компьютеры в локальной сети – узлы решетки, которые могут быть свободными (не зараженными вирусом) и занятыми (зараженными вирусом). Свободным узлом считается компьютер, сохраняющий полную работоспособность и никак не влияющий на работу соседних компьютеров.

Под занятым узлом подразумевается, что компьютер имеет вредоносный код, способный причинить вред компьютеру, а также передавать свою копию соседним компьютерам. При этом такой компьютер продолжает работать. Один компьютер может заразить другой компьютер, то есть если текущий узел занят, то соседние с ним узлы могут стать занятыми с вероятностью q_1 . Кроме того, учитывается способность компьютера к восстановлению, то есть занятый узел может стать свободным с вероятностью q_2 . Восстановление возвращает узлу свободное состояние и освобождает компьютер от вредоносного кода.

Соседние занятые узлы образуют кластеры – группы зараженных компьютеров. Концентрация занятых узлов p соответствует степени распространения вируса в локальной сети. Если в системе находится непрерывная группа зараженных компьютеров, проходящих через всю сеть (перколяционный кластер), то можно говорить о наличии перколяции – просачивании сетевого вируса через всю локальную сеть, что означает возможность выхода вируса за пределы локальной сети и блокировку передачи информации между любыми свободными узлами. В модели были применены открытые и периодические граничные условия (ОГУ и ПГУ соответственно). Математически предложенную модель можно описать так:

$$M_1 = \langle N, p, q_1, q_2, k \rangle,$$

где k – количество испытаний.

Во второй модели применяется локальная сеть, использующая смешанную топологию из трех базовых: "Шина", "Кольцо", "Звезда". Общей сетью является шинная топология, объединяющая в себе множество N подсетей, представленных кольцевой и звездной топологиями. В свою очередь каждая подсеть состоит из z узлов. Граничащие между топологиями узлы являются коммутаторами и обеспечивают связь с соседними локальными сетями. Начало и конец сети определяется

первой и последней подсетью соответственно (см. рис. 1).

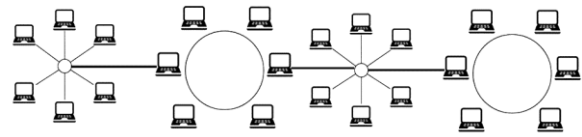


Рис. 1. Пример смешанной сети второй модели

Математическая модель записывается следующим образом:

$$M_2 = \langle N, z, p, k \rangle.$$

Основной задачей в рамках каждой из предложенной модели является получение оценки значения порога перколяции при различных параметрах модели. Под порогом перколяции принимается значение концентрации занятых узлов, при которой вероятность возникновения стягивающего кластера равна 0.5. Порог перколяции соответствует критической концентрации зараженных компьютеров локальной сети, при которой сеть теряет свою работоспособность.

Методы исследования

Для моделей были разработаны и реализованы алгоритмы распространения занятых узлов, поиска кластеров и определения наличия перколяции в системе. Были написаны программы на языке программирования C++ с консольным интерфейсом.

Для первой модели алгоритм заполнения квадратной решетки свободными и занятыми узлами описан ниже.

1. Из всех узлов случайно выбирается первый занятый узел.
2. Соседние свободные узлы текущих занятых становятся занятыми с вероятностью q_1 .
3. Занятые узлы могут стать свободными с вероятностью q_2 .
4. Повторить 2–3 до достижения необходимой концентрации занятых узлов на решетке.

Для маркировки кластеров на решетке используется алгоритм Хошена–Копельмана [10]. Для поиска перколяционного кластера используется алгоритм "поиска в глубину" [11]. Для обеспечения коэффициентов вероятности используется генератор псевдослучайных чисел "Вихрь Мерсена" [12].

Для второй модели разработан следующий алгоритм определения порога перколяции проводилось путем проведения k случайных экспериментов, в каждом из которых:

- 1) случайным образом конфигурируется общая сеть, состоящая из N подсетей,
- 2) для каждой подсети находится свой порог перколяции,
- 3) находится среднее значение порога перколяции для общей сети.

После чего полученные значения по k экспериментам усредняются.

Порог перколяции для подсетей кольцевой или звездной топологии находятся аналитически. Рассмотрим кольцевую подсеть. Подсеть имеет граничные узлы, которые обеспечивают внешнюю связь с соседними подсетями. Однако внутри возникает два пути распространения вируса: верхняя и нижняя цепочка (см. рис. 1). Данные цепочки являются одномерными, порог перколяции для каждого пути $p_c = 1$, так как кластер из занятых узлов может возникнуть, только если все узлы хотя бы в одной из цепочек заняты [13]. Таким образом, подсеть имеет точное значение порога перколяции $p_c = 1$.

Звездная топология имеет похожую структуру с деревом Кейли или решеткой Бете. Подсеть представляет первый уровень построения дерева Кейли, когда из одного узла выходит z новых узлов. Для такой структуры вычислена и доказана критическая концентрация $p_c = 1/(z-1)$ в [14]. Подставляя значение количества выходящих узлов в данную формулу, можно точно определить критическую концентрацию в подсети.

Далее, чтобы найти порог перколяции для общей сети, необходимо сложить критические концентрации $p_{1c}, p_{2c}, \dots, p_{Nc}$ и разделить на количество подсетей N .

Численные эксперименты основаны на подходах методов Монте-Карло с применением методов математической статистики и теории вероятностей.

Результаты и их обсуждение

Для первой модели проведен ряд численных экспериментов со следующими параметрами: $N = 10; 20; 50$; $p = 0; 0,1; \dots; 1$; $q_1 = 0,5$; $q_2 = 0; 0,1; \dots; 0,6$. Значение q_1 выбрано, исходя из неопределенного количества внешних факторов, а также человеческого фактора. Поэтому вероятность заразить или не заразить компьютер является одинаковой.

Параметр q_2 имеет диапазон значений: от низкой эффективности каких-либо противодействующих средств либо их отсутствия до наличия эффективных средств защиты компьютера.

Для каждого набора входных данных было проведено 1000 экспериментов и определено значение порога перколяции по следующей методике: определяется вероятность возникновения перколяционного кластера $P(p)$.

Полученные в ходе компьютерного эксперимента значения вероятности возникновения перколяционного кластера $P(p)$ для каждого набора данных при различных значениях N и q_2 аппроксимируются сигмоидальной функцией:

$$P(p) = (1 + \exp(-(p - p_c)a))^{-1}.$$

Значение доли заполненных узлов p , при которой вероятность появления перколяционного кластера равна 0.5, является значением порога перколяции (например, рис. 2).

При аппроксимации данных возникает погрешность: при численном эксперименте учитывается погрешность вероятности возникновения перколяционного кластера при каждом значении концентрации занятых узлов с использованием стандартного отклонения

$$\sigma_{\bar{P}} = \sqrt{\frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (P_i - \bar{P})^2 / k}.$$

Погрешность значения порога перколяции – это результат аппроксимации данных в математическом пакете с учетом ошибок исходных данных.

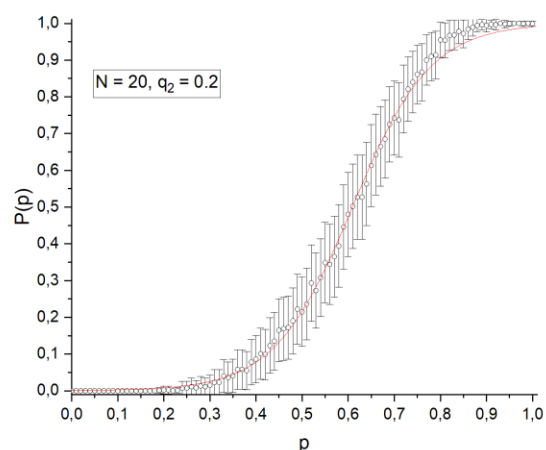


Рис. 2. Вероятность возникновения стягивающего кластера, при $N = 20$; $q_1 = 0,5$; $q_2 = 0,2$ с открытыми граничными условиями

Найдены значения порогов перколяции для выбранных входных параметров модели при открытых и периодических граничных условиях для систем конечного размера, дан-

ные представлены в табл. 1. Пустые ячейки означают, что для соответствующих входных параметров перколяция не наступила.

Таблица 1. Значения порога перколяции с погрешностью аппроксимации при различных N и q_2 с открытыми и периодическими граничными условиями

0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0	q_2
—	—	—	0,789 (0,001)	0,6332 (0,0009)	0,5356 (0,0009)	0,4735 (0,0008)	$N = 10$ ОГУ
—	—	0,876 (0,001)	0,679 (0,001)	0,5453 (0,0008)	0,4608 (0,0006)	0,4052 (0,0006)	$N = 10$ ПГУ
—	—	—	0,7922 (0,0009)	0,6089 (0,0009)	0,5056 (0,0007)	0,4472 (0,0006)	$N = 20$ ОГУ
—	—	0,9885 (0,0009)	0,747 (0,001)	0,5561 (0,0008)	0,4545 (0,0005)	0,4000 (0,0005)	$N = 20$ ПГУ
—	—	—	0,8037 (0,0007)	0,587 (0,001)	0,4591 (0,006)	0,4108 (0,0006)	$N = 50$ ОГУ
—	—	—	0,7935 (0,0005)	0,5602 (0,0007)	0,4350 (0,0006)	0,3910 (0,0004)	$N = 50$ ПГУ

При увеличении значения параметра q_2 вероятность появления перколяционного кластера значительно снижается. При этом наблюдается разделение значений q_2 на две группы. Первая группа достигает значения порога перколяции и представляет достаточную опасность для компьютерной сети. В нее входят модели при $q_2 = 0; 0,1; 0,2; 0,3$. Вторая группа содержит модели при $q_2 = 0,4; 0,5; 0,6$, которые не так опасны для компьютерной сети. При максимальной концентрации узлов вероятность появления перколяционного кластера находится ниже значения 0,5. Стоит отметить, что модель с параметром $q_2 > q_1$ на всем диапазоне концентрации p имеет вероятность $P(p)$ близкую к нулю, что является адекватным результатом, так как восстановление узлов происходит интенсивнее, чем заражение.

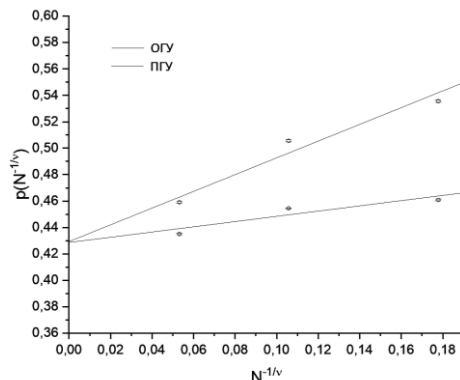


Рис. 3. Определение порога перколяции для случая бесконечной системы с помощью скейлинга при $q_2=0,1$

Для бесконечного случая определены значения порога перколяции с помощью скейлингового соотношения (например, рис. 3), результаты для открытых и периодических граничных условий представлены в табл. 2. Близкие или схожие значения для разных граничных условий говорят о правильности полученных результатов, так как порог перколяции для бесконечной перколяционной системы не должен зависеть от этого параметра.

Таблица 2. Значения порогов перколяции для случая бесконечной системы

q_2	Scaling, ОГУ	Scaling, ПГУ
0	0,387 (0,11)	0,385 (0,03)
0,1	0,429 (0,15)	0,429 (0,10)
0,2	0,569 (0,003)	0,567 (0,002)
0,3	0,809 (0,005)	0,828 (0,005)
0,4	—	—
0,5	—	—
0,6	—	—

Для второй модели проведен ряд численных экспериментов со следующими параметрами: $N=5; 10; 20; 50; 100; 200; Z=0...100; k = 1000$. Оба параметра представляют собой расширенный диапазон размерностей общей сети и подсети: от малых размеров до больших. Значения порога перколяции представлены на рис. 3.

Полученные результаты показывают, что при увеличении количества узлов в подсетях порог перколяции снижается достаточно быстро и постепенно приближается к значению 0.5.

С увеличением значения параметра N кривые на рисунке становятся smoother и описывают практически одинаковые значения, что говорит о том, что количество узлов в подсетях не является определяющим при большом количестве испытаний.

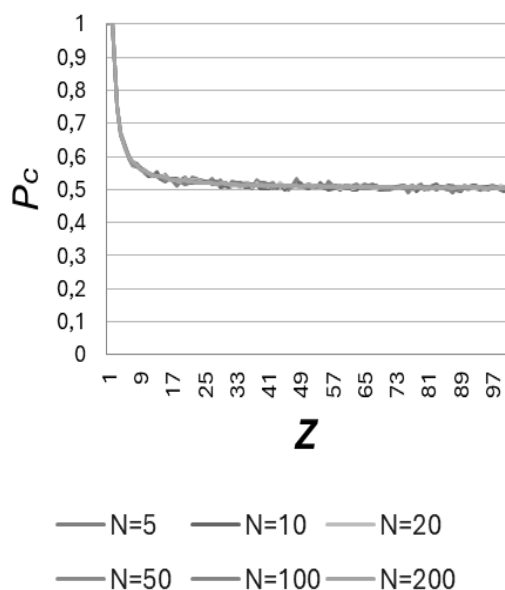


Рис. 3. Сравнительный график значений порога перколяции между различными N

Исходя из вышеописанного, значение $p_c = 0.5$ можно взять за значение порога перколяции для бесконечного случая.

Заключение

В рамках данной работы проведено моделирование распространения сетевого вируса в локальной компьютерной сети с применением теории перколяции. Были разработаны две модели: модель поведения сетевого вируса в беспроводной локальной сети с учетом способности вычислительного узла к восстановлению; модель, использующая смешанную топологию локальной сети.

Результаты исследования первой модели показывают, что при отсутствии возможности восстановления зараженных узлов компьютерная сеть довольно быстро подвергается заражению и теряет свою работоспособность. Однако, если компьютеры имеют механизм восстановления после заражения, то риск

полного заражения локальной сети значительно снижается.

По результатам второй модели был определен порог перколяции $p_c = 0.5$ для бесконечной системы.

Список источников

1. Penrose S. Self-reproducing machines // Scientific American. 1959. Vol. 200. P. 105–114.
2. Von Neumann's self-reproducing automata / Burks A.W. // THE UNIVERSITY OF MICHIGAN, 1969. 113p.
3. Компьютерные вирусы и антивирусы: взгляд программиста / Климентьев К.Е. // М.: ДМК Пресс, 2013. 656 с.
4. Минаев В.А., Сычев М.П., Вайц Е.В., Куракосян А.Э. Имитационное моделирование эпидемий компьютерных вирусов // Вестник Российского нового университета. Серия "Сложные системы...". 2019. № 3. С. 3–12.
5. Семёнов С.Г., Давыдов В.В. Математическая модель распространения компьютерных вирусов в гетерогенных компьютерных сетях автоматизированных систем управления технологическим процессом // Вестник НТУ "ХПИ". 2013. № 38. С. 163–171.
6. Гусаров А.Н., Жуков Д.О., Косарева А.В. Описание динамики распространения компьютерных угроз в информационно-вычислительных сетях с запаздыванием действия антивирусов // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Приборостроение". 2010. № 1. С. 112–120.
7. Лесько С.А., Алёшкин А.С., Филатов В.В. Стохастические и перколяционные модели динамики блокировки вычислительных сетей при распространении эпидемий эволюционирующих компьютерных вирусов // Российский технологический журнал. 2019. Т. 7, № 3. С. 7–27.
8. Moore C. and Newman M. E. J. Epidemics and percolation in small-world networks // Phys. Rev. E. 2000. № 61. P. 5678.
9. Michele Garetto, Weibo Gong and Don Towsley, Modeling Malware Spreading Dynamics // Twenty-second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies. 2003. Vol. 3. P. 1869–1879.
10. Hoshen J., and Kopelman R. Percolation and cluster distribution: I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm // Phys. Rev. B. 1976. I. 14 (October). P. 3438–3445.

11. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Поиск_в_глубину (дата обращения: 20.04.2024).
12. M. Matsumoto and T. Nishimura Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation. 1998. Vol. 8, № 1. P. 3–30.
13. Stauffer D. Introduction to percolation theory. London: Taylor & Francis, 1985. 192 p.
14. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. М.: Едиториал УРСС, 2002. 112 с.

References

1. Penrose, S. (1959), "Self-reproducing machines", *Scientific American*, 1959, vol. 200, pp. 105-114.
2. Burks, A.W. (1969), *Von Neumann's self-reproducing automata*, THE UNIVERSITY OF MICHIGAN, 113p.
3. Kliment'ev, K.E. (2013), *Komp'yuternye virusy i antivirusy: vzglyad programmista*, M.: DMK Press, 656 p.
4. Minaev, V.A., Sychev, M.P., Vajc, E.V., Kirakosyan, A.E'. (2019), "Imitacionnoe modelirovanie e'pidemij komp'yuternyx virusov", *Vestnik Rossijskogo novogo universiteta. Seriya "Slozhnye sistemy..."*, no. 3, pp. 3-12.
5. Semenov, S.G., Davydov, V.V. (2013), "Matematicheskaya model' rasprostraneniya komp'yuternyx virusov v geterogennyx komp'yuternyx setyax avtomatizirovannyx sistem upravleniya texnologicheskim processom", *Vestnik NTU "XPI"*, no. 38, pp. 163-171.
6. Gusarov, A.N., Zhukov, D.O., Kosareva, A.V. (2010), "Opisanie dinamiki rasprostraneniya komp'yuternyx ugroz v informacionno-vychislitel'nyx setyax s zapazdyvaniem dejstviya antivirusov", *Vestnik MGTU im. N.E'. Bauman. Ser. "Priborostroenie"*, no. 1, pp. 112-120.
7. Les'ko, S.A., Alyoshkin, A.S., Filatov, V.V. (2019), "Stoxasticheskie i perkolyacionnye modeli dinamiki blokirovki vychislitel'nyx setej pri rasprostranenii e'pidemij e'volucioniruyushhix komp'yuternyx virusov", *Rossijskij texno-logicheskij zhurnal*, vol. 7, no. 3, pp. 7-27.
8. Moore, C. and Newman, M. E. J. (2000), "Epidemics and percolation in small-world networks", *Phys. Rev. E*, no. 61, pp. 5678.
9. Garetto, M., Weibo G. and Donald F. T. (2003), "Modeling malware spreading dynamics", *IEEE INFOCOM 2003. Twenty-second Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies (IEEE Cat. No.03CH37428)*, no. 3, pp. 1869-1879.
10. Hoshen, J., and Kopelman, R. (1976), "Percolation and cluster distribution: I. Cluster multiple labeling technique and critical concentration algorithm", *Phys. Rev. B*, i. 14 (October), pp. 3438-3445.
11. https://ru.wikipedia.org/wiki/Поиск_в_глубину (accessed data: 20.04.2024).
12. Matsumoto, M. and Nishimura, T. (1998), "Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator", *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, vol. 8, no. 1, pp. 3-30.
13. Stauffer, D. (1985), *Introduction to percolation theory*, London: Taylor & Francis, 192 p.
14. Tarasevich, Yu. Yu. (2002), *Perkolyaciya: teoriya, prilozheniya, algoritmy*, M.: Editorial URSS, 112 s.

Информация об авторах:

М. М. Бузмакова – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики и информатики физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID: 642701;

Е. А. Воробьев – магистр первого года обучения по направлению "Прикладная математика и информатика" физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15).

Information about the authors:

Maria M. Buzmakova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Applied Mathematics and Informatics Department, Institute of Physics and Mathematics, Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID: 642701;

Egor A. Vorobyev – first-year Master of Applied Mathematics and Informatics at the Physics and Mathematics Institute of Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068).

Обзорная статья

УДК 004.042

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-61-67

Сравнительная оценка методов кластеризации в работе с большими данными

Елена Викторовна Панферова¹, Роман Андреевич Матюшин²

^{1,2}Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого,
Институт передовых информационных технологий, г. Тула, Россия

¹gamma15@inbox.ru

²roman.matyuschin2017@yandex.ru

Аннотация. В работе рассмотрена проблематика использования методов кластерного анализа в задачах обработки, анализа и хранения структурированных и неструктурированных данных большого объема и проведена оценка целесообразности их применения при различных аспектах работы с Big Data. Целью работы является выявление наиболее предпочтительных из распространенных алгоритмов кластеризации данных. Для этого была поставлена задача проведения сравнительной оценки следующих популярных алгоритмов: иерархической кластеризации, k-means, DBSCAN, OPTICS и CURE. Рассмотрены алгоритмическая сложность методов и устойчивость алгоритмов к шумам и выбросам, также обозначены потенциальные возможности визуализации их результатов и сферы народнохозяйственного применения. Сделаны выводы о преимуществах и недостатках каждого представленного алгоритма при их использовании в сфере Big Data и о наиболее предпочтительных методах кластерного анализа при различных аспектах работы с большими данными.

Ключевые слова: *Big Data; большие данные; кластеризация; выборка; алгоритм; кластерный анализ; метрика; визуализация; алгоритмическая сложность*

Для цитирования: Панферова Е.В., Матюшин Р.А. Сравнительная оценка методов кластеризации в работе с большими данными // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2(65). С. 61–67. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-61-67.

Статья поступила в редакцию 30.04.2024; одобрена после рецензирования 23.05.2024; принята к публикации 12.06.2024.

Review article

Comparative Evaluation of Clustering Methods in Working With Big Data

Elena V. Panferova¹, Roman A. Matushin²

^{1,2}Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University,
Institute of Advanced Information Technologies, Tula, Russia

¹gamma15@inbox.ru

²roman.matyuschin2017@yandex.ru

Abstract. The paper considers the problems of using cluster analysis methods in the tasks of processing, analyzing and storing structured and unstructured large-volume data and evaluates the feasibility of their use in various aspects of working with Big Data. The aim of the work is to identify the most preferred of the common data clustering algorithms. To do this, the task was set to conduct a comparative evaluation of the following popular algorithms: hierarchical clustering, k-means, DBSCAN, OPTICS and CURE. The algorithmic complexity of the methods is considered, the stability of algorithms to noise and emissions is analyzed, as well as the potential possibilities of visualizing their results and the scope of



Эта работа © 2024 Панферова Е.В., Матюшин Р.А. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

economic application are indicated. Conclusions are drawn about the advantages and disadvantages of each presented algorithm when used in the field of Big Data and about the most preferred methods of cluster analysis in various aspects of working with big data.

Keywords: *Big Data; clustering; sampling; algorithm; cluster analysis; metric; visualization; algorithmic complexity*

For citation: Panferova, E. V. and Matushin, R. A. (2024), "Comparative evaluation of clustering methods in working Big Data", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 2(65), pp. 61-67. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-61-67.

The article was submitted 30.04.2024; approved after reviewing 23.05.2024; accepted for publication 12.06.2024.

Введение

В сфере информационных технологий на данный момент активно применяется термин Big Data или "Большие данные". Единого общепринятого определения данному понятию не существует. Наиболее правильным и полным, на наш взгляд, является такое: комплекс методов, средств и научно обоснованных подходов к анализу больших массивов данных с целью использования в практической деятельности, то есть, по сути, технология обработки и анализа непрерывно стремительно поступающих огромных массивов разнородной информации.

Big Data представляет собой структурированные и неструктурированные данные большого объема, а также инструменты для работы с ними, что предоставляет возможности для широкого их использования в различных народнохозяйственных сферах, таких как финансы, здравоохранение, маркетинг, средства массовой информации.

Исходя из определения, при таких параметрах входных данных возникает проблема их корректной фиксации, систематизации, обработки, анализа и хранения, для чего и применяются методы кластерного анализа, которые могут выступать в качестве именно начального шага в работе ввиду того, что эти алгоритмы опираются, прежде всего, на такую характеристику Big Data, как мощность рассматриваемого озера всех типов "сырых" данных, так называемый размер входа n [1]. Такие методы могут быть полезными лишь для предварительного анализа, поскольку позволяют учесть специфику больших данных в оценке лишь по одному, рассматриваемому ниже параметру – сложности алгоритмов.

Сложность алгоритма – это количественная характеристика, которая говорит о том, сколько времени либо какой объем памяти потребуется для его выполнения.

При анализе сложности для класса таких задач определяется некоторое число, характеризующее некоторый объем данных – размер входа n .

Таким образом, полагаем, что сложность алгоритма – некоторая функция размера входа. Сложность алгоритма, очевидно, может быть различной при одном и том же размере входа, но различных входных данных.

Понятие "О-сложность" алгоритмов введено для того, чтобы измерять скорость роста функции в зависимости от входных данных [2]. В математике "О" используется для обозначения "order of" (порядка) и позволяет сравнивать функции роста для оценки верхней границы (наихудшего случая), временной сложности алгоритма.

Кроме очевидной экономии различного рода ресурсов, временных и аппаратных, и ускорения процесса обработки больших объемов непрерывно поступающей информации, кластеризация может дать базовые представления о закономерностях внутри таких данных.

Кластеризация – задача разбиения заданной выборки объектов на непересекающиеся подмножества, называемые *кластерами*, так, чтобы каждый кластер состоял из схожих объектов, а объекты разных кластеров существенно отличались. Под схожестью обычно понимается близость друг к другу относительно выбранной метрики. Для осуществления данного процесса применяются специальные разработанные алгоритмы кластерного анализа. Однако не существует универсального алгоритма, и поэтому возникает необходимость понимания, в каких случаях какой подход предпочтительнее.

В связи с этим подробно рассмотрим наиболее известные алгоритмы и сделаем вывод относительно их применимости в сфере больших данных.

Иерархическая кластеризация

Данный метод основан на построении иерархической структуры кластеров, представленной в виде дерева или дендрограммы. (рис. 1).

Данный метод включает в себя два типа – агломеративный и дивизивный (англ. divisive).

Агломеративный вариант работает по принципу от меньшего к большему, т. е. процесс начинается с каждого объекта в собственном кластере и последовательно проводится объединение ближайших кластеров до тех пор, пока все объекты не окажутся в одном кластере.

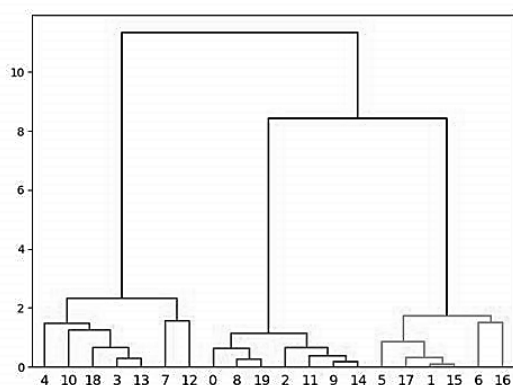


Рис. 1. Итог работы иерархического метода кластеризации

В случае дивизивного типа действуют наоборот: начинают с одного кластера, а затем разделяют его на более мелкие.

Для работы данного алгоритма требуется решить, какие данные между собой следует объединять в кластеры, для этого выбирается метрика, количественно характеризующая сходство или несходство данных между собой [3].

Одними из наиболее применимых метрик являются евклидово $d(p, q)$ (1) и манхэттенское d (2) расстояния:

$$d(p, q) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (p_k - q_k)^2} \quad (1)$$

$$d = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|. \quad (2)$$

Основными преимуществами данного алгоритма являются наглядная визуализация результатов, что означает высокую интерпретируемость, а также отсутствие необходимости вручную задавать необходимое количество кластеров, так как алгоритм строит все доступные уровни иерархии.

Алгоритмическая сложность данного алгоритма кубическая, то есть равна $O(n^3)$.

Это означает, что время выполнения алгоритма пропорционально кубическому объему входных данных и будут требоваться значительные аппаратные мощности.

Нельзя не отметить низкую устойчивость алгоритма к шумам и выбросам, то есть к появлению точек, не принадлежащих ни одному из кластеров и экстремально отличающихся от остального массива заданных точек, например отрицательное число в массиве положительных.

Также стоит сказать о невозможности визуализации работы алгоритма в виде разбиения на кластеры как произвольной, так и какой-либо фиксированной геометрической формы, к примеру, круга или сферы, за исключением дендрограммы, а также чувствительности алгоритма к метрике расстояний. Под чувствительностью к метрике подразумевается вероятность получить разные результаты в зависимости от выбора той или иной метрики.

Как итог, можно сделать вывод о нецелесообразности использования рассматриваемого алгоритма при работе с большими данными.

K-means

Данные алгоритмы кластеризации представляют собой группу алгоритмов на основе центроидов. Центроид – средняя точка или центр массы фигуры или множества заданных точек.

Суть алгоритма k-means заключается в разбивке данных на k точек, где k – заданное количество кластеров и каждый кластер представляет собой группу точек, центр которых является центроидом (рис. 2) [4].

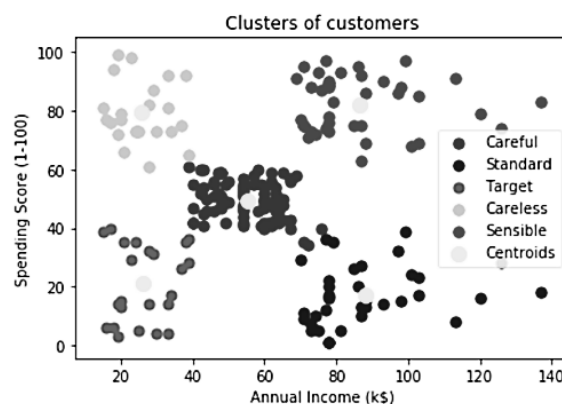


Рис. 2. Визуальное представление алгоритма k-means

Получение масштабируемых алгоритмов основано на идее отказа от локальной

функции оптимизации. Парное сравнение объектов между собой в алгоритме k-means есть не что иное, как локальная оптимизация, так как на каждой итерации необходимо рассчитывать расстояние от центра кластера до каждого объекта.

Данный алгоритм является довольно простым в реализации, также он легко масштабируется. Но в то же время его применение ведет к большим вычислительным затратам.

Также имеется ряд минусов, таких как слабая устойчивость к шуму, чувствительность к задаваемым параметрам и начальным центроидам, необходимость задавать число нужных кластеров, строгая форма кластеров сферической формы.

Алгоритмическая сложность алгоритма является плавающей величиной, она оценивается как $O(k \times n \times t)$, где k – количество центроидов, n – общее количество точек, а t – количество итераций, и чаще всего, в том числе и в случаях значительного увеличения потока данных, она является полиномиальной.

Как итог, можно утверждать, что применять данный алгоритм при обработке больших данных нерационально.

DBSCAN

DBSCAN – алгоритм кластеризации, основанный на плотности, который используется для разделения наборов данных на группы, основанные на пространственной близости точек (рис. 3) [5]. Под плотностью понимается количество точек в заданном пространстве.

Для работы алгоритма требуется задать два параметра необходимых для создания кластеров – "eps" (радиус окрестности в которой ищутся соседи) и "min_samples" (минимальное количество точек, необходимое для определения кластер.

DBSCAN обладает следующим рядом преимуществ: автоматическое определение количества кластеров, возможность создания кластеров произвольной формы, устойчивость к шуму и простота реализации.

Но у него есть такие минусы как чувствительность к параметрам eps и min_samples.

В лучшем случае алгоритмическая сложность DBSCAN будет линейно-логарифмической. Время выполнения алгоритма, очевидно, растет быстрее, чем

линейно, но медленнее, чем квадратично: $O(n \times \log n)$, в худшем случае она составляет $O(n^2)$, такая сложность будет получена, если не будут использоваться пространственные индексы [6].

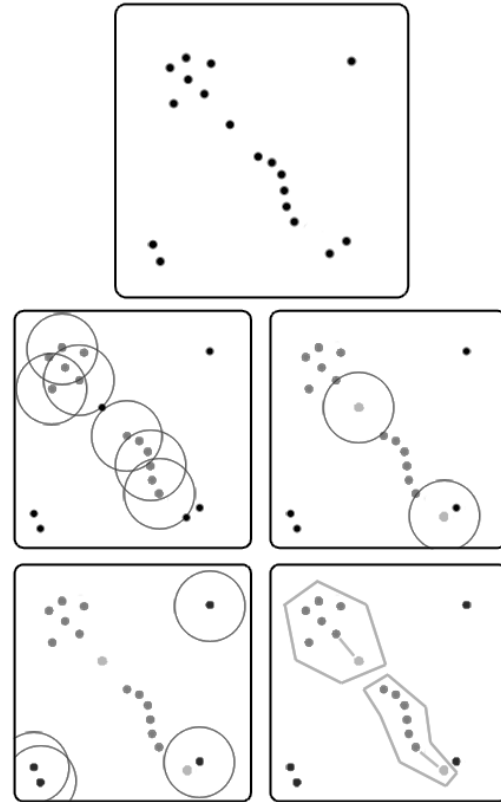


Рис. 3. Визуальное представление алгоритма DBSCAN

Пространственные индексы – структуры данных, используемые для оптимизации выполнения запросов, которые требуют доступа к пространственным объектам, таким как точки, линии, полигоны и т. д.

Исходя из вышеизложенного, мы можем сделать вывод, что данный алгоритм вполне применим для работы с большими данными, однако лишь в том случае, если будут созданы пространственные индексы для точек, что существенно сократит время его выполнения.

OPTICS

Данный алгоритм, так же, как и DBSCAN, основан на плотности.

OPTICS работает путем построения графа достижимости, который представляет собой граф, где вершинами являются точки данных, а ребрами – расстояния между ними (рис. 4).

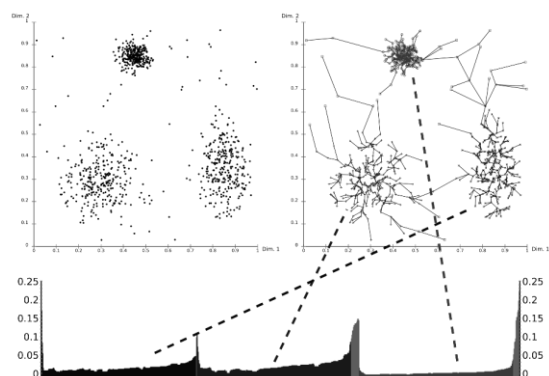


Рис. 4. Визуальное представление алгоритма OPTICS

Алгоритм затем упорядочивает точки в зависимости от их достижимости, которая определяется как максимальное расстояние до ближайшей точки с более низкой плотностью [7].

Кластеры определяются как связанные компоненты в графе достижимости, где связность определяется порогом достижимости. Под порогом достижимости понимается максимальное расстояние, на котором две точки могут быть связаны и считаться частью одного кластера.

Говоря о преимуществах данного алгоритма, следует отметить его универсальность по отношению к различным типам данных, высокую устойчивость к шуму, но, будучи алгоритмом того же типа что и DBSCAN, он сильно зависит от параметров "eps" и "min_samples", и он более сложен в интерпретации.

Говоря об алгоритмической сложности, мы можем сказать, что по данному параметру он аналогичен DBSCAN, то есть она колеблется от $O(n \times \log n)$ до $O(n^2)$ в зависимости от того, использовали мы пространственные индексы или нет, но, если сравнивать OPTICS и DBSCAN, то, в целом, первый будет быстрее на больших наборах данных [8].

В итоге мы можем сделать вывод, что данный алгоритм — наиболее предпочтительный для работы с большими данными из всех вышеперечисленных вариантов.

CURE

CURE — частный случай иерархической кластеризации, который использует набор представителей для определения принадлежности объекта к определенному кластеру (рис. 5) [9].

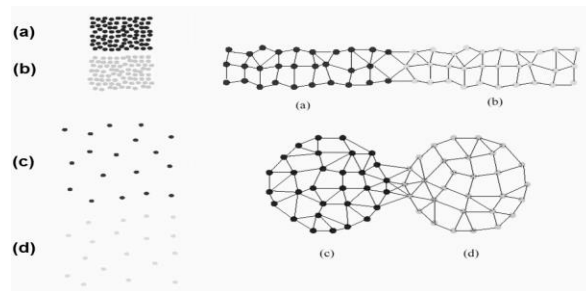


Рис. 5. Визуальное представление алгоритма CURE

Он хорошо подходит для кластеризации наборов числовых данных, особенно в случаях, когда:

- присутствуют выбросы: CURE менее чувствителен к выбросам, чем другие алгоритмы кластеризации;
- кластеры имеют сложную форму: CURE способен находить кластеры произвольной формы, а не только сферические или эллиптические;
- кластеры имеют разный размер: CURE может обнаруживать кластеры разных размеров, что не всегда возможно в случае других алгоритмов.

Алгоритмическая сложность фиксированная, не плавающая, составляет $O(n \times \log n)$, а к преимуществам нужно отнести масштабируемость, устойчивость к выбросам и создание кластеров произвольной формы, но, к сожалению, он сложен в реализации и так же, как и DBSCAN и OPTICS, зависит от параметров [10].

Будучи алгоритмом, специально созданным для обработки больших данных, он наиболее предпочтителен при их обработке.

Суммируя ранее сделанные выводы, приведем сравнение представленных алгоритмов по следующим критериям:

- преимущества;
- недостатки;
- сфера применения;
- алгоритмическая сложность.

Иерархическая кластеризация

- простота реализации, наглядность;
- нежелательность использования на больших объемах данных, чувствительность к метрике расстояний, неспособность формировать произвольные формы кластеров;
- биоинформатика, бизнес, обработка изображений, поиск информации;
- $O(n^3)$.

k-means

- а) простота реализации, предпочтительность применения на малых объемах данных;
- б) низкая устойчивость к шуму, невозможность формировать произвольные формы кластеров;
- с) сегментация клиентов, классификация документов, анализ записей звонков;
- д) $O(k \times n \times t)$.

DBSCAN

- а) устойчивость к шуму, находить кластеры произвольной формы и разного размера, простота реализации;
- б) чувствительность к выбору параметров, невозможность находить кластеры иерархической структуры;
- с) медицина, анализ географических данных [11];
- д) от $O(n \times \log n)$ до $O(n^2)$.

OPTICS

- а) устойчивость к шуму, находить кластеры произвольной формы и разного размера, простота реализации;
- б) чувствительность к выбору параметров, невозможность кластеры иерархической структуры;
- с) анализ геоданных, биоинформатика, телекоммуникации;
- д) от $O(n \times \log n)$ до $O(n^2)$.

CURE

- а) устойчивость к шуму, находит кластеры произвольной формы и разного размера;
- б) чувствительность к выбору параметров, сложность реализации;
- с) обработка изображений, медицина, финансы [12].
- д) $O(n \times \log n)$.

Заключение

На основе проведенного анализа сделаем вывод, что среди представленных алгоритмов кластеризации наиболее предпочтительными при работе с большими данными являются DBSCAN, OPTICS и специально созданный для их обработки CURE.

Список источников

1. Goodfellow Y., Bengio A. Courville, Deep Learning / Adaptive Computation and Machine Learning series // The MIT Press, 2016.

2. Даниленко А.Н. Структуры данных и анализ сложности алгоритмов: учеб. пособие / Самара: Изд-во Самарского университета, 2018. 76 с.
3. Data clustering: a review / A. K. Jain, M. N. Murty, P. J. Flynn // ACM Computing Surveys. 1999. № 31(3). P. 264–323.
4. K-means // ScikitLearn: URL: <https://scikit-learn.org/stable/modules/clustering.html#k-means> (дата обращения: 03.04.2024).
5. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise / Ester Martin, Kriegel Hans-Peter, Sander Jörg, Xu Xiaowei // Proceedings KDD'96. 1996. № 34. P. 226-231.
6. GO-DBSCAN: Improvements of DBSCAN Algorithm Based on Grid / Feng L., Liu K., Tang F., Meng Q. // 2017. vol. 9. no. 3, pp. 151.
7. OPTICS: ordering points to identify the clustering structure / Ankerst M., Breunig [и др.] // Proceedings SIGMOD '99. 1999. № 2. P. 49–60.
8. Data mining: Concepts and Techniques / Han J., Kamber M., Pei J. // 2012. Morgan Kaufmann Series, Waltham, USA.
9. Basic Understanding of CURE Algorithm // Geeksforgeeks: URL: <https://www.geeksforgeeks.org/basic-understanding-of-cure-algorithm/> (дата обращения: 03.04.2024).
10. CURE: An Efficient Clustering Algorithm for Large Databases / Guha S., Rastogi R., Kyuseok S. // 1998. ACM SIGMOD Conference, vol. 27, no. 2, pp. 73-84.
11. Кластеризация пространственных данных – плотностные алгоритмы и DBSCAN // КАРТЕТИКА: URL: <https://cartetika.ru/tpost/k05o2ndpf1-klasterizatsiya-prostranstvennih-dannih> (дата обращения: 11.04.2024).
12. CURE Algorithm // Deepgram: URL: <https://deepgram.com/ai-glossary/cure-algorithm> (дата обращения: 11.04.2024).

References

1. Goodfellow, I., Bengio, Y. and Courville, A. (2016). *Deep Learning*, Adaptive Computation and Machine Learning series, the MIT Press.
2. Danilenko, A.N. (2018), *Struktury dannykh i analiz slozhnosti algoritmov* [Data structures and algorithm complexity analysis], № 1272, Samara University Press, Samara, Russia.

3. Jain, A. K., Murty, M. N. and Flynn, P. J. (1999), "Data clustering: a review", ACM Computing Surveys, vol. 31, no. 3, pp. 264-323.
4. ScikitLearn (2024), "K-means", available at: <https://scikit-learn.org/stable/modules/clustering.html#k-means> (Accessed 03 April 2024).
5. Ester M., Kriegel Hans H.-P., Sander J. and Xu X. (1996), "A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise", Proceedings KDD'96, vol. 34, pp. 226-231.
6. Feng L., Liu K., Tang F. and Meng Q. (2017), "GO-DBSCAN: Improvements of DBSCAN Algorithm Based on Grid", vol. 9, no. 3, pp. 151.
7. Ankerst M., Breunig M. M., Kröger P. and Sander J. (1999), "OPTICS: ordering points to identify the clustering structure", Proceedings SIGMOD '99, vol. 2, pp. 49-60.
8. Han J., Kamber M. and Pei J., (2012), "Data mining: Concepts and Techniques", Morgan Kaufmann Series, Waltham, USA.
9. Geeksforgeeks (2021), "Basic Understanding of CURE Algorithm", available at: <https://www.geeksforgeeks.org/basicunderstanding-of-cure-algorithm/> (Accessed 03 April 2024).
10. Guha, S., Rastogi, R. and Kyuseok, S., (1998), "CURE: An Efficient Clustering Algorithm for Large Databases", ACM SIGMOD Conference, vol. 27, no. 2, pp. 73-84.
11. Cartetika (2023), "Clustering of spatial data – density algorithms and DBSCAN", available at: <https://cartetika.ru/tpost/k05o2ndpf1-klasterizatsiya-prostranstvennih-dannih> (Accessed 11 April 2024).
12. Deepgram (2024), "CURE Algorithm", available at: <https://deepgram.com/ai-glossary/cure-algorithm> (Accessed 11 April 2024).

Информация об авторах:

Е. В. Панферова – кандидат технических наук, доцент, доцент института передовых информационных технологий Тульского государственного педагогического университета (300026, Россия, г. Тула, пр. Ленина, 125, корпус 3), SPIN-код: 3937-4236, AuthorID: 814520;

Р. А. Матюшин – студент-магистрант института передовых информационных технологий Тульского государственного педагогического университета (300026, Россия, г. Тула, пр. Ленина, 125, корпус 3).

Information about the authors:

Elena V. Panferova – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor, Institute of Advanced Information Technologies, Tula State Pedagogical University, (125, Lenin Ave., Tula, Russia, 300026), SPIN-code: 3937-4236, AuthorID: 814520;

Roman A. Matushin – Master's Student of the Institute of Advanced Information Technologies, Tula State Pedagogical University (125, Lenin Ave., Tula, Russia, 300026).

Научный периодический журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" зарегистрирован в 2007 г. как самостоятельное издание, являющееся продолжением серии журнала "Вестник Пермского университета", издаваемого с 1994 г.

В каждом номере научного журнала автору разрешается опубликование в любом разделе не более одной статьи, в том числе в соавторстве.

Статьи, оформленные в соответствии с нижеизложенными правилами, должны быть отправлены через **личный кабинет автора на сайте журнала**. Статьи отправляются в двух форматах: текстовый документ и pdf-файл без данных об авторе (для организации слепого рецензирования). Вместе с рукописью отправляются контактные данные авторов в свободной форме в текстовом документе (ФИО, должность, место работы с указанием полного адреса, e-mail, номер телефона), **сопроводительное письмо**, согласие **на обработку и хранение персональных данных** (от каждого соавтора рукописи) и **экспертное заключение о возможности открытого опубликования**. Для публикации статьи необходимо заполнить и подписать **договор**.

Аннотация статьи (на русском и английском языках) должна содержать основные краткие сведения: описание проблемы, включая цели и задачи исследования; методы исследования с указанием новизны, если имеется; полученные результаты и выводы. Объем аннотации примерно 250 слов

Текст статьи должен содержать разделы: Введение, Постановка задачи, Методы исследования, Результаты, Обсуждения, Заключение для русскоязычной статьи; Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion для англоязычной статьи. Объем рукописи – не менее 6 страниц машинописного текста. Рекомендуемое количество использованных источников в научной статье – 10-20, в обзорной статье – 20-50.

Оформление. Текст статьи необходимо оформить в редакторе **Word**. Формат листа, используемый для написания статьи – А4. Размеры верхнего и нижнего полей – 2.6 см, правого и левого – 2.5 см. Расстояние до верхнего и нижнего колонтитулов 1.25 см. Шрифтом Times New Roman Cyr, размер – 11 пт, межстрочный интервал – одинарный. Подписи к рисункам и таблицам набираются курсивом, в конце заголовков и ячеек таблицы точка не ставится. Формулы набираются в редакторе Microsoft Word Equation.

Структура статьи

Вид статьи (научная/обзорная).

УДК (шрифт Times New Roman – 10 пт).

DOI: ____.

Название статьи на русском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

Ф.И.О. автора (-ов) полностью.

Место работы (с указанием подразделения), город и страна (шрифт Times New Roman – 10 пт), **e-mail**.

Аннотация на русском языке (шрифт Times New Roman – 10 пт).

Ключевые слова на русском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 10 пт, курсивный).

Название статьи на английском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

На английском языке Ф.И.О. автора (-ов) полностью.

Место работы (с указанием подразделения), город и страна (шрифт Times New Roman – 10 пт), **e-mail**.

Аннотация на английском языке (шрифт Times New Roman – 10 пт).

Ключевые слова на английском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 10 пт, курсивный).

Основной текст статьи набирается (шрифт Times New Roman – 11 пт) в две колонки одинаковой ширины, расстояние между колонками – 0.5 см, абзацный отступ основного текста – 1.0 см (задается автоматически, не пробелами). Другие отступы не допускаются. Выравнивание текста по ширине.

Список источников оформляется в едином формате, в соответствии с ГОСТ Р 7.0.100–2018, без использования тире. Если в списке литературы используется источник из электронного ресурса, необходимо указать дату обращения. Ссылка на литературный источник указывается в тексте статьи в квадратных скобках после упоминания цитаты. Список использованных литературных источников необходимо представить на русском и английском языках (**References**). **Список литературы на латинице, называемый References**, готовится отдельно от Списка литературы и размещается сразу за указанным списком. Ссылки на зарубежные источники необходимо повторять в Списке литературы и References. В References недопустимо использовать российские ГОСТы. Необходимо следовать требованиям международных стандартов. Инструкция по оформлению списка литературы в латинице – References, стандарт "Harvard" находится по ссылке http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc.

ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ И ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Все рукописи проходят проверку в системе "Антиплагиат", на рассмотрение принимаются статьи со степенью оригинальности более 80 % для научных статей, 60 % для обзорных статей. Далее рукописи передаются на рецензирование двум специалистам в научной области исследования. При возникновении спорной ситуации назначается третий рецензент. Окончательное решение о публикации рукописи принимает главный редактор журнала.

Датой поступления статьи считается день ее отправки через личный кабинет на сайте журнала или по электронной почте журнала (главного редактора). Рукописи рассматриваются в порядке их поступления в течение одного месяца в зависимости от сложности ситуации и объема работы. Редакция оставляет за собой право без согласования с автором проводить литературную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла.

Одобренные статьи публикуются бесплатно. Полнотекстовая версия каждой рукописи выставляется на сайте журнала и в системе РИНЦ (e-library).

Scientific periodical journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" is published since 1994 in the series of the journal "Bulletin of Perm University". Then it was registered as an independent publication in 2007.

An author is allowed to publish no more than one article (also as co-author) in any section for each issue of the journal.

Article's structure should be accordant with the rules below and should be sent through the **author's personal account on the journal's website**. Articles should be sent in two formats: a text document and a pdf-file without information about the author(s) (for review). Authors contact data (name, position and place of work with address, e-mail, phone number in a text document), **the cover letter, consent for personal data processing and storage** (from each co-author) and **an expert letter on the open publication possibility** should be sent with the manuscript. Author(s) must make and sign **an agreement**.

Abstract (in Russian and English) should contain main information of research: a problem including the goals and objectives of the study; research methods with novelty indication, if any; significant results and findings. The abstract size is approximately 250 words.

Text should contain sections: Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion. The manuscript size is at least 6 typewritten pages. The used sources recommended number for research article is 10-20, in a review article - 20-50.

An article text must be formatted in the editor Word. The sheet format is A4. The top and bottom margins are 2.6 cm, the right and left margins are 2.5 cm. The distances to the header and footer are 1.25 cm. Times New Roman Cyr font, size – 11 pt, single spacing. Legends for figures and tables are typed in italics style. Formulas are typed in the editor Microsoft Word Equation.

The structure of the article

Article's type (Research/review).

UDC (Times New Roman font – 10 pt).

TITLE in Russian (Times New Roman font – 16 pt, bold).

Name: author (s) name in full.

Place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 10 pt), **e-mail.**

Abstract in Russian (Times New Roman font – 10 pt).

Keywords in Russian: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 10 pt, italic).

TITLE in English (Times New Roman font – 16 pt, bold).

In English author (s) name in full, place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 10 pt), **e-mail.**

Abstract in English (Times New Roman font – 10 pt).

Keywords in English: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 10 pt, italic).

The article text (Times New Roman font – 11 pt) is typed in two columns of the same width, the distance between the columns is 0.5 cm, the paragraph indent is 1.0 cm (set automatically, not spaces). No other indents are allowed. Justify the text in width.

References are formed in a single format with using GOST R 7.0.100–2018 without a dash. If a source from an electronic resource is used, the author should indicate the request date. To indicate a source in text author uses square brackets after the quotation mention. References must be submitted **in Russian and English**. The References list in Latin, called References, is prepared separately from the References List in Russian and placed below. Foreign sources references should be repeated in the References Lists in Russian and English. It is inadmissible to use Russian GOSTs in References. It is necessary to follow the requirements of international standards. Instructions on the References in Latin script design – References,

Harvard standard can be found at http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc.

REVIEW AND PUBLICATION OF ARTICLES

All manuscripts are checked in the "Anti-Plagiarism" system, articles with the originality degree more than 80% for research, 60% for review are accepted for consideration. Then manuscripts are submitted for review by two specialists in the research scientific field. If a disputable situation arises, a third reviewer is appointed. The final decision on the manuscript publication is made by the editor-in-chief of the journal.

The receipt date of the article is the day of its submission through the personal account on the journal's website or by e-mail of the journal (or editor-in-chief). Manuscripts are reviewed in the order they are received within one month, review period may be changed depending on a situation complexity and a works amount. The journal editors can to edit the article text without basic meaning change.

Approved articles are published free. The full-text version of each manuscript is posted on the journal's website and in the RSCI system (e-library).

Научное издание

ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Математика. Механика. Информатика

Выпуск 2 (65)

2024

Адрес учредителя и издателя
614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ
Адрес редакции
614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ
Физико-математический институт
e-mail: vestnik_mmi@psu.ru

Редактор Е.В. Шумилова
Корректор В.Е. Пирожкова
Компьютерная верстка: Г.И. Кушнина

Подписано в печать 20.06.2024. Выход в свет 28.06.2024
Формат 60 × 84/8. Усл. печ. л. 8,14. Тираж 500 экз. Заказ 92

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Управление издательской деятельности

614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15. Тел. (342) 239-66-36

Отпечатано в типографии ПГНИУ. Тел. (342) 239-65-47

Подписной индекс журнала
«Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика»
в онлайн-каталоге «Урал-Пресс» – 015010
https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase_id=396133

Распространяется бесплатно и по подписке