

Учредитель: Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Научный журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" публикует оригинальные научные статьи, краткие сообщения и обзорные статьи по направлениям журнала на русском и английском языках, ранее не публиковавшиеся и не представленные для публикации в других изданиях. Все статьи проходят рецензирование членами редакционной коллегии журнала и внешними рецензентами.

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

БУЗМАКОВА М. М., к. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
МАЛАНИН В. В., д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
БАРУЛИНА М. А., д. ф.-м. н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
НУРБАКОВА Д. М., PhD in Computer Science; Национальный институт прикладных наук Лиона (National Institute of Applied Sciences of Lyon), Лион, Франция.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

БУЗМАКОВА М. М., к.ф.-м.н., доцент, **главный редактор**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
РУСАКОВА О. Л., к.ф.-м.н., доцент, **ответственный секретарь**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
АЛЕКСЕЕВ А. О., к.э.н., доцент; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;
АПТУКОВ В. Н., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
АПУШКИНСКАЯ Д. Е., д.ф.-м.н.; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;
БАРУЛИНА М. А., д.ф.-м.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
БИРЮКОВ А. Н., д.э.н., доцент; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;
БОРИСОВ В. В., д.т.н., профессор; Смоленский филиал национального исследовательского университета «МЭИ», Смоленск, Россия;
ВЕЧТОМОВ Е. М., д.ф.-м.н., профессор; Вятский государственный университет, Киров, Россия;
ГУСЕВ А. Л., д.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ДЕМИДОВ С. С., д.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
ИВАНОВ Д. В., д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;
ИСАЕВ К. П., д.ф.-м.н.; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;
ИШКИН Х. К., д.ф.-м.н.; доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;
КРИВОШЕЕВА О. А., д. ф.-м. н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;
КОССОВИЧ Л. Ю., д.ф.-м.н., профессор; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;
КУЗНЕЦОВ А. Г., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
МАЛАНИН В. В., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
МАТВЕЕНКО В. П., д.т.н., профессор, академик РАН; Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия;

МАХНЕВ А. А., д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;
ПАПКОВА И. В., д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;
ПЕСТРЕНИН В. М., к.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ПОЛОСКОВ И. Е., д.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
РУСАКОВ С. В., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
САВЧИН В. М., д.ф.-м.н., профессор; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;
СЕЛЕТКОВ И. П., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ТРУСОВ П. В., д.ф.-м.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;
ТЮРИН С. Ф., д.т.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;
ХАЧАЙ М. Ю., д.ф.-м.н., профессор РАН, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;
ХЕННЕР Е. К., д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАО; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ФАЗУЛЛИН З.Ю., д.ф.-м.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;
ЧЕРМНЫХ В. В., д.ф.-м.н., доцент; Сыктывкарский государственный университет имени Питиримы Сорокина, Сыктывкар, Россия;
ЧЕРНИКОВ А. В., к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ЧИНЕНОВА В. Н., к.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
ШАХМАМЕТОВА Г. Р., д.т.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;
ШВАРЦ К. Г., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ЮМАГУЛОВ М. Г., д.ф.-м.н., профессор; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;
ЯКОВЛЕВ В. И., д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;
ЯСНИЦКИЙ Л. Н., д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77 - 66787 от 08.08.2016.

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (приказ от 08.07.2024). Научные специальности: Вещественный, комплексный и функциональный анализ; Дифференциальные уравнения и математическая физика; Геометрия и топология; Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика; Вычислительная математика; Теоретическая механика, динамика машин; Механика деформируемого твердого тела; Механика жидкости, газа и плазмы; Искусственный интеллект и машинное обучение; Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; Теоретическая информатика, кибернетика; Системный анализ управление и обработка информации, статистика; Вычислительные системы и их элементы; Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования. Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ, eLIBRARY ID 28484).

Founder: Perm State University

The journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" publishes Full Articles, Short Communications Article and Review paper/perspectives on the journal's directions, which have not been previously published. The papers have been written in Russian and English. The papers are reviewed by the journal editorial board members and external reviewers.

EDITORIAL COUNCIL

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Perm State University, Perm, Russia;
NURBAKOVA D. M., PhD in Computer Science; National Institute of Applied Sciences of Lyon, France.

EDITORIAL BOARD

BUZMAKOVA M. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Editor-in-Chief**, Perm State University, Perm, Russia;
RUSAKOVA O. L., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Executive Secretary**, Perm State University, Perm, Russia;
ALEKSEEV A. O., Candidate of Science in Economics, Associate Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
APTUKOV V. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
APUSHKINSKAYA D. E., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;
BARULINA M. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Perm State University, Perm, Russia;
BIRUKOV A. N., Doctor of Science in Economics, Associate Professor; Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;
BORISOV V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Smolensk Branch of National Research University "MEI", Smolensk, Russia;
VECHTOMOV E. M., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Vyatka State University, Kirov, Russia;
GUSEV A. L., Doctor of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
DEMIDOV S. S., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
IVANOV D. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
ISAEV K. P., Doctor of Science in Physics and Mathematics; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
ISHKIN H. K., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
KRIVOSHEEVA O. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
KOSSOVICH L. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
KUZNECOV A. G., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
MALANIN V. V., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
MATVEENKO V. P., Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician of RAS; Institute of Continuous Media Mechanics, UrD RAS, Perm, Russia;

MAHNEV A. A., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS;
PAPKOVA I. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;
PESTRENIN V. M., Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
POLOSKOV I. E., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;
RUSAKOV S. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
SAVCHIN V. M., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;
SELETKOV I. P., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
TRUSOV P. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
TURIN S. F., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;
HACHAI M. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of RAS, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS, Yekaterinburg, Russia;
HENNER E. K., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAO; Perm State University, Perm, Russia;
FAZULLIN Z. Yu., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
CHERMNYH V. V., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia;
CHERNIKOV A. V., Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;
CHINENOVA V. N., Candidate of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;
SHAHMAMETOVA G. R., Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
SHVARTS K. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
UMAGULOV M. G., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;
YAKOVLEV V. I., Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;
YASNICKIY L. N., Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia.

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor). Certificate of registration of the mass media PI No. FS 77 - 66787 dated 08.08.2016.

The journal is included in the peer-reviewed scientific publications list for the main research results should be published (Candidate of Sciences and Doctor of Sciences, order dated 07/08/2024). Scientific specialties: Real, complex and functional analysis; Differential equations and mathematical physics; Geometry and topology; Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics; Computational Mathematics; Theoretical mechanics, dynamics of machines; Mechanics of deformable solids; Mechanics of liquid, gas and plasma; Artificial intelligence and machine learning; Mathematical modeling, numerical methods and software packages; Theoretical Computer science, cybernetics; System analysis, information management and processing, statistics; Computer systems and their elements; Computer modeling and design automation. The journal is included in the national information and analytical system "Russian Science Citation Index" (eLIBRARY ID 28484).

Содержание

МАТЕМАТИКА

Вечтомов Е.М., Петров А.А., Шкляев А.П. Конечные полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами..	5
Махнев А.А., Биткина В.В., Гутнова А.К. О графах Шилла Γ с $b_2=c_2$, имеющих собственное значение $\theta_2=0$	16

МЕХАНИКА

Каменских А.О. Численный анализ собственных колебаний трехслойной пластины, находящейся под действием температурной нагрузки...	23
Макеев Н.Н. Динамика гиростата в световом поле полувеклидова пространства	35
Мустафина И.Ж. О безопасных и опасных точках бифуркации в периодических динамических системах.....	47

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Липин Ю.Н. Алгоритм и программное обеспечение распознавания лиц монозиготных близнецов.....	55
Соколов А.В., Сычев И.А., Соколова О.Л., Волкова Д.Б., Селетков И.П., Яшичев Д.Л., Ясницкий Л.Н. Теоретические и практические аспекты построения рекомендательных моделей: типология, архитектура и направления проектирования.....	64

Информация для авторов.....	78
-----------------------------	----

Contents

MATHEMATICS

- Vechtomov E. M., Petrov A. A., Shklyayev A. P.** Finite Semimodules Over Three-element Multiplicatively Idempotent Semirings..... 5
- Makhnev A. A., Bitkina V. V., Gutnova A. K.** On Shilla Graphs Γ With $b_2=c_2$ Having Eigenvalue $\theta_2=0$ 16

MECHANICS

- Kamenskikh A. O.** Numerical Analysis of Natural Frequencies of Three-layer Plate under Temperature Load..... 23
- Makeev N. N.** Gyrostat Dynamics in the Light Field of Semi-Euclidean Space..... 35
- Mustafina I. Zh.** Safe and Dangerous Bifurcation Points in Non-Autonomous Dynamical Systems..... 47

COMPUTER SCIENCE

- Lipin Yu. N.** Algorithm and Software for Monozygotic Twins Recognizing... 55
- Sokolov A. V., Sychev I. A., Sokolova O. L., Volkova D. B., Seletkov I. P., Yashichev D. L., Yasnitsky L. N.** Theoretical and Practical Aspects Building Recommendation Models: Typology, Architecture and Directions Design..... 64
- Information for authors 78

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 512.558

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-5-15

<https://elibrary.ru/buzlne>



**Конечные полумодули над трехэлементными
мультипликативно идемпотентными полукольцами**

**Евгений Михайлович Вечтомов¹, Андрей Александрович Петров²,
Александр Павлович Шкляев³**

^{1,2,3}Вятский государственный университет, г. Киров, Россия

¹e-mail: vecht@mail.ru

²e-mail: apetrov43@mail.ru

³e-mail: sascha.schlyaev@yandex.ru

Аннотация. Исследуется строение конечных полумодулей над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами. Основное внимание уделено случаю трехэлементных идемпотентных полуколец. Описаны полумодули, содержащие не более 6 элементов, над трехэлементными идемпотентными полукольцами.

Ключевые слова: полукольцо; мультипликативно идемпотентное полукольцо; полумодуль; конечный полумодуль; полурешетка; решетка; подходящая подполурешетка

Для цитирования: Вечтомов Е.М., Петров А.А., Шкляев А.П. Конечные полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 5–15. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-5-15. <https://elibrary.ru/buzlne>.

Благодарности: работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00117.

Статья поступила в редакцию 30.08.2024; одобрена после рецензирования 15.09.2024; принята к публикации 03.10.2024.

MATHEMATICS

Research article

**Finite Semimodules Over Three-element
Multiplicatively Idempotent Semirings**

Eugeny M. Vechtomov¹, Andrey A. Petrov², Alexander P. Shklyaev³

^{1,2,3}Vyatka State University, Kirov, Russia

¹e-mail: vecht@mail.ru

²e-mail: apetrov43@mail.ru

³e-mail: sascha.schlyaev@yandex.ru



Эта работа © 2024 Вечтомов Е.М., Петров А.А., Шкляев А.П. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. In this paper we study the structure of finite semimodules over three-element multiplicatively idempotent semirings. The main attention is paid to the case of three-element idempotent semirings. Semimodules containing at most 6 elements over three-element idempotent semirings are described.

Keywords: *semiring; multiplicatively idempotent semiring; semimodule; finite semimodule; semilattice; lattice; suitable subsemilattice*

For citation: Vechtomov, E. M., Petrov, A. A. and Shklyaev, A. P. (2024), "Finite Semimodules Over Three-element Idempotent Semirings", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(66), pp. 5-15. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-5-15. <https://elibrary.ru/buzlne>.

Acknowledgments: the Russian Science Foundation, Project № 24-21-00117, supported the work.

The article was submitted 30.08.2024; approved after reviewing 15.09.2024; accepted for publication 03.10.2024

Введение. Основные понятия

Исследуются полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами. Статья примыкает к работам [1], [2]. Теория мультипликативно идемпотентных полуколец излагается в книге [3]. Ранее изучались гомологические свойства полумодулей над дистрибутивными решетками S , называемых S -полигонами [4], в частности над трехэлементной цепью [5]. Последние достижения в теории полигонов над полугруппами изложены в обзоре [6]. Обзорная статья [7] посвящена теории полумодулей над полукольцами.

Отметим, что базовую информацию о полукольцах и полумодулях можно найти в монографии [8], а по теории решеток – в книге [9].

Полукольцом (с нулем и единицей) называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$ с двумя бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ и элементами нуль 0 и единица 1 , удовлетворяющими следующим условиям:

- 1) $\langle S, +, 0 \rangle$ – коммутативный моноид;
- 2) $\langle S, \cdot, 1 \rangle$ – моноид;
- 3) 0 – мультипликативный нуль, то есть тождественно $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$;
- 4) умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон, то есть в S справедливы тождества $(x+y)z = xz+yz$ и $x(y+z) = xy+xz$.

Полукольцо S называется:

- *коммутативным*, если S удовлетворяет тождеству $xu=ux$;
- *мультипликативно идемпотентным*, если в S тождественно $xx=x$;
- *идемпотентным*, если S удовлетворяет тождествам $xx=x$ и $x+x=x$.

Полумодулем над полукольцом S или просто *S -полумодулем* (унитарным левым S -полумодулем) называется коммутативный моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ с нейтральным элементом нуль 0 вместе с отображением $S \times A \rightarrow A$, $(s, a) \rightarrow sa$, обладающим следующими свойствами (для любых $s, t \in S$ и $a, b \in A$):

- (1) $(s+t)a=sa+ta$;
- (2) $s(a+b)=sa+sb$;
- (3) $(st)a=s(ta)$;
- (4) $1 \cdot a=a$;
- (5) $0 \cdot a=0=s \cdot 0$.

Отметим, что в полукольцах и полумодулях нуль 0 обозначается одинаково.

Заметим также, что такие понятия как полугруппа, моноид, идеал, подполурешетка, подполумодуль определяются стандартно.

Отображение $\alpha: A \rightarrow B$ S -полумодуля A в S -полумодуль B называется S -гомоморфизмом, если α аддитивно и линейно, то есть $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$ и $\alpha(sx) = s\alpha(x)$ для любых $x, y \in A$ и $s \in S$. Если S -гомоморфизм α S -полумодулей является взаимно однозначным отображением (биекцией), то он называется S -изоморфизмом; при этом обратная биекция α^{-1} также будет S -изоморфизмом. Изоморфные S -полумодули имеют одни и те же абстрактные свойства.

Заметим, что класс всех S -полумодулей при фиксированном полукольце S образует категорию полумодулей, если в качестве ее морфизмов взять всевозможные S -гомоморфизмы.

Идемпотентная коммутативная полугруппа $\langle A, + \rangle$ называется *полурешеткой*. Эквивалентное «порядковое» определение: (верхняя) *полурешетка* – это упорядоченное множество $\langle A, \leq \rangle$, для любых элементов a и b которого существует точная верхняя грань $\sup(a, b)$. Эти определения связаны соотношениями: $a \leq b \Leftrightarrow a+b=b$ и $a+b=\sup(a, b)$. Нулем полурешетки $\langle A, + \rangle$ называется ее нейтральный элемент 0: $a+0=a$ для всех $a \in A$. В порядковом смысле 0 есть наименьший элемент полурешетки $\langle A, \leq \rangle$.

Решеткой называется алгебраическая структура $\langle S, +, \cdot \rangle$, такая, что $\langle S, + \rangle$ и $\langle S, \cdot \rangle$ – полурешетки, согласованные посредством законов поглощения $x+xy=x$ и $x(x+y)=x$. Эквивалентное "порядковое" определение: *решетка* – это упорядоченное множество $\langle A, \leq \rangle$, для любых элементов a и b которого существуют точная верхняя грань $\sup(a, b)$ и точная нижняя грань $\inf(a, b)$, то есть $\langle A, \leq \rangle$ является одновременно нижней и верхней полурешеткой. Имеют место соотношения: $a \leq b \Leftrightarrow ab=a$ и $ab=\inf(a, b)$.

Отметим, что решетки удобно рассматривать как алгебраические системы $\langle S, +, \cdot, \leq \rangle$ с согласованными друг с другом бинарными операциями сложения $+$, умножения $\cdot$ и отношением порядка $\leq$. В частности, в решетках неравенства можно почленно складывать и умножать: $a \leq b, c \leq d$ влекут $a+c \leq b+d, ac \leq bd$.

Решетка с тождеством $x(y+z)=xy+xz$, равносильно, с тождеством $x+yz=(x+y)(x+z)$, называется *дистрибутивной*.

Предварительные результаты

Приведем несколько предварительных соображений.

Лемма 1. *Коммутативный моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ будет S -полумодулем над некоторым мультипликативно идемпотентным полукольцом S тогда и только тогда, когда в A верно тождество $4x=2x$.*

Доказательство. В любом мультипликативно идемпотентном полукольце S имеем $4=1+1+1+1=(1+1)(1+1)=1+1=2$. Поэтому полумодули над таким полукольцом S удовлетворяют тождеству $4x=2x$. Обратно, если в коммутативном моноиде A верно тождество $4x=2x$, то A будет S -полумодулем для четырехэлементного полукольца $S=\{0, 1, 2, 3\}$ с равенством $3+1=2$.

Далее предполагается, что $A \equiv \langle A, +, 0 \rangle$ – коммутативный моноид с тождеством $4x=2x$.

С точностью до изоморфизма существует четыре трехэлементных мультипликативно идемпотентных полукольца:

- $S_1 = \{0 < e < 1\}$ – цепь;
- $S_2 = \{0, e, 1\}$ при $1+1=1$ и $e+1=e$;
- $S_3 = \{0, 1, 2\}$ при $3=1$;
- $S_4 = \{0, 1, 2\}$ при $3=2$.

Полукольца S_1, S_2 – идемпотентные ($2=1+1=1$), а полукольца S_3, S_4 не являются идемпотентными ($2 \neq 1$).

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2. *Коммутативный моноид A является S_1 -полумодулем и/или S_2 -полумодулем тогда и только тогда, когда A будет полурешеткой.*

Лемма 3. *Если A – конечная полурешетка с нулем, то $\langle A, \leq \rangle$ будет решеткой.*

Доказательство. Требуется доказать, что любые два элемента $a, b \in A$ имеют точную нижнюю грань $\inf(a, b)$. Рассмотрим множество B всех нижних граней множества $\{a, b\}$. Поскольку $0 \in B$, то B не пусто. Тогда $\inf(a, b)$ есть сумма всех элементов множества B . См. более общее утверждение [9, с. 44, лемма 14].

Возьмем S -полумодуль A над некоторым мультипликативно идемпотентным полукольцом S . Каждый элемент $e \in S$ индуцирует аддитивный эндоморфизм $e: A \rightarrow A, a \rightarrow ea$ при $a \in A$, такой, что $e(0)=0$ и $e(e(a))=e(a)$ для всех $a \in A$. При этом образ $e(A)$ служит множеством всех неподвижных элементов при действии эндоморфизма e . Отметим, что в случае дистрибутивной решетки S множество $e(A)$ названо в статье [10] фиксатором элемента $e \in S$.

Если элемент $e \in S$ коммутирует с каждым элементом из полукольца S , то эндоморфизм $e: A \rightarrow A$ будет S -гомоморфизмом. В случае коммутативного полукольца S отображение $\alpha: S \rightarrow \text{End } S$, сопоставляющее каждому элементу $e \in S$ S -гомоморфизм $e: S \rightarrow S$, является изоморфным вложением полукольца S в полукольцо $\text{End } S$ всех S -гомоморфизмов $S \rightarrow S$, рассматриваемое с операцией поточечного сложения и композицией S -гомоморфизмов.

Пусть A будет S_1 -полумодулем (S_2 -полумодулем). Структура полумодуля A полностью определяется действием элемента e на A , поскольку 0 действует как нулевой эндоморфизм и 1 как тождественный изоморфизм. Множество $e(A)$ будет подполурешеткой полурешетки A , содержащей 0 , такой, что $e(a) \leq a$ (соответственно, $a \leq e(a)$) для любого элемента $a \in A$. Легко видеть, что эндоморфизм $e: A \rightarrow A$ является *изотонным отображением*, то есть сохраняет порядок: $a \leq b \Rightarrow ea \leq eb$ для всех $a, b \in A$. Кроме того, $e(A)$ является подполумодулем S_1 -полумодуля (соответственно, S_2 -полумодуля) A .

Полумодули над полукольцом S_1

Подполурешетку B полурешетки A назовем S_i -подходящей, если A допускает структуру S_i -полумодуля ($i=1, 2$) и $B=e(A)$.

Теорема 1. *Подполурешетка $e(A)$ произвольного S_1 -полумодуля A однозначно определяет действие элемента e на A . При этом для любого элемента $a \in A$ элемент ea будет наибольшим элементом множества $\{x \in e(A): x \leq a\}$.*

Доказательство. Пусть $a \in A$ и $B = \{x \in e(A) : x \leq a\}$. Имеем $ea \in B$, поскольку $ea \leq a$ и $e(ea) = ea$. Если $x \in e(A)$ и $x \leq a$, то $x = ex \leq ea$ в силу изотонности отображения e . Поэтому элемент ea будет наибольшим элементом множества B . Заметим, что первая часть теоремы 1 вытекает также из [10, замечание 1 к теореме 2].

Теорема 1 позволяют проверять, будет ли данная подполурешетка B полурешетки A с нулем S_1 -подходящей.

В случае произвольной конечной полурешетки A с нулем 0 ее подполурешетка B с 0 задает отображение $e: A \rightarrow A$ согласно теореме 1. Значит, подполурешетка B будет S_1 -подходящей тогда и только тогда, когда отображение e аддитивно.

Пример 1. Рассмотрим булеву решетку $A = \{0, a, b, s\}$ с наименьшим элементом 0 , наибольшим элементом s и одной парой несравнимых элементов a, b . S_1 -подходящими подполурешетками в B являются в точности следующие: $\{0\}$, A , $\{0, a\}$, $\{0, b\}$. В первом случае e действует как 0 (нулевой эндоморфизм), во втором случае – как 1 (тождественный изоморфизм), в третьем случае $e(b) = 0$ и $e(s) = a$, в четвертом случае $e(a) = 0$ и $e(s) = b$. Во всех случаях отображение e аддитивно. Получаем, с точностью до изоморфизма, три S_1 -полумодуля A .

Предложение 1. Идеалы любой конечной дистрибутивной решетки A являются S_1 -подходящими подполурешетками в ней.

Доказательство. Пусть B – идеал конечной дистрибутивной решетки A . Рассмотрим отображение $e: A \rightarrow A$, определенное по правилу теоремы 1 при $e(A) = B$. Очевидно, что e изотонно. Для проверки аддитивности отображения e возьмем элементы $a, b \in A$. Положим $c = e(a+b) \in B$. Имеем $e(a) + e(b) \leq e(a+b)$ и $ca, cb \in B$. Тогда, в силу дистрибутивности решетки A , $c = ce(a+b) \leq c(a+b) = ca + cb \leq e(a) + e(b)$. Значит, $e(a+b) = e(a) + e(b)$.

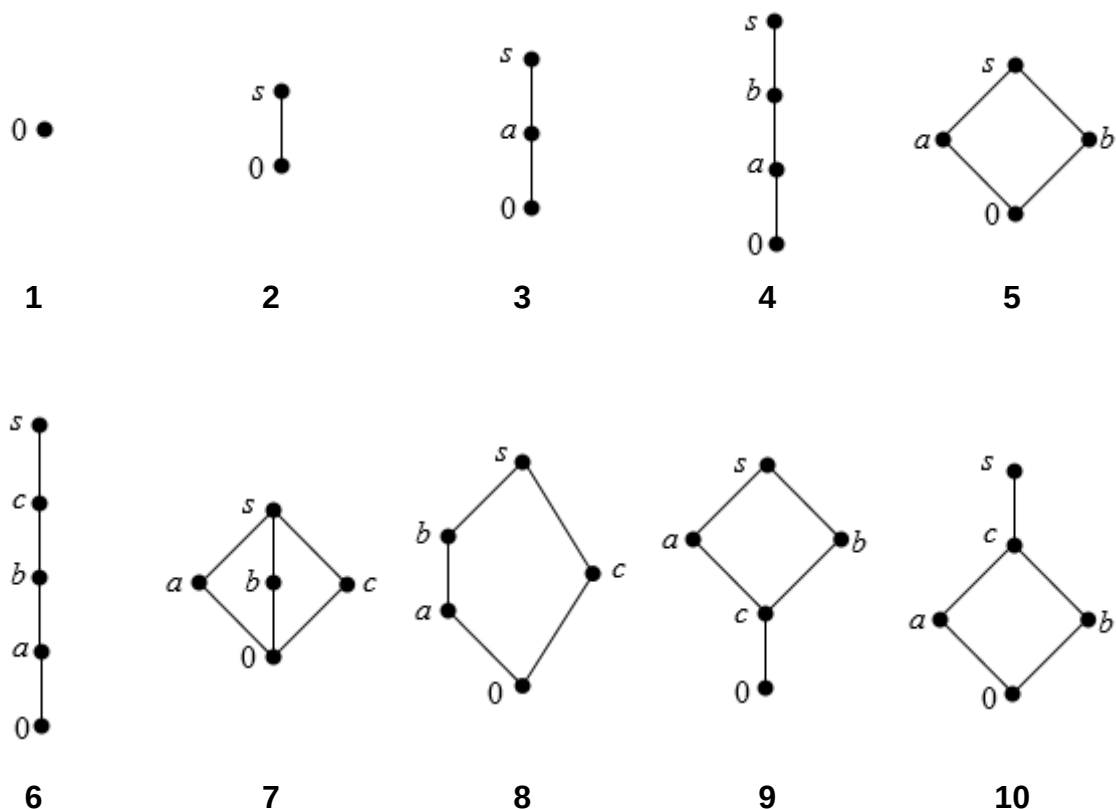
Предложение 2. Все подполурешетки с нулем конечной полурешетки A с нулем являются S_1 -подходящими тогда и только тогда, когда A – цепь.

Доказательство. $\Rightarrow$. Предположим, что в полурешетке A найдутся несравнимые элементы a, b . Положим $B = \{0, a+b\}$. По условию подполурешетка B будет S_1 -подходящей. Тогда $a+b = e(a+b) = e(a) + e(b) = 0 + 0 = 0$, противоречие. Значит, любые два элемента полурешетки A сравнимы, то есть A будет цепью.

$\Leftarrow$. Пусть A – конечная цепь с нулем 0 и B – ее подполурешетка с 0 . Зададим отображение $e: A \rightarrow A$ по правилу теоремы 1. Как уже отмечалось, такое отображение e является изотонным. Ясно, что изотонное отображение цепи в любую полурешетку аддитивно.

Следствие 1. Для любого натурального числа $n \geq 2$ n -элементная цепь допускает ровно 2^{n-1} структур S_1 -полумодуля. Значит, существует, с точностью до изоморфизма, 2^{n-1} S_1 -полумодулей, являющихся n -элементными цепями.

Подсчитаем число попарно неизоморфных S_1 -полумодулей A , имеющих не более 5 элементов. Их аддитивные моноиды $\langle A, +, 0 \rangle$ являются решетками, представленными на рисунке:



Диаграммы Хассе решеток мощности $n \leq 5$

Найдем для примера все неизоморфные S_1 -полумодули A , имеющие аддитивную структуру решетки **9**. Используя теорему 1, проверим, какие из ее подрешеток B с 0 могут выступать в качестве множества $e(A)$.

Рассмотрим все возможные случаи.

1) Пусть $|B|=1$, то есть $B=e(A)=\{0\}$. В этом случае e действует как нулевой эндоморфизм. Обозначим полученный полумодуль A_1 .

2) Пусть $|B|=2$.

2.1) Если $B=\{0, c\}$, то $e(\{a, b, s\})=c$ и легко проверить, что e аддитивно, то есть имеем полумодуль A_2 .

2.2) Пусть $B=\{0, a\}$. Здесь $e(\{b, c\})=0$, $e(s)=a$ и можно убедиться, что e аддитивно, получаем полумодуль A_3 . Ясно, что подрешетка $\{0, b\}$ задает полумодуль, изоморфный A_3 .

2.3) Пусть теперь $B=\{0, s\}$. Имеем $e(\{a, b, c\})=0$, и отображение e не является аддитивным, так как $e(a+b)=e(s)=s \neq 0=e(a)+e(b)$.

3) Пусть $|B|=3$.

3.1) Если $B=\{0, c, a\}$, то $e(b)=c$, $e(s)=a$, e аддитивно и имеем полумодуль A_4 , изоморфный полумодулю, получаемому в случае $B=\{0, c, b\}$.

3.2) При $B=\{0, c, s\}$, получаем $e(\{a, b\})=c$ и e не аддитивно, так как $e(a+b)=e(s)=s \neq c=e(a)+e(b)$.

3.3) В случае $B=\{0, a, s\}$, получаем $e(\{b, c\})=0$ и e не аддитивно, так как $e(a+b)=e(s)=s \neq a=e(a)+e(b)$. Аналогично при $B=\{0, b, s\}$.

4) Пусть $|B|=4$.

4.1) Если $B=\{0, c, a, s\}$, то $e(b)=c$, но $e(a+b)=e(s)=s \neq a+c=e(a)+e(b)$, то есть e не аддитивно. Аналогично при $B=\{0, c, b, s\}$.

4.2) Если $B=\{0, a, b, s\}$, то $e(c)=0$ и имеем полумодуль A_5 .

4) Пусть $|B|=5$, то есть $B=A$. Здесь e действует как тождественный эндоморфизм. Получаем полумодуль A_6 .

Таким образом, с точностью до изоморфизма существует ровно 6 S_1 -полумодулей, имеющих аддитивную структуру решетки A .

Предложение 3. С точностью до изоморфизма существует ровно 53 S_1 -полумодуля порядка (мощности) ≤ 5 . Из них:

- 1 одноэлементный;
- 2 двухэлементных;
- 4 трехэлементных;
- 11 четырехэлементных, из которых 8 имеют (аддитивную) структуру решетки 4 и 3 имеют структуру решетки 5;
- 35 пятиэлементных, из которых 16 имеют структуру решетки 6, 2 имеют структуру решетки 7, 5 имеют структуру решетки 8, 6 имеют структуру решетки 9 и 6 имеют структуру решетки 10.

Полумодули над полукольцом S_2

Исследуем структуру S_2 -подходящих подполурешеток полурешеток с нулем.

Теорема 2. Подполурешетка $e(A)$ произвольного S_2 -полумодуля A однозначно определяет действие элемента e на A . При этом для любого элемента $a \in A$ элемент ea будет наименьшим элементом множества $\{x \in e(A): a \leq x\}$.

Доказательство. Пусть $a \in A$ и $B=\{x \in e(A): a \leq x\}$. Имеем $ea \in B$, так как $a \leq ea$ и $e(ea)=ea$. Если $x \in e(A)$ и $a \leq x$, то $ea \leq ex=x$. Поэтому элемент ea будет наименьшим элементом множества B .

Теорема 2 помогает убедиться в том, будет ли данная подполурешетка B полурешетки A с нулем S_2 -подходящей.

Пример 2. Рассмотрим цепь A , полученную из цепи $\mathbf{Q}$ рациональных чисел добавлением наименьшего 0 и наибольшего 1 элементов. Множество $e(A)=\mathbf{Z} \cup \{0, 1\}$ целых чисел с присоединенными элементами 0 и 1 является S_i -подходящей подцепью S_i -полумодуля A при $i=1, 2$.

Предложение 4. Пусть A – конечная полурешетка с нулем 0 и наибольшим элементом s . Тогда подполурешетка B полурешетки A будет S_2 -подходящей в том и только в том случае, когда B является подрешеткой решетки A и содержит элементы 0 и s .

Доказательство. Предположим, что подполурешетка B полурешетки A из условия предложения является S_2 -подходящей. По лемме 3 полурешетка A является решеткой. Имеем $B=e(A)$, $0 \in e(A)$ и $s \in e(A)$, так как $s \leq es$. Возьмем элементы $a, b \in B$ и покажем, что $ab=\inf(a, b) \in B$. Поскольку $ab \leq a=ea$, $ab \leq b=eb$ и $ab \leq e(ab)$, то $ab=e(ab) \in B$. Стало быть, B – подрешетка решетки A .

Обратно, пусть B – подрешетка конечной решетки A с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом s , содержащая 0 и s . Руководствуясь теоремой 2, определим отображение $e: A \rightarrow A$, для любого элемента $x \in A$ положив $ex=a_1 \dots a_k$, где

$\{a_1 \dots a_k\} = \{a \in B: x \leq a\}$. Отображение e изотонно и $x \leq e(x)$ для всех $x \in A$. Остается доказать аддитивность отображения e . Возьмем элементы $x, y \in A$. Имеем $e(x) + e(y) \leq e(x+y)$. С другой стороны, $x+y \leq e(x) + e(y) \in B$, откуда $e(x+y) \leq e(x) + e(y)$.

Пример 3. Пополним решетку A из примера 1 элементом s , таким, что $0 < s < a$ и $s < b$. В результате получим дистрибутивную решетку C , в которой верхняя подполурешетка A будет S_1 -подходящей, но не S_2 -подходящей в силу предложения 4. Цепь $B = \{0, s, s\}$ в решетке C , будучи S_2 -подходящей по предложению 4, не является S_1 -подходящей.

Предложение 5. Для того чтобы в конечной полурешетке A с нулем 0 и наибольшим элементом s все подполурешетки с 0 и s являлись S_2 -подходящими, необходимо и достаточно, чтобы решетка A обладала следующим свойством:

$$a+b=s \text{ и } ab=0 \text{ для любых несравнимых элементов } a, b \in A. \quad (*)$$

Доказательство. Пусть A – произвольная конечная полурешетка с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом s . По лемме 3 A – решетка. Легко видеть, что выполнение свойства $(*)$ равносильно тому, что либо A – цепь, либо множество $A \setminus \{0, s\}$ является дизъюнктивным объединением не менее чем двух цепей.

Необходимость. Предположим, что все подполурешетки полурешетки A , содержащие 0 и s , являются S_2 -подходящими. Тогда по предложению 4 все они будут подрешетками решетки A . Пусть $a, b \in A$ – несравнимые элементы. Если $a+b \neq s$ или $ab \neq 0$, то подполурешетка $\{0, a, b, s\}$ в A не является ее подрешеткой.

Достаточность вытекает из предложения 4, поскольку любое подмножество в A , содержащие 0 и s , образует подрешетку решетки A .

Следствие 2. Любое подмножество конечной полурешетки A с нулем 0 , наибольшим элементом s и свойством $(*)$, содержащее 0 и s , является S_2 -подходящей полурешеткой.

Следствие 3. Для любого натурального числа $n \geq 2$ всякая n -элементная полурешетка со свойством $(*)$ допускает ровно 2^{n-2} структур S_2 -полумодуля.

Следствие 4. Для любого натурального $n \geq 2$ n -элементная цепь допускает ровно 2^{n-2} структур S_2 -полумодуля. Значит, существует, с точностью до изоморфизма, 2^{n-2} S_2 -полумодулей, являющихся n -элементными цепями.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 суть необходимые условия на S_i -подходящую подполурешетку S_i -полумодуля ($i=1, 2$). Они позволяют проверять, будет ли данная подполурешетка полурешетки A (конечной или бесконечной) S_i -подходящей.

Замечание 2. Рассмотрим подробнее n -элементную ($n \geq 3$) полурешетку A со свойством $(*)$ с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом s . По лемме 3 A является решеткой. Очевидно, что в решетке A все подмножества, содержащие 0 и s , являются подрешетками, стало быть, по предложению 4 будут S_2 -подходящими подполурешетками.

В силу свойства $(*)$ упорядоченное множество $A \setminus \{0, s\}$, рассматриваемое с индуцированным порядком, является дизъюнктивным объединением n_1 одноэлементных максимальных цепей, n_2 двухэлементных максимальных цепей, ..., n_{n-2} $(n-2)$ -элементных максимальных цепей, таким, что $n_1 + 2n_2 + \dots + (n-2)n_{n-2} = n-2$. Некоторые из чисел n_i могут равняться 0. Значит, полурешетка A имеет ровно $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ автоморфизмов. Легко видеть, что данная полурешетка A имеет ровно один автоморфизм тогда и только тогда, когда все ненулевые числа среди чисел $n_1, n_2, \dots, n_{n-2}$ равны 1, другими словами, длины максимальных цепей в $A \setminus \{0, s\}$ попарно различны.

В этом случае существует, с точностью до изоморфизма, ровно 2^{n-2} S_2 -полумодулей A . При $n_1=n-2$ полурешетка A обладает ровно $(n-2)!$ автоморфизмами.

Предположим, что подмножество B полурешетки A , содержащее 0 и s , перемещается при действии автоморфизма α полурешетки A , $\alpha(B) \neq B$. Тогда S_2 -подходящие (полу)решетки B и $\alpha(B)$ порождают изоморфные неравные S_2 -полумодули A . Поэтому число попарно неизоморфных n -элементных S_2 -полумодулей A может быть значительно меньше числа 2^{n-2} из следствия 3. Например, в случае $n_1=n-2$ все k -элементные подмножества K множества $A \setminus \{0, s\}$ порождает одну-единственную, с точностью до изоморфизма, S_2 -подходящую (полу)решетку на A – ее подрешетку $K \cup \{0, s\}$, определяющую структуру S_2 -полумодуля A . Следовательно, существует, с точностью до изоморфизма, ровно $n-1$ S_2 -полумодуля A .

Найдем число попарно неизоморфных S_2 -полумодулей, имеющих не более 5 элементов.

Перечислим для примера все неизоморфные S_2 -полумодули A , имеющие структуру решетки **9**. По теореме 1 для этого достаточно указать, какие из ее подрешеток B с 0 могут выступать в качестве множества $e(A)$. В силу предложения 4 – это в точности все подрешетки в A , содержащие элементы 0 и s , то есть $\{0, s\}$, $\{0, c, s\}$, $\{0, a, s\}$, $\{0, b, s\}$, $\{0, c, a, s\}$, $\{0, c, b, s\}$ и A . Отметим, что подрешетки $\{0, b, s\}$ и $\{0, c, b, s\}$ задают полумодули, изоморфные полумодулям, задаваемым подрешетками $\{0, a, s\}$ и $\{0, c, a, s\}$, соответственно. Таким образом, с точностью до изоморфизма существует ровно 5 S_2 -полумодулей, имеющих структуру решетки A .

Предложение 6. *С точностью до изоморфизма существует ровно 41 S_2 -полумодуль порядка ≤ 5 . Из них:*

- 1 одноэлементный;
- 1 двухэлементный;
- 2 трехэлементных;
- 7 четырехэлементных, из которых 4 имеют структуру решетки **4** и 3 имеют структуру решетки **5**;
- 30 пятиэлементных, из которых 8 имеют структуру решетки **6**, 4 имеют структуру решетки **7**, 8 имеют структуру решетки **8**, 5 имеют структуру решетки **9** и 5 имеют структуру решетки **10**.

Замечание 3 Мы также нашли все шестиэлементные S_1 -полумодули и S_2 -полумодули, опираясь на диаграммы Хассе всех 15 шестиэлементных решеток. Сделали это, во-первых, "вручную", как в предложениях 3 и 6. Во-вторых, с помощью компьютерной программы. Получилось, с точностью до изоморфизма, 127 S_1 -полумодулей и 158 S_2 -полумодулей.

Полумодули над полукольцами S_3 и S_4

В полумодулях над каждым из полуколец S_3 и S_4 действие элемента 2 определяется однозначно: $x \mapsto 2x = x + x$.

Для полуколец S_3 и S_4 справедливы следующие утверждения:

Предложение 7. *Коммутативный моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ является S_3 -полумодулем тогда и только тогда, когда A удовлетворяет тождеству $3x = x$; при этом он допускает одну-единственную структуру S_3 -полумодуля.*

Доказательство. В полукольце $S_3 = \{0, 1, 2\}$ выполняется равенство $3=1$. Поэтому любой S_3 -полумодуль удовлетворяет тождеству $3x=x$. Если моноид A удовлетворяет тождеству $3x=x$, то элемент 2 действует по однозначно определенному правилу $x \mapsto 2x$, превращая тем самым моноид A в S_3 -полумодуль.

Предложение 8. *Коммутативный моноид $\langle A, +, 0 \rangle$ является S_4 -полумодулем тогда и только тогда, когда A удовлетворяет тождеству $3x=2x$; при этом он допускает единственную структуру S_4 -полумодуля.*

Доказательство повторяет доказательство предложения 7.

Следствие 5. *Для любой мощности t мощность множества всех попарно неизоморфных S_3 -полумодулей (S_4 -полумодулей) мощности t равна мощности множества всех попарно неизоморфных коммутативных аддитивных моноидов с тождеством $3x=x$ (соответственно, $3x=2x$) мощности t .*

Замечание 4. Полученные в статье результаты, в частности теоремы 1 и 2, могут быть полезны при исследовании произвольных полумодулей над идемпотентными полукольцами.

Список источников

1. Вечтомов Е.М. О полумодулях над мультипликативно идемпотентными полукольцами // Междунар. науч. конф. "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". Казань: КФУ, 2024. С. 103–104.
2. Петров А.А. О коммутативных аддитивных полугруппах с тождеством $4x=2x$ // Междунар. науч. конф. "Алгебра и математическая логика: теория и приложения". Казань: КФУ, 2024. С. 130–131.
3. Вечтомов Е.М., Петров А.А. Функциональная алгебра и полукольца. Полукольца с идемпотентным умножением. Санкт-Петербург: Лань, 2022. 180 с.
4. Fofanova T.S. Polygons over distributive lattices // Universal Algebra / Colloq. Math. Soc. J. Bolyai. Amsterdam: North-Holland, 1982. P. 289–292.
5. Фофанова Т.С. Об инъективных полигонах над цепями // Matematika Slovaca. 1978. Vol. 28, № 1. P. 21–32.
6. Кожухов И.Б., Михалёв А.В. Полигоны над полугруппами // Фундаментальная и прикладная математика. 2020. Т. 23, вып. 3. С. 141–199.
7. Ильин С.Н. О гомологической классификации полуколец // Итоги науки и техники. Серия. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2018. Т. 158. С. 3–22.
8. Golan J.S. Semirings and their applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. 382 p.
9. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982. 456 с.
10. Фофанова Т.С. Полигоны над дистрибутивными структурами // Сибирский математический журнал. 1971. Т. 12, № 5. С. 1158–1163.

References

1. Vechtomov, E. M. (2024), "On semimodules over multiplicatively idempotent semirings", *International Scientific Conference "Algebra and Mathematical Logic: theory and applications"*, KFU, Kazan, pp. 103–104.

2. Petrov, A. A. (2024), "On commutative additive semigroups with identity $4x=2x$ ", *International Scientific Conference "Algebra and Mathematical Logic: Theory and Applications"*, KFU, Kazan, pp. 130–131.
3. Vechtomov, E. M. and Petrov, A. A. (2022), "Functional algebra and semirings. Semirings with idempotent multiplication", Lan, St. Petersburg, 180 p.
4. Fofanova, T. S. (1982), "Polygons over distributive lattices", *Universal Algebra / Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, North-Holland, Amsterdam, pp. 289–292.
5. Fofanova, T. S. (1978), "On injective polygons over chains", *Mathematika Slovaca*, Vol. 28, no. 1, pp. 21–32.
6. Kozhukhov, I. B. and Mikhalev, A. V. (2020), "Polygons over semigroups", *Fundamental and applied mathematics*, Vol. 23, Iss. 3, pp. 141–199.
7. Il'in, S. N. (2018), "On the homological classification of semirings", *Results of science and technology. Series. Modern mathematics and its applications. Thematic reviews*, Vol. 158, pp. 3–22.
8. Golan, J. S. (1999), "Semirings and their applications", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 382 p.
9. Grätzer, G. (1982), "General lattice theory", Mir, M., 456 p.
10. Fofanova, T. S. (1971), "Polygons over distributive structures", *Siberian Mathematical Journal*, Vol. 12, no. 5, pp. 1158–1163.

Информация об авторах:

Е. М. Вечтомов – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36), AuthorID: 146598;

А. А. Петров – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры фундаментальной математики, Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36), AuthorID: 662310;

А. П. Шкляев – бакалавр четвертого года обучения по направлению "Математика и компьютерные науки", Вятский государственный университет (610000, Россия, г. Киров, ул. Московская, 36).

Information about the authors:

E. M. Vechtomov – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000), AuthorID: 146598;

A. A. Petrov – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Fundamental Mathematics, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000), AuthorID: 662310;

A. P. Shklyayev – Bachelor of the Fourth Year of Study in the Field of Mathematics and Computer Science, Vyatka State University (36, Moskovskaya St., Kirov, Russia, 610000).

МАТЕМАТИКА

Научная статья

УДК 519.17

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-16-22

<https://elibrary.ru/fhyiex>



**О графах Шилла Γ с $b_2=c_2$,
имеющих собственное значение $\theta_2=0$**

**Александр Алексеевич Махнёв¹, Виктория Васильевна Биткина²,
Алина Казбековна Гутнова³**

¹Школа науки, Университет провинции Хайнань,

¹Институт математики и механики УрО РАН, г. Екатеринбург, Россия

¹e-mail: makhnev@imm.uran.ru

^{2,3}Северо-Осетинский госуниверситет, г. Владикавказ, Россия

²e-mail: viktoriyav@mail.ru

³e-mail: gutnovaalina@mail.ru

Аннотация. Граф Шилла с $b_2=c_2$, имеющий собственное значение $\theta_2=0$ имеет массив пересечений $\{b(b+1)s, (bs+s+1)(b-1), bs, 1, bs, (b^2-1)s\}$. Из 55 графов с $b < 100$ только семь не лежат в серии $\{4s^3+6s^2+2s, 4s^3+4s^2+2s, 2s^2+s, 1, 2s^2+s, 4s^3+4s^2\}$. В работе изучаются графы Шилла с $b_2=c_2$, имеющие собственное значение $\theta_2=0$, и массив пересечений $\{4s^3 + 6s^2 + 2s, 4s^3 + 4s^2 + 2s, 2s^2 + s, 1, 2s^2 + s, 4s^3 + 4s^2\}$.

Ключевые слова: блок-схема; дистанционно регулярный граф; граф Шилла

Для цитирования: Махнев А.А., Биткина В.В., Гутнова А.К. О графах Шилла Γ с $b_2=c_2$, имеющих собственное значение $\theta_2=0$ // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 16–22. DOI: 10.17072/ 1993-0550-2024-3-16-22. <https://elibrary.ru/fhyiex>.

Благодарности: Исследование выполнено при поддержке Естественного научного фонда Китая (проект № 12171126), Научного фонда провинции Хайнань (проект № 621RC510) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

Статья поступила в редакцию 09.08.2024; одобрена после рецензирования 12.09.2024; принята к публикации 07.10.2024.

MATHEMATICS

Research article

On Shilla Graphs Γ With $b_2=c_2$ Having Eigenvalue $\theta_2=0$

Alexander A. Makhnev¹, Viktoriya V. Bitkina², Alina K. Gutnova³

¹School of Science, Hainan University, Hainan, China, ¹N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Yekaterinburg, Russia

¹e-mail: makhnev@imm.uran.ru

^{2,3}North Ossetian State University after K.L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia

²e-mail: bviktoriyav@mail.ru

³e-mail: gutnovaalina@gmail.com



Эта работа © 2024 Махнев А.А., Биткина В.В., Гутнова А.К. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Abstract. The Shilla graph with $b_2=c_2$ and eigenvalue $\theta_2=0$ has intersection array $\{b(b+1)s, (bs+s+1)(b-1), bs; 1, bs, (b^2-1)s\}$. There are only seven graphs out of 55 with $b < 100$ do not lie in the series $\{4s^3+6s^2+2s, 4s^3+4s^2+2s, 2s^2+s; 1, 2s^2+s, 4s^3+4s^2\}$.

This paper studies the Shilla graphs with $b_2=c_2$, eigenvalue $\theta_2=0$ and intersection array $\{4s^3 + 6s^2 + 2s, 4s^3 + 4s^2 + 2s, 2s^2 + s; 1, 2s^2 + s, 4s^3 + 4s^2\}$.

Keywords: block diagram; distance-regular graph; Shilla graph

For citation: Makhnev, A. A., Bitkina, V. V. and Gutnova, A. K. (2024), "On Shilla Graphs Γ With $b_2=c_2$ Having Eigenvalue $\theta_2=0$ ", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(66), pp. 16-22. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-16-22. <https://elibrary.ru/fhyiex>.

Acknowledgments: The research was supported by the Natural Science Foundation of China (Project No. 12171126), the Science Foundation of Hainan Province (Project No. 621RC510), and a grant from the Engineering Modeling and Statistical Computing Laboratory of Hainan Province.

The article was submitted 09.08.2024; approved after reviewing 12.09.2024; accepted for publication 07.10.2024.

Введение

Рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b – вершины графа Γ , то через $d(a, b)$ обозначается расстояние между a и b , а через $\Gamma_i(a)$ – подграф графа Γ , индуцированный множеством вершин, которые находятся на расстоянии i в Γ от вершины a . Подграф $\Gamma_1(a)$ называется *окрестностью вершины* a и обозначается через $[a]$. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a .

Граф Γ называется *регулярным графом степени k* , если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ . Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами (v, k, λ)* , если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k , и каждое ребро из Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ)* , если Γ реберно регулярен с соответствующими параметрами и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a, b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a, b)$ (через $\mu(a, b)$), если $d(a, b) = 1$ (если $d(a, b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ) - λ -подграфом.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ , то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (в пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений $\{b_0, \dots, b_{d-1}; c_1, \dots, c_d\}$* , если значения $b_i = b_i(u, w)$ и $c_i = c_i(u, w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i . Положим $a_i = k - b_i - c_i$ и $k_i = |\Gamma_i(u)|$ (значение k_i не зависит от выбора вершины u). Числа пересечений графа p_{ij}^l и параметры Крейна q_{ij}^l определены в [1] (стр. 43 и 48 соответственно).

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра d . Для $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ граф Γ_i определен на множестве вершин графа Γ и две вершины u, w смежны в Γ_i тогда и только тогда, когда $d_\Gamma(u, w) = i$.

Графом Шилла называется дистанционно регулярный граф диаметра 3 с собственным значением $\theta_1 = a_3$ [2]. Для графа Шилла число $a = a_3$ делит k и полагают $b = b(\Gamma) = k/a$. Граф Шилла имеет массив пересечений $\{ab, (a+1)(b-1), b_2; 1, c_2, a(b-1)\}$.

Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра 3 с собственным значением $\theta_2=0$. Тогда Γ имеет массив пересечений $\{xu + yz, yz - y, xu - x; 1, x + z, yz\}$ [3]. Если $xu - x = x + z$, то $z = x(y - 2)$ и мы имеем двупараметрический массив пересечений $\{xu + x(y - 2)y, x(y - 2)y - y, xu - x; 1, xu - x, x(y - 2)y\}$.

Если Γ дополнительно является графом Шилла с $b_2=c_2$, то либо $2s + 1 \leq b - 2$, либо Γ имеет массив пересечений $\{4s^3 + 6s^2 + 2s, 4s^3 + 4s^2 + 2s, 2s^2 + s; 1, 2s^2 + s, 4s^3 + 4s^2\}$.

В работе изучаются графы Шилла Γ с $b_2=c_2$ и собственным значением $\theta_2=0$.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{4s^3 + 6s^2 + 2s, 4s^3 + 4s^2 + 2s, 2s^2 + s; 1, 2s^2 + s, 4s^3 + 4s^2\}$ не существует.*

1. Тройные числа пересечений

В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений [4].

Пусть Γ — дистанционно регулярный граф диаметра d . Если u_1, u_2, u_3 — вершины графа Γ , r_1, r_2, r_3 — неотрицательные целые числа, не большие d , то $\{u_1u_2u_3; r_1r_2r_3\}$ — множество вершин $w \in \Gamma$ таких, что $d(w, u_i)=r_i$, $[u_1u_2u_3; r_1r_2r_3] = |\{u_1u_2u_3; r_1r_2r_3\}|$. Числа $[u_1u_2u_3; r_1r_2r_3]$ называются *тройными числами пересечений*. Для фиксированной тройки вершин u_1, u_2, u_3 вместо $[u_1u_2u_3; r_1r_2r_3]$ будем писать $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u, v, w — вершины графа Γ , $W=d(u, v)$, $U=d(v, w)$, $V=d(u, w)$. Так как имеется точно одна вершина $x=u$ такая, что $d(x, u)=0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh]=\delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h]=\delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0]=\delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u, v, w\}$ и, сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей, получим:

$$\sum_l^d [ljh] = p_{jh}^U - [0jh], \sum_l^d [ilh] = p_{ih}^V - [i0h], \sum_l^d [ijl] = p_{ij}^W - [ij0]. \quad (+)$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j|>W$ или $i+j<W$ имеем $p_{ij}^W = 0$, поэтому $[ijh]=0$ для всех $h \in \{0, \dots, d\}$.

Положим $S_{\{ijh\}}(u, v, w) = \sum_{r,s,t=0}^d Q_{ri}Q_{sj}Q_{th} \begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix}$, где Q_{ij} — элементы дуальной матрицы собственных значений Q . Если параметр Крейна $q_{ij}^h = 0$, то $S_{ijh}(u, v, w)=0$.

Зафиксируем вершины u, v, w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\} = \{uvw; ijh\}$, $[ijh] = [uvw; ijh]$, $[ijh]' = [uvw; ihj]$, $[ijh]^* = [uvw; jih]$ и $[ijh]^\sim = [uvw; hji]$. Вычисление $[ijh]'$, $[ijh]^*$ и $[ijh]^\sim$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

2. Доказательство теоремы 1

В этом разделе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{4s^3 + 6s^2 + 2s, 4s^3 + 4s^2 + 2s, 2s^2 + s; 1, 2s^2 + s, 4s^3 + 4s^2\}$. Тогда Γ имеет $1 + 4s^3 + 6s^2 + 2s + 4(s+1)(2s^3 + 2s^2 + s) + (2s^2 + 2s + 1)(2s + 1)$ вершин, неглавные собственные значения $2(s+1)s, 0, -(2s^2 + 2s + 1)$ кратностей $4s^3 + 8s^2 + 4s + 1, 2(4s^3 + 8s^2 + 4s + 1)s, 4(s+1)^2s$ и числа пересечений

$$\begin{aligned} p_{11}^1 &= 2s^2 - 1, p_{12}^1 = 4s^3 + 4s^2 + 2s, \\ p_{22}^1 &= 8s^4 + 8s^3 + 4s^2, \\ p_{23}^1 &= 4s^3 + 4s^2 + 2s, p_{33}^1 = 2s^2 + 2s + 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{11}^2 &= 2s^2 + s, p_{12}^2 = 4s^3 + 2s^2, \\ p_{13}^2 &= 2s^2 + s, \\ p_{22}^2 &= 8s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 2s - 2, \\ p_{23}^2 &= 4s^3 + 2s^2 + 2s + 1, p_{33}^2 = 2s^2 + s; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{12}^3 &= 4s^3 + 4s^2, p_{13}^3 = 2s^2 + 2s, \\ p_{22}^3 &= 8s^4 + 8s^3 + 4s^2 + 4s, \\ p_{23}^3 &= 4s^3 + 4s^2, p_{33}^3 = 2s. \end{aligned}$$

Пусть u, v, w – вершины графа Γ , $\{rst\} = \{uvw; rst\}$ и $[rst] = [uvw; rst]$. Положим $\Sigma = \Gamma_3(u)$, $\Lambda = \Sigma_2$. Тогда Λ является регулярным графом степени $p_{23}^3 = 4s^3 + 4s^2$ на $k_3 = (2s^2 + 2s + 1)(2s + 1)$ вершинах.

Лемма 1. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 3$, $d(v, w) = 1$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$\begin{aligned} [122] &= r_{14}, \\ [123] &= [132] = 4s^3 + 4s^2 - r_{14}, \\ [133] &= -4s^3 - 2s^2 + 2s + r_{14}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [211] &= r_{12}, \\ [212] &= [221] = 4s^3 + 4s^2 - r_{12}, \\ [222] &= 8s^4 + 4s^3 + 2s + r_{12} + r_{13} - r_{14}, \\ [223] &= [232] = 2s - r_{13} + r_{14}, \\ [233] &= 4s^3 + 4s^2 - 2s + r_{13} - r_{14}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [311] &= 2s^2 - 1 - r_{12}, [312] = [321] = 2s + r_{12}, \\ [322] &= 4s^3 + 4s^2 - 2s - r_{12} - r_{13}, \\ [323] &= [332] = r_{13}, [333] = 2s - r_{13}, \end{aligned}$$

где $r_{13} \leq 2s, r_{12} \leq 2s^2 - 1, 4s^3 + 2s^2 - 2s \leq r_{14} \leq 4s^3 + 4s^2$.

Доказательство. Упрощения формул (+).

По лемме 1 имеем $[322] = 4s^3 + 4s^2 - 2s - r_{12} - r_{13} \leq 4s^3 + 4s^2 - 2s$.

Так как $\{u, w\} \cup \Lambda(u) \cup \Lambda(w)$ содержит $2 + 8s^3 + 8s^2 - [322]$ вершин, то $4s^3 + 2s^2 - 4s + 1 \leq [322] \leq 4s^3 + 4s^2 - 2s$.

Лемма 2. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = d(v, w) = 3$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$\begin{aligned} [122] &= 4s^3 + 4s^2 - r_{36}, \\ [123] &= [132] = r_{36}, [133] = 2s^2 + 2s - r_{36}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [212] &= 4s^3 + 2s^2 - 1 - r_{34} - r_{37}, \\ [213] &= 2s^2 + 1 + r_{34} + r_{37}, [221] = r_{35}, \\ [222] &= 8s^4 + 4s^3 + 4s + r_{34} - r_{35} + r_{36}, \\ [223] &= 4s^3 + 4s^2 - r_{34} - r_{36}, \\ [231] &= 4s^3 + 4s^2 - r_{35}, \\ [232] &= 2s^2 + 1 + r_{35} - r_{36} + r_{37}, \\ [233] &= -2s^2 - 1 + r_{36} - r_{37}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[312] &= 2s^2 + 1 + r_{34} + r_{37}, \\ [313] &= 2s - 1 - r_{34} - r_{37}, [321] = 4s^3 + 4s^2 - r_{35}, \\ [322] &= -r_{34} + r_{35}, [323] = r_{34}, \\ [332] &= 4s^3 + 2s^2 - 1 - r_{35} - r_{37}, \\ [333] &= r_{37},\end{aligned}$$

где $r_{36} \leq 2s^2 + 2s, r_{35} + r_{37} \leq 4s^3 + 2s^2 - 1, r_{35} \leq 4s^3 + 4s^2, r_{34} + r_{37} \leq 2s - 1$.

Доказательство. Упрощения формул (+).

По лемме 2 имеем $[322] = -r_{34} + r_{35} \leq 4s^3 + 2s^2 - 1$. Как и выше, $4s^3 + 2s^2 - 4s + 1 \leq [322]$.

Найдем число ребер d между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$. Так как $p_{13}^3 = 2s^2 + 2s, p_{23}^3 = 4s^3 + 4s^2, p_{33}^3 = 2s$, то $(2s^2 + 4s)(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1) \leq d \leq (2s^2 + 2s)(4s^3 + 4s^2 - 2s) + 2s(4s^3 + 2s^2 - 1)$. С другой стороны, $d = (4s^3 + 4s^2)(4s^3 + 4s^2 - 1 - \lambda)$, поэтому $(2s^2 + 4s)(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1) \leq (4s^3 + 4s^2)(4s^3 + 4s^2 - 1 - \lambda) \leq 2s((s + 1)(4s^3 + 4s^2 - 2s) + (4s^3 + 2s^2 - 1)), (s^2 + 2)(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1) / (2s^2 + 2s) \leq 4s^3 + 4s^2 - 1 - \lambda \leq (4s^4 + 12s^3 + 4s^2 - 2s - 1) / (2s^2 + 2s)$ и $4s^3 + 4s^2 - 1 - (s^2 + 2)(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1) / (2s^2 + 2s) \leq \lambda \leq 4s^3 + 4s^2 - 1 - (4s^4 + 12s^3 + 4s^2 - 2s - 1) / (2s^2 + 2s)$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$.

Лемма 3. Пусть $d(u, v) = d(u, w) = 3, d(v, w) = 2$. Тогда выполняются следующие утверждения:

$$\begin{aligned}[121] &= 4s^3 + 2s^2 - r_{23} - r_{24} + r_{25}, \\ [122] &= -s + r_{23} + r_{24} - r_{25} + r_{27}, \\ [123] &= 2s^2 + s - r_{27}, \\ [131] &= -4s^3 + s + r_{23} + r_{24} - r_{25}, \\ [132] &= 4s^3 + 2s^2 + s - r_{23} - r_{24} + r_{25} + r_{27}, \\ [133] &= r_{27}; \\ [211] &= r_{24}, [212] = 4s^3 + 2s^2 - s - r_{24} + r_{28}, \\ [213] &= 2s^2 + s - r_{28}, [221] = r_{23}, \\ [222] &= 8s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 3s - 2 + r_{24} - r_{26} - r_{28}, \\ [223] &= 4s^3 - 2s^2 + s + 1 - r_{23} - r_{24} + r_{26} + r_{28}, \\ [231] &= 4s^3 + 2s^2 - r_{23} - r_{24}, \\ [232] &= r_{26}, [233] = 2s^2 + r_{23} + r_{24} - r_{26}; \\ [311] &= 2s^2 + s - r_{24}, [312] = s + r_{24} - r_{28}, \\ [313] &= r_{28}, [321] = r_{24} - r_{25}, \\ [322] &= 4s^3 + 2s^2 - r_{23} - 2r_{24} + r_{25} + r_{26} - r_{27} + r_{28}, \\ [323] &= 2s^2 + r_{23} + r_{24} - r_{26} + r_{27} - r_{28}, \\ [331] &= r_{25}, [332] = s + r_{23} + r_{24} - r_{25} - r_{26} + r_{27}, \\ [333] &= s - r_{23} - r_{24} + r_{26} - r_{27},\end{aligned}$$

где $r_{24}, r_{27}, r_{28} \leq 2s^2 + s, r_{23} + r_{24} \leq 4s^3 + 2s^2, r_{25} \leq r_{24}$.

Доказательство. Упрощения формул (+).

По лемме 3 имеем $[322] = 4s^3 + 2s^2 - r_{23} - 2r_{24} + r_{25} + r_{26} - r_{27} + r_{28}$. Как и выше, $4s^3 + 2s^2 - 4s - 1 \leq [322]$.

Симметризация $[133] = r_{27} = r'_{27}, [211] = r_{24} = r'_{24}, [212] = 4s^3 + 2s^2 - s - r_{24} + r_{28} = [221]' = r'_{23}$, поэтому $4s^3 + 2s^2 - s = r_{24} - r_{28} + r'_{23}$.

Пусть $d(u,v)=3$.

Подсчитаем число f_1 пар вершин u, z на расстоянии 1 в графе Γ , где $u \in \{uv; 31\}$ и $z \in \{uv; 32\}$. С одной стороны, по лемме 1 имеем $[321] = 2s + r_{12}$, где $r_{12} \leq 2s^2 - 1$, поэтому $2s(2s^2 + 2s) \leq f_1 \leq (2s^2 + 2s)(2s^2 + 2s - 1)$.

С другой стороны, по лемме 3 имеем $[311] = 2s^2 + s - r_{24}$, поэтому $2s(2s^2 + 2s) \leq f_1 = -\sum_i r_{24}^i + p_{23}^3(2s^2 + s) \leq (2s^2 + 2s)(2s^2 + 2s - 1)$, $p_{23}^3(2s^2 + s) - (2s^2 + 2s)(2s^2 + 2s - 1) \leq \sum_i r_{24}^i \leq p_{23}^3(2s^2 + s) - 2s(2s^2 + 2s)$ и $2s^2 + s - (2s^2 + 2s - 1)/(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1) \leq \sum_i r_{24}^i / p_{23}^3 \leq 2s^2 + s - 2s/(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1)$.

Подсчитаем число f_2 пар вершин u, z на расстоянии 2 в графе Γ , где $u \in \{uv; 31\}$ и $z \in \{uv; 32\}$. С одной стороны, по лемме 1 имеем $4s^3 + 2s^2 - 4s + 1 \leq [322] \leq 4s^3 + 4s^2 - 2s$, поэтому $(2s^2 + 2s)(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1) \leq f_2 \leq (2s^2 + 2s)(4s^3 + 4s^2 - 2s)$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[312] = s + r_{24} - r_{28}$, поэтому $(2s^2 + 2s)(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1) \leq f_2 = \sum_i (r_{24}^i - r_{28}^i) + p_{23}^3 s \leq (2s^2 + 2s)(4s^3 + 4s^2 - 2s)$, $-p_{23}^3 s + (2s^2 + 2s)(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1) \leq \sum_i (r_{24}^i - r_{28}^i) \leq -p_{23}^3 s + (2s^2 + 2s)(4s^3 + 4s^2 - 2s)$ и $-s + 1 \leq \sum_i (r_{24}^i - r_{28}^i) / p_{23}^3 \leq -s + (4s^3 + 4s^2 - 2s)/(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1)$.

Отсюда $s - (4s^3 + 4s^2 - 2s)/(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1) \leq \sum_i (r_{28}^i - r_{24}^i) / p_{23}^3 \leq s - 1$.

Подсчитаем число f_3 пар вершин u, z на расстоянии 3 в графе Γ , где $u \in \{uv; 31\}$ и $z \in \{uv; 32\}$. С одной стороны, по лемме 1 имеем $[323] = r_{34}$, где $r_{34} \leq 2s - 1$, поэтому $0 \leq f_3 \leq (2s^2 + 2s)(2s - 1)$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[313] = r_{28}$, поэтому $0 \leq f_1 = \sum_i r_{28}^i \leq (2s^2 + 2s)(2s - 1)$ и $\sum_i r_{28}^i / ((2s^2 + 2s)(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1)) \leq (2s - 1)/(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1)$.

Таким образом, $s - (4s^3 + 4s^2 - 2s)/(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1) \leq \sum_i (r_{28}^i - r_{24}^i) / p_{23}^3 \leq (2s - 1)/(4s^3 + 2s^2 - 4s + 1)$ и $s = 1$.

Теорема 1 доказана.

Список источников

1. Brouwer A.E., Cohen A.N., Neumaier A. Distance-Regular Graphs // Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New-York, 1989.
2. Koolen J, Park J. Shilla distance-regular graphs // Europ. J. Comb. 31, 2064–2073, 2010.
3. Makhnev A.A., Belousov I.N. On distance-regular graphs of diameter 3 with eigenvalue // Trudy Institute Math. (Novosibirsk). 33, № 1, 162–173, 2022.
4. Coolsaet K., Juri'si'c A. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs // J. Comb. Theory, Series A. 2008. Vol. 115. 1086–1095.

References

1. Brouwer, A.E., Cohen, A.N. and Neumaier, A. (1989), "Distance-Regular Graphs", Springer-Verlag. Berlin Heidelberg New-York.
2. Koolen, J. and Park, J. (2010), "Shilla distance-regular graphs", Europ. J. Comb, 31, pp. 2064-2073.
3. Makhnev, A.A. and Belousov, I.N. (2022), "On distance-regular graphs of diameter 3 with eigenvalue", Trudy Institute Math. (Novosibirsk), 33, no. 1, pp. 162-173.
4. Coolsaet, K. and Juri'si'c, A. (2008), "Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of certain distance-regular graphs", J. Comb. Theory, Series A, vol. 115, pp. 1086-1095.

Информация об авторах:

А. А. Махнёв – доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, лауреат премии имени А. И. Мальцева, главный научный сотрудник, ФГБУН Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, д.16), AuthorID: 2970;

В. В. Биткина – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, ФГБОУ ВО "Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова" (362025, Россия, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46);

А. К. Гутнова – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информатики, ФГБОУ ВО "Северо-Осетинский государственный университет им. К.Л. Хетагурова", (362025, Россия, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46).

Information about the authors:

A. A. Makhnev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Laureate of the A.I. Maltsev Prize, Chief Researcher, Institute of Mathematics and Mechanics named after A.I. N.N. Krasovsky, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, (16 S. Kovalevskaya St., Yekaterinburg, Russia, 620990), AuthorID: 2970;

V. V. Bitkina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, North Ossetian State University after K.L. Khetagurov (44–46 Vatutina St., Vladikavkaz, Russia, 362025);

A. K. Gutnova – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, North Ossetian State University after K.L. Khetagurov (44–46 Vatutina St., Vladikavkaz, Russia, 362025).

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 534-16

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-23-34

<https://elibrary.ru/ghrznm>



**Численный анализ собственных колебаний
трехслойной пластины, находящейся под действием
температурной нагрузки**

Александр Олегович Каменских

Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

e-mail: kamenskikh.a@icmm.ru

Аннотация. Одним из вариантов управления динамическим состоянием тонкостенных элементов конструкции является создание в них предварительных напряжений. В пластинах и оболочках они могут быть индуцированы посредством разнообразных актуаторов, smart-материалов или неупругого деформирования. Деформации, возникающие из-за неравномерного распределения температуры, различных коэффициентов линейного теплового расширения материалов конструкции или ее закрепления, также сказываются на собственных частотах. Это может привести в том числе к нежелательным явлениям, таким как потеря устойчивости или перемещение спектра в область частот, подверженных резонансу. В настоящей работе с помощью метода конечных элементов исследуется влияние температурного нагружения на собственные частоты трехслойной пластины. Полученное решение спектральной задачи сравнивается с результатами других авторов. Рассматриваются пластины с разными компоновками слоев и двумя видами закрепления: консольным и зажатым с двух противоположных торцов. Построены зависимости относительного изменения первых трех собственных частот пластины от приращения температуры. Показано, что возникающее напряженно-деформированное состояние слабо влияет на собственные частоты незакрепленной пластины. Результаты численных расчетов для зажатой с двух сторон пластины демонстрируют, что при увеличении ее жесткости, повышаются критические температуры потери устойчивости.

Ключевые слова: пластины; свободные колебания; устойчивость; предварительное напряженное состояние

Для цитирования: Каменских А.О. Численный анализ собственных колебаний трехслойной пластины, находящейся под действием температурной нагрузки // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 23–34. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-23-34. <https://elibrary.ru/ghrznm>.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы 124020700047-3.

Статья поступила в редакцию 30.07.2024; одобрена после рецензирования 18.09.2024; принята к публикации 06.10.2024.



Эта работа © 2024 Каменских А. О. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MECHANICS

Research article

Numerical Analysis of Natural Frequencies of Three-layer Plate under Temperature Load

Alexander O. Kamenskikh

Institute of Continuous Media Mechanic, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia
e-mail: kamenskikh.a@icmm.ru

Abstract. One of the options for controlling the dynamic state of thin-walled structures is the creation of prestress state within. Stress field can be induced by various actuators, smart materials or plastic deformation. Deformations arising from uneven temperature distribution, different coefficient of thermal expansion of the materials or boundary conditions also affect the natural frequencies. This can lead to undesirable phenomena such as loss of stability or spectrum moving into the region of frequencies subject to resonance. In this paper, the influence of temperature loading on the natural frequencies of a three-layer plate is investigated by the finite element method. The obtained solution of the spectral problem is compared with the results of other authors. Plates with different configurations and boundary conditions are considered. The relative change of the plate first three natural frequencies on temperature load are received. It is shown that the resulting prestressed state has poor effect on natural frequencies free-edges plate. The results of numerical calculations for a plate clamped on both sides demonstrate that with increasing stiffness, the critical temperatures also increase.

Keywords: plates; natural frequencies; buckling; prestress

For citation: Kamenskikh, A. O. (2024), "Numerical Analysis of Natural Frequencies of Three-layer Plate under Temperature Load", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(66), pp. 23-34. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-23-34. <https://elibrary.ru/ghrznm>.

Acknowledgments: the study was made in the framework of the government task, registration number of the theme 124020700047-3.

The article was submitted 30.07.2024; approved after reviewing 18.09.2024; accepted for publication 06.10.2024.

Введение

В промышленности все чаще находят применение конструкции, состоящие из комбинации различных материалов. Тонкостенные многослойные элементы используются для обшивок многих аэрокосмических аппаратов и устройств, так как сочетают в себе повышенные характеристики удельной прочности и жесткости, высокие ударопрочность и коэффициент демпфирования [1, 2].

Температурные деформации, вызванные эксплуатацией в разных природных условиях, существенно изменяют картину напряжений в теле. Они способны привести к статической потере устойчивости и изменению спектра собственных частот колебаний конструкции.

Исследования проблемы температурной устойчивости тонкостенных конструкций возникли сравнительно давно [3–5], но и по сей день не потеряли своей актуальности [6–9]. В статье [9] рассматривается влияние неравномерного распределения армирующего волокна в композитных пластинах на ее термо- и аэроупругую устойчивость. Результаты исследования показывают, что концентрирование армирования в центре пластины приводит как к повышению критической температурной нагрузки потери устойчивости, так и к увеличению низшей собственной частоты и критической скорости набегающего потока воздуха, по сравнению с пластиной с равномерным распределением армирования.

В работе [7] авторы провели численное моделирование и эксперимент по построению зависимости прогиба защемленной со всех сторон пластины от температурной нагрузки. Показано, что у композитных пластин происходит смена формы потери устойчивости при их нагреве до определенной температуры, тогда как изотропная алюминиевая пластина не подвержена этому явлению. Результаты эксперимента показали существенно большие прогибы и меньшие критические нагрузки для всех исследованных образцов. Авторы связывают это с их неидеальным изготовлением и с отсутствием точных характеристик материалов.

Серия работ [10–12] посвящена исследованию гидро- и термоупругой устойчивости функционально градиентных (ФГ) цилиндрических оболочек. Результаты статьи [12] демонстрируют, что повышение температуры оболочек с текущей жидкостью сужает диапазон устойчивости, а гидростатическое внутреннее давление, наоборот, расширяет его. Показано, что ФГ оболочка при определенных параметрах конструкции имеет более широкий диапазон устойчивости, чем изготовленная из материала с максимальной жесткостью изотропная оболочка.

В работе [13] решается задача определения собственных частот композитных балок и пластин под различными температурными нагрузками. Проведенные расчеты показывают, что защемленная по всем сторонам пластина теряет устойчивость при повышении температуры. Результаты авторов также демонстрируют, что критическая температурная нагрузка повышается при увеличении толщины композитной пластины.

Следует упомянуть, что не всегда следует избегать потери устойчивости. Существуют исследования, рассматривающие ее как положительное явление, позволяющее создавать smart-конструкции и мета-материалы, аккумулировать энергию и многое другое. Обзор таких работ приводится в [14, 15].

Настоящая статья посвящена установлению влияния температурных напряжений, возникающих в слоистой пластине (ввиду различия коэффициентов линейного теплового расширения материалов), на ее собственные частоты колебаний при изменении толщины и условий закрепления. Работа имеет следующую структуру: математическая постановка и численная реализация задачи о колебаниях кусочно-однородного упругого тела, находящегося под влиянием температурной нагрузки; сравнение результатов численной модели с данными других авторов; результаты моделирования, отражающие чувствительность собственных частот трехслойных пластин к температурному нагружению.

1. Математическая постановка и численная реализация

Математическая постановка задачи о колебаниях кусочно-однородного деформированного тела с учетом напряженного состояния, возникающего от изменения температуры, основывается на вариационном уравнении движения при отсутствии внешних нагрузок:

$$\int_V [\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon} + \rho(\mathbf{x}) \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}] dV = 0, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ – вектор, содержащий компоненты тензора конечных деформаций; $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ – матрица упругости, зависящая от координат $\mathbf{x}$; $\rho(\mathbf{x})$ – плотность; $\tilde{\mathbf{u}} = \{u, v, w\}^T$ – вектор неизвестных перемещений, где u, v, w – компоненты перемещений.

На области S_d заданы кинематические граничные условия:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in S_d. \quad (2)$$

В уравнении (1) компоненты тензора конечных деформаций можно представить в виде суммы линейной и нелинейной частей:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, 2\varepsilon_{xy}, 2\varepsilon_{xz}, 2\varepsilon_{yz}\}^T = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{2} \mathbf{S} \mathbf{s}, \\ \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\}^T, \\ \mathbf{s} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z} \right\}^T, \\ \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} & 0 & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial z} & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial u}{\partial y} & 0 & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 & \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3)$$

Формулировка задачи о собственных колебаниях с учетом предварительного напряженно-деформированного состояния основана на линеаризации соотношения (3) относительно состояния с малым отклонением от положения равновесия и представлении решения в виде:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}, \quad (4)$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – функция, зависящая только от координат $\mathbf{x}$; i – мнимая единица, ω – собственная частота колебаний.

После значительных упрощений, исключения величин выше первого порядка малости и учетом (4) окончательно получим:

$$\begin{aligned} &\int_V \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \omega^2 \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u} dV + \int_V \delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{s} dV + \\ &+ \int_V \left(\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_0 \mathbf{s} + \delta \mathbf{s}^T \mathbf{S}_0^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta \mathbf{s}^T \mathbf{S}_0^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{S}_0 \mathbf{s} \right) dV = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Соотношение (5) соответствует гипотезе предварительного напряженного и деформированного состояния конструкции. Наличие слагаемых, содержащих $\mathbf{S}_0$, позволяет принимать во внимание начальные несовершенства формы поверхности оболочки. Опустив в (5) соответствующие им интегралы, получим выражение, которое соответствует гипотезе предварительного напряженного недеформированного состояния:

$$\int_V \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} dV - \omega^2 \int_V \delta \mathbf{u}^T \rho(\mathbf{x}) \mathbf{u} dV + \int_V \delta \mathbf{s}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{s} dV = 0. \quad (6)$$

Элементы матрицы $\boldsymbol{\sigma}_0$ находятся из решения статической задачи деформирования тела температурными нагрузками:

$$\int_V (\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} - \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \Delta T) dV = 0, \quad (7)$$

где $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x})$ – вектор коэффициентов линейного теплового расширения (КЛТР);

ΔT – разница температур.

Решение задачи о собственных колебаниях (6) осуществляется методом конечных элементов (МКЭ) в программном обеспечении ANSYS Mechanical APDL. Кусочно-однородное упругое тело дискретизируется 20-узловыми конечными элементами с квадратичной аппроксимацией всех компонент вектора перемещений (solid186). После применения известных процедур МКЭ дискретный аналог (6) примет вид:

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_G) \mathbf{u} = 0. \quad (8)$$

Типовые матрица масс $\mathbf{M}$, матрица жесткости $\mathbf{K}$ и матрица геометрической жесткости $\mathbf{K}_G$ для каждого конечного элемента с объемом V^e формируются следующим образом:

$$\mathbf{M}^e = \rho(\mathbf{x}) \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV^e, \quad \mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \mathbf{B} dV^e, \quad \mathbf{K}_G^e = \int_{V^e} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{G} dV^e, \quad (9)$$

где $\mathbf{N}$ – матрицы функции форм для вектора обобщенных перемещений $\mathbf{u}$;

$\mathbf{B}$ – матрица, связывающая линейную часть вектора обобщенных деформаций $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ с узловыми значениями обобщенных перемещений упругого тела;

$\mathbf{G}$ – матрица, связывающая вектор деформаций $\mathbf{s}$ с узловыми значениями обобщенных перемещений упругого тела, верхний индекс «e» обозначает принадлежность матрицы конкретному конечному элементу.

Конечно-элементный аналог задачи о температурном деформировании (7) имеет вид:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}_0, \quad (10)$$

где $\mathbf{F}_0^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \Delta T dV^e$.

На рис. 1 приведено сравнение зависимостей собственных частот при изменении температурной нагрузки, полученных на основе рассматриваемой численной модели и ее реализации в пакете ANSYS (Ans), с данными из статьи [13].

В этой работе приведены собственные частоты колебаний квадратной изотропной пластины размерами 1000×1000×10 мм, жестко заземленной по всем торцам. Ее материал имеет следующие свойства: $E = 73$ ГПа, $\nu = 0.34$, $\rho = 2700$ кг/м³ и $\alpha = 25 \cdot 10^{-6}$. Спектральная задача решалась авторами методом конечных элементов на основе Carerra Unified Formulation (CUF) и с использованием коммерческого программного обеспечения Abaqus (Abq).

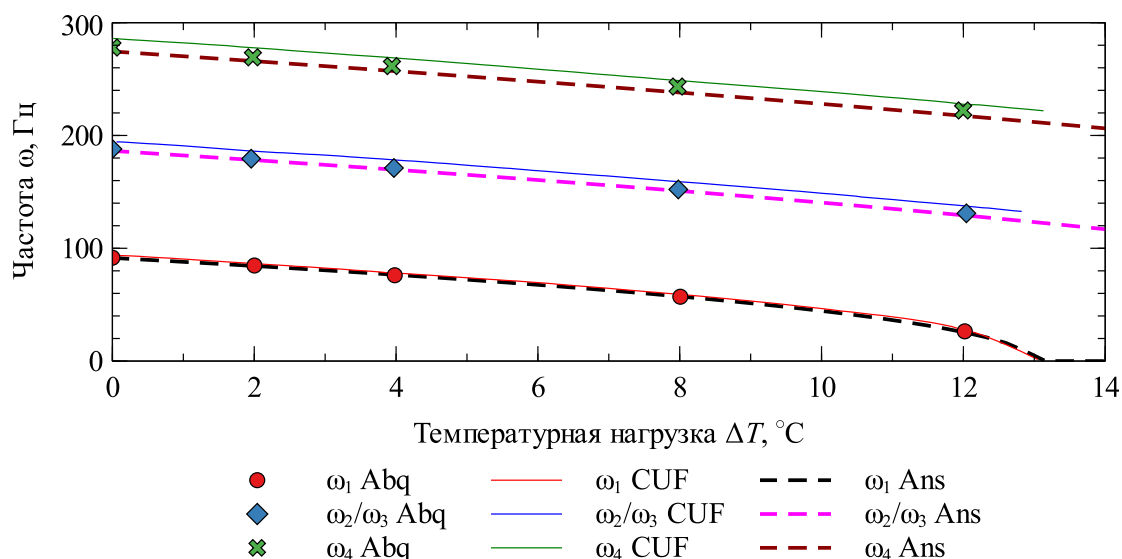


Рис. 1. Зависимость собственной частоты защемленной изотропной пластины от температурной нагрузки

2. Результаты расчетов

Рассмотрим трехслойную пластину (длина $L = 300$ мм, ширина $W = 200$ мм), состоящую из двух различных комбинаций слоев: АСА (дюралюминий-сталь-дюралюминий) и САС (сталь-дюралюминий-сталь). Механические и физические свойства материалов приведены в табл. 1. Предполагается, что между слоями реализуется идеальный контакт, а свойства материалов не зависят от температуры.

Таблица 1. Механические и физические свойства материалов

Материал	E , ГПа	ν	ρ , кг/м ³	$\alpha \cdot 10^{-6}$, 1/°C
Сталь (С)	211	0.3	7800	11.0
Дюралюминий (А)	69	0.3	2700	22.9

Граничные условия для пластины задаются следующими обозначениями: F – свободный торец; С – защемленный торец. Например, жестко защемленная с двух параллельных торцов пластина обозначается как CFCF.

Ниже представлены графические результаты серии расчетов, которые отражают зависимость относительного изменения собственной частоты от температурной нагрузки, изменяющийся в диапазоне от -30°C до $+100^\circ\text{C}$. В основном будут приводиться результаты для первых трех собственных частот, так как низшие частоты являются наиболее опасными для тонкостенных конструкций ввиду их большей амплитуды колебаний и риска потери устойчивости по их формам. Также поведение более высоких форм колебаний слабее зависит от наведенного НДС.

Относительное изменение i -ой частоты рассчитывалось по следующей формуле:

$$\Delta\omega_i(\Delta T) = \frac{\omega_i(\Delta T) - \omega_i(0)}{\omega_i(0)}. \quad (11)$$

На рис. 2 и 3 приведены результаты расчетов для пластин с граничными условиями типа FFFF и CFFF соответственно для двух компоновок при толщине каждого слоя $h_s = 1$ мм.

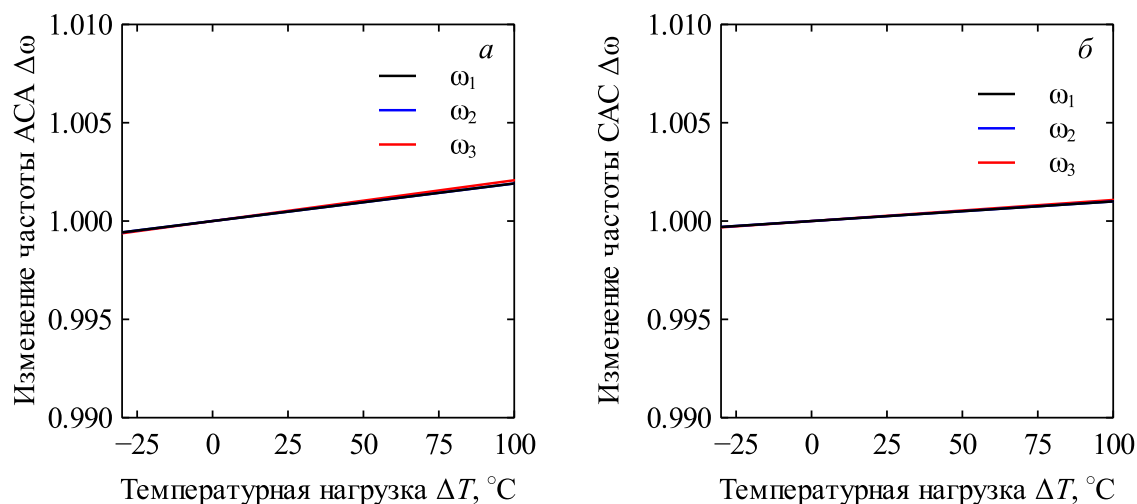


Рис. 2. Относительное изменение трех низших частот для пластины FFFF при $h_s = 1$ мм. а – АСА компоновка, б – САС компоновка

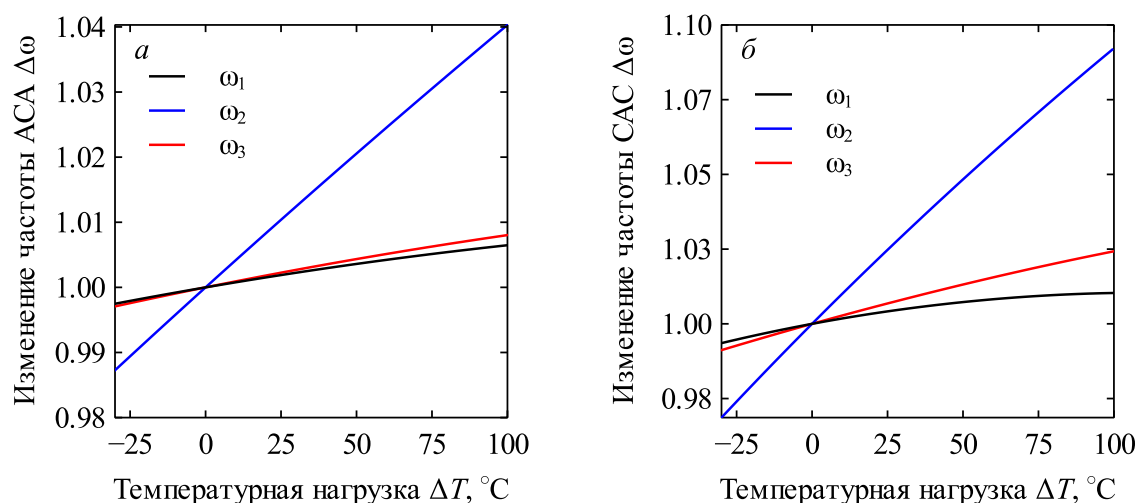


Рис. 3. Относительное изменение трех низших частот для пластины CFFF при $h_s = 1$ мм. а – АСА компоновка, б – САС компоновка

Из анализа рис. 2, можно сделать вывод, что температурные напряжения и деформации, возникающие из-за разницы КЛТР α материалов, не оказывают практически никакого влияния на собственные частоты FFFF пластины. При консольном же закреплении (рис. 3) вторая форма колебаний пластины (рис. 4) становится более восприимчивой к изменению температуры.

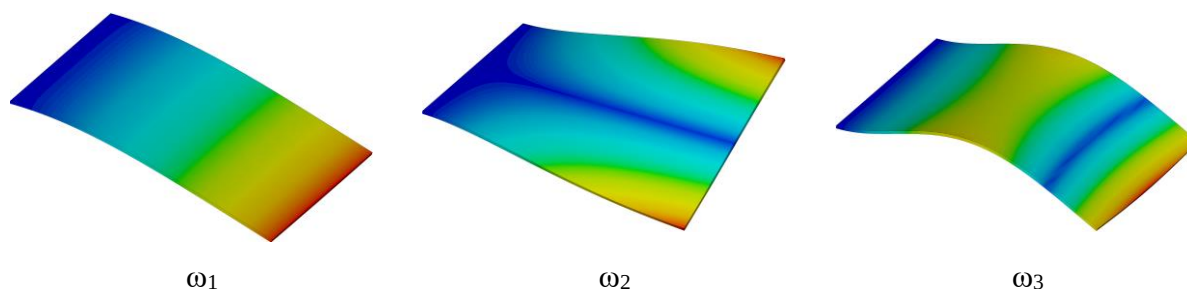


Рис. 4. Три низших формы колебаний для пластины CFFF

При граничных условиях вида CFCF пластина более чувствительна к температурной нагрузке, так как в этом случае уровень температурных напряжений в конструкции значительно повышается. Это связано не с отсутствием однородности у пластины, а с условиями ее закрепления.

На рис. 5 и 6 приводится относительное изменение частоты пластин с граничными условиями вида CFCF для двух видов компоновок при толщине каждого слоя $h_s = 1$ мм и $h_s = 2$ мм соответственно.

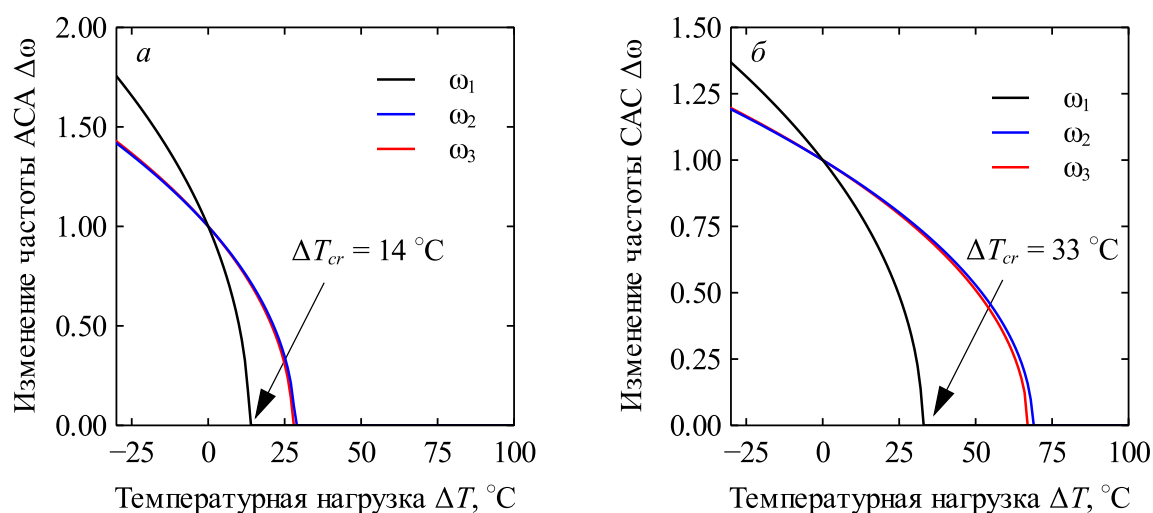


Рис. 5. Относительное изменение трех низших частот для пластины CFCF при $h_s = 1$ мм. а – АСА компоновка, б – САС компоновка

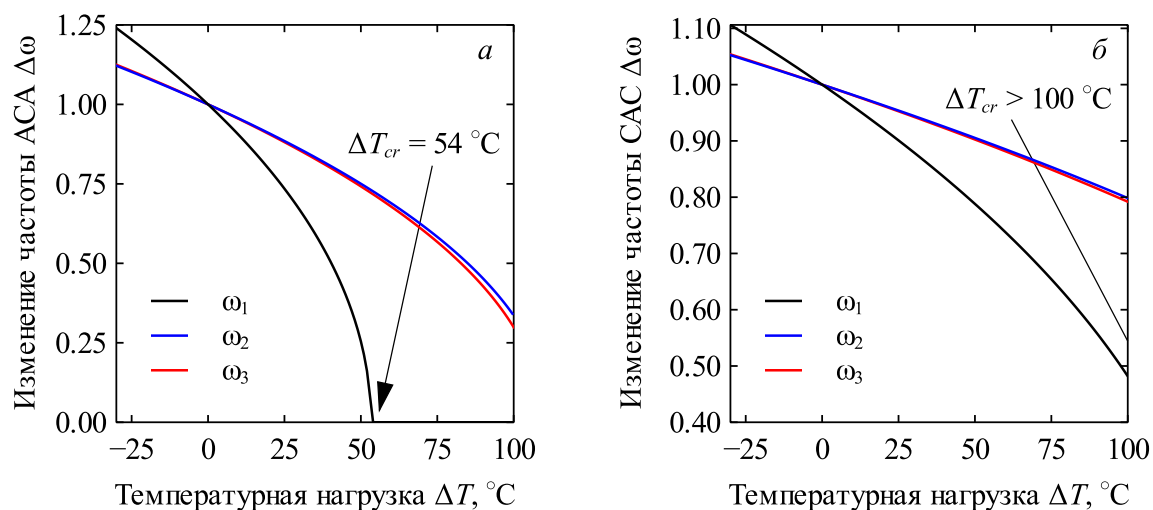


Рис. 6. Относительное изменение трех низших частот для пластины CFCF при $h_s = 2$ мм. а – АСА компоновка, б – САС компоновка

На представленных рисунках при определенной температурной нагрузке (ΔT_{cr}) низшая частота пластины обращается в ноль, что является признаком потери устойчивости [16] по первой форме колебаний (рис. 7).

Для подтверждения факта, что найденные критические температурные нагрузки являются достоверными, был проведен анализ устойчивости.

Критические температурные нагрузки, полученные из расчета устойчивости пластины (ΔT_b) и путем анализа ее собственных частот колебаний (ΔT_{cr}), а также их относительная разница приведены в табл. 2.

Таблица 2. Сравнение критических температурных нагрузок

Параметры задачи	$\Delta T_b, ^\circ\text{C}$	$\Delta T_{cr}, ^\circ\text{C}$	$\left \frac{\Delta T_{cr} - \Delta T_b}{\Delta T_{cr}} \right \cdot 100\%$
CFCF, $h_s = 1$ мм, АСА	13.371	14	4.49
CFCF, $h_s = 1$ мм, САС	32.548	33	1.37
CFCF, $h_s = 2$ мм, АСА	53.330	54	1.24
CFCF, $h_s = 2$ мм, САС	129.08	>100	—

При изменении толщины слоев увеличиваются собственные частоты ненагруженной пластины, так как ее жесткость растет. Приведенные выше графики позволяют сделать вывод, что пластина при повышении жесткости (как по причине утолщения, так и при использовании жесткой компоновки с двумя слоями стали) остается устойчивой в более широком диапазоне температурных нагрузок. Следует отметить, что анализ закритического поведения необходимо проводить в нелинейной постановке, потому что линейная задача статики не описывает происходящие в действительности процессы.

Из-за приведенных выше зависимостей может показаться, что вторая и третья частоты являются кратными, однако это не так. Данный факт подтверждается рис. 8.

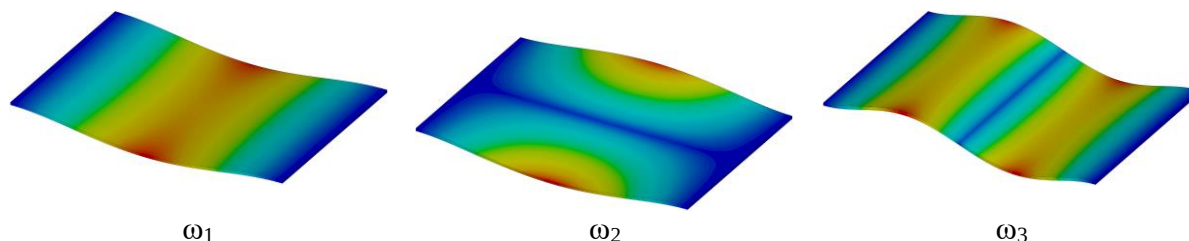


Рис. 7. Три низших формы колебаний для пластины CFCF

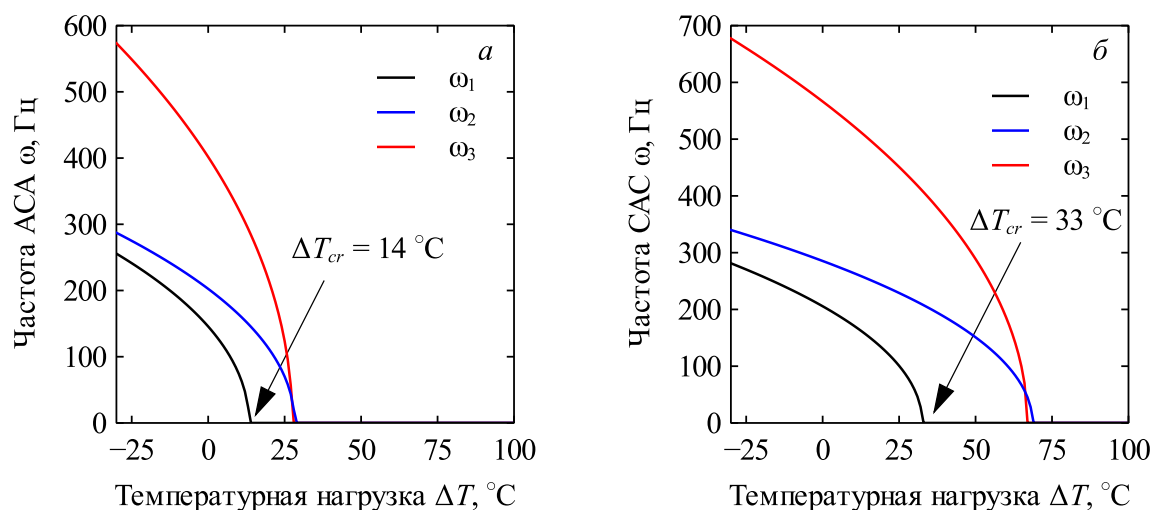


Рис. 8. Изменение трех низших частот для пластины CFCF при $h_s = 1$ мм. а – АСА компоновка, б – САС компоновка

Заключение

В данной работе приведено исследование зависимости собственных частот колебаний трехслойной пластины от приращения температуры. Рассмотрены несколько вариантов граничных условий и две компоновки из материалов, с отличающимися в два раза КЛТР. Полученные результаты демонстрируют, что температурные напряжения, возникающие в незакрепленной пластине, слабо влияют на собственные частоты трех низших форм колебаний. При граничных условиях вида CFCF влияние температурных напряжений на собственные частоты пластины, возникающие из-за разницы КЛТР материалов, остаются незначительными. В этом случае основной вклад в изменение частот вносят сжимающие напряжения, возникающие из-за граничных условий.

Показано, что более жесткая компоновка конструкции из-за наличия большего количества слоев материала с высоким модулем упругости (стали) либо из-за утолщения пластины приводит к увеличению диапазона температурной устойчивости пластины.

Список источников

1. Pradeep V., Ganesan N., Bhaskar K. Vibration and thermal buckling of composite sandwich beams with viscoelastic core // *Compos. Struct.* 2007. Vol. 81, № 1. P. 60–69.
2. Prokudin O.A. et al. Dynamic characteristics of three-layer beams with load-bearing layers made of alumino-glass plastic // *PNRPU Mech. Bull.* 2020. Vol. 2020, № 4. P. 260–270.
3. Meyers C.A., Hyer M.W. Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates // *J. Therm. Stress.* 1991. Vol. 14, № 4. P. 519–540.
4. Prabhu M.R., Dhanaraj R. Thermal buckling of laminated composite plates // *Comput. Struct.* 1994. Vol. 53, № 5. P. 1193–1204.
5. Chen L.W., Chen L.Y. Thermal buckling of laminated composite plates // *J. Therm. Stress.* 1987. Vol. 10, № 4. P. 345–356.
6. Azzara R., Carrera E., Pagani A. Nonlinear and linearized vibration analysis of plates and shells subjected to compressive loading // *Int. J. Non. Linear. Mech.* 2022. Vol. 141. P. 103936.
7. Álvarez J.G., Bisagni C. A study on thermal buckling and mode jumping of metallic and composite plates // *Aerospace.* 2021. Vol. 8, № 2. P. 1–17.
8. Tong B. et al. Free vibration analysis of fiber-reinforced composite multilayer cylindrical shells under hydrostatic pressure // *J. Sound Vib.* 2024. Vol. 587. P. 118511.
9. Kuo S.Y. Flutter of thermally buckled angle-ply laminates with variable fiber spacing // *Compos. Part B Eng.* 2016. Vol. 95. P. 240–251.
10. Бочкарев С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П. Собственные колебания и устойчивость функционально-градиентных цилиндрических оболочек вращения под действием механических и температурных нагрузок // *Механика композиционных материалов и конструкций.* 2015. Vol. 21, № 2. P. 206–220.
11. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V. Natural vibrations of heated functionally graded cylindrical shells with fluid // *PNRPU Mech. Bull.* 2015. Vol. 2015, № 4. P. 19–35.
12. Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P. Hydrothermoelastic Stability of Functionally Graded Circular Cylindrical Shells Containing a Fluid // *Mech. Compos. Mater.* 2016. Vol. 52, № 4. P. 507–520.
13. Azzara R. et al. Vibration analysis of thermally loaded isotropic and composite beam and plate structures // *J. Therm. Stress.* 2023. Vol. 46, № 5. P. 369–386.
14. Champneys A.R. et al. Happy Catastrophe: Recent Progress in Analysis and Exploitation

tation of Elastic Instability // *Front. Appl. Math. Stat.* 2019. Vol. 5. P. 1–30.

15. Reis P.M. A Perspective on the Revival of Structural (In) Stability with Novel Opportunities for Function: From Buckliphobia to Buckliphilia // *J. Appl. Mech. Trans. ASME*. 2015. Vol. 82, № 11. P. 1–4.

16. Zienkiewicz O. The finite element method in structural and soil mechanics / O. Zienkiewicz, Y. Cheung Citation Key: zienkiewicz1967finite. – McGraw Hill, London, 1967.

References

1. Pradeep, V., Ganesan, N. and Bhaskar, K. (2007), "Vibration and thermal buckling of composite sandwich beams with viscoelastic core", *Compos. Struct.*, vol. 81, no. 1, pp. 60–69.

2. Prokudin, O.A. et al. (2020), "Dynamic characteristics of three-layer beams with load-bearing layers made of alumino-glass plastic", *PNRPU Mech. Bull.*, vol. 2020, no. 4, pp. 260–270.

3. Meyers, C.A. and Hyer, M.W. (1991), "Thermal buckling and postbuckling of symmetrically laminated composite plates", *J. Therm. Stress.*, vol. 14, no. 4, pp. 519–540.

4. Prabhu, M.R. and Dhanaraj, R. (1994), "Thermal buckling of laminated composite plates", *Comput. Struct.*, vol. 53, no. 5, pp. 1193–1204.

5. Chen, L.W. and Chen, L.Y. (1987), "Thermal buckling of laminated composite plates", *J. Therm. Stress.*, vol. 10, no. 4, pp. 345–356.

6. Azzara, R., Carrera, E. and Pagani, A. (2022), "Nonlinear and linearized vibration analysis of plates and shells subjected to compressive loading", *Int. J. Non. Linear. Mech.*, vol. 141, pp. 103936.

7. Álvarez, J.G. and Bisagni, C. (2021), "A study on thermal buckling and mode jumping of metallic and composite plates", *Aerospace*, vol. 8, no. 2, pp. 1–17.

8. Tong, B. et al. (2024), "Free vibration analysis of fiber-reinforced composite multi-layer cylindrical shells under hydrostatic pressure", *J. Sound Vib.*, vol. 587, pp. 118511.

9. Kuo, S.Y. (2016), "Flutter of thermally buckled angle-ply laminates with variable fiber spacing", *Compos. Part B Eng.*, vol. 95, pp. 240–251.

10. Bochkarev, S.A., Lekomtsev, S.V. and Matveenkov V.P. (2015), "Natural vibrations and stability of functionally graded cylindrical shells under mechanical and thermal loads", *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstrukcij*, vol. 21, no. 2, pp. 206–220. (In Russian)

11. Bochkarev, S.A. and Lekomtsev, S.V. (2015), "Natural vibrations of heated functionally graded cylindrical shells with fluid", *PNRPU Mech. Bull.*, vol. 2015, no. 4, pp. 19–35.

12. Bochkarev, S.A., Lekomtsev, S.V. and Matveenkov, V.P. (2016), "Hydrothermoelastic Stability of Functionally Graded Circular Cylindrical Shells Containing a Fluid", *Mech. Compos. Mater.*, vol. 52, no. 4, pp. 507–520.

13. Azzara, R. et al. (2023), "Vibration analysis of thermally loaded isotropic and composite beam and plate structures", *J. Therm. Stress.*, vol. 46, no. 5, pp. 369–386.

14. Champneys, A.R. et al. (2019), "Happy Catastrophe: Recent Progress in Analysis and Exploitation of Elastic Instability", *Front. Appl. Math. Stat.*, vol. 5, pp. 1–30.

15. Reis, P.M. (2015), "A Perspective on the Revival of Structural (In) Stability With Novel Opportunities for Function: From Buckliphobia to Buckliphilia", *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, vol. 82, no. 11, pp. 1–4.

16. Zienkiewicz, O.C. and Cheung, Y.K. (1967), "The Finite Element Method in Structural and Soil Mechanics".

Информация об авторе:

А. О. Каменских – младший научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), WoS Researcher ID: AAO-4133-2021 Scopus Author ID: 57216251699, РИНЦ Author ID: 1080399.

Information about the author:

A. O. Kamenskikh – Junior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (1, Academician Korolev St., Perm, Russia, 614018), WoS Researcher ID: AAO-4133-2021 Scopus Author ID: 57216251699, РИНЦ Author ID: 1080399.

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 531.9; 514.853

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-35-46

<https://elibrary.ru/fqyvkc>



**Динамика гиростата в световом поле
полуевклидова пространства**

Николай Николаевич Макеев

г. Саратов, Россия

e-mail: nmakeyev@mail.ru

Аннотация. Исследуется движение гиростата в стационарном поле сил светового давления полуевклидова пространства. Гиростат с кинетической осевой симметрией и постоянным гиростатическим моментом движется так, что его носитель вращается вокруг центра инерции. Поле сил светового давления порождается стационарным световым потоком постоянной интенсивности, образованным параллельными лучами света, и принимается консервативным. На основе усовершенствованной термомеханической модели динамического взаимодействия светового излучения с твердой поверхностью строится динамическая система и рассматривается ограниченная задача исследования маятникового движения особого вида. Получены аналитические зависимости от времени компонент вектора угловой скорости гиростата и параметров его ориентации. Найдены параметрические уравнения подвижного годографа вектора угловой скорости гиростата и явное уравнение его несущей поверхности.

Ключевые слова: гиростат; полуевклидово пространство; поле сил светового давления; маятниковое движение; годограф вектора угловой скорости

Для цитирования: Макеев Н.Н. Динамика гиростата в световом поле полуевклидова пространства // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 35–46. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-35-46. <https://elibrary.ru/fqyvkc>.

Статья поступила в редакцию 16.08.2024; одобрена после рецензирования 11.09.2024; принята к публикации 06.10.2024.

MECHANICS

Research article

**Gyrostat Dynamics in the Light Field
of Semi-Euclidean Space**

Nikolay N. Makeev

Saratov, Russia

e-mail: nmakeyev@mail.ru

Abstract. The motion of a gyrostat in a stationary field of light pressure forces in semi-Euclidean space is investigated. A gyrostat with kinetic axial symmetry and a constant gyrostatic moment



Эта работа © 2024 Макеев Н. Н. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

moves so that its carrier rotates around the center of inertia. The field of light pressure forces is generated by a stationary light flux of constant intensity, formed by parallel rays of light, and is assumed to be conservative. Based on an improved thermomechanical model of the dynamic interaction of light radiation with a solid surface, a dynamic system is constructed and the limited problem of studying pendulum motion of a special type is considered. Analytical time dependences of the components of the gyrostat angular velocity vector and its orientation parameters are obtained. The parametric equations of the moving hodograph of the gyrostat angular velocity vector and the explicit equation of its bearing surface are found.

Keywords: *gyrostat; semi-Euclidean space; light pressure force field; pendulum movement; angular velocity vector hodograph*

For citation: Makeev, N. N. (2024), "Gyrostат Dynamics in the Light Field of Semi-Euclidean Space", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(66), pp. 35-46. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-35-46. <https://elibrary.ru/fqyvkc>.

The article was submitted 16.08.2024; approved after reviewing 11.09.2024; accepted for publication 06.10.2024.

Введение

Рассматривается динамически активная среда – *световое поле* (поле сил светового давления, *СД-поле*), порождаемое стационарным однородным потоком светового излучения; оно представляется пучком прямолинейных параллельных лучей постоянной интенсивности. Предполагается, что этот поток индуцируется стационарным источником светового излучения постоянной мощности, генерирующим световую волну, взаимодействующую со средой ее распространения и вызывающую эффект светового давления на твердые поверхности (динамический эффект П.Н. Лебедева).

Световое давление – пондеромоторный эффект светового излучения, обусловленный передачей импульса электромагнитного поля. Это давление реализуется распределенной поверхностной силой, величина которой пропорциональна плотности энергии светового потока и непосредственно зависит от оптических и термомеханических свойств освещаемой поверхности.

Общепринятая модель термомеханического взаимодействия светового потока с твердой поверхностью учитывает только давление подающего и отраженного (рассеянного) светового излучения. Однако реально мощность светового потока, поглощаемая твердой поверхностью, переизлучается в тепловом диапазоне, и это явление оказывает существенное влияние на динамические свойства тела. Установлено, что сила отдачи тепловых фотонов неконсервативна и в результате это приводит к возникновению существенных по влиянию дополнительных динамических эффектов, не улавливаемых общепринятыми термомеханическими моделями. В настоящей работе принята более совершенная термомеханическая модель, предложенная в статье [1], свободная от указанного недостатка.

В цитируемой статье рассматривается задача об устойчивости перманентных вращений абсолютно твердого тела в СД-поле, которое при определенных условиях может быть консервативным [1]. Свойство консервативности поля способствует решению аналитическими методами задачи о нахождении точных частных решений системы уравнений сферического движения тела. Такого рода задачи являются актуальными модельными задачами классической динамики твердого тела.

Несмотря на незначительную по объему аналитическую базу точных частных решений для исследований они имеют существенное значение. Эти решения являются носителями основной информации о характерных особенностях движения данного механического объекта и, вместе с тем, позволяют оценивать возможности применения приближенных методов нахождения решений уравнений его движения.

К настоящему времени не найдены какие-либо общие методы построения видов частных решений систем уравнений движения. В силу этого, как правило, рассматриваются задачи частного характера, решаемые в ограниченной постановке в рамках классической механики.

В настоящей работе решается ограниченная задача о нахождении точных частных решений системы уравнений сферического движения гиростата в стационарном СД-поле неевклидова пространства, поставленная при заданных ограничениях и голономных связях, для определенного класса его движений.

1. Предварительные положения

Согласно классификации, применяемой в проективной геометрии, рассматриваемое здесь полуевклидово пространство является действительным аффинным трехмерным пространством с индексом 2 и дефектом 0. Оно может быть определено и как полугиперболическое пространство с несобственной абсолютной плоскостью.

В данной работе под движением гиростата (в смысле механического движения) понимается перемещение в конфигурационном пространстве его тела-носителя как абсолютно твердого тела. При этом все необходимые геометрические объекты и связанные с ними геометрические построения, вводимые в публикациях различными способами, приняты здесь согласно схеме, установленной в работе [2].

Вследствие существующего гомеоморфизма задача о движении гиростата в плоскости Лобачевского эквивалентна задаче о его вращении вокруг неподвижного полюса в полуевклидовом пространстве с метрическим тензором $g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$, отнесенном к пространству конфигураций гиростата, с компонентами $g_{11} = g_{22} = -1$, $g_{33} = 1$ при $i = j$ и, кроме того, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Здесь $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) – орты осей заданной ортогональной координатной системы.

Согласно проективной модели Э. Бельтрами–Ф. Клейна плоскость Лобачевского наглядно представляется в виде внутренних точек абсолюта гиперболической плоскости

$$g_{ij}x^i x^j \equiv -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0,$$

где x^i, x^j – контравариантные координаты.

Под гиростатом в полуевклидовом пространстве в общепринятом смысле понимается гиростат, расположенный внутри изотропного конуса этого пространства, а под неподвижным полюсом O , совпадающим с его центром инерции, относительно которого движется гиростат, – вершина данного конуса. Тогда для радиусов-векторов точек гиростата существует условие $\mathbf{r}_s^2 = g_{ij}r_s^i r_s^j > 0$ и данные векторы, по определению, являются собственными.

Предполагается, что СД-поле светового потока является консервативным, характеризуемым одномерным стационарным квадратичным потенциалом [1]:

$$U(s_3) = \int G(s_3) ds_3, \quad (1)$$

где функция плотности поля G определяется равенством

$$G(s_3) = n_1 + n_2 s_3 \quad (-\infty < s_3 \leq -1), \quad (2)$$

а функция U определена в открытой регулярной области конфигурационного пространства. Здесь n_1, n_2 – заданные постоянные термомеханические модельные параметры [1], характеризующие теплофизические и оптические свойства светоотражающей твердой поверхности гиростата.

Движение гиростата вокруг полюса O относительно ортобазиса, связанного с носителем, в силовом поле светового потока с потенциалом, заданным соотношениями (1), (2), согласно принятым предпосылкам, определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} A\dot{\omega} + \omega \times (A\omega + k) &= (U_s \times s), \\ \dot{s} + (\omega \times s) &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где обозначено

$$U_s = \frac{\partial U}{\partial s}.$$

Согласно соотношениям (1), (2) для функции U имеем [1]

$$U(s_3) = n_1 s_3 + \frac{1}{2} n_2 s_3^2. \quad (4)$$

Введем правые координатные ортобазисы с общим началом в неподвижном полюсе O : ортобазис Γ_0 , неподвижный относительно инерциального конфигурационного пространства гиростата, и ортобазис $\Gamma(Ox_1x_2x_3)$, неизменно связанный с телом-носителем гиростата, оси Ox_j которого совмещены с его главными в полюсе O осями приведенного (по Н.Е. Жуковскому) тензора инерции данного гиростата.

Обозначим: A_j – диагональные элементы матрицы тензора инерции, являющиеся главными центральными моментами инерции, соответствующими собственным значениям оператора инерции гиростата; $K(K_j)$ – кинетический момент гиростата относительно полюса O ; $k(k_j)$ – постоянный гиростатический вектор-момент, заданный проекциями k_j на оси ортобазиса Γ ; главные центральные моменты инерции гиростата A_1, A_2 – моменты относительно не изотропных (идеальных) главных осей Ox_1, Ox_2 , а момент A_3 – относительно собственной главной оси инерции Ox_3 ; $\omega(\omega_j)$ – абсолютная угловая скорость тела-носителя. Здесь и всюду далее текущий индекс j последовательно принимает значения $j = 1, 2, 3$. В частности, символ (ω_j) кратко обозначает всю совокупность допустимых значений $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$.

Пусть e_j ($j = 1, 2, 3$) – орты осей базиса Γ . Тогда вектор угловой скорости носителя гиростата и его кинетический вектор-момент относительно полюса O представляются в виде, соответственно [2],

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 + \omega_3 e_3, \\ K &= K_1 e_1 + K_2 e_2 + K_3 e_3. \end{aligned}$$

Для компонент вектора K имеем

$$K_j = A_j \omega_j + k_j = K s_j \quad (j = 1, 2, 3), \quad (5)$$

где $K = |\mathbf{K}| \neq 0$, s_j – соответствующие направляющие косинусы, для которых имеет место тривиальное тождество [2]

$$\|\mathbf{s}\|^2 \equiv -s_1^2 - s_2^2 + s_3^2 = 1. \quad (6)$$

Система параметров ориентации для твердого тела в неевклидовых пространствах вводится по-разному; здесь единой общепринятой схемы не существует.

Следуя конструкционной схеме построения параметров ориентации собственного базового вектора $\mathbf{s}$ в полуевклидовом пространстве, принятой в работе [2], введем аналоги классических углов Эйлера λ, ϑ, ϕ , определяющих ориентацию ортобазиса Γ относительно Γ_0 конфигурационного пространства. Положим, что вектор $\mathbf{s}(s_1, s_2, s_3)$ – *орт*, определяющий ориентацию однородного параллельного светового потока относительно базиса Γ . Этот вектор является *направляющим ортом* светового потока, ориентированным против направления падающих на поверхность носителя пучка лучей света. Его зависимость от указанных параметров ориентации определяется равенствами [2]

$$(s_1, s_2, s_3) = (\text{sh } \vartheta \sin \phi, \text{sh } \vartheta \cos \phi, -\text{ch } \vartheta), \quad (7)$$

удовлетворяющими соотношению (6). Здесь параметры ориентации ϑ, ϕ по аналогии с классическими углами Эйлера будем называть параметрами нутации и собственного вращения. При этом данные параметры (как и их классические аналоги) являются безразмерными величинами.

Для собственного вектора $\mathbf{K}$ согласно равенствам (5), (7) получаем [3]

$$(K_1, K_2, K_3) = \mathbf{K}(\text{sh } \vartheta \sin \phi, \text{sh } \vartheta \cos \phi, -\text{ch } \vartheta). \quad (8)$$

Вводя 3-вектор ε_{ijk} с существенной компонентой $\varepsilon_{123} = 1$, переставляем его индексы по схеме: $\varepsilon_{ij\bullet}^k = \varepsilon_{ijl} g^{lk}$. Тогда векторное произведение вида $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ – это вектор, k -координата которого определяется равенствами [2]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k &= \varepsilon_{ijk} a^i b^j, \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^k &= \varepsilon_{ij\bullet}^k a^i b^j, \end{aligned} \quad (9)$$

откуда следует

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = [(\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2), (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3), (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)].$$

Система уравнений (3) согласно соотношениям (1), (2), (5)–(9) и введенным предположениям в проекциях на координатные оси ортобазиса Γ принимает вид

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_2 + A_3) \omega_2 \omega_3 + k_3 \omega_2 + k_2 \omega_3 &= -G(s_3) s_2, \\ A_2 \dot{\omega}_2 - (A_1 + A_3) \omega_3 \omega_1 - k_1 \omega_3 - k_3 \omega_1 &= G(s_3) s_1, \\ A_3 \dot{\omega}_3 + (A_1 - A_2) \omega_1 \omega_2 - k_2 \omega_1 + k_1 \omega_2 &= 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\dot{s}_1 = \omega_2 s_3 - \omega_3 s_2, \quad \dot{s}_2 = \omega_3 s_1 - \omega_1 s_3, \quad \dot{s}_3 = \omega_2 s_1 - \omega_1 s_2. \quad (11)$$

Уравнения (10)–(11) образуют многопараметрическую динамическую систему с квадратичной нелинейностью, в которой подсистема (10) имеет особые точки: точку $\mathbf{s}_q(0, 0, 1)$ и множество $\mathbf{s}(s_1, s_2, s_p)$, где критическое значение $s_p = -n_1/n_2$ соответствует статическому условию $G(s_p) = 0$ и является единственным критическим значением.

Для динамической системы (10)–(11) ставится следующая ограниченная задача. Полагая, что при $t \in T = [0, +\infty)$ априорно существует точное частное решение $\{\omega_j(t), s_j(t)\}$ данной системы, удовлетворяющее начальным условиям $\omega(0) = \omega^0 (\omega_j^0), s(0) = s^0 (s_j^0)$, найти это решение, удовлетворяющее ограничениям, налагаемым на характеристики движения гиростата.

Целью настоящей работы является решение поставленной задачи, получаемое на основе динамической системы (10)–(11) и предпосылок, принятых для данной задачи.

2. Маятниковые движения

Рассмотрим движения гиростата, при которых для $t \in T$ выполняются условия

$$\dot{\lambda}(t) = m_1 \neq 0, \quad \dot{\phi}(t) = m_2, \quad (12)$$

где m_1, m_2 – заданные действительные постоянные. Эти условия определяют сложное движение, составленное из равномерного прецессирования и равномерного собственного вращения носителя гиростата. Совокупность параметров m_1, m_2 , заданных равенствами (12), характеризует множество маятниковых движений гиростата, существующих в СД-поле.

Согласно классификации, приведенной в работе [3], это движение при $m_2 = 0$ является частным случаем маятникового движения первого рода. Данное движение при дополнительном к (12) условию $\dot{\theta}(t) \equiv 0$ переходит в регулярную прецессию, порождаемую силами радиационного СД-поля. В определенном смысле движение, подчиненное условиям (12), является полурегулярной прецессией гиростата.

Введем условие осевой структурно-кинетической симметрии гиростата:

$$A_1 = A_2 = A > A_3 \quad (13)$$

и рассмотрим преобразование редуцирования динамической системы (10)–(11).

Обозначим

$$F(\omega_1, \omega_2) = k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2,$$

$$\Phi(s_1, s_2) = k_1 s_1 + k_2 s_2,$$

$$N(\omega_3) = b \omega_3 + k_3,$$

$$b = A + A_3, \quad A_3 < \frac{1}{2} b < A.$$

Из третьего уравнения системы (10) в силу остальных уравнений при условиях (13) получаем

$$AA_3 \ddot{\omega}_3 + N(\omega_3)F(\omega_1, \omega_2) + k^2 \omega_3 + G(s_3)\Phi(s_1, s_2) = 0. \quad (14)$$

Введем геометрическую связь

$$X(s_1, s_2) \equiv k_1 s_2 - k_2 s_1 = 0, \quad (15)$$

которая по предположению реализуется для значений $t \in T$. Согласно выражениям (7), уравнение связи (15) принимает вид

$$B(\phi) \operatorname{sh} \vartheta = 0, \quad (16)$$

где обозначено

$$B(\phi) = k_1 \cos \phi - k_2 \sin \phi.$$

Исключая критическое значение $\mathcal{G} = 0$, находим, что связь вида (16) для гиростата реализуется в виде

$$B(\phi) = 0. \quad (17)$$

Обозначая

$$N(\omega_3) = b\omega_3 + k_3,$$

$$R(\omega_1, \omega_2) \equiv k_1\omega_2 - k_2\omega_1 = -A_3\dot{\omega}_3,$$

в силу уравнений системы (10) получаем

$$\begin{aligned} A\dot{F}(\omega_1, \omega_2) + N(\omega_3)R(\omega_1, \omega_2) &= -G(s_3)X(s_1, s_2), \\ \dot{\Phi}(s_1, s_2) &= -X(s_1, s_2)\omega_3 - A_3\dot{\omega}_3s_3. \end{aligned} \quad (18)$$

Из соотношений (18) на связи (17) следует:

$$\begin{aligned} F(u) &= a_p \left(\frac{1}{2}bu^2 + k_3u \right) + C_1, \\ \Phi(u) &= A_3(a_p - u), \quad u = \omega_3. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь C_1 – постоянная интегрирования и, с учетом дальнейшего, обозначено:

$$(a, a_p, a_3) = (A^{-1}, aA_3, A_3^{-1}).$$

Согласно выражениям (17)–(19) уравнение (14) принимает вид

$$\ddot{u} + \Omega^2 u = -P(u) + an_2(u - a_p)s_3, \quad (20)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= n(a_pk_3^2 + k^2), \quad n = aa_3, \\ k^2 &= k_1^2 + k_2^2, \\ P(u) &= \sum_{k=0}^3 g_k u^k, \quad g_3 = \frac{1}{2}a_pnb^2, \\ g_2 &= \frac{3}{2}a_pbnk_3, \quad g_1 = nbC_1 - an_1, \\ g_0 &= a_pn_1 + k_3. \end{aligned}$$

Присоединим к условиям (12) уравнение, являющееся аналогом кинематического уравнения Эйлера, существующего для случая собственного кинетического момента гиростата. Для полувеклидова пространства это уравнение имеет вид [3]

$$u = m_1s_3 - m_2, \quad (21)$$

где зависимость вида $s_3(\vartheta)$ определяется равенством (7).

Согласно зависимости (21), уравнение (20) принимает вид

$$\ddot{u} + \Omega^2 u = Q_3(u), \quad (22)$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} Q_3(u) &= \sum_{k=0}^3 b_k u^k, \quad b_3 = -g_3, \\ b_2 &= n_p - g_2, \quad b_1 = n_p(m_2 - a_p) - g_1, \\ b_0 &= -(a_pm_2n_p + g_0), \quad n_p = am_1^{-1}n_2. \end{aligned}$$

Итак, в результате преобразования из системы уравнений (10), (11) выделено определяющее для функции $u(t)$ уравнение (22), которое можно рассматривать как квазилинейное, характеризующее стационарные колебания нелинейного осциллятора в одномерном фазовом пространстве с координатой u . В частности, при значениях кинематических параметров

$$m_1 = \frac{2n_2}{3abk_3}, \quad m_2 = -\frac{2(n_1 + a_q k_3)}{3a^2 b k_3},$$

$$a_3 C_1 = \frac{3}{2} a(m_2 - a_p) k_3 - \frac{n_1}{b}, \quad a_q = a_p^{-1},$$

для которых $b_r = 0$ ($r = 0, 1, 2$), уравнение (22) принимает вид *специального уравнения Дуффинга* (случай жесткой внешней упругой силы) [4, с. 163].

Для уравнения (22) имеет место первый интеграл

$$\dot{u}^2 = 2Q_4(u) \quad (-1 \leq u \leq 1) \quad (23)$$

с полиномом

$$Q_4(u) = \frac{1}{4} b_3 u^4 + \frac{1}{3} b_2 u^3 + \frac{1}{2} b_1 u^2 + b_0 u + C_2,$$

где обозначено $b_r = b_1 - \Omega^2$, C_2 – постоянная интегрирования.

Из уравнения (23) следует:

$$\mp \int_{u_0}^u \frac{ds}{\sqrt{2Q_4(s)}} = t - t_0, \quad (24)$$

причем $u_0 = \operatorname{ch} \vartheta_0$, и далее полагаем $t_0 = 0$. В равенстве (24) знак левой части выбирается согласно условию $t > 0$.

Положим, что все корни полинома Q_4 – простые. Обозначим через u_p один из них. Тогда, обращая квадратурную зависимость (24), получаем решение уравнения (23) в форме

$$u(t) = u_p + r_1 [\wp(t; g_2, g_3) - r_2]^{-1}, \quad (25)$$

где обозначено

$$r_1 = \frac{1}{2} Q_4'(u_p), \quad r_2 = \frac{1}{12} Q_4''(u_p).$$

Здесь штрих обозначает производную по переменной u , а $\wp$ – символ эллиптической функции Вейерштрасса [5, с. 322] с инвариантами

$$g_2 = \frac{1}{4} (b_3 C_2 - \frac{1}{3} b_0 b_2 + \frac{1}{12} b^2),$$

$$g_3 = \frac{1}{48} [(b b_3 - \frac{1}{3} b_2^2) C_2 - \frac{1}{64} b_0^2 b_3 + \frac{1}{12} b (b_0 b_2 - \frac{1}{6} b^2)].$$

В силу соотношений (21), (25) имеем

$$s_3(t) = m_1^{-1} \{m_2 + u_p + r_1 [\wp(t; g_2, g_3) - r_2]^{-1}\}. \quad (26)$$

Таким образом, параметры ориентации гиростата, согласно соотношениям (12), (21), определяются равенствами

$$\lambda(t) = m_1 t + \lambda_0, \quad \phi(t) = m_2 t + \phi_0,$$

а зависимость вида $\vartheta(t)$ – равенством (26), где, согласно соотношению (7), $s_3(t) = -\operatorname{ch} \vartheta(t)$.

Зависимость компонент вектора ω (ω_i) от параметров его ориентации в случае, при котором вектор $\mathbf{K}$ в полуевклидовом пространстве является собственным, устанавливается известными соотношениями [3], согласно которым

$$\omega_1 + i\omega_2 = (\dot{\vartheta} + i\dot{\lambda} \operatorname{sh} \vartheta) \exp(-i\phi), \quad (i = \sqrt{-1}).$$

При этом зависимость вида $\omega_3(t)$ находится из равенства (25).

Приведем выражение проекции вектора скорости носителя на плоскость, ортогональную оси кинетической симметрии гиростата. Для функции ее квадрата нормы $\Omega_N = \|\omega_N\|$ согласно условиям, получаем

$$\Omega_N^2 = (m_1 \operatorname{sh} \vartheta)^2 + \dot{\vartheta}^2.$$

Эта зависимость при заданном значении параметра m_1 , в случае необходимости, позволяет определить движение гиростата по углу ϑ (нутационное движение).

3. Годограф вектора угловой скорости

Для системы уравнений (10), (11) имеет место интеграл энергии [3]

$$\frac{1}{2}(\omega^T \cdot A\omega) - U(s_3) = h, \quad (27)$$

где потенциал СД-поля $U(s_3)$ определяется равенством (4), h – постоянная интегрирования. При условиях (13) и обозначениях (19) интеграл (27) принимает вид

$$\Omega_N^2 = 2a[U(s_3) + h] - a_p u^2, \quad (28)$$

где обозначено $\Omega_N^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$.

Из третьего уравнения системы (10) при условиях (13) следует:

$$-a_3 R(\omega_1, \omega_2) = \dot{u}, \quad (29)$$

где в силу зависимости (25) и соотношения для дифференцирования функции Вейерштрасса $\wp(t)$ [5, с. 320] имеем

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \mp r_1 [\wp(t) - r_2]^{-2} \cdot \sqrt{4\wp^3(t) - g_2\wp(t) - g_3}, \\ \wp(t) &= \wp(t; g_2, g_3). \end{aligned} \quad (30)$$

Представим уравнения (28), (29), соответственно, согласно равенствам (25), (26), (30) в виде

$$\begin{aligned} \Omega_N^2(\omega_1, \omega_2) &= \Phi_1(t), \\ -a_3 R(\omega_1, \omega_2) &= \Phi_2(t), \end{aligned} \quad (31)$$

где Φ_1, Φ_2 – известные функции.

Положим $k_1 \neq 0$ и обозначим

$$D(t) = [k^2 \Phi_1(t) - A_3^2 \Phi_2^2(t)] k_1^2, \quad m = k_1^{-1} k_2.$$

Тогда для значений величин ω_1, ω_2 в области $D(t) \geq 0$ ($t \in T$) фазового пространства из соотношений (31) следует:

$$\begin{aligned} \omega_1(t) &= k^{-2} [A_3 k_2 \Phi_2(t) \pm \sqrt{D(t)}], \\ \omega_2(t) &= -k^{-2} [A_3 k_1 \Phi_2(t) \mp m \sqrt{D(t)}], \end{aligned} \quad (32)$$

где $D(t)$ – дискриминантная функция, определенная в области фазового пространства, соответствующей области конфигурационного полуевклидова пространства гиростата, расположенной внутри упомянутого изотропного конуса.

Согласно равенствам (32), поле компонент угловой скорости гиростата при $k_2 D(t) \neq 0$ характеризуется двузначными значениями их величин. При этом на границе области $D(t) = 0$ значения этих компонент однозначны.

Из кинематических уравнений Пуассона (11) и соотношения связи (21) в силу первого определяющего условия (12) имеем:

$$\begin{aligned}\omega_1 s_1 + \omega_2 s_2 &= q_1, \\ \omega_2 s_1 - \omega_1 s_2 &= q_2,\end{aligned}\tag{33}$$

где величины

$$q_1(t) = m_1(s_3^2 - 1), \quad q_2(t) = m_1^{-1}\dot{u}$$

определяются соотношениями (25), (26) как известные функции времени t . В силу этого, согласно зависимостям (32), из системы уравнений (33) при условии

$$\Phi_1(t) \neq 0 \quad (t \in T)\tag{34}$$

следует:

$$s_Z(t) = \Phi_1^{-1}(t)q_Z^*(t).\tag{35}$$

В равенстве (35) обозначены комплекснозначные функции:

$$s_Z(t) = s_1 + is_2, \quad q_Z(t) = q_1 + iq_2 \quad (i = \sqrt{-1}).$$

Здесь условие (34) эквивалентно ограничению $\Omega_N^2(t) \neq 0 (t \in T)$, исключающему критические точки из области, содержащей поле компонент угловой скорости гиростата, а знак $*$ – символ комплексного сопряжения.

Обозначим:

$$p = m_1 n_1 + m_2 n_2, \quad p_1 = 2p, \quad p_0 = (p + m_1 n_1)m_2.$$

Тогда, согласно зависимости (21), для потенциальной функции СД-поля, определяемой равенством (4), имеем

$$U(u) = (2m_1^2)^{-1}(n_2 u^2 + p_1 u + p_0)\tag{36}$$

и в силу равенств (21), (28), (36) получаем

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + h_2 \omega_3^2 - h_1 \omega_3 - h_0 = 0,\tag{37}$$

где обозначено

$$\begin{aligned}h_0 &= a_r p_0 + 2ah, & h_1 &= a_r p_1, \\ h_2 &= a_p - a_r n_2, & a_r &= a m_1^{-2}.\end{aligned}$$

Равенство (37) является уравнением *несущей поверхности* в пространстве переменных ω_j , на которой расположен годограф вектора ω , отнесенный к базису Γ (*подвижный годограф* вектора ω).

Данный годограф для $t \in T$ задается параметрическими уравнениями с параметром t (25), (32). При этом, поскольку представления (32) для ω_1, ω_2 двухзначны, то при $D > 0$ в общем случае имеются два невырожденных годографа данного вектора.

При $h_2 \neq 0$ поверхность (37) является невырожденной центральной, тогда как при $h_2 = 0$ – нецентральной. В частности, для случая, при котором $n_2 = A_3 m_1^2$, эта поверхность является цилиндрической.

Заключение

Рассмотренная задача относится к классу задач о движении гиростата с радиационным моментно-силовым приводом в стационарном силовом СД-поле.

Движение гиростата, происходящее при ограничениях (12), является состоянием, сформированным из равномерного прецессионного движения и постоянного собственного вращения носителя. Это движение представляет интерес в связи с исследованием состояния гиростата, непосредственно предшествующего возможной последующей стабилизации гиростата по углам λ и ϕ . В силу этого данное движение можно рассматривать как некоторое заданное переходное состояние, – маятниковое движение, поддерживаемое стационарными силами СД-поля.

Данное состояние гиростата можно интерпретировать как предварительное, на основе которого последующее активное управление движением гиростата, построенное определенным образом, может привести его к требуемому ориентированному финальному состоянию.

Следует отметить, что результирующее уравнение (22), полученное путем преобразования из динамической системы (10), представленное на фазовой плоскости $(u, \dot{u} = w)$ в виде

$$w \frac{dw}{du} + f(u) = 0, \\ f(u) = \Omega^2 u - Q_3(u),$$

идентично по структуре уравнению одномерной уединенной стоячей волны горения, находящейся в сплошной среде, в которой не происходит процесс диффузии [6]. Такая идентичность обусловлена изоморфизмом математических моделей, существующим в задачах данного рода.

Помимо упомянутого, это уравнение находит применение при анализе процессов в некоторой биологической проблеме выживаемости определенных биологических видов, в задаче возникновения нервных импульсов, в установлении условий самовоспламенения некоторых горючих веществ.

Моделями этого класса могут являться и некоторые упорядоченные изоморфные структуры различной физической природы. В частности, к ним относятся системы однопериодных осцилляторов (решеток), одномерные монокристаллы и ряд других модельных объектов.

Список источников

1. Коган А.Ю., Кирсанова Т.С. Термомеханические явления в движении относительно центра масс космического аппарата с солнечным стабилизатором // Космические исследования. 1992. Т. 30, вып. 3. С. 312–320.
2. Косогляд Э.И. Движение твердого тела под действием сил на плоскости Лобачевского // Известия вузов. Математика. 1970, № 9 (100). С. 59–68.
3. Макеев Н.Н. Движение гиростата вокруг центра инерции в полувеклидовом пространстве // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 2 (65). С. 42–53. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53.
4. Обморшев А.Н. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1965. 276 с.

5. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. В 2 ч. М.: Физматлит. 1963. Ч. 2. 516 с.
6. Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества // Вопросы кибернетики. М.: Изд-во Академии наук СССР. 1975. Вып. 12. С. 3–30.

References

1. Kogan, A. Yu., Kirsanova, T. S. (1992), "Termomekhanicheskie yavleniya v dvizhenii otnositel'no tsentra mass kosmicheskogo apparata s solnechnym stabilizatorom", *Kosmicheskie issledovaniya*, vol. 30, issue 3, pp. 312-320.
2. Kosoglyad, E. I. (1970), "Dvizhenie tverdogo tela pod deystviem sil na ploskosti Lobachevskogo" *Izvestiya vuzov. Matematika*, no. 9 (100), pp. 59-68.
3. Makeev, N. N. (2024), "Dvizhenie girostata vokrug tsentra inertsii v poluevklidovom prostranstve", *Vestnik Permskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Informatika*, issue 2 (65), pp. 42-53. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-2-42-53. Russia.
4. Obmorshev, A. N. (1965), "Vvedenie v teoriyu kolebaniy", Nauka, Moscow, Russia.
5. Uitteker, E. T. and Watson, Dzh. N. (1963), "Kurs sovremennogo analiza. V 2 Ch." [A course in modern analysis. In 2 parts], Fizmatlit, Moscow, Russia.
6. Kolmogorov, A. N., Petrovskiy, I. G. and Piskunov, N. S. (1975), "Issledovanie uravneniya diffuzii, soedinennoy s vozrastaniem kolichestva veshchestva", *Voprosy kibernetiki*, issue 12, pp. 3-30.

Информация об авторе:

Н. Н. Макеев – доктор физико-математических наук, профессор (410000, Россия, г. Саратов), AuthorID: 374535.

Information about the author:

Nikolay N. Makeev – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor (Saratov, Russia, 410000), AuthorID: 374535.

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 517.938

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-47-54

<https://elibrary.ru/burdzi>



**О безопасных и опасных точках бифуркации
в периодических динамических системах**

Ильмира Жаватовна Мустафина

Учалинский колледж горной промышленности, г. Учалы, Россия

e-mail: fanina84@bk.ru

Аннотация. В статье безопасные и опасные точки бифуркации изучаются для периодических дифференциальных уравнений со скалярным параметром. Определяются типы точек бифуркации (безопасные или опасные), изучается поведение системы при переходе ее параметров через точку бифуркации в случаях возникновения сценария бифуркации вынужденных колебаний и бифуркации Андронова–Хопфа. Основные формулы получены в терминах исходных уравнений и не требуют перехода к нормальным формам и использования теорем о центральном многообразии.

Ключевые слова: бифуркация; безопасная и опасная точка бифуркации; область устойчивости; бифуркация вынужденных колебаний; седло-узловая бифуркация; транскритическая бифуркация; бифуркация типа вилки; бифуркация Андронова–Хопфа

Для цитирования: Мустафина И. Ж. Безопасные и опасные точки бифуркации в нелинейных динамических системах // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 47–54. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-47-54. <https://elibrary.ru/burdzi>.

Статья поступила в редакцию 04.06.2024; одобрена после рецензирования 04.09.2024; принята к публикации 07.10.2024.

MECHANICS

Research article

**Safe and Dangerous Bifurcation Points
in Non-Autonomous Dynamical Systems**

Ilmira Zh. Mustafina

Uchaly College of Mining Industry, Uchaly, Russia

e-mail: fanina84@bk.ru

Abstract. Dynamical systems described by periodic differential equations depending on a scalar parameter are considered. The types of bifurcation points (safe or dangerous) are determined and the behavior of the system when its parameters pass through the bifurcation point is studied. The basic formulas are obtained in terms of the initial equations and do not require a transition to normal forms and the use of theorems about the central manifold.



Эта работа © 2024 Мустафина И.Ж. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Keywords: *bifurcation scenario; safe and dangerous bifurcation point; boundary point of the stability region; bifurcation of forced oscillations; saddle-node bifurcation; trans-critical bifurcation; fork-type bifurcation; Andronov–Hopf bifurcation*

For citation: Mustafina, I. Zh. (2024), "Safe and Dangerous Bifurcation Points in Non-Autonomous Dynamical Systems", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(66), pp. 47-54. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-47-54. <https://elibrary.ru/burdzi>.

The article was submitted 04.06.2024; approved after reviewing 04.09.2024; accepted for publication 07.10.2024.

Введение

В статье изучаются типы границ областей устойчивости динамических систем при переходе параметрами систем этих границ. Границы области устойчивости могут быть принципиально двух разных типов: безопасные и опасные. Следуя Н.Н. Баутину [1, 2], под термином *безопасные* границы области устойчивости системы понимают такие границы (или части границ), пересечение которых параметрами системы приводит лишь к малым обратимым изменениям состояния системы; соответственно, под *опасными* понимают такие границы, пересечение которых параметрами системы приводит к значительным и необратимым изменениям в поведении системы.

Основным объектом исследования статьи является неавтономная нелинейная динамическая система, зависящая от скалярного параметра μ :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad x \in R^N, \quad (1)$$

где функция $f(x, t, \mu)$ является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных и T – периодической по t , т. е. $f(x, t+T, \mu) \equiv f(x, t, \mu)$.

Так как предполагается, что функция $f(x, t, \mu)$ является непрерывно дифференцируемой по совокупности переменных, то ее можно разложить в ряд Тейлора. Тогда систему (1) можно представить в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x + b(x, t, \mu) + d(t, \mu), \quad x \in R^N, \quad (2)$$

где $A(t, \mu) = f'_x(x^*(\mu), t, \mu)$ – матрица Якоби правой части системы (1) в точке $x^*(\mu)$, матрица $A(t, \mu)$, нелинейность $b(x, t, \mu)$ и вектор-функция $d(t, \mu)$ являются T -периодическими по t .

Предположим, что все три слагаемые в правой части системы (2) при $x = x^*(\mu)$ являются линейно зависимыми. Тогда система $f(x, t, \mu) \equiv 0$, имеет стационарное решение $x^*(\mu)$. Предположим, что это решение единственно при всех μ , при этом пусть функция $x^*(\mu)$ является непрерывно дифференцируемой.

Рассмотрим линейную часть системы (2):

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x, \quad x \in R^N. \quad (3)$$

Свойства устойчивости точки равновесия $x^*(\mu)$ системы (1) определяются по свойствам системы (3).

Обозначим через $X(t, \mu)$ фундаментальную матрицу решений (ФМР) линейной системы (3). Тогда $V(\mu) = X(T, \mu)$ является матрицей монодромии системы (3).

Областью устойчивости решения $x^*(\mu)$ уравнения (1) будем называть область Ω в пространстве Π параметров μ этой системы, при которых решение $x^*(\mu)$ асимптотически устойчиво; другими словами, $\mu \in \Omega$, если и только если все собственные значения матрицы $V(\mu)$ по модулю меньше 1 (см. [3]). Некоторую точку μ_0 будем называть *граничной точкой области устойчивости* Ω , если в любой окрестности точки μ_0 содержатся точки как из области устойчивости Ω , так и из области неустойчивости. Множество всех граничных точек области устойчивости Ω будем называть *границей области устойчивости* Ω .

Значение μ_0 является точкой бифуркации, если матрица $V(\mu_0)$ имеет хотя бы одно собственное значение, равное единице по модулю и не имеет собственных значений больших одного по модулю (см. [3]). В соответствии с общей теорией бифуркаций каждая граничная точка области устойчивости является точкой бифуркации динамической системы.

Шильниковым Л.П. [1] приводятся определения безопасной и опасной точки бифуркации для автономных динамических систем. По аналогии с ним приведем определения тех же понятий для периодических динамических систем. Будем говорить, что точка бифуркации μ_0 является *безопасной*, если решение $x^*(\mu)$ системы (1) при $\mu = \mu_0$ асимптотически устойчиво; точка μ_0 является *опасной*, если решение $x^*(\mu)$ системы (1) при $\mu = \mu_0$ неустойчиво.

Случай, когда решение $x^*(\mu)$ будет устойчивым (по Ляпунову), но не асимптотически, в приведенных в конце статьи источниках не рассматривается. В данной статье этот случай также не приводится.

Задача исследования границ областей устойчивости является одной из важных и интересных задач теории динамических систем, теории нелинейных колебаний и их приложений. Изучению этой задачи посвящены работы многих авторов (см. [1–9]). Детальное исследование этого вопроса проведено в работах [1, 3], в которых дана достаточно полная классификация границ областей устойчивости точек равновесия и периодических траекторий динамических систем, приведены списки безопасных и опасных границ, а также описаны сценарии бифуркационного поведения системы при переходе ее параметров через указанные границы. Отметим, что полученные в указанных работах результаты относятся к автономным дифференциальным уравнениям, которые предварительно редуцированы на соответствующие центральные многообразия и преобразованы с помощью метода нормальных форм (см. [1]).

В работе [10] предложены новые результаты в задаче исследования границы области устойчивости динамических систем, описываемых двухпараметрическими неавтономными периодическими дифференциальными уравнениями. В настоящей работе предлагаются достаточные условия опасных и безопасных границ области устойчивости динамических систем, описываемых неавтономными периодическими дифференциальными уравнениями, зависящие от скалярного параметра.

Основные результаты получены в терминах самих уравнений и не требуют перехода к нормальным формам и использования теоремы о центральном многообразии.

Основные результаты

Предположим, что функция $b(x, t, \mu)$ имеет вид:

$$b(x, t, \mu) = b_2(x, t, \mu) + b_3(x, t, \mu) + b_4(x, t, \mu), \quad (4)$$

где $b_2(x, t, \mu)$ и $b_3(x, t, \mu)$ содержат соответственно квадратичные и кубические по x слагаемые, а $\tilde{b}_4(x, t, \mu)$ является гладкой и удовлетворяет соотношению: $\|\tilde{b}_4(x, t, \mu)\| = O(\|x\|^4)$ при $x \rightarrow 0$ равномерно по t и μ .

Также будем рассматривать случай, когда $d(t, \mu) \equiv 0$. Тогда уравнение (2) представится в виде:

$$\frac{dx}{dt} = A(t, \mu)x + b(x, t, \mu), \quad x \in R^N. \quad (5)$$

Пусть при некотором $\mu = \mu_0$ точка равновесия $x^* = x^*(\mu_0)$ системы (2) является негиперболической, т.е. матрица монодромии $V_0 = V(\mu_0)$ имеет хотя бы одно собственное значение, равное одному по модулю.

Ниже будем рассматривать следующие основные случаи негиперболичности, когда матрица V_0 имеет:

U1. простое собственное значение 1;

U2. пару простых собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$, где $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, причем $\theta_0 \neq \frac{1}{4}$ и $\theta_0 \neq \frac{1}{3}$.

В этих случаях предполагается, что остальные собственные значения матрицы V_0 меньше 1 по модулю.

Замечание 1. Случаи $\theta_0 = \frac{1}{4}$ и $\theta_0 = \frac{1}{3}$ соответствуют сильному резонансу и здесь не рассматриваются.

Замечание 2. Предлагаемый в статье подход может быть модифицирован и для решения поставленных задач в более общих чем в U1 и U2 условиях. Например, для ситуаций, когда матрица V_0 имеет кратные полупростые собственные значения, равные 1 или кратные полупростых собственных значений $e^{\pm 2\pi\theta_0 i}$.

Случай U1. В этом случае качественная перестройка поведения системы (2) в окрестности точки $x^*(\mu_0)$ при переходе параметра μ через μ_0 , как правило, состоит в возникновении нестационарных T -периодических решений малой амплитуды в окрестности точки $x^*(\mu_0)$ (см., например, [3, 8]). Такую перестройку поведения системы обычно называют *бифуркацией вынужденных колебаний* системы (2).

Бифуркация вынужденных колебаний систем (2) и (5) может реализовываться по различным сценариям, основными из которых являются седло-узловая бифуркация вынужденных колебаний (для системы (5)), транскритическая бифуркация вынужденных колебаний и бифуркация вынужденных колебаний типа вилки (для системы (2)). Более детально эти сценарии описаны, например, в [3, 8].

Здесь мы ограничимся приведением признаков безопасности (опасности) точки бифуркации μ_0 . С этой целью обозначим через e и g собственные векторы матрицы V_0 и транспонированной матрицы V_0^* , соответственно, отвечающие собственному значению 1. Эти векторы можно считать нормированными равенствами $\|e\| = 1$, $(e, g) = 1$.

Обозначим через P_0 и P^0 действующие в R^N линейные операторы, определенные равенствами:

$$P_0 x = (x, g)e, \quad P^0 = I - P_0. \quad (6)$$

Если $N=1$, то $P_0x = x$ и $P^0x = 0$. Положим $B_0 = I - V_0 + P_0$. По построению оператор $B_0 : R^N \rightarrow R^N$ обратим.

$$\text{Положим} \quad l_2 = \int_0^T (X^{-1}(\tau, \mu_0) b_2(\varphi_0(\tau), \tau, \mu_0), g) d\tau, \quad (7)$$

$$l_3 = \int_0^T (b'_{2x}(\varphi_0(\tau), \tau, \mu_0) B_0^{-1} P^0 b_2(\varphi_0(\tau), \tau, \mu_0), g) d\tau + \int_0^T (X^{-1}(\tau, \mu_0) b_3(\varphi_0(\tau), \tau, \mu_0), g) d\tau, \quad (8)$$

$$\zeta = \int_0^T (A'_\mu(\tau, \mu_0) e, g) d\tau,$$

здесь b'_{2x} – матрица Якоби квадратичной нелинейности $b_2(x, t, \mu)$, $\varphi_0(t) = X(t, \mu_0)e$, т.е. $\varphi_0(t)$ – это T -периодическое решение линейной системы (3) при $\mu = \mu_0$, стартующее при $t = 0$ из точки $x = e \in R^N$ (такое решение системы (3) существует в силу условия U1).

В частном случае, когда матрица $A(t, \mu_0)$ является постоянной, формулы (7) и (8) упрощаются:

$$\begin{aligned} l_2 &= \int_0^T (b_2(e, \tau, \mu_0), g) d\tau, \\ l_3 &= \int_0^T (b'_{2x}(e, \tau, \mu_0) B_0^{-1} P^0 b_2(e, \tau, \mu_0), g) d\tau + \\ &\quad + \int_0^T (b_3(e, \tau, \mu_0), g) d\tau. \end{aligned}$$

Теорема 1. Пусть выполнено условие случая U1 и верно соотношение $l_2 \zeta \neq 0$.

В этом случае точка μ_0 является опасной точкой бифуркации системы (2).

Доказательство. Систему (2) будем ассоциировать с дискретной динамической системой:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= V(\mu)x_n + V(\mu) \int_0^T X^{-1}(s, \mu) [b(x_n(s, \mu) + d(s, t), s, \mu)] ds, \\ n &= 0, 1, 2, \dots, \quad x \in R^N, \end{aligned} \quad (9)$$

где $x_{n+1}(t, \mu)$ это решение уравнения (2) с начальным условием $x^*(\mu_0) = x_n$. Отметим, что неподвижные точки системы (9) определяют T -периодические решения исходной системы (2), а циклы периода q определяют qT -периодические решения системы (5).

Система (9) при $\mu = \mu_0$ имеет точку равновесия $x^* = x^*(\mu_0)$. Значение $\mu = \mu_0$ будем называть *точкой бифуркации дискретной динамической системы* (9), если матрица монодромии $V(\mu)$ в уравнений (9) при $\mu = \mu_0$ имеет хотя бы одно собственное значение, равное 1 по модулю и не имеет собственных значений больших одного по модулю. Согласно этому определению, значение $\mu = \mu_0$ является точкой бифуркации системы (9).

Для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что решение $x^* = x^*(\mu_0)$ уравнения (2) при $\mu = \mu_0$ является неустойчивым. В свою очередь, для этого достаточно показать, что решение $x = x^*(\mu_0)$ дискретной системы (9) является неустойчивым.

Согласно теореме о центральном многообразии (см. [11] стр. 186) и методу нормальных форм (см. [11] стр. 198), задача о локальных бифуркациях для N -мерной системы (9) может быть сведена (см. [1, 3]) к исследованию равносильной (в естественной постановке) задаче для одномерного уравнения:

$$u_{n+1} = u_n + l_2 u_n^2 + o(u_n^3), \quad (10)$$

где число l_2 определяется равенством (7).

В уравнении (10) коэффициент перед u_n равен 1, поэтому устойчивость решения u_n определяется знаком коэффициента перед u_n^2 . Так как $l_2 \neq 0$ и $l_2 > 0$, то решение u_n уравнения (10) является неустойчивым.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть имеет место случай U1 и выполнено соотношение $l_2\zeta \neq 0$. В этом случае точка μ_0 является опасной точкой бифуркации системы (5).

Таким образом, для систем (2) и (5) значение μ_0 , как правило, является опасной точкой бифуркации.

Теорема 3. Пусть имеет место случай U1 и выполнено соотношение $l_2 = 0$ и $l_3\zeta \neq 0$. В этом случае точка μ_0 является безопасной (опасной) точкой бифуркации системы (5), если $l_3 < 0$ ($l_3 > 0$).

Теоремы 2 и 3 доказываются по такой же схеме, что и теорема 1.

Таким образом, если $l_2 \neq 0$ (в частности нелинейность (4) начинается с квадратичных по x слагаемых), то значение μ_0 параметра μ , как правило, является опасной точкой бифуркации системы (5). Если же $l_2 = 0$ (в частности нелинейность (4) начинается с кубических по x слагаемых), то значение μ_0 параметра μ может быть как безопасной, так и опасной точкой бифуркации системы (5).

Случай U2. В этом случае, как правило, при переходе параметра μ через точку μ_0 в системе (5) реализуется сценарий бифуркации Андронова–Хопфа. Более детально этот сценарий описан, например, в [7].

Приведем признаки безопасности (опасности) точки бифуркации μ_0 . С этой целью обозначим через $e, g, e^*, g^* \in R^N$ ненулевые векторы такие, что выполняются равенства:

$$V_0(e + ig) = e^{2\pi\theta_0 i}(e + ig), \quad V_0^*(e^* + ig^*) = e^{-2\pi\theta_0 i}(e^* + ig^*). \quad (11)$$

Далее в этом подразделе для простоты будем считать, что система (5) двумерна, т.е. $N = 2$, а матрица V_0 имеет вид $V_0 = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\theta_0 & \sin 2\pi\theta_0 \\ -\sin 2\pi\theta_0 & \cos 2\pi\theta_0 \end{bmatrix}$.

Пусть также для простоты нелинейность $b_2(x, t, \mu)$ в равенстве (4) является нулевой $b_2(x, t, \mu) \equiv 0$. Общий случай может быть рассмотрен по той же схеме, но приводит к более громоздким формулам.

Положим

$$\kappa_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^T (b_3(h(t, \varphi), t, \mu_0), h(t, \varphi)) dt d\varphi, \quad (12)$$

где $h(t, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi\theta_0 t + \varphi) \\ \sin(2\pi\theta_0 t + \varphi) \end{bmatrix}$.

Теорема 4. Пусть имеет место случай U2 и выполнено соотношение $\kappa_0 \neq 0$. Тогда точка μ_0 является безопасной (опасной) точкой бифуркации системы (5), если $\kappa_0 < 0$ ($\kappa_0 > 0$).

Теорема 4 следует из общих теорем о локальных бифуркациях в динамических системах [6, 9].

Пример.

Рассмотрим уравнение

$$u'' + u^2 u' + [(2\pi\theta_0)^2 + (1 + \cos t)\mu]u = 0, \quad (13)$$

где $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}$, при этом $\theta_0 \neq \frac{1}{3}$ и $\theta_0 \neq \frac{1}{4}$.

Уравнение (13) может быть сведено к уравнению вида (5) при $T = 2\pi$ и $x \in R^2$ и в котором:

$$b_2(x, t, \mu) \equiv 0, \quad b_3(x, t, \mu) = \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1^2 x_2 \end{bmatrix}.$$

При $\mu = 0$ имеет место случай U2, т.е. имеет место сценарий бифуркаций Андронова–Хопфа.

Проведя вычисления по формуле (12) получим, что $\kappa_0 = -0,25\pi$.

Тогда, согласно теореме 4, значение параметра $\mu = 0$ является безопасной точкой бифуркации для уравнения (13).

Заключение

В статье получены достаточные признаки опасности и безопасности точки бифуркации для динамических систем, описываемых неавтономными нелинейными дифференциальными уравнениями, содержащими скалярный параметр.

Список источников

1. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В. и др. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований. 2009. 548 с.
2. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости // Сер. "Современные проблемы механики". Л.–М.: ОГИЗ Гостехиздат, 1949.
3. Вышинский А.А., Ибрагимова Л.С., Муртазина С.А. и др. Операторный метод приближенного исследования правильной бифуркации в многопараметрических динамических системах // Уфимский математический журн. 2010. Т. 2, № 4. С. 3–26.
4. Ван Д., Ли Ч., Чоу Ш.-Н. Нормальные формы и бифуркации векторных полей на плоскости. М.: МЦНМО, 2005.
5. Kuznetsov Yu. A. Elements of Applied Bifurcation Theory. N.Y.: Springer, 1998.
6. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. М.–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. 560 с.
7. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.
8. Гусарова Н.И., Муртазина С.А., Фазлытдинов М.Ф. и др. Операторные методы вычисления ляпуновских величин в задачах о локальных бифуркациях динамических систем // Уфимский математический журн. 2018. Т. 10, № 1. С. 25–49.
9. Красносельский М.А., Кузнецов Н.А., Юмагулов М.Г. Операторный метод анализа устойчивости циклов при бифуркации Хопфа // Автоматика и телемеханика. 1996. № 12. С. 24–30.
10. Ибрагимова Л.С., Мустафина И.Ж., Юмагулов М.Г. Исследование границ областей устойчивости двухпараметрических динамических систем // Автоматика и телемеханика. 2017. № 10. С. 74–89.
11. Юмагулов М.Г. Введение в нелинейную динамику: теория, приложения, модели: учеб. пособие для вузов / М.Г. Юмагулов. 2-е изд., стер. Санкт-Петербург: Лань, 2024. 368 с.

References

1. Shil'nikov, L.P., Shil'nikov, A.L., Turaev, D.V. and etc. (2009), *Metody` kachestvennoj teorii v nelinejnoj dinamike* [Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics], Ch. 2. M.–Izhevsk: In-t komp`yut. issled., 548 p. (In Russ.).
2. Bautin, N.N. (1949), *Povedenie dinamicheskix sistem vblizi granicz oblasti ustojchivosti* [Behavior of dynamical systems near the boundaries of the stability domain], Ser. "Covremenny'e problemy` mexaniki", L.–M.: OGIZ Gostexizdat. (In Russ.).
3. Vy`shinskij, A.A., Ibragimova, L.S., Murtazina, S.A. and etc. (2010), *Operatorny`j metod priblizhennogo issledovaniya pravil`noj bifurkacii v mnogoparametricheskix dinamicheskix sistemax* [An operator method for approximate investigation of correct bifurcation in multiparametric dynamical systems], Ufimsk. matemat. zhurn. Vol. 2, no. 4, pp. 3-26. (In Russ.).
4. Van D., Li Ch. and Chou, Sh.-N. (2005), *Normal`ny`e formy` i bifurkacii vektorny`x polej na ploskosti* [Normal shapes and bifurcations of vector fields on the plane], M.: MCzNMO. (In Russ.).
5. Kuznetsov, Yu. A. (1998), *Elements of Applied Bifurcation Theory*, N.Y.: Springer.
6. Gukenxejmer, Dzh. and Xolms, F. (2002), *Nelinejny`e kolebaniya, dinamicheskie sistemy` i bifurkacii vektorny`x polej* [Bifurcation of the birth of the cycle and its applications]. M.–Izhevsk: In-t komp`yut. issled. 560 p. (In Russ.).
7. Marsden, Dzh. and Mak-Kraken, M. (1980), *Bifurkaciya rozhdeniya cikla i ee prilozheniya* [Bifurcation of the birth of a cycle and its applications], M.: Mir. (In russ.).
8. Gusarova, N.I., Murtazina, S.A., Fazly`tdinov, M.F. and etc. (2018), *Operatorny`e metody` vy`chisleniya lyapunovskix velichin v zadachax o lokal`ny`x bifurkacijax dinamicheskix sistem* [Operator methods for calculating Lyapunov quantities in problems of local bifurcations of dynamical systems], Ufimsk. matemat. Zhurn, Vol. 10, no. 1, pp. 25-49. (In Russ.).
9. Krasnosel'skij, M.A., Kuznecov, N.A. and Yumagulov, M.G. (1996), *Operatorny`j metod analiza ustojchivosti ciklov pri bifurkacii Xopfa* [An operator method for analyzing the stability of cycles under Hopf bifurcation] *Avtomatika i telemekhanika*, no.12, pp. 24-30. (In Russ.).
10. Ibragimova, L.S., Mustafina, I.Zh. and Yumagulov, M.G. (2017), *Issledovanie granicz oblastej ustojchivosti dvuxparametricheskix dinamicheskix sistem* [Investigation of the boundaries of the stability domains of two-parameter dynamical systems], *AiT*, no. 10. pp. 74-89. (In Russ.).
11. Yumagulov, M.G. (2024), *Vvedenie v nelinejnuyu dinamiku: teoriya, prilozheniya, modeli: uchebnoe posobie dlya vuzov 2-e izd., ster.* [Introduction to nonlinear dynamics: theory, applications, models: textbook for universities], Sankt-Peterburg: Lan, 368 p. (In Russ.).

Информация об авторе:

И. Ж. Мустафина – преподаватель высшей категорий Учалинского колледжа горной промышленности (453700, Россия, г. Учалы, ул. Первостроителей, 7).

Information about the author:

I. Zh. Mustafina – the highest categories teacher at the Uchaly College of Mining Industry (7, Pioneer builders St., Uchaly, Russia, 453700).

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Научная статья

УДК 004.93.1

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-55-63

<https://elibrary.ru/gebyca>



**Алгоритм и программное обеспечение
распознавания лиц монозиготных близнецов**

Юрий Николаевич Липин

Пермский научный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия

e-mail: ur-lip193530@yandex.ru

Аннотация. Проблема распознавания лиц монозиготных близнецов является весьма важной и трудно решаемой. Существующие программные продукты по распознаванию лиц для данной цели в большинстве случаев не справляются с этой задачей. В данной работе предложен алгоритм распознавания лиц монозиготных близнецов, основанный на природной и искусственно созданной асимметрии лица, с использованием преобразования Фурье. Программа, реализующая предложенный алгоритм, создает два изображения из левых и правых половин исходного фото лица первого близнеца и еще одно изображение как среднее из двух созданных. На основе полученных четырех изображений создается вектор из 28 значений классификаторов для сравнения. Аналогично создается второй вектор по изображениям второго близнеца. При сравнении значений двух векторов срабатывает невидимый эффект асимметрии лиц близнецов, позволяющий их различить.

Ключевые слова: монозиготные близнецы; распознавание лиц; асимметрия; преобразование Фурье

Для цитирования: Липин Ю. Н. Алгоритм и программное обеспечение распознавания лиц монозиготных близнецов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 55–63. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-55-63. <https://elibrary.ru/gebyca>.

Статья поступила в редакцию 10.06.2024; одобрена после рецензирования 22.09.2024; принята к публикации 06.10.2024.

COMPUTER SCIENCE

Research article

**Algorithm and Software
for Monozygotic Twins Recognizing**

Yuri N. Lipin

Perm Research Polytechnic University, Perm, Russia

e-mail: ur-lip193530@yandex.ru

Abstract. The problem of face recognition of monozygotic twins is very important and difficult to solve. Existing face recognition software products for this purpose in most cases fail to cope with this task. In this paper, we propose an algorithm for face recognition of monozygotic twins based on natural and artificially created facial asymmetry using Fourier transform. The program



Эта работа © 2024 Липин Ю.Н. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

implementing the proposed algorithm creates two images from the left and right halves of the original photo of the face of the first twin and another image as the average of the two created. Based on the obtained four images, a vector of 28 classifier values is created for comparison. Similarly, a second vector is created based on the images of the second twin. When comparing the values of the two vectors, the invisible effect of the asymmetry of the twins' faces is triggered, allowing to distinguish them.

Keywords: *monozygotic twins; face recognition; asymmetry; Fourier transform*

For citation: Lipin, Yu. N. (2024), "Algorithm and Software for Monozygotic Twins Recognizing", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(66), pp. 55-63. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-55-63. <https://elibrary.ru/gebyca>.

The article was submitted 10.06.2024; approved after reviewing 22.09.2024; accepted for publication 06.10.2024.

По определению, монозиготные близнецы идентичны по многим параметрам (ДНК, архитектура и цвет лица, цвет и качество кожи и волос, по крайней мере вначале жизни). Распознавание монозиготных (однойяйцевых) близнецов по изображениям их лиц является сложной задачей в биометрии.

Первыми к этой проблеме обратились биологи и медики с целью построения биометрической системы, способной принимать правильное решение о влиянии внешней среды на вложенные в близнецов генные установки самой природой. Позднее к проблеме подключились инженерно-научные коллективы с целью решения проблемы идентификации близнецов для служб, таких как криминальные органы, банки, кредитные системы, пограничная служба и таможня. Одним из первых подходов распознавания монозиготных близнецов был метод "выделения признаков", основанный на слиянии на уровне баллов и слиянии на уровне принятия решения с анализом главных компонент, гистограммой ориентированных градиентов и экстракторами признаков локальных бинарных шаблонов. Однако практически нет свободно распространяемых программных продуктов, способных качественно распознавать лица монозиготных близнецов. В настоящей работе предложены эффективные алгоритмы распознавания лиц монозиготных близнецов и описана разработанная программа.

Распознавание монозиготных близнецов по изображениям их лиц является сложной задачей в биометрии, и зависит от видов близнецов. Однояйцевые близнецы (монозиготные) образуются, когда одно оплодотворенное яйцо делится на две отдельные эмбриональные клетки [1]. Они имеют одинаковый генетический материал и развиваются одновременно внутри организма женщины. Поэтому любые различия между однойяйцевыми близнецами можно приписать окружающим факторам, таким как различия в среде, воспитании или случайным мутациям. Характерными свойствами таких близнецов являются универсальность, уникальность, постоянство, приемлемость набора наследственных признаков. Отсутствие таких факторов в алгоритмах распознавания приводит к высокому уровню ошибок. Также нужно учесть, что у данного типа близнецов общими параметрами являются пол, цвет волос и глаз, черты лица. При этом отпечатки пальцев разные. Также неизвестна зависимость распознавания от таких факторов как подпись, голос, тембр, обертоны, юмор, фон речи. Двухяйцевые близнецы (дизиготные) образуются, когда два отдельных яйца оплодотворяются разными сперматозоидами. Они имеют разный генетический материал, как и обычные братья и сестры.

Поэтому любые различия между двухяйцевыми близнецами могут быть связаны как с генетическими, так и с окружающими факторами.

Ниже приведены известные методы распознавания близнецов.

К данному моменту методы распознавания близнецов следующие:

1). Близнецовый метод основан на сравнении генетического сходства и различия между однойяйцевыми (монозиготными) и двумяяйцевыми (дизиготными) близнецами [2–4]. Он используется для изучения влияния генетических и окружающих факторов на различные фенотипические характеристики. Слияние на уровне признаков, баллов, принятия решения с анализом главных компонент, гистограммой ориентированных градиентов и экстрактами признаков локальных бинарных [5–9]. Кроме того, в качестве алгоритмов извлечения признаков используются анализ главных компонент (PCA) [6], гистограммы ориентированных градиентов (HOG) [7] и локальные бинарные шаблоны (LBP) [8].

2). Методы извлечения черт [10–14]. Наиболее часто используемый метод извлечения черт лица основан на внешности – PCA. Он является самым ранним автоматизированным методом, предложенным для распознавания лиц. Это достигается путем выполнения разложения ковариационной матрицы данных по собственным значениям. Целью PCA является получение собственных векторов ковариационной матрицы.

Автором настоящей работы ведутся исследования в области распознавания близнецов (например, [15–16]) на основе такой информации о лице как его цветовая палитра. Основное цветное или серого тона изображение пропускается через фильтр Собеля с получением черно-белого контрастного вида, позволяющее находить границы изображения лица.

Следующим этапом работ автора в данном направлении стал период использования правил золотого сечения [17]. Автором был разработан алгоритм, основанный на идее работы мозга.

На рис. 1 дан образец работы программы по золотому сечению.

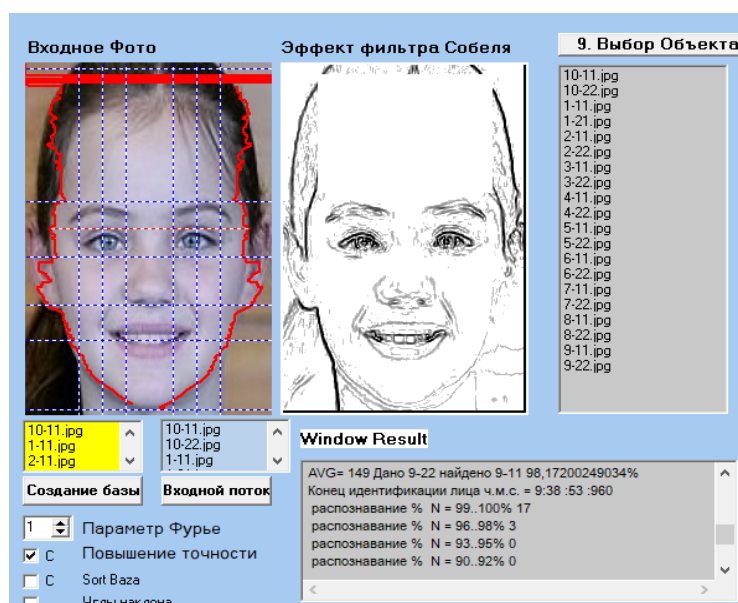


Рис. 1. Итог работы программы по золотому сечению

На рис. 2. дан результат работы программы по методу распознавания мозга.



Рис. 2. *Результат работы программы по правилам распознавания мозгом человека*

Следующим этапом работ по распознаванию лиц монозиготных близнецов была разработка алгоритмов определения асимметрии лица и мозга человека по заявкам института психологии Пермского пединститута. Целью распознавания была проверка связи асимметрии лица и мозга человека со склонностью к преступлениям. Результаты были адекватными. В дальнейшем автору удалось применить данный алгоритм для распознавания лиц монозиготных близнецов.

Для реализации алгоритма распознавания лиц монозиготных близнецов было написано приложение согласно которому в программу загружается фото первого близнеца, начинается его обработка (результаты работы с фотографией представлены на рис. 3).

Первый ряд, второе фото – исходный близнец, фото слева от него (первый ряд, первое фото) создано из правой половины исходного фото (соответствует правой половине лица). Таким образом, на преобразованном изображении с двух сторон представлена одна и та же половина лица, соответствующая эмоциональному полушарию.

Второй ряд, первое фото – создано из левых половин исходного фото (соответствует правой половине лица).

Фото справа от него – результат наложения преобразованных изображений с одинаковыми половинами.

На каждом фото сверху программа выводит значение частотного спектра, полученного в результате преобразования Фурье, что позволяет использовать их в качестве параметров для оценки результата.

Последнее (черно-белое) изображение в первом ряду получено из обратного преобразования Фурье. Аналогичное фото в конце второго ряда представляет собой результат применения разницы спектров двух изображений, созданных из одинаковых половин.

Такая разница по нашей гипотезе возникает из-за асимметрии полушарий мозга человека. Имеются данные, что первые недели созревания плода лицо и мозг формируются вместе, влияя друг на друга, затем мозг уходит в режим создания ДНК.

Также у авторов появилась гипотеза, что на формирование индивидуальных особенностей лица влияют два аспекта.

Первый аспект. Ребенку-человеку от рождения дается имя, что является абстрактной конструкцией, по сути имя дается мозгу будущей личности. Фамилия добавляется как родовая память со своим факторным наследством.

Таким образом, имя и фамилия могут влиять на формирование особенностей лица.

Второй аспект. Мозг по существу есть фабрика белков. Нейрон через синапс и нейромедиатор при особой картинке создает белки серотина, дофинама, нороандреналина и эти белки уходят на входы рецепторов других нейронов. Они в конце концов достигают центра удовольствия, который посылает сигнал в мозг. Результат – эмоция через удовольствие. Получается, первоначально все "видит" мозг, а не сознание человека. Когда мы чувствуем злость, страх, беспокойство, тревогу и другие вызывающие стресс эмоции, в кровь выбрасываются гормоны стресса, в том числе кортизол и цитокины, которые влияют на работу иммунной системы.

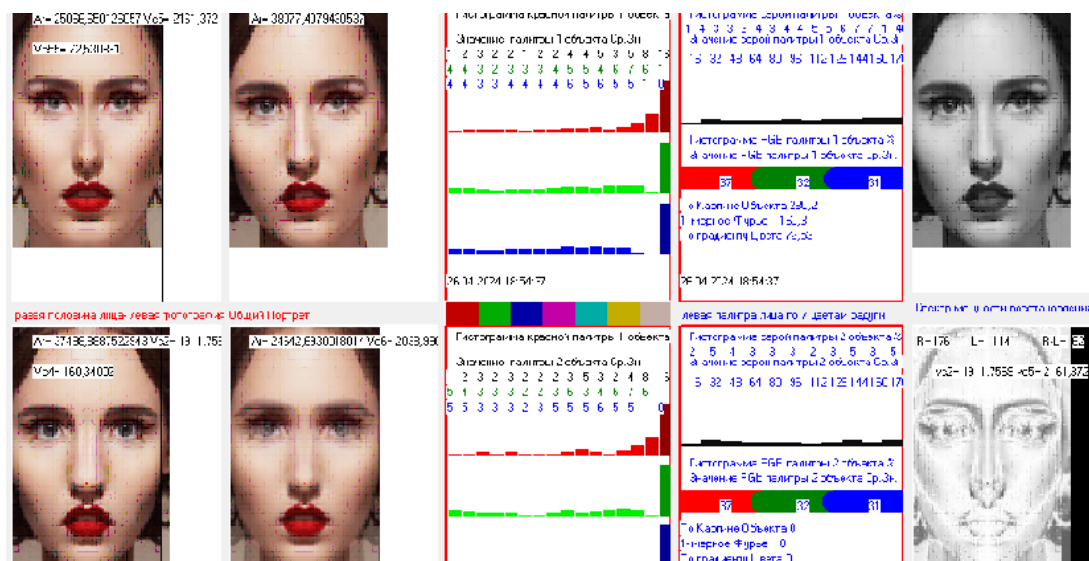


Рис. 3. Результат обработки первого близнеца

В результате обработки фотографии имеется 7 показателей, для каждого из которых рассмотрены 4 параметра. Таким образом формируется вектор из 28 значений.

Полученные значения вектора для первого близнеца хранятся в таблице, которая показана на рис. 4.

Form4

Print StrinGrid Exit

Результаты идентификации				
Идентификация лиц	Град/цвета	Фурье	Спектр Р	М/Н/Кв
Фото исходное	2421,7573	280,21563	179	36628,724
Фото правых половин лица	1911,2592	158,1578	173	35396,492
Фото левых половин лица	3246,127	77,240548	111	24851,044
Фото правых левых пол средняя	2578,9418	67,566482	106	23764,295
Фазовый портрет вычет по спектру лев/прав	1334,8678	80,917249	62	16704,109
Градиент цвета сумма по блокам	516	627	112	0
Корреляция по R/G/B лев/прав лица.	0,03825910;0,10311625	0,10724598	0	

Рис. 4. Полученные значения вектора для первого близнеца

Аналогично проводится процедура обработки фотографии второго близнеца.

Полученные значения вектора для второго близнеца хранятся в таблице, которая показана на рис. 5.

Form4

Print StrinGrid Exit

Результаты итентификации				
Итентификация лиц	Град/цвета	Фурье	Спектр Р	М/Н/Кв
Фото исходное	2403,5674	181,86858	141	33068,197
Фото правых половин лица	0	103,30299	153	37002,542
Фото левых половин лица	1263,2555	66,08661	115	26487,129
Фото правых левых пол средняя	1564,0559	68,029474	128	29629,823
Фазовый портрет вычет по спектру лев/прав	630,54235	37,216378	38	11708,216
Градиент цвета сумма по блокам	463	401	-64	0
Корреляция по R/G/B лев/прав лица	0,64133507	0,64081685	0,61518634	0

Рис. 5. Полученные значения вектора для второго близнеца

Сравнивая две таблицы, можно заметить разницу между значениями двух векторов, что подтверждает тот факт, что на фотографиях разные люди. Сравнение значений векторов производится по модифицированному автором алгоритму Эвклида, который описан ранее.

Работа алгоритма была проверена на 8 фотографиях и была успешной. Разработанная программа может служить дополнительным инструментом для исследователей, занимающихся проблемой идентификации субъектов, близких по ДНК.

Список источников

1. *Какие* бывают близнецы? Чем отличаются монозиготные и двузиготные близнецы? (7ya.ru). URL: <https://www.7ya.ru/article/Iz-odnogo-yajca/?ysclid=m1xv2df7ac804445780> (дата обращения: 28.05.2024).
2. *Основы психогенетики* (дата обращения: 23.11.2018). Архивировано 8 ноября 2016 года.
3. *Егорова М., Пьянкова С.* Динамика близнецовой рождаемости в России (1959–2008) // Психологические исследования. 2010-10-31. Т. 3, вып. 13. ISSN 2075-7999. doi: 10.54359/ps.v3i13.893. Архивировано 2 апреля 2022 года.
4. *Малых С.Б., Егорова М.С.* Основы психогенетики. М.: Эпидавр, 1998. С. 134.
5. *Джайн А.К., Росс А.А., Нандакумарр К.* Введение в биометрию. Springer Science Business Media, Нью-Йорк, 2011. 312 с.
6. *Болотникова А., Демирель Х., Анбарджафари Г.* Система распознавания лиц на основе ансамбля в реальном времени для гуманоидов NAO с использованием локальной двоичной схемы. Аналоговый интеграл. Circ. Sig. роцесс. 92 (3), 1–9 (2017).
7. *Люси Я., Джуниор Дж. Дж., Горбова Дж., Баро, Эскалера Х, С., Демирель Х., Аллик Дж., Озчинар К., Анбарджафари Г.* В совместной задаче по распознаванию

доминирующих и дополнительных эмоций с использованием микроэмоциональных признаков и оценки положения головы: базы данных. Автоматическое распознавание лиц и жестов (FG 2017), 2017. 12-я Междунар. конф. IEEE по (IEEE, Вашингтон, 2017). С. 809–813.

8. Анбарджафари Г. Распознавание лиц с использованием цветового локального бинарного шаблона из взаимно независимых цветовых каналов. EURASIP J. Процесс обработки изображений и видео. 2013 (1), 6 (2013).

9. Филлипс П., Флинн П., Бауэр К., Брейгге Р., Гротер П., Куинн Г., Прюитт М. В протоколе. Конференция IEEE. Autom. Распознавание жестов лица. Семинары. Различение идентичных близнецов с помощью распознавания лиц (IEEE, Санта-Барбара, 2011). С. 185–192. doi:10.1109/FG.2011.5771395.

10. Бледсо W.W. Модельный метод в распознавании лиц. Т. 15. Panoramic Research Inc, Пало-Альто, 1966. С. 47.

11. Терк М., Пентланд А. Собственные грани для распознавания [J]. J. Cogn. Neurosci. 1991. Вып. 3(1). С. 71–86.

12. X-Y Li, Z-X Lin на Евро-китайской конференции по интеллектуальному анализу данных и приложениям. Распознавание лиц на основе алгоритма HOG и Fast PCA. Springer, Cham, 2017.

13. Вьяс Р.А., Шах С.М. Сравнение методов PCA и LDA для выделения признаков на основе распознавания лиц с повышением точности [J] // Междунар. науч.-практ. конф. J. Eng. Технология. 4(6), 3332–3336. 2017.

14. САЙ Лоу, АБДЖ Тео, Си Джей Нг. В IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology. Дескриптор многократной свертки фильтров Gabor, PCA и ICA для распознавания лиц [J]. 2017.

15. Липин Ю.Н., Сторорожев С.А. Разработка программы моделирования алгоритмов систем распознавания лиц // VIII Всерос. науч.-практ. конф. с междунар. участием "Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века". 2022.

16. Lipin YU. N., Stororozhev S.A. Development of an algorithm for human face recognition (2021). International Conference on Data Analytics for Business and Industry (ICDABI)). (In Russ.).

17. Липин Ю.Н. Разработка алгоритма распознавания лиц с учетом особенностей работы человеческого мозга // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2(61). С. 59–64.

References

1. Kakie by`vayut bliznecy? Chem otlichayutsya monozygotny`e i dvuzigotny`e bliznecy? [What kind of twins are there? What is the difference between monozygotic and dizygotic twins?]. URL: <https://www.7ya.ru/article/Iz-odnogo-yajca/?ysclid=m1xv2df7ac804445780> (accessed data: 28.05.2024). (In Russ.).
2. Osnovy` psixogenetiki [Fundamentals of psychogenetics], Arxivirovano 8 noyabrya 2016. (accessed data: 28.07.2024). (In Russ.).
3. Egorova, M. and P`yankova S. (2010), "Dynamics of twin birth rates in Russia (1959–2008)", *Psixologicheskie issledovaniya*, vol. 3, no. 13, ISSN 2075-7999, doi:10.54359/ps.v3i13.893. (In Russ.).

4. Maly`x S.B. and Egorova M.S. (1998), *Osnovy` psixogenetiki* [Fundamentals of psychogenetics], M.: E`pidavr, 134 pp. (In Russ.).
5. Dzhajn, A. A. and Ross, K. Nandakumarr (2011), *Vvedenie v biometriyu* [Introduction to Biometrics], Springer Science Business Media, N`yu-Jork, , 312 pp. (In Russ.).
6. Bolotnikova, A., Demirel`, X. and Anbardzhafari G. (2017), "A real-time ensemble-based facial recognition system for NAO humanoids using a local binary scheme", *Analogovyy`j integral. Circ. Sig. rocess*, 92 (3), pp.1-9. (In Russ.).
7. Lyusi, Ya, Dzhunior, Dzh.Dzh., Gorbova, Dzh., Baro, X, E`skaler,a S., Demirel`, X., Allik, Dzh., Ozchinar, K. and Anbardzhafari G. (2017), "In the joint task of recognizing dominant and additional emotions using microemotional signs and evaluating the position of the head: databases. Automatic face and gesture recognition", *12-ya Mezhdunarodnaya konferenciya IEEE po (IEEE, Vashington, 2017)*, pp. 809-813. (In Russ.).
8. Anbardzhafari, G. (2013), "Face recognition using a color local binary pattern of mutually independent color channels", *EURASIP J. Process obrabotki izobrazhenij i video*, 1-6. (In Russ.).
9. Fillips, P., Flinn, P., Baue`r, K., Brejgge, R., Groter, P., Kuinn, G. and Pryuitt M. "Distinguishing identical twins using facial recognition", *Konferenciya IEEE. Autom. Raspoznavanie zhestov licza. Seminary` (IEEE, Santa-Barbara, 2011)*, pp. 185-192, doi:10.1109/FG.2011.5771395. (In Russ.).
10. Bledso (1966), "A model method in face recognition", *Panoramic Research Inc, Palo-Al`to*, vol. 15, p. 47. (In Russ.).
11. Terk, M. and Pentland, A. (1991), "Custom faces for recognition", *J. Cogn. Neurosci*, 3(1), pp.71-86. (In Russ.).
12. Li X-Y and Lin Z-X (2017), "Face recognition based on the HOG and Fast PCA algorithm", *Evro-kitajskaja konferenciia po intellektual`nomu analizu danny`x i prilozheniyam*, Springer, Cham. (In Russ.).
13. V`yas, R.A. and Shax, S.M. (2017), "Comparison of PCA and LDA methods for feature extraction based on face recognition with increased accuracy", *Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. J. Eng. Texnologiya*, 4(6), pp. 3332-3336. (In Russ.).
14. Lou, Syu, Teo, A. and Dzhej, S. (2017), "Multiple convolution descriptor for Gabor, PCA and ICA filters for face recognition", *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. (In Russ.).
15. Lipin, Yu. N. and Stororozhev, S.A. (2022), "Development of a program for modeling algorithms of facial recognition systems", *VIII Vseros. nauch.-prakt. konf. s mezhdunar. uchastiem "Iskusstvenny`j intellekt v reshenii aktual`ny`x social`ny`x i e`konomicheskix problem XXI veka"*. (In Russ.).
16. Lipin, Yu. N. and Stororozhev, S.A. (2021), "Development of an algorithm for human face recognition", *International Conference on Data Analytics for Business and Industry*. (In Russ.).
17. Lipin, Yu. N. (2023), "An Algorithm for Face Recognition Taking Into Account the Human Brain Peculiaritie", *BULLETIN OF PERM UNIVERSITY. MATHEMATICS. MECHANICS. COMPUTER SCIENCE*, (2 (61)), pp. 59-64, <https://doi.org/10.17072/1993-0550-2023-2-59-64>. (In Russ.).

Информация об авторе:

Ю. Н. Липин – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации и телемеханики, Пермский научный исследовательский политехнический университет (614990, Россия, г. Пермь, ул. Комсомольский проспект, 29).

Information about the author:

Yu. N. Lipin – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Automation and Telemechanics, Perm Scientific Research Polytechnic University (29, Komsomolsky Prospekt St., Perm, Russia, 614990).

КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Обзорная статья

УДК 004.89

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-64-77

<https://elibrary.ru/ajuxpc>



**Теоретические и практические аспекты построения
рекомендательных моделей: типология, архитектура
и направления проектирования**

**А. В. Соколов¹, И. А. Сычев², О. Л. Соколова³, Д. Б. Волкова⁴, И. П. Селетков⁵,
Д. Л. Яшичев⁶, Л. Н. Ясницкий⁷**

^{1,2,3,4,5,6,7} Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия

¹АНО ВО "Университет Иннополис", г. Иннополис, Россия

¹e-mail: asokolov@interprogram.ru

²e-mail: isychev@interprogram.ru

³e-mail: otoropova@interprogram.ru

⁴e-mail: dvolkova@interprogram.ru

⁵e-mail: seletkovip@yandex.ru

⁶e-mail: diashichev@interprogram.ru

⁷e-mail: yasn@psu.ru

Автор, ответственный за переписку: Андрей Валерьевич Соколов, e-mail: sokolov@interprogram.ru

Аннотация. Статья посвящена исследованию перспективных направлений проектирования рекомендательной системы для сервиса предзаказа и доставки RapiDo с акцентом на методы глубокого обучения и проблемы моделей на холодном старте. Авторами проанализированы существующие типы рекомендательных систем, их особенности в сервисах предзаказа и доставки и аспекты недостаточной эффективности современных моделей, связанной с отсутствием учета контекста заказа, индивидуальных предпочтений пользователей, неактуальностью используемых данных и отсутствием обратной связи. В статье рассмотрены основные типы рекомендательных систем, используемых крупнейшими российскими платформами доставки и сведения о пользователе, которые сервисы используют при построении своих рекомендательных моделей, а также выделены ключевые направления проектирования рекомендательной системы RapiDo, учитывая необходимость работы с ограниченными данными на ранних стадиях. Особое внимание авторы уделяют архитектурам рекомендательных моделей, основанным на методах глубокого обучения, рассматривая более десятка наиболее популярных вариантов. Анализируются перспективные подходы, включая адаптивное обучение на основе обратной связи пользователей, коллаборативную фильтрацию с использованием демографических данных и гибридные механизмы, комбинирующие различные методы для улучшения точности и стабильности предсказаний. Статья представляет первые результаты исследования и подчеркивает важность интеграции глубокого обучения в систему рекомендаций RapiDo для достижения высокой точности модели и решения проблемы недостатка данных на ранних стадиях.



Эта работа © 2024 Соколов А.В., Сычев И.А., Соколова О.Л., Волкова Д.Б., Селетков И.П., Яшичев Д.Л., Ясницкий Л.Н. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Ключевые слова: рекомендательные системы; системы рекомендаций; нейронные сети; рекуррентная нейронная сеть; алгоритмы рекомендательных систем; многослойный персептрон; сверточная нейронная сеть; графовая нейронная сеть

Для цитирования: Соколов А.В., Сычев И.А., Соколова О.Л., Волкова Д.Б., Селетков И.П., Яшичев Д.Л., Ясницкий Л.Н. Теоретические и практические аспекты построения рекомендательных моделей: типология, архитектура и направления проектирования // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 3(66). С. 64–77. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-64-77. <https://elibrary.ru/ajuxpc>.

Статья поступила в редакцию 22.07.2024; одобрена после рецензирования 26.08.2024; принята к публикации 06.10.2024.

COMPUTER SCIENCE

Review article

Theoretical and Practical Aspects Building Recommendation Models: Typology, Architecture and Directions Design

Andrey V. Sokolov¹, Ivan A. Sychev², Olga L. Sokolova³, Darya B. Volkova⁴,
Ilya P. Seletkov⁵, Dmitry L. Yashichev⁶, Leonid N. Yasnitsky⁷

^{1,2,3,4,5,6} Perm State University, Perm, Russia

¹Innopolis University, Innopolis, Russia

¹e-mail: asokolov@interprogram.ru

²e-mail: isychev@interprogram.ru

³e-mail: otoropova@interprogram.ru

⁴e-mail: dvolkova@interprogram.ru

⁵e-mail: seletkovip@yandex.ru

⁶e-mail: diashichev@interprogram.ru

⁷e-mail: yasn@psu.ru

Corresponding author: Andrey V. Sokolov, e-mail: asokolov@interprogram.ru

Abstract. The article is devoted to the study of promising areas of designing a recommender system for the pre-order and delivery service RapiDo with an emphasis on deep learning methods and problems of models at a cold start. The authors analyze existing types of recommender systems, their features in pre-order and delivery services and aspects of insufficient efficiency of modern models associated with the lack of consideration of the order context, individual user preferences, irrelevance of the data used and the lack of feedback. The article considers the main types of recommender systems used by the largest Russian delivery platforms and user information that services use when building their recommender models, and also highlights the key areas of designing the RapiDo recommender system, taking into account the need to work with limited data at early stages. The authors pay special attention to the architectures of recommender models based on deep learning methods, considering more than a dozen of the most popular options. Promising approaches are analyzed, including adaptive learning based on user feedback, collaborative filtering using demographic data, and hybrid mechanisms that combine different methods to improve the accuracy and stability of predictions. The paper presents the first results of the study and highlights the importance of integrating deep learning into the RapiDo recommendation system to achieve high model accuracy and address the problem of insufficient data at early stages.

Keywords: recommender systems; recommendation systems; neural networks; recurrent neural network; algorithms for recommender systems; multilayer perceptron; convolutional neural network; graph neural network

For citation: Sokolov, A.V., Sychev, I.A., Sokolova, O.L., Volkova, D.B., Seletkov I.P., Yashichev, D.L. and Yasnitsky, L.N. (2024), "Theoretical and Practical Aspects Building Recommendation Models:

Typology, Architecture and Directions Design", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 3(66), pp. 64-77. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-3-64-77. <https://elibrary.ru/ajuxpc>.

The article was submitted 22.07.2024; approved after reviewing 26.08.2024; accepted for publication 06.10.2024.

Введение

Сегодня популярность рекомендательных систем на цифровых платформах и сервисах растет. Эффективные системы рекомендаций, предоставляющие наиболее точные подборки, способны увеличивать вероятность положительного отклика и роста лояльности со стороны пользователей платформы. Рекомендательные системы оцениваются через различные метрики, каждая из которых фокусируется на определенном аспекте качества рекомендаций: полнота, новизна, разнообразие, serendipity [4]. Однако существуют проблемы, которые снижают эффективность рекомендательных систем. Они связаны с недостаточным учетом индивидуальных предпочтений пользователей, неактуальностью используемых данных, недостатком разнообразия предлагаемых рекомендаций, отсутствием учета контекста и обратной связи от пользователей, а также сложностью применяемых алгоритмов и скудностью данных о пользователях [1–3].

Целью работы является обзор и анализ существующих рекомендательных систем, включая изучение применяемых алгоритмов и выявление основных тенденций в их развитии. В рамках исследования планируется определить перспективные направления для проектирования рекомендательной системы, оптимизированной для сервиса предзаказа и доставки RapiDo.

Сервис RapiDo представляет собой платформу для онлайн-заказа товаров и услуг с последующей доставкой их до пользователя. Рекомендательная система в таком сервисе должна учитывать все доступные данные и непрерывно обучаться, предлагая не только рекомендации аналогичных товаров или услуг, но и прогнозируя виды позиций, которые могут заинтересовать пользователя. Кроме того, система должна быть адаптирована для пуска при холодном старте.

Для достижения поставленных целей авторами был проведен анализ типов рекомендательных систем с теоретической и практической точек зрения, а также исследованы существующие рекомендательные системы крупнейших российских платформ на основе нейронных сетей, рассмотрены фактические проблемы, с которыми сталкиваются такие сервисы и выделены направления проектирования рекомендательной системы сервиса RapiDo.

1. Обзор типов существующих рекомендательных систем

Проанализировав научные публикации российских авторов [5–7], можно заключить, что вопрос типологии рекомендательных систем освещен в российской литературе недостаточно. В свою очередь, количество зарубежных публикаций, посвященных различным предметным областям и теоретическим аспектам рекомендательных систем, существенно выше и продолжает расти [8–9]. Наиболее точное, на наш взгляд, описание типов рекомендательных систем представлено в работе *A survey on Modern Recommendation System Based on Big Data* [10]. В статье классифицируют рекомендательные системы в соответствии с четырьмя типами: контент-ориентированные, коллаборативные, основанные на знаниях и гибридные.

Контент-ориентированная рекомендательная система или система с фильтрацией содержимого (content-based filtering) сравнивает предпочтения пользователя по двум направлениям: как по профилю пользователя, рассматривая наборы его предпочтений, демографическую и иную информацию, так и по профилю объекта, где отражен набор его характерных свойств и особенностей, например, при подборе блюд необходимо учитывать направление кухни, категорию блюда, вкусовые характеристики, основной состав, калорийность, уровень заведения и иные особенности объекта [11].

Коллаборативная рекомендательная система или система рекомендаций на основе коллаборативной фильтрации (collaborative filtering) представляет собой алгоритм, который сопоставляет профиль пользователя с профилями других пользователей, определяя профили с аналогичными предпочтениями, и предполагает, что выявленные предпочтения могут быть полезными для данного пользователя.

Система рекомендаций, основанная на знаниях (Knowledge-Based Filtering), относится к типу рекомендательных систем, основанных на предварительных знаниях о предпочтениях пользователя, как в контексте контент-ориентированного подхода, так и коллаборативного. Однако такой подход требует наличия исторической информации о пользователе. Например, если компания имеет партнерские отношения с другими сервисами, которые собирают информацию о предпочтениях пользователей, при запуске нового сервиса она может использовать все доступные данные о конкретном пользователе для формирования для него персональных рекомендаций [12].

Гибридная рекомендательная система (Hybrid Filtering) может сочетать в себе различные типы систем, описанные выше, или использовать их комбинацию. На данный момент не существует универсального подхода или рекомендаций по комбинированию этих типов. Все зависит от конкретной задачи и желаемого результата.

С точки зрения авторов, рассмотренные типы рекомендательных систем не учитывают некоторые факторы, например, предпочтительные место и время. Так, если пользователь желает пообедать в кафе и его обеденный перерыв ограничен по времени, он с высокой долей вероятности выберет заведение, расположенное рядом с местом работы. Если тот же пользователь принял решение поужинать в заведении, то местоположение в данном случае уже будет менее значимым фактором, а большее внимание будет уделяться предпочтениям в отношении кухни заведения, его формата и специальных предложений. Скидки и акционные предложения от заведений, а также события, связанные с определенными датами, также не учитываются ни одним из рассмотренных выше типов систем.

Особенную сложность вызывает проектирование рабочих процессов системы на "холодном старте" когда стартовые данные о пользователе крайне скудны. Холодный старт представляет собой процесс первоначального построения и обучения систем, когда еще нет исторических данных о предпочтениях пользователей или информации о покупках, что является одной из ключевых проблем, с которыми сталкиваются разработчики систем искусственного интеллекта, особенно в контексте глубокого обучения. С точки зрения нейросетей, холодный старт представляет собой процесс инициализации весов и смещений нейронных сетей, который определяет начальную точку для обучения и влияет на его эффективность и стабильность.

Для оптимизации процесса холодного старта могут быть использованы следующие механизмы. Адаптивное обучение, где рекомендательная система может обучаться на основе обратной связи от пользователей, в режиме реального времени пользователь знакомит систему со своими предпочтениями и интересами, чтобы в последующем система

сразу рекомендовала то, что может ему понравиться. Коллаборативная фильтрация на основе демографических данных, которые пользователи указывают при регистрации (пол, дата рождения и местоположение). При этом выделяют два основных подхода к применению демографической информации о пользователе: экспертным образом, когда составляются стереотипы для различных демографических категорий самим экспертом, который определяет, что на холодном старте показывать каждой из категорий, и выявление демографических категорий методом кластеризации [13]. Гибридные механизмы, когда различные методы могут быть объединены для улучшения точности и стабильности предсказаний. Например, коллаборативную фильтрацию используют вместе с глубоким обучением.

Кроме того, авторы готовы протестировать гипотезу о возможном влиянии времени года, месяца рождения и знака зодиака пользователя на его предпочтения при выборе того или иного блюда на холодном старте системы. Исследователи в области астрологии неоднократно заявляли, что знак зодиака может оказывать влияние на вкусовые предпочтения человека, подчеркивая, что вкусовые предпочтения людей различных знаков зодиака могут быть объяснены планетарными влияниями и элементами, которые представлены в их гороскопе. Некоторые знаки преимущественно предпочитают классические и консервативные блюда, тогда как другие отдают предпочтение экзотической и необычной кухне. Эти данные будут учтены при проектировании механизма рекомендательной модели и при тестировании системы авторы будут наблюдать и анализировать поведение модели и ее результативность. Внедрение нейронных сетей, успешно использующих в своих механизмах данные о знаках зодиака пользователей [14], позволяет предположить, что тестирование подобной гипотезы не лишено смысла.

В целом, холодный старт является важной проблемой в рекомендательных системах, и для ее решения требуется комбинация различных методов. Важно также понимать, что эффективность каждого из этих решений зависит от конкретной ситуации и характеристик системы.

2. Актуальные модели рекомендаций сервисов предзаказа и доставки

С целью обзора рекомендательных алгоритмов авторы провели исследование актуальных моделей рекомендаций, применяемых в обозначенной предметной области. Так, в соответствии с регламентами использования рекомендательных систем, Яндекс Еда и Маркет Деливери используют следующие данные пользователя: исторический отчет о заказах, геопозицию, рейтинг доступных пунктов питания и время доставки из этих пунктов [15].

С точки зрения применения рекомендательных технологий, сервис быстрой доставки продуктов Самокат использует следующие данные о пользователе: товары в корзине пользователя, заказанные ранее товары и время заказа через сервис [16]. По результатам применения рекомендательных технологий сервис предлагает подборки товаров: блоки, состоящие из ранее заказанных пользователем товаров; товарные подборки с похожими, сопутствующими и дополнительными товарами; товарные подборки с персональными рекомендациями, маркетинговыми товарами и скидками.

Сервис доставки продуктов и товаров для дома СберМаркет использует рекомендации двух типов: персонализированные и не персонализированные [17]. К персонализированным рекомендациям можно отнести интересные пользователю товары, а к не персонализированным – предположительно интересные товары.

СберМаркет использует следующие данные о пользователе: уже приобретенные через сервис товары, просмотренные на сервисе товары.

После изучения представленных сервисами правил применения рекомендательных технологий, были определены типы используемых в данных сервисах рекомендательных систем, представленные в табл. 1.

Таблица 1. Типы рекомендательных систем

Сервис	Основанная на контенте	Коллаборативный тип	Основанная на знаниях	Гибридная
Яндекс Еда	+	+	-	+
Деливери Маркет	+	+	-	+
Самокат	+	-	-	-
Сбер Маркет	+	-	+	+

Таким образом, Яндекс Еда, Деливери Маркет и СберМаркет используют гибридные модели. Самокат в основном использует рекомендательную систему, основанную на контенте. Особенности подборки в крупной розничной сети "Лента" во многом схожи с рекомендационной моделью Самоката [18]. В табл. 2 представлены сведения о пользователе, которые используют сервисы при построении рекомендательных моделей.

Таблица 2. Используемые сведения о пользователе

	Яндекс Еда	Деливери Маркет	Самокат	Сбер Маркет
История заказов	+	+	+	+
Геопозиция	+	+	-	-
Рейтинг доступных заведений	+	+	-	-
Время доставки	+	+	-	-
Время заказа	-	-	+	-
Товары в корзине	-	-	+	-
Просмотренные товары	-	-	-	+
Товары в избранном	-	-	-	-
Поисковые запросы пользователя	-	-	-	-
Модель устройства	-	-	-	-
Применение фильтров	-	-	-	-
Заполненные анкеты	-	-	-	-
Ответы на вопросы	-	-	-	-

3. Обзор архитектур рекомендательных систем

Для построения рекомендательных систем, основанных на глубоком обучении, применяются различные подходы. Гибкость глубоких нейронных сетей позволяет объединить несколько блоков вместе, чтобы дополнить друг друга и сформировать более мощную гибридную модель. Далее рассмотрим некоторые популярные архитектуры рекомендационных моделей.

Модель Wide and Deep [19] состоит из двух компонентов: "Широкого" и "Глубокого". "Широкий" компонент предназначен для обработки большого количества признаков и событий, а "Глубокий" – для обработки сложных взаимосвязей между признаками. Оба компонента используют нейронные сети для обучения и обработки данных. "Широкий" компонент использует большое количество простых нейронов для обработки каждого признака отдельно, в то время как "Глубокий" компонент использует меньшее количество сложных нейронов для анализа взаимосвязей между различными признаками. Общая идея заключается в том, что нейронная сеть, теоретически, может усвоить любую функциональную зависимость. Это значит, что зависимость, которую модель коллаборативной фильтрации выражает матричной факторизацией, может быть усвоена нейронной сетью. NCF предлагает простой слой представления сразу для пользователей и объектов (похожий на классическую факторизацию матриц), за которым следует простая нейронная сеть вроде многослойного перцептрона, которая должна усвоить зависимость между представлениями пользователя и объекта, аналогичную произведению факторизованных матриц [20].

DeepFM [21] состоит из машины факторизации для рекомендаций и глубокого обучения для изучения функций, сочетает в себе их возможности. Модель способна автоматически извлекать сложные взаимодействия между признаками, а также учитывать взаимодействия различных порядков, что позволяет учитывать как линейные, так и нелинейные зависимости между признаками. Обе части модели используют один и тот же входной слой представления (embedding). Необработанные признаки трансформируются, чтобы закодировать категориальные признаки унитарным кодом (one-hot encoding). С математической точки зрения, входные данные DeepFM представляют собой данные из m полей, состоящие из пар (u, i) , которые являются идентификаторами и характеристиками пользователя и элемента, а также двоичной метки y , которая указывает поведение пользователя. В компоненте машины факторизации, помимо линейных взаимодействий (1-го порядка) между объектами, моделируются попарные взаимодействия объектов (2-го порядка) как внутреннее произведение соответствующих скрытых векторов признаков. Многослойный перцептрон использует нелинейные активации и глубокую структуру для моделирования взаимодействий высокого порядка. Итоговое предсказание (показатель кликабельности), выдаваемое последним словом нейронной сети, определяется как сумма предсказаний матричной факторизации и нейронной сети, пропущенная через сигмоидную функцию активации.

Extreme Deep Factorization Machine (xDeepFM) – машина экстремальной глубокой факторизации [22], представляет собой новую модель, которая объединяет сжатую сеть взаимодействия (CIN) с классическим DNN. CIN генерирует взаимодействия объектов явно и на векторном уровне, разделяя некоторые функциональные возможности со сверточными нейронными сетями (CNN) и рекуррентными нейронными сетями (RNN).

Эта комбинация позволяет xDeepFM явно изучать определенные взаимодействия объектов ограниченной степени, а также неявно изучать произвольные взаимодействия объектов низкого и высокого порядка.

Neural Factorization Machines – машины нейронной факторизации для разреженного прогнозирующего анализа [23]. Эта модель объединяет эффективность машин линейной факторизации с высокой способностью представления нелинейных нейронных сетей для разреженного прогнозирующего анализа. Ключом к его архитектуре является операция, называемая *объединением билинейных взаимодействий*, которая позволяет модели нейронной сети изучать более информативные взаимодействия объектов на более низком уровне. Благодаря укладке нелинейных слоев поверх слоя с билинейным взаимодействием авторы смогли углубить машину мелкой линейной факторизации, эффективно моделируя взаимодействия объектов более высокого порядка и нелинейные взаимодействия объектов, чтобы улучшить выразительность машины факторизации. В отличие от традиционных методов глубокого обучения, которые просто объединяют или усредняют векторы встраивания на низком уровне, это использование объединения с билинейным взаимодействием кодирует более информативные взаимодействия объектов, значительно облегчая изучение значимой информации на следующих "глубоких" уровнях.

Рекомендационная модель глубокого обучения (Deep Learning Recommendation Model, DLRM) [24] работает следующим образом: каждый категориальный признак представлен вектором представления, а постоянные признаки обрабатываются многослойным перцептроном таким образом, чтобы на выходе получались векторы такого же размера, как и векторы представления. На второй стадии рассчитываются взаимные произведения всех векторов представления и выходных векторов перцептрона. После этого произведения соединяются вместе и передаются в другой многослойный перцептрон, а в конце концов – в функцию сигмоиды, выдающую вероятность.

Neural Graph Collaborative Filtering (NGCF) [25] – это вариант Graph Convolutional Network (GCN) [26], который использует взаимодействия пользователя и элемента для изучения коллаборативного сигнала, который выявляет поведенческое сходство между пользователями, для улучшения рекомендаций. Для оценки эффективности модели использовались рейтинговые прогнозы на основе наборов данных Yelp 2018 и Amazon-book.

Многокомпонентная сверточная коллаборативная фильтрация графов (MCCF) [27] является одним из подходов, который изучает скрытую мотивацию покупки с помощью механизма привлечения внимания (Graph Attention Networks [28]) и сочетает ее с функциями явного взаимодействия пользователя с товаром для получения лучших рекомендаций. Авторы оценили эффективность MCCF на наборах данных MovieLens, Amazon Product Recommendation и Yelp.

DiffNet++ [29] модель, которая лучше изучает пользовательские вложения на основе двух отдельных графиков, с сигналами скрытого интереса пользователя, поступающими из графа пользователь-элемент, и сигналами влияния пользователя, поступающими из графа пользователь-пользователь. Он был протестирован на Yelp, Epinions и Dianping.

Системы рекомендаций на основе сессий (Session-based Recommender Systems) анализируют краткосрочные предпочтения пользователей и динамику их изменения [30]. Каждая сессия состоит из нескольких взаимодействий пользователя с элементами системы, которые происходят совместно в течение непрерывного периода времени. Рассматривая каждую сессию в качестве базовой единицы входных данных, SBRS может выявлять

как краткосрочные предпочтения пользователя из его последних сессий, так и динамику его предпочтений, отражающую изменение его предпочтений от сессии к сессии, и использовать данную информацию для генерирования более точных и своевременных рекомендаций. Решаемые SBRS задачи по генерированию рекомендаций можно условно разделить на три категории: рекомендация следующего взаимодействия в текущей сессии; рекомендация оставшейся части сессии (т.е. полный список оставшихся взаимодействий для завершения текущей сессии); рекомендация по содержанию следующей сессии.

Входные данные SBRS называют контекстом сессии. SBRS генерирует рекомендации в зависимости от контекста текущей сессии. В зависимости от категории решаемой задачи в качестве входных данных может использоваться следующая информация: данные, известные о текущей сессии – представляют собой список взаимодействий, произошедший в сессии к текущему моменту времени; данные, известные о прошлых сессиях – исторические данные; комбинация пунктов 1 и 2.

В основном в SBRS используются два типа подходов на основе анализа шаблонов/правил: анализ частых шаблонов, заключающийся в выявлении внутри неупорядоченной сессии часто встречающихся шаблонов или ассоциативных правил для взаимодействий и генерирования последующих рекомендаций на основе данной информации; анализ шаблонов последовательностей, заключающийся в выявлении в упорядоченных сессиях шаблонных последовательностей в последовательности сессий или взаимодействий и генерировании последующих рекомендаций на основе данной информации.

В SBRS используют следующие базовые типы архитектуры нейронной сети: рекуррентную нейронную сеть (Recurrent Neural Networks, RNN); многослойную сеть перцептронов (Multi-Layer Perceptron networks, MLP); сверточную нейронную сеть (Convolutional Neural Networks, CNN); графовую нейронную сеть (Graph Neural Networks, GNN).

4. Проектирование системы рекомендаций

С учетом необходимости учитывать краткосрочные предпочтения для рекомендации товаров был сделан выбор в пользу систем рекомендаций на основе сессий.

Доступны следующие входные данные: информация о пользователях: дата рождения, текущее местоположение; информация о товарах: категория товара, цена, доступность самовывоза, время приготовления, идентификатор заведения; информация о заведениях: адрес, время работы, оценки пользователей, тип заведения; информация о местоположении и текущем времени: на основе местоположения рассчитывается расстояние до заведения и время доставки или проезда, текущее время может помочь рекомендовать товары с учетом потребностей пользователя в различное время суток; информация о взаимодействии пользователя с товарами: оценка товара пользователем, просмотр, добавление в корзину, заказ товара пользователем; информация о взаимодействии пользователя с заведением: оценка заведения пользователем, просмотр.

Заключение

В данной статье были рассмотрены теоретические и практические аспекты построения рекомендательных моделей, их типология, архитектура и направления проектирования. Авторы провели обзор существующих типов рекомендательных систем и актуальных моделей рекомендаций сервисов предварительного заказа и доставки.

Также был представлен обзор архитектур рекомендательных систем и освещены основные этапы проектирования системы рекомендаций. Результаты исследования показывают, что эффективное проектирование рекомендательной системы требует учета множества факторов, таких как тип данных, цель рекомендации, архитектура системы и пользовательские предпочтения.

Авторы выделили основные направления в проектировании архитектуры рекомендательной системы, которые могут быть применимы для интеграции на платформы предварительного заказа и доставки, такие как использование коллаборативной фильтрации, анализ поведения пользователей, применение машинного обучения и построение семантических сетей.

Однако, несмотря на то что рекомендательные системы могут существенно улучшить пользовательский опыт и повысить конверсию на платформах предварительного заказа, авторы отмечают, что проблема эффективного решения задачи рекомендации товаров и услуг все еще остается актуальной, и требуется проведение дальнейших исследований для усовершенствования существующих моделей и разработки новых подходов.

Список источников

1. Yuanzhe Peng. A Survey on Modern Recommendation System Based on Big Data // Cornell University. 2022.
2. Сейдаметова З.С. Системы рекомендаций в электронной коммерции / З.С. Сейдаметова // Ученые записи Крымского инженерно-педагогического университета. 2018. № 3(61). С. 121–127. Меньшикова Н.В., Портнов И.В., Николаев И.Е. / Обзор рекомендательных систем и возможности учета контекста при формировании индивидуальных рекомендаций // Academy. 2016. № 6(9). С. 22.
3. Меньшикова Н.В., Портнов И.В., Николаев И.Е. Обзор рекомендательных систем и возможности учета контекста при формировании индивидуальных рекомендаций // Academy. 2016. № 6(9). С. 22.
4. Хорошие свойства рекомендательных систем // Школа анализа данных. URL: <https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/horoshie-svojstva-rekomendatelnnyh-sistem> (дата обращения: 26.05.2024).
5. Овечкин А.В. (студент). Проектирование рекомендательной системы на основе нейронной сети. НИТУ "МИСИС". Россия, г. Москва. Научно-образовательный журнал для студентов и преподавателей "StudNet" № 4/2022.
6. Парнев А.В. Использование нейронных сетей в рекомендательных системах. Российский технологический университет // Инновации. Наука. Образование. 2021. № 35. С. 456-465.
7. Карпов Н. (доцент каф. ПМИ, НИУ ВШЭ, Нижний Новгород). Построение рекомендательных систем с использованием нейронных сетей. New Tang Dynasty Television (ntd.tv). Нью Йорк, США. Научно-учебная группа "Анализ мультимедийных данных" НИУ ВШЭ, Нижний Новгород.
8. Article Neural Collaborative Filtering with Ontologies for Integrated Recommendation Systems, Sensors MDPI, Rana Alaa El-deen Ahmed, Manuel Fernández-Veiga and Mariam Gawich.
9. Review A Survey of Recommendation Systems: Recommendation Models, Techniques, and Application Fields, Electronics MDPI, Hyeyoung Ko, Suyeon Lee, Yoonseo Park and Anna Choi.

10. A Survey on Modern Recommendation System Based on Big Data, Yuanzhe Peng, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Miami.
11. *Эволюция рекомендаций ресторанов в Delivery Club*. Ч. 1 // Хабр: [сайт] - 2018. URL: <https://habr.com/ru/companies/deliveryclub/articles/656505/> (дата обращения: 18.11.2023).
12. Salunke, Tanmayee & Nichite, Unnati. (2022). Recommender Systems in E-commerce. 10.13140/RG.2.2.10194.43202.
13. *Рекомендательная система: введение в проблему холодного старта* // Хабр: [сайт] 2013. RL: <https://habr.com/ru/companies/surfbird/articles/168733/> (дата обращения: 18.11.2023).
14. Ясницкий Л.Н., Петров А.М., Сичинава З.И. Сравнительный анализ алгоритмов нейросетевого детектирования лжи // Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки. 2010. № 1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/sravnitelnyy-analiz-algoritmov-neyrosetevogo-detektirovaniya-lzhi> (дата обращения: 20.11.2023).
15. Яндекс Правовые Документы: официальный сайт. URL: https://yandex.ru/legal/recommendations/#index__eats (дата обращения: 20.11.2023).
16. *Самокат*. Правила применения рекомендательных технологий: официальный сайт. URL: https://samokat.ru/static/legal/recommendation_technologies_policy.html (дата обращения: 20.11.2023).
17. *Сбер Маркет*. Правила применения рекомендательных технологий: официальный сайт. URL: <https://sbermarket.ru/sp/recommendations> (дата обращения 21.11.2023).
18. *Лента*. Правила применения рекомендательных технологий: официальный сайт. URL: <https://lenta.com/pokupatelyam/recommendation-technologies/> (дата обращения 21.11.2023).
19. Heng-Tze Cheng, Levent Koc, Jeremiah Harmsen, Tal Shaked, Tushar Chandra, Hrishi Aradhye, Glen Anderson, Greg Corrado, Wei Chai, Mustafa Ispir, Rohan Anil, Zakaria Haque, Lichan Hong, Vihan Jain, Xiaobing Liu, and Hemal Shah. Wide and Deep Learning for Recommender Systems. June 2016.
20. Xiangnan He, Lizi Liao, Hanwang Zhang, Liqiang Nie, Xia Hu, and Tat-Seng Chua. Neural Collaborative Filtering. August 2017.
21. Huifeng Guo, Ruiming Tang, Yunming Ye, Zhenguo Li, and Xiuqiang He. DeepFM: A Factorization-Machine based Neural Network for CTR Prediction. March 2017.
22. Jianxun Lian, Xiaohuan Zhou, Fuzheng Zhang, Zhongxia Chen, Xing Xie, and Guangzhong Sun. DeepFM: Combining Explicit and Implicit Feature Interactions for Recommender Systems. May 2018.
23. He, Xiangnan & Chua, Tat-Seng. Neural Factorization Machines for Sparse Predictive Analytics. 2017.
24. Naumov, Maxim & Mudigere, Dheevatsa & Shi, Hao-Jun & Huang, Jianyu & Sundaraman, Narayanan & Park, Jongsoo & Wang, Xiaodong & Gupta, Udit & Wu, Carole-Jean & Azzolini, Alisson & Dzhulgakov, Dmytro & Mallevich, Andrey & Cherniavskii, Ilia & Lu, Yinghai & Krishnamoorthi, Raghuraman & Yu, Ansha & Kondratenko, Volodymyr & Pereira, Stephanie & Chen, Xianjie & Smelyanskiy, Misha. Deep Learning Recommendation Model for Personalization and Recommendation Systems. 2019.
25. Wang, Xiang & He, Xiangnan & Wang, Meng & Feng, Fuli & Chua, Tat-Seng. Neural Graph Collaborative Filtering. 2019.

26. Kipf, Thomas & Welling, Max. Semi-Supervised Classification with Graph Convolutional Networks. 2016.
27. Xiao Wang, Ruijia Wang, Chuan Shi, Guojie Song, Qingyong Li Multi-Component Graph Convolutional Collaborative Filtering. 2019.
28. Veličković, Petar & Cucurull, Guillem & Casanova, Arantxa & Romero, Adriana & Lio, Pietro & Bengio, Y. Graph Attention Networks. 2017.
29. Wu, Le & Li, Junwei & Sun, Peijie & Hong, Richang & Ge, Yong & Wang, Meng. DiffNet++: A Neural Influence and Interest Diffusion Network for Social Recommendation. IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering. 2020. P. 1–1. 10.1109/TKDE.2020.3048414.
30. Якунов Д.Р., Намиот Д.Е. Рекомендательные системы на основе сессий – модели и задачи // International Journal of Open Information Technologies. 2022. № 7. С. 128–152.

References

1. Machine Learning Tutorial (2021), "Good properties of recommender systems", available at: <https://education.yandex.ru/handbook/ml/article/horoshie-svoystva-rekomendatelnyh-sistem> (Accessed: 26 May 2024).
2. Yuanzhe, P.A. (2022), "Survey on Modern Recommendation System Based on Big Data", Cornell University.
3. Seidametova, Z.S. (2018), "Recommendation systems in e-commerce", *Records of the Crimean Engineering and Pedagogical University*, vol. 3, pp. 121-127.
4. Menshikova, N.V., Portnov, I.V. and Nikolaev, I.E. (2016), "Review of recommender systems and the possibility of taking into account the context when forming individual recommendations", *Academy*, vol. 6, pp. 22.
5. Ovechkin, A.V. (2022), "Designing a recommendation system based on a neural network", *Scientific and educational journal for students and teachers StudNet*, vol. 4.
6. Parnev, A.V. (2021), "Using neural networks in recommendation systems", *Innovation. Science. Education*, vol. 35, pp. 456-465.
7. Karpov, N. (2018), "Building Recommender Systems Using Neural Networks", Research and Educational Group "Multimedia Data Analysis" of the National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod, RU.
8. Alaa El-Deen Ahmed, R., Fernández-Veiga, M. and Gawich, M. (2022), "Neural Collaborative Filtering with Ontologies for Integrated Recommendation Systems", *Sensors MDPI*.
9. Ko, H.; Lee, S.; Park, Y.; Choi, A. (2022), "Review A Survey of Recommendation Systems: Recommendation Models, Techniques, and Application Fields", *Electronics*, vol. 11, pp. 141.
10. Archen, S., Yuanzhe, P. (2024), "A survey on modern recommendation system based on big data", Department of Electrical and Computer Engineering, University of Miami.
11. Habr, "The evolution of restaurant recommendations in Delivery Club. Part 1", available at: <https://habr.com/ru/companies/deliveryclub/articles/656505/> (Accessed: 18 November 2023).
12. Salunke, T. and Nichite, U. (2022), "Recommender Systems in E-commerce".
13. Habr, "Recommender System: Introduction to the Cold Start Problem", available at: <https://habr.com/ru/companies/surfbird/articles/168733/> (Accessed: 18 November 2023).

14. Yasnitsky, L.N., Petrov, A.M. and Sichinava, Z.I. (2010), "Comparative analysis of neural network lie detection algorithms", *News of universities. Volga region. Technical sciences*, pp. 64.
15. Yandex Legal Documents, "Rules for the use of recommendation technologies", available at: https://yandex.ru/legal/recommendations/#index__eats (Accessed: 20 November 2023).
16. Samokat, "Rules for the use of recommendation technologies", available at: https://samokat.ru/static/legal/recommendation_technologies_policy.html (Accessed: 20 November 2023).
17. SberMarket, "Rules for the use of recommendation technologies", available at: <https://sbermarket.ru/sp/recommendations> (Accessed: 20 November 2023).
18. Lenta, "Rules for the use of recommendation technologies", available at: <https://lenta.com/pokupatelyam/recommendation-technologies/> (Accessed: 21 November 2023).
19. Heng-Tz, C., Levent, K., Jeremiah, H., Tal., Tushar, C., Hrishi, A., Glen, A., Greg, C., Wei, C., Mustafa, I., Rohan, A., Zakaria, H., Lichan, H., Vihan, J., Xiaobing, L. and Hemal S. (2016), "Wide and Deep Learning for Recommender Systems".
20. Xiangnan, H., Lizi, L., Hanwang, Z., Liqiang, N., Xia, H. and Tat-Seng, C. (2017), "Neural Collaborative Filtering".
21. Huifeng, G., Ruiming, T., Yunming, Y., Zhenguo, L. and Xiuqiang, H. (2017), "DeepFM: A Factorization-Machine based Neural Network for CTR Prediction".
22. Jianxun, L., Xiaohuan, Z., Fuzheng, Z., Zhongxia, C., Xing, X. and Guangzhong, S. (2018), "DeepFM: Combining Explicit and Implicit Feature Interactions for Recommender Systems".
23. Xiangnan, H. and Tat-Seng, C. (2017), "Neural Factorization Machines for Sparse Predictive Analytics".
24. Naumov, M. and Mudigere, D., Shi, Hao-Jun, Huang, Jianyu, Sundaraman, Narayanan, Park, Jongsoo, Wang, Xiaodong, Gupta, Udit, Wu, Carole-Jean, Azzolini, Alisson, Dzhulgakov, Dmytro, Mallevich, Andrey, Cherniavskii, Ilia, Lu, Yinghai, Krishnamoorthi, Raghuraman, Yu, Ansha, Kondratenko, Volodymyr, Pereira, Stephanie, Chen, Xianjie, Smelyanskiy, M. (2019), "Deep Learning Recommendation Model for Personalization and Recommendation Systems".
25. Xiang Wang, Xiangnan He, Meng Wang, Fuli Feng and Tat-Seng Chua (2019), "Neural Graph Collaborative Filtering".
26. Kipf, T. and Welling, M. (2016), "Semi-Supervised Classification with Graph Convolutional Networks".
27. Xiao Wang, Ruijia Wang, Chuan Shi, Guojie Song and Qingyong Li (2019), "Multi-Component Graph Convolutional Collaborative Filtering".
28. Veličković, P., Cucurull, G., Casanova, A., Romero, A., Lio, P. and Bengio, Y. (2017), "Graph Attention Networks".
29. Le Wu, Junwei Li, Peijie Sun, Richang Hong, Yong Ge and Meng Wang (2020), DiffNet++: A Neural Influence and Interest Diffusion Network for Social Recommendation, *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, pp. 1.
30. Yakupov, D.R. and Namiot, D.E. (2022), "Session-based recommendation systems – models and tasks", *International Journal of Open Information Technologies*, vol. 7, pp. 128-152.

Информация об авторах:

Андрей Валерьевич Соколов – магистрант 2-го года обучения кафедры прикладной математики и информатики Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева,15); аспирант АНО ВО "Университет Иннополис" (420500, Россия, г. Иннополис, ул. Университетская, 1);

Иван Андреевич Сычев – магистрант 2-го года обучения кафедры прикладной математики и информатики Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева,15);

Ольга Леонидовна Соколова – магистрант 2-го года обучения кафедры прикладной математики и информатики Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева,15);

Дарья Борисовна Волкова – студентка 4 курса кафедры финансов кредита и биржевого дела Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева,15);

Илья Павлович Селетков – кандидат технических наук, доцент физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева,15), AuthorID: 1213661;

Дмитрий Львович Яшичев – магистрант 2-го года обучения кафедры информационных технологий Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева,15);

Леонид Нахимович Ясницкий – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева,15), AuthorID: 3277.

Information about the authors:

A. V. Sokolov is a 2nd year undergraduate student at the Department of Applied Mathematics and Computer Science of the Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068);

I. A. Sychev is a 2nd year undergraduate student at the Department of Applied Mathematics and Computer Science of Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068);

O. L. Sokolova is a 2nd year undergraduate student at the Department of Applied Mathematics and Computer Science of the Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068);

D. B. Volkova is a 4th year student of the Department of Finance, Credit and Stock Exchange at Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068);

I. P. Seletkov – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Institute of Physics and Mathematics of the Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID: 1213661;

D. L. Yashichev – 2nd year master's student at the Department of Information Technology, Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068);

L. N. Yasnitsky – Dr. Tech. Sciences, professor, professor of the Department of Information Technologies, Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID: 3277.

Научный периодический журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" зарегистрирован в 2007 г. как самостоятельное издание, являющееся продолжением серии журнала "Вестник Пермского университета", издаваемого с 1994 г. В каждом номере научного журнала автору разрешается опубликование в любом разделе не более одной статьи, в том числе в соавторстве.

Статьи, оформленные в соответствии с нижеизложенными правилами, должны быть отправлены через **личный кабинет автора на сайте журнала**. Статьи отправляются в двух форматах: текстовый документ и pdf-файл без данных об авторе (для организации слепого рецензирования). Вместе с рукописью отправляются контактные данные авторов в свободной форме в текстовом документе (ФИО, должность, место работы с указанием полного адреса, e-mail, номер телефона) и **экспертное заключение о возможности открытого опубликования**. Для публикации статьи необходимо заполнить и подписать **договор**.

Аннотация статьи (на русском и английском языках) должна содержать основные краткие сведения: описание проблемы, включая цели и задачи исследования; методы исследования с указанием новизны, если имеется; полученные результаты и выводы. Объем аннотации примерно 250 слов.

Текст статьи должен содержать разделы: Введение, Постановка задачи, Методы исследования, Результаты, Обсуждения, Заключение, **Благодарности** для русскоязычной статьи; Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgements для англоязычной статьи. Объем рукописи – не менее 6 страниц машинописного текста.

Оформление. Текст статьи необходимо оформить в редакторе **Word**. Формат листа, используемый для написания статьи – А4. Размеры верхнего и нижнего полей – 2.6 см, правого и левого – 2.5 см. Расстояние до верхнего и нижнего колонтитулов 1.25 см. Шрифтом Times New Roman Cyr, размер – 12 пт, межстрочный интервал – множитель 1.1. Подписи к рисункам и таблицам набираются курсивом, в конце заголовков и ячеек таблицы точка не ставится. Формулы набираются в редакторе формул.

Структура статьи

Вид статьи (научная, обзорная или др.).

УДК

DOI:

Название раздела (математика, механика, компьютерные науки и информатика).

Название статьи на русском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

Ф.И.О. автора (-ов) полностью (Times New Roman – 12 пт, полужирный).

Место работы (с указанием подразделения), город и страна (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

Аннотация на русском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Ключевые слова на русском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

Информация для цитирования (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Благодарности (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Даты поступления, одобрения и принятия рукописи (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Название статьи на английском языке (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

На английском языке Ф.И.О. автора (-ов) полностью (шрифт Times New Roman – 12 пт, полужирный).

Место работы (с указанием подразделения), город и страна на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

Аннотация на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Ключевые слова на английском языке: 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

Информация для цитирования на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Благодарности на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Даты поступления, одобрения и принятия рукописи на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт).

Основной текст статьи набирается в ширину страницы, абзацный отступ основного текста – 1.0 см (задается автоматически, не пробелами). Другие отступы не допускаются. Выравнивание текста по ширине.

Список источников оформляется в едином формате, в соответствии с ГОСТ Р 7.0.100–2018, без использования тире. Если в списке литературы используется источник из электронного ресурса, необходимо указать дату обращения. Ссылка на литературный источник указывается в тексте статьи в квадратных скобках после упоминания цитаты. Список использованных литературных источников необходимо представить на русском и английском языках (**References**). **Список литературы на латинице**, называемый References, готовится отдельно от Списка литературы и размещается сразу за указанным списком. Ссылки на зарубежные источники необходимо повторять в Списке литературы и References. В References недопустимо использовать российские ГОСТы. Необходимо следовать требованиям международных стандартов. Инструкция по оформлению списка литературы в латинице – References, стандарт "Harvard" находится по ссылке http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-hurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc.

ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ И ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Все рукописи проходят двойное слепое рецензирование двумя специалистами в научной области исследования. При возникновении спорной ситуации назначается третий рецензент. Окончательное решение о публикации рукописи принимает главный редактор журнала.

Датой поступления статьи считается день ее отправки через личный кабинет на сайте журнала или по электронной почте журнала (главного редактора). Рукописи рассматриваются в порядке их поступления в течение одного месяца в зависимости от сложности ситуации и объема работы. Редакция оставляет за собой право без согласования с автором проводить литературную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла. Одобрённые статьи публикуются бесплатно. Полнотекстовая версия каждой рукописи выставляется на сайте журнала и в системе РИНЦ (e-library).

Scientific periodical journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" is published since 1994 in the series of the journal "Bulletin of Perm University". Then it was registered as an independent publication in 2007.

An author is allowed to publish no more than one article (also as co-author) in any section for each issue of the journal.

Article's structure should be accordant with the rules below and should be sent through the **author's personal account on the journal's website**. Articles should be sent in two formats: a text document and a pdf-file without information about the author(s) (for review). Authors contact data (name, position and place of work with address, e-mail, phone number in a text document) and **an expert letter on the open publication possibility** should be sent with the manuscript. Author(s) must make and sign **an agreement**.

Abstract (in Russian and English) should contain main information of research: a problem including the goals and objectives of the study; research methods with novelty indication, if any; significant results and findings. The abstract size is approximately 250 words.

Text should contain sections: Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgments. The manuscript size is at least 6 typewritten pages.

An article text must be formatted in the editor Word. The sheet format is A4. The top and bottom margins are 2.6 cm, the right and left margins are 2.5 cm. The distances to the header and footer are 1.25 cm. Times New Roman Cyr font, size – 12 pt, single spacing. Legends for figures and tables are typed in italics style. Formulas are typed in the Equation editor.

The structure of the article

Article's type

UDC

TITLE in Russian (Times New Roman font – 16 pt, bold).

Name: author (s) name in full (Times New Roman font – 12 pt).

Place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**

Abstract in Russian (Times New Roman font – 11 pt).

Keywords in Russian: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt, italic).

Information for citation in English (Times New Roman font – 11 pt, italic).

Acknowledgments in English (Times New Roman font – 11 pt, italic).

Submitted, approved, accepted dates of receipt in English (Times New Roman font – 11 pt, italic).

TITLE in English (Times New Roman font – 16 pt, bold).

In English author (s) name in full, place of work (with departments), city, country (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**.

Abstract in English (Times New Roman font – 11 pt).

Keywords in English: 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt).

Information for citation in English (Times New Roman font – 11 pt).

Acknowledgments in English (Times New Roman font – 11 pt).

Submitted, approved, accepted dates of receipt in English (Times New Roman font – 11 pt).

The article text is typed the paragraph indent is 1.0 cm (set automatically, not spaces). No other indents are allowed. Justify the text in width (Times New Roman font – 16 pt)..

References are formed in a single format with using GOST R 7.0.100–2018 without a dash. If a source from an electronic resource is used, the author should indicate the request date. To indicate a source in text author uses square brackets after the quotation mention. References must be submitted **in Russian and English**.

The References list in Latin, called References, is prepared separately from the References List in Russian and placed below. Foreign sources references should be repeated in the References Lists in Russian and English. It is inadmissible to use Russian GOSTs in References. It is necessary to follow the requirements of international standards. Instructions on the References in Latin script design – References, Harvard standard can be found at http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc

REVIEW AND PUBLICATION OF ARTICLES

All manuscripts are double-blind peer-reviewed by two research scientists. If a disputable situation arises, a third reviewer is appointed. The final decision on the manuscript publication is made by the editor-in-chief of the journal.

The receipt date of the article is the day of its submission through the personal account on the journal's website or by e-mail of the journal (or editor-in-chief). Manuscripts are reviewed in the order they are received within one month, review period may be changed depending on a situation complexity and a works amount. The journal editors can to edit the article text without basic meaning change.

Approved articles are published free. The full-text version of each manuscript is posted on the journal's website and in the RSCI system (e-library).

Научное издание

ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Математика. Механика. Информатика

Выпуск 3 (66)

2024

Адрес учредителя и издателя
614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ
Адрес редакции
614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ
Физико-математический институт
e-mail: vestnik_mmi@psu.ru

Редактор Е.В. Шумилова
Корректор В.Е. Пирожкова
Компьютерная верстка: Г.И. Кушнина

Подписано в печать 14.10.2024. Выход в свет 16.10.2024.
Формат 60 × 84/8. Усл. печ. л. 9,3. Тираж 500 экз. Заказ 127

Пермский государственный национальный исследовательский университет
Управление издательской деятельности

614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15. Тел. (342) 239-66-36

Отпечатано в типографии ПГНИУ. Тел. (342) 239-65-47

Подписной индекс журнала
«Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика»
в онлайн-каталоге «Урал-Пресс» – 015010
https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase_id=396133

Распространяется бесплатно и по подписке