

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 624.074:531.391.3

DOI: 10.22227/1997-0935.2024.3.377-386

## Формулы для двухсторонней оценки основной частоты колебаний решетчатой фермы

**Михаил Николаевич Кирсанов***Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»); г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

**Введение.** Одной из ключевых проблем колебаний строительных конструкций является определение основной частоты собственных колебаний. Аналитические решения здесь редки и, как правило, базируются на приближенных оценках первой частоты сверху (метод Рэлея) или снизу (оценка Донкерлея). Чаще всего задача о собственных колебаниях решается численно с помощью метода конечных элементов с применением специализированных пакетов. Цель исследования — вывести аналитические оценки зависимости первой частоты колебаний фермы решетчатого типа от числа панелей, геометрических характеристик конструкции и параметров упругих свойств материала.

**Материалы и методы.** Плоская статически определимая решетка опирается основанием на стойки. Угловая опора — неподвижный шарнир. Расчет усилий в элементах конструкции производится методом вырезания узлов с использованием стандартных операторов системы символьной математики Maple. Жесткость фермы находится по формуле Максвелла – Мора. Масса фермы распределена равномерно по ее узлам. Колебания масс происходят по вертикали. Обобщением серии решений для ферм с последовательно растущим порядком на произвольное число панелей искомые формулы выводятся методом индукции.

**Результаты.** Замечен случай кинематической изменяемости предложенной схемы фермы. Получены формулы для первой частоты методом Донкерлея и Рэлея. Два аналитических решения сравниваются с численным, полученным для всего спектра частот. Обнаружены спектральные константы и области резонансной безопасности в спектрах семейства регулярных ферм.

**Выводы.** Двухсторонний метод оценки первой частоты применим для решения задач о регулярных конструкциях, где конечная формула включает в качестве параметра порядок регулярности. Для рассматриваемой конструкции погрешность метода Рэлея сопоставима с погрешностью метода Донкерлея.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** кинематическая изменяемость, плоская ферма, аналитическое решение, собственная частота, Maple, метод Донкерлея, метод Рэлея, спектральные константы

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РНФ (проект № 22-21-00473).

**ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ:** Кирсанов М.Н. Формулы для двухсторонней оценки основной частоты колебаний решетчатой фермы // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19. Вып. 3. С. 377–386. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.3.377-386

*Автор, ответственный за переписку:* Михаил Николаевич Кирсанов, c216@ya.ru.

## Formula for two-sided estimation of the fundamental frequency of oscillations of a lattice truss

**Mikhail N. Kirsanov***National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI); Moscow, Russian Federation*

### ABSTRACT

**Introduction.** One of the main tasks of the theory of oscillations of building structures is the determination of the fundamental frequency of natural oscillations. Analytical solutions are rare here and, as a rule, are based on approximate estimates of the first frequency from above (Rayleigh’s method) or from below (Dunkerley’s estimate). Most often, the problem of natural oscillations is solved numerically by the finite element method using specialized packages. In this paper, the task is to derive analytical estimates of the dependence of the first oscillation frequency of a lattice truss on the number of panels, the geometric characteristics of the structure, and the parameters of the elastic properties of the material.

**Materials and methods.** A flat statically determinable lattice is supported by its base on struts. The angular support is a fixed joint. Calculation of forces in structural elements is performed by cutting out nodes using standard operators of the Maple symbolic mathematics system. The rigidity of the truss is found by the Maxwell – Mohr formula. The mass of the truss is distributed uniformly over its nodes. Mass oscillations occur vertically. By generalizing a series of solutions for trusses with a successively increasing order to an arbitrary number of panels, the desired formulas are derived by induction.

**Results.** A case of kinematic variability of the proposed truss scheme was noticed. Formulas for the first frequency are obtained by the Dunkerley and Rayleigh method. The two analytical solutions are compared with the numerical solution obtained for the entire frequency spectrum. Spectral constants and resonant safety regions were discovered in the spectra of a family of regular trusses.

**Conclusions.** The two-sided method for estimating the first frequency is applicable to solving problems on regular constructions, where the final formula includes the order of regularity as a parameter. For the construction under consideration, the error of the Rayleigh method is comparable to the error of the Dunkerley method.

**KEYWORDS:** external static indeterminacy, planar truss, analytical solution, natural frequency, Maple, Dunkerley method, Rayleigh method, spectral constants

*Acknowledgements.* This work was financially supported by the Russian Science Foundation (Project No. 22-21-00473).

**FOR CITATION:** Kirsanov M.N. Formula for two-sided estimation of the fundamental frequency of oscillations of a lattice truss. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2024; 19(3):377-386. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.3.377-386 (rus.).

*Corresponding author:* Mikhail N. Kirsanov, C216@ya.ru.

## ВВЕДЕНИЕ

Расчет собственных частот ферм обычно производится численно в специальных инженерных программах, в основе которых лежит метод конечных элементов (МКЭ). Учет демпфирования колебаний при динамических нагрузках и вариантное проектирование ферм с использованием программы «ЛИРА» рассмотрены в работах [1, 2]. Классический МКЭ для решения задач строительной механики использовался в исследовании [3]. Аналитические решения в механике строительных конструкций появились в связи с развитием компьютерных программ символьной математики. Получено уравнение частот для плоской балочной фермы с произвольным числом панелей [4]. Нижняя граница частоты собственных колебаний плоской балочной фермы без нижнего пояса (фермы Финка) найдена в аналитической форме [5]. Формулы для прогиба балочной фермы с решеткой шпренгельного типа с произвольным числом панелей приведены в публикации [6] с использованием системы компьютерной математики Maple. Предложен алгоритм вычисления перемещений в плоских рамных стержневых конструкциях в системе символьных преобразований Wolfram Mathematica [7]. Выполнен аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей от действия равномерно распределенной по поясам нагрузки в системе Maple [8]. Показано, что при определенном числе панелей относительный прогиб имеет минимум. Найдена наклонная асимптота графика зависимости прогиба от числа панелей. Операторы системы Maple использованы в труде [9] для анализа нижней границы первой частоты собственных колебаний плоской шпренгельной фермы. Получена оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы, предназначенной для крепления автомобильных знаков и различных устройств [10]. Замечено, что с увеличением порядка регулярности фермы (числа панелей) погрешность приближенного аналитического решения падает, что делает аналитическое решение особенно выгодным для масштабных конструкций, численный расчет которых всегда требует значительного времени. Также получена картина распределения частотных изолиний, сгущающихся с увеличением частоты колебаний. Проведен расчет основной частоты собственных колебаний статически определимой регулярной плоской фермы с треугольной решеткой и дополнитель-

ными внутренними горизонтальными связями [11]. Итоговая формула для первой частоты, рассчитанная по методу Донкерлея, содержит только две константы, зависящие от числа панелей полиномиальным образом. Проблему расчета регулярных статически определимых плоских и пространственных ферм и их существование, вероятно впервые, поднимали R.G. Hutchinson и N.A. Fleck [12, 13]. Большой вклад в развитие теории и практики расчетов регулярных стержневых конструкций применительно к их оптимизации внес А. Kaveh [14]. Обзор некоторых аналитических решений статики плоских регулярных ферм содержится в работе [15]. В монографии В.В. Галишиной и В.А. Игнатьева [16] рассмотрены теория и методы линейного расчета регулярных стержневых систем. Предложены точные и приближенные методы для расчета таких ферм на устойчивость, прочность и колебания. Напряженно-деформированное состояние и прогибы трехгранной балочной фермы для перекрытий и покрытий общественных и производственных зданий при линейных нагрузках рассчитаны методом конечных элементов [17] применительно к разным районам строительства.

Нижняя граница первой собственной частоты фермы с двумя пролетами с учетом жесткости опор методом индукции получена для произвольного числа панелей [18].

Аналитически и численно исследована собственная частота многопролетных двутавровых составных мостов с линейными вогнутыми сечениями [19]. Численные расчеты выполнены в системе MATLAB и МКЭ. Показано, что разработанная формула позволяет с высокой точностью находить собственную частоту. Средняя и максимальная ошибки составляют 3,5 и 14 % соответственно.

В настоящей работе выводятся формулы для основной частоты собственных колебаний плоской решетки с прямолинейным верхним поясом и шарнирно опертой на подвижные опоры по одной стороне (рис. 1).

Высота фермы  $2h$ , принято четное число панелей длиной  $a$  каждая. Решетка конструкции *сдвоенная*. Длины четырех боковых раскосов  $c = \sqrt{a^2 + h^2}$ , остальные раскосы имеют длину  $2c$ . Фактически это многопролетная неразрезная ферма.

Анализируется кинематическая изменчивость фермы и приводятся три алгоритма получения приближенного значения первой собственной частоты колебаний конструкции.

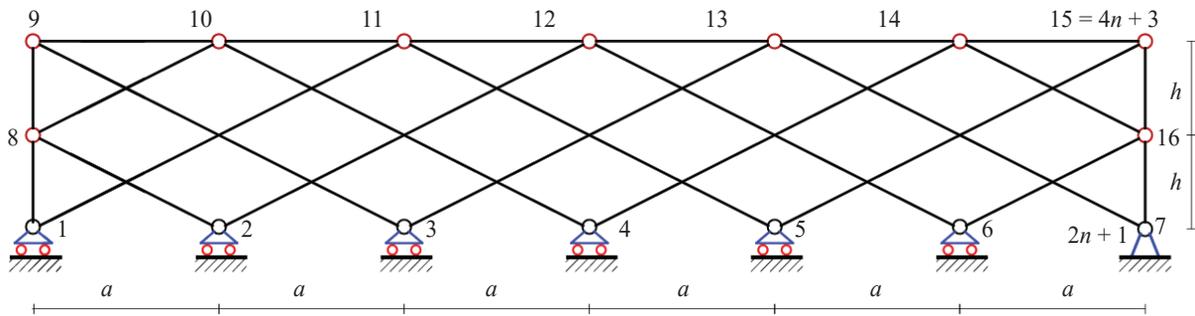


Рис. 1. Схема фермы и нумерация узлов,  $n = 3$

Fig. 1. Truss scheme and node numbering,  $n = 3$

## МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

### Расчет усилий в стержнях

Ферма статически определимая. Общее число узлов в ферме  $6n + 6$ , из которых  $K = 4(n + 1)$  — внутренние узлы. Число стержней  $\eta = 8(n + 1)$ . Масса фермы равномерно распределена по узлам конструкции. Усилия в стержнях фермы определяются в программе на языке компьютерной математики Maple с использованием метода вырезания узлов [20]. Система уравнений равновесия всех узлов записывается в матричном виде. Вектор правой части содержит усилия, приложенные к узлам. Нечетные уравнения системы содержат направляющие косинусы неизвестных усилий и реакций опор в проекции на ось  $x$  (горизонтальную), четные — на ось  $y$ . Для работы программы необходимо ввести координаты внутренних узлов (рис. 1):

$$\begin{aligned} x_i &= x_{2n+2+i} = a(i-1), y_i = 0; \\ y_{2n+2+i} &= 2h; x_{2n+2} = 0, y_{2n+2} = h; \\ x_{4n+4} &= 2na; y_{4n+4} = h, i = 1; \dots, 2n+1. \end{aligned}$$

Координаты концов опорных стоек, моделирующих подвижную и неподвижную опоры, имеют вид:

$$\begin{aligned} x_{i+4n+4} &= x_i; y_{i+4n+4} = -h; \\ i &= 1, \dots, 2n+1; \\ x_{6n+6} &= x_{2n+1} + a; y_{6n+6} = 0. \end{aligned}$$

Элементами матрицы системы уравнений равновесия являются направляющие косинусов неизвестных усилий в стержнях. Значения направляющих косинусов вычисляются по данным о координатах узлов и порядку соединения стержней в узлах.

Номера узлов по концам стержней записываются в ориентированные списки  $\Phi_i, i = 1, \dots, \eta$ . Восходящие и нисходящие раскосы длиной  $2c$  кодируются, например, списками вида:

$$\begin{aligned} \Phi_i &= [i, i + 2n + 4]; \\ \Phi_{i+2n+4} &= [i + 2, i + 2n + 2]; \\ i &= 1, \dots, 2n - 1. \end{aligned}$$

Система уравнений равновесия записывается в матричном виде:  $\mathbf{GS} = \mathbf{T}$ , где  $\mathbf{S}$  — вектор, содер-

жащий неизвестные усилия и реакции опор. Вектор внешних нагрузок  $\mathbf{T}$  задается длиной  $\eta$ . Нагрузки, направленные горизонтально и приложенные к узлу  $i$ , записываются в элементы  $T_{2i-1}$  с нечетными номерами, вертикальные — в элементы  $T_{2i}$  на четных строках. Решение матричного уравнения в символьной форме получается методом обратной матрицы с помощью операторов системы Maple:  $\mathbf{S} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{T}$  [20].

### Кинематическая изменяемость

Пробные аналитические вычисления усилий в ферме с произвольной нагрузкой для различного числа панелей показали, что для фермы четных порядков  $n = 2k, k = 1, 2, \dots$  определитель матрицы  $\mathbf{G}$  системы уравнений равновесия узлов вырождается. Расчеты в численной форме не всегда улавливают вырождение матриц, скрывая это за неизбежными погрешностями вычислений. Этот факт свидетельствует о кинематической изменяемости конструкции [21]. Подтверждением кинематического вырождения служит картина возможных скоростей, полученная методами кинематики (рис. 2). Основой метода получения картины распределения скоростей является векторное уравнение связи скоростей точек одного отрезка. Решетка условно разбивается на шарнирные двухзвенники. По заданным скоростям концов двухзвенника однозначно вычисляется скорость его среднего шарнира. Такая процедура повторяется для всех узлов конструкции. Если исследуемая шарнирно-стержневая система изменяема, то процедура последовательного расчета скоростей приводит в конце к кинематическому противоречию. Например, может получиться, что скорость какого-то подвижного опорного шарнира окажется отличной от нуля, или скорость одного из шарниров будет разной при различной последовательности вычисления скоростей узлов.

Получены следующие компоненты возможных скоростей узлов:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= [-4v, 0]; \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_6 = [-3v, 0]; \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{v}_7 = \mathbf{v}_{11} = [-2v, 0]; \\ \mathbf{v}_4 &= \mathbf{v}_{12} = [-v, 0]; \\ \mathbf{v}_8 &= \mathbf{v}_{10} = \mathbf{v}' = [-2v, -av/h]; \\ \mathbf{v}_9 &= \mathbf{u} = [-2v, -2av/h]. \end{aligned}$$

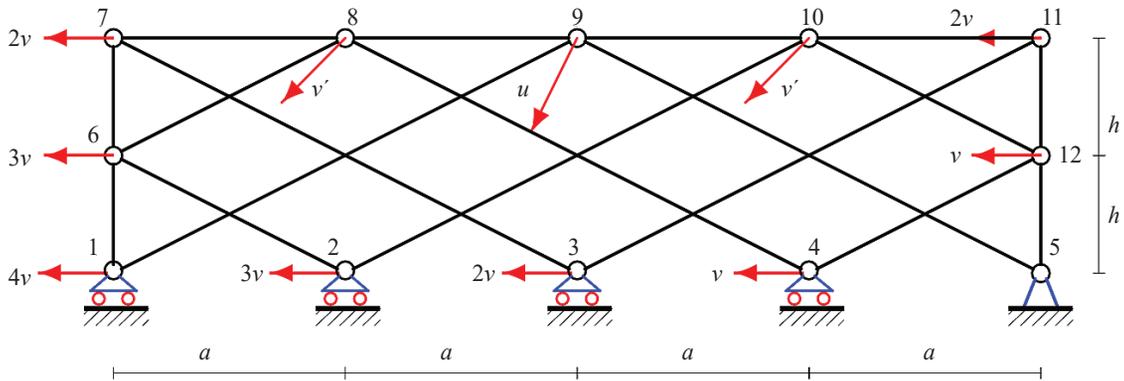


Рис. 2. Возможные скорости узлов изменяемой фермы,  $n = 2$

Fig. 2. Virtual velocities of nodes of a variable truss,  $n = 2$

Контроль правильности нахождения скоростей узлов — кинематическая теорема о равенстве проекций скоростей концов отрезка на этот отрезок. Схемы статически определимых плоских ферм регулярного типа, допускающих кинематическую изменяемость при определенном числе панелей, приведены в справочнике [22].

Таким образом, для того чтобы избежать случаев кинематической изменяемости, все расчеты в рассматриваемой ферме необходимо проводить только для нечетного числа панелей  $n = 2k - 1, k = 1, 2, \dots$ , т.е. для случаев кинематически неизменяемых ферм.

**Метод Донкерлея**

Расчет первой (нижней) частоты собственных колебаний механических систем с числом свободы больше четырех возможен только в численной форме. Если ставить задачу получения формулы зависимости частоты колебаний регулярной структуры (фермы) от числа панелей, необходим какой-то приближенный метод. Наиболее распространены на практике методы оценки частоты снизу по Донкерлею [23] и сверху по Рэлею [24]. Приближенная оценка первой частоты колебаний по Донкерлею имеет вид:

$$\omega_D^{-2} = \sum_{p=1}^K \omega_p^{-2}, \tag{1}$$

где  $K$  — число степеней свободы фермы;  $\omega_p$  — рассчитанные для каждой массы отдельно парциальные частоты. Предполагается, что массы имеют только вертикальные скорости. В таком случае число степеней свободы равно числу узлов. Уравнение движения отдельной массы в узле  $p$ :

$$m\ddot{y}_p + D_p y_p = 0; \quad p = 1, 2, \dots, K. \tag{2}$$

Расчет коэффициента жесткости  $D_p$  обратного к коэффициенту податливости, выполняется по формуле Максвелла – Мора. Суммирование проводится по всем стержням фермы, включая стержни, моделирующие опоры. Длина опорных стоек принята равной  $h$ :

$$\delta_p = \frac{1}{D_p} = \sum_{i=1}^n (S_i^{(p)})^2 \frac{l_i}{EF}. \tag{3}$$

Из выражения (2) при гармонических колебаниях  $y_p = A_p \sin(\omega t + \varphi)$  следует  $\omega_p = \sqrt{D_p/m}$ . Отсюда получается формула для частоты:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = m \Delta_k. \tag{4}$$

Для вывода зависимости частоты от числа панелей используется метод индукции. Расчеты дают следующую последовательность:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{c^3 + 18h^3}{h^2 EF}; \\ \Delta_2 &= \frac{16a^3 + 17c^3 + 52h^3}{h^2 EF}; \\ \Delta_3 &= \frac{48a^3 + 49c^3 + 102h^3}{h^2 EF}; \\ \Delta_4 &= \frac{96a^3 + 97c^3 + 168h^3}{h^2 EF}; \\ \Delta_5 &= \frac{160a^3 + 161c^3 + 250h^3}{h^2 EF}, \dots \end{aligned}$$

В системе Maple можно найти общий член этой последовательности:

$$\Delta_k = \frac{C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3}{h^2 EF}, \tag{5}$$

где коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= 8k(k-1); \\ C_2 &= 8k(k-1)+1; \\ C_3 &= 2k(4k+5). \end{aligned}$$

В итоге:

$$\begin{aligned} \omega_D &= \\ &= h \sqrt{\frac{EF}{m(8k(k-1)a^3 + (8k(k-1)+1)c^3 + 2(4k+5)h^3)}}. \end{aligned} \tag{6}$$

**Метод Рэлея**

Расчет оценки первой частоты сверху основан на законе сохранения энергии и сводится к вычислению величины [24]:

$$\omega_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i}{\sum_{i=1}^K m \tilde{u}_i^2}, \tag{7}$$

где  $\tilde{u}_i$  — смещение узла  $i$  от действия равномерно распределенных по всем узлам единичных вертикальных сил. Определяется по формуле:

$$\tilde{u}_i = \frac{\sum_{\alpha=1}^h S_{\alpha}^{(P)} S_{\alpha}^{(i)} I_{\alpha}}{EF}. \quad (8)$$

Введены обозначения:  $S_{\alpha}^{(P)}$  — усилие в стержне  $\alpha = 1, \dots, h$  от действия внешней вертикальной нагрузки  $P = 1$ , равномерно распределенной по всем узлам;  $S_{\alpha}^{(i)}$  — усилие в стержне от одной (безразмерной) нагрузки, приложенной вертикально к ферме в узле с номером  $i$ .

Выражения для сумм  $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i$  и  $\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i^2$  рассчитываются отдельно.

Расчет смещений узлов для ферм разного порядка дает общий вид решения:

$$\sum_{i=1}^K \tilde{u}_i = \frac{C_a a^3 + C_c c^3 + C_h h^3}{h^2 EF}, \quad (9)$$

где коэффициенты  $C_a, C_c, C_h$  получаются обобщением следующих последовательностей:

$$\begin{aligned} k = 1: \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i &= \frac{c^3 + 52h^3}{h^2 EF}; \\ k = 2: \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i &= \frac{52a^3 + 19c^3 + 44h^3}{h^2 EF}; \\ k = 3: \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i &= \frac{52a^3 + 21c^3 + 96h^3}{h^2 EF}; \\ k = 4: \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i &= \frac{104a^3 + 39c^3 + 88h^3}{h^2 EF}; \\ k = 5: \sum_{i=1}^K \tilde{u}_i &= \frac{104a^3 + 41c^3 + 140h^3}{h^2 EF}, \dots \end{aligned}$$

В системе Maple можно найти общие члены последовательностей коэффициентов:

$$\begin{aligned} C_a &= 13(-1)^k - 1 + 2k; \\ C_c &= 10k - 5 + 4(-1)^k; \\ C_h &= 22k + 15 - 15(-1)^k. \end{aligned}$$

Аналогично находятся и суммы квадратов смещений:

$$\begin{aligned} C_{cc} &= 8k^3 + 4(2(-1)^k - 3)k^2 + \\ &+ (22 - 8(-1)^k)k + 8(-1)^k - 9; \\ C_{ac} &= \frac{68k^3 + (195(-1)^k - 102)k^2}{3} + \\ &+ \frac{5(122 - 39(-1)^k)k + 288((-1)^k - 1)}{3}; \\ C_{ch} &= 8k^3 + (26 - 30(-1)^k)k^2 + \\ &+ (137 - 77(-1)^k)k - 89(-1)^k + 87; \\ C_{ah} &= \frac{80k^3 + 36(2 - (-1)^k)k^2}{3} + \\ &+ \frac{4(10 + 87(-1)^k)k + 60(1 - (-1)^k)}{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{ch} &= 2(8k^3 + (7 - 11(-1)^k)k^2 + \\ &+ (6 + 18(-1)^k)k - (-1)^k - 1); \\ C_{ac} &= \frac{2(40k^3 + 6(13(-1)^k - 10)k^2)}{3} + \\ &+ \frac{2(2(97 - 39(-1)^k)k + 87((-1)^k - 1))}{3}. \end{aligned}$$

Знаменатель имеет более сложную форму:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K m \tilde{u}_k^2 &= m \times \\ &\times \frac{C_{aa} a^6 + C_{cc} c^6 + C_{hh} h^6 + C_{ah} a^3 h^3 + C_{ac} a^3 c^3 + C_{ch} c^3 h^3}{h^4 E^2 F^2}. \end{aligned}$$

Верхняя оценка основной частоты фермы для произвольного числа панелей по формуле Рэлея имеет вид:

$$\omega_R = h \sqrt{\frac{EF(C_a a^3 + C_c c^3 + C_h h^3)}{m(C_{aa} a^6 + C_{cc} c^6 + C_{hh} h^6 + C_{ah} a^3 h^3 + C_{ac} a^3 c^3 + C_{ch} c^3 h^3)}}. \quad (10)$$

### Упрощенный метод Донкерлея

В работе [25] предложен вариант метода Донкерлея для расчета первой собственной частоты. В этом методе сумма в формуле (1) вычисляется по теореме о среднем:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = \frac{mK \delta^{\max}}{2}, \quad (11)$$

где  $\delta^{\max}$  — максимальное значение  $\omega_p^{-2}$ , вычисленное для некоторого узла, имеющего максимальный прогиб от отдельной вертикальной силы, приложенной к этому узлу. Более точно:

$$\omega_D^{-2} = m \sum_{p=1}^K \delta_p = mK \frac{\delta^{\max} + \delta^{\min}}{2}.$$

В большинстве случаев  $\delta^{\min} = 0$ , так как узел, в котором прогиб минимальный, обычно приходится на опору. Если для численного расчета сложность вычислений по формулам (4) и (11) приблизительно одинаковая, то для аналитических преобразований разность в трудоемкости весьма значительная. Решение по упрощенному методу дает выражение вида (5):

$$\Delta_k = \frac{C_4 a^3 + C_5 c^3 + C_6 h^3}{h^2 EF}, \quad (12)$$

с коэффициентами:

$$\begin{aligned} C_4 &= 4k(2k + (-1)^k - 1); \\ C_5 &= 4k(2k - 1); C_6 = 4k(2k + 3). \end{aligned} \quad (13)$$

Как и в выражении (6) полученные коэффициенты также квадратичные. Упрощенное решение задачи о первой частоте имеет вид:

$$\begin{aligned} \omega^* &= \\ &= h \sqrt{\frac{EF}{4mk(2k + (-1)^k - 1)a^3 + (2k - 1)c^3 + (2k + 3)h^3}}. \end{aligned} \quad (14)$$

## РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Рассмотрим в качестве примера регулярные фермы с площадью поперечного сечения стержней решетки и опорных стержней  $F = 9 \text{ см}^2$ . Модуль упругости стали  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , массы в узлах  $m = 100 \text{ кг}$ , размеры  $a = 4 \text{ м}$ ,  $h = 2 \text{ м}$ . Три кривые на рис. 3 соответствуют численному решению  $\omega_1$ , методу Донкерлея по формуле (6), методу Рэлея (10) и приближенному методу Донкерлея (14). Численное решение  $\omega_1$  — это минимальная частота всего спектра частот фермы, полученная в пакете LinearAlgebra системы Maple. Расчет частоты в численной форме достаточно быстрый и реализуется в той же программе, что использована для получения аналитических решений в символьной форме.

Численное решение ограничено снизу и сверху аналитическими оценками (6), (10) и (14). Погрешность этих оценок по Рэлею и Донкерлею приблизительно одинаковая, поэтому для получения приближенного решения можно брать их полусумму. На практике, безусловно, удобнее пользоваться короткими и весьма близкими решениями (6) и (14), принимая что аналитические решения отличаются от численного не более чем на 30 %. Сложность исходного решения (6) по Донкерлею и приближенного (14) одинаковая. Достоинством решения (14) является простота его вывода, свободная от необходимости находить закономерности суммы обратных квадратов частот. Недостаток приближенного решения (14) — некоторая неопределенность выбора узла с максимальным прогибом. Для балочных ферм — это, как правило, середина пролета. В рассматриваемой многопролетной ферме с двойными раскосами, передающими усилия из центрального узла в верхнем поясе на боковые части решетки, это не так. Результат здесь зависит от числа панелей. В одних случаях узел с максимальным прогибом — это центральный узел, в других — соседние с ним узлы.

Формулы, оценивающие первую частоту собственных колебаний, можно использовать для предварительного расчета проектируемой конструкции или для оценки решения, полученного в сложных инженерных программах, основанных на МКЭ. Особенно эффективны формулы, найденные методом индукции, для сложных сооружений, содержащих большое число панелей. Расчет многопанельных конструкций требует значительных вычислительных затрат и при большом числе стержней не защищен от неизбежного накопления погрешностей округления и ошибок ввода исходных данных. При этом число панелей в формулах (6), (10) и (14) ничем не ограничено, а решение дает тем большую точность, чем выше порядок регулярности конструкции.

### Спектр частот

На практике в динамических расчетах строительных конструкций чаще всего исследуется пер-

вая, основная, частота спектра собственных частот. Однако для предотвращения случаев резонанса, инициированных каким-то внешним возбудителем (электрические приборы, двигатели), имеющим высокую собственную частоту колебаний, информация о высших частотах может быть важной. Особенно это имеет значение на этапе проектирования регулярных систем, когда стоит задача, например, о выборе числа панелей. Численный расчет высших частот семейства регулярных ферм, имеющих одни и те же размеры панелей, массы в узлах и упругие характеристики стержней, но отличающихся друг от друга только числом панелей, показывает интересные закономерности их спектров.

На рис. 4 на оси абсцисс отложены номера частот в спектрах, на оси ординат — собственные частоты. Спектр каждой отдельной фермы состоит из точек, соединенных некоторой условной кривой. С учетом того, что для ферм с четным числом панелей решения нет (вырождается определитель), кривые приведены только для ферм нечетного порядка. Используются следующие характеристики ферм:  $F = 4 \text{ см}^2$ , модуль упругости  $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ , массы в узлах  $m = 200 \text{ кг}$ , размеры  $a = 4 \text{ м}$ ,  $h = 2 \text{ м}$ .

Замечена особенность: высшая частота всех ферм, начиная с  $n = 3$ , постоянна и не зависит от порядка фермы. Кроме этого, существуют и другие частоты, одинаковые для ферм разных порядков (спектральные константы). Наиболее четко выделяются частоты 215, 485 и 580 Гц. Все эти спектральные константы (с небольшой погрешностью) образуются кратными частотами. Наличие спектральных констант позволяет легко определять соответствующие частоты ферм большого порядка по данным расче-

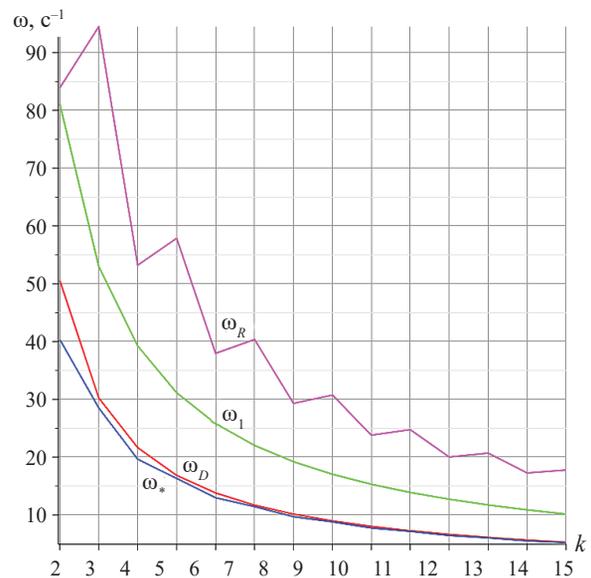


Рис. 3. Зависимость первой частоты от числа панелей, полученной тремя методами

Fig. 3. Dependence of the first frequency on the number of panels obtained by three methods

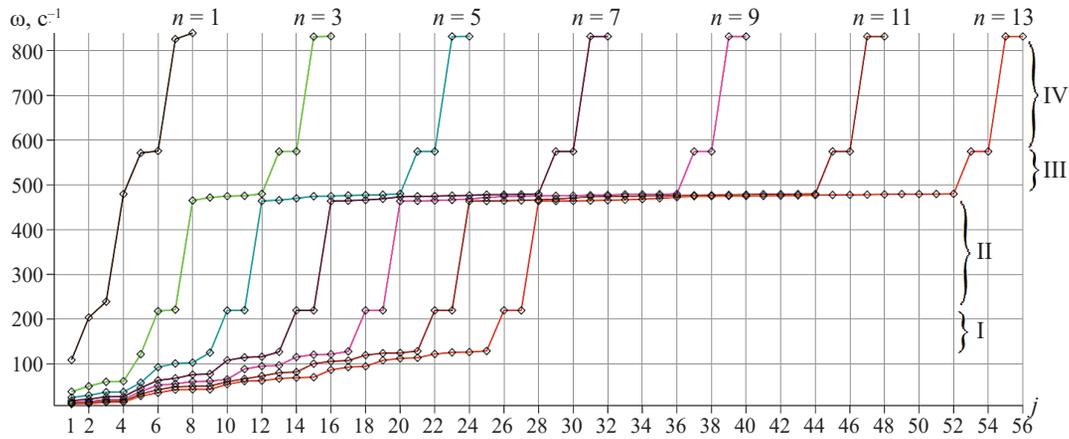


Рис. 4. Спектры частот регулярных ферм порядка 1–13  
 Fig. 4. Frequency spectra of regular trusses are of the order of 1–13

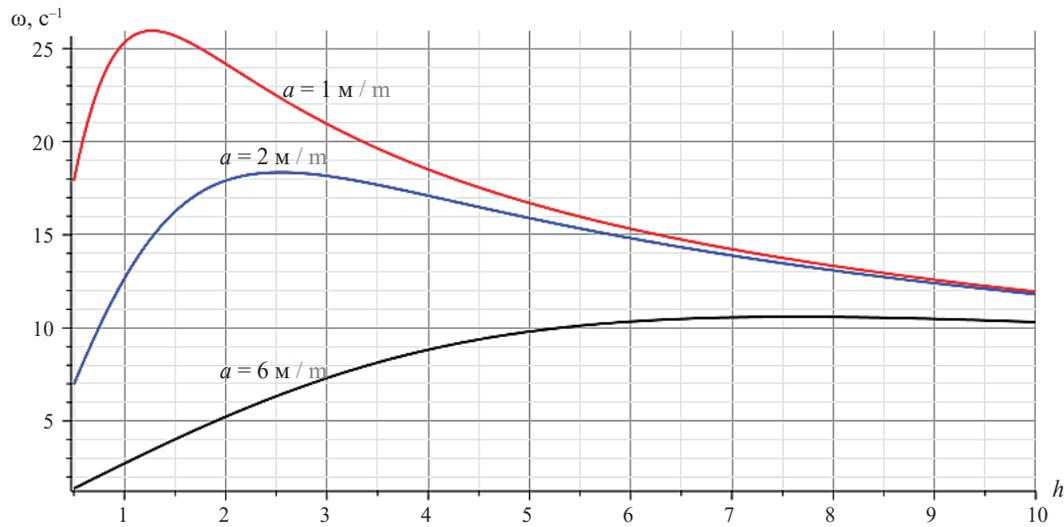


Рис. 5. Зависимость основной частоты от высоты фермы  
 Fig. 5. Dependence of the fundamental frequency on the height of the truss

тов ферм порядков  $n = 3, n = 5$ , для которых расчеты значительно проще.

В спектрах ферм различного порядка заметны некоторые области, в которых нет собственных частот. Выделены четыре характерные области I, II, III и IV. Внешние возбудители, собственные частоты которых попадают в эти области, не вызовут резонансных явлений. Наибольшее практическое значение имеют области I и II, соответствующие меньшим частотам (области резонансной безопасности). Области III, IV звуковых частот менее востребованы. Резонансные явления на таких частотах редки.

**Зависимость основной частоты от размеров конструкции**

Аналитическая форма решения позволяет анализировать зависимость основной частоты от разме-

ров фермы. На рис. 5 показано, что эта зависимость при определенных значениях размера панели  $a$  обнаруживает экстремум. Для построения кривых использовано выражение для частоты (6), данные фермы те же, что и для рис. 3 и  $k = 9$ . Максимальное значение основной частоты зависит от высоты фермы  $h$ . С увеличением длины панели экстремум смещается в сторону больших высот, соответствующая частота уменьшается. Для больших высот ( $h > 10$  м) частота почти не зависит от длины панели — кривые различных значений  $a$  практически сливаются. Значение высоты  $h_{max}$ , соответствующее максимальной частоте, можно найти из уравнения  $d\omega_D/dh = 0$ , используя выражение (6). Уравнение получается громоздким, но при заданных порядках  $k$  решение простое:  $k = 8, h_{max} = 1,262a; k = 9, h_{max} = 1,270a; k = 10, h_{max} = 1,276a...$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Рассмотрена новая схема статически определимой регулярной фермы, имеющая некоторые особенности. Конструктивная особенность фермы — ряд вертикальных опор по одной ее стороне. Практически такая решетка может быть использована как ограждающая конструкция, как элемент кожуха какого-либо механизма или архитектурная деталь здания. Преимущество решения (6) по сравнению с (10) в его простоте. Другая особенность фермы — скрытая, опасная в практическом плане — это ее кинематическое вырождение при четном числе панелей в половине пролета. Хотя в реальных конструкциях нет идеальных шарниров,

соединяющих стержни, и за счет жесткого соединения в этом случае не будет кинематической изменяемости фермы, использовать потенциально опасные схемы нерационально. Проектировщики, как правило, исключают такие ситуации, изменив число панелей проектируемого сооружения всего на одну. Анализ спектров семейства регулярных ферм показал возможность расчета собственных частот ферм с большим числом панелей по данным расчетов простых ферм с несколькими панелями. Выявлены интервалы частот, в которых конструкция не имеет собственных частот независимо от числа панелей регулярной фермы (области резонансной безопасности).

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Клёнов М.В., Иванов С.Ю. Учет демпфирования колебаний при динамических нагрузках в ПК «Лира» // Смотр-конкурс научных, конструкторских и технологических работ студентов Волгоградского государственного технического университета : тез. докл. 2019. С. 393–394. EDN XPKWLG.

2. Брянцев А.А. Вариантное проектирование ферм с использованием программы ЛИРА-САПР // Вестник КазГАСА. 2020. Т. 3. С. 77.

3. Игнатьев В.А., Игнатьев А.В. Метод конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики (теория, математические модели и алгоритмы). М. : Изд-во АСВ, 2022. 306 с.

4. Канатова М.И. Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. 2015. С. 31–34. EDN ZBBKPI.

5. Петриченко Е.А. Нижняя граница частоты собственных колебаний фермы Финка // Строительная механика и конструкции. 2020. № 3 (26). С. 21–29. EDN PINHFN.

6. Суд И.Б. Вывод формул для прогиба шпренгельной балочной фермы с произвольным числом панелей в системе Maple // Строительная механика и конструкции. 2020. № 2 (25). С. 25–32. EDN VIOBNE.

7. Халецки М. Алгоритм вычисления перемещений в плоских рамных стержневых конструкциях // Механика. Научные исследования и учебно-методические разработки. 2013. № 7. С. 237–252. EDN ХХЕВКХ.

8. Комерзан Е.В., Луинов Н.А., Оситова Т.С. Аналитический расчет прогиба плоской шпренгельной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2022. № 2 (33). С. 17–25. DOI: 10.36622/VSTU.2022.33.2.002. EDN NTJXAL.

9. Манукало А.С. Анализ значения первой частоты собственных колебаний плоской шпрен-

гельной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 54–60. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.006. EDN UXEELW.

10. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Оценка основной частоты колебаний Г-образной пространственной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 35–45. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004. EDN UGWBIP.

11. Комерзан Е.В., Маслов А.Н. Аналитическая оценка основной частоты собственных колебаний регулярной фермы // Строительная механика и конструкции. 2023. № 2 (37). С. 17–26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002. EDN GMNMJQ.

12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2005. Vol. 85. Issue 9. Pp. 607–617. DOI: 10.1002/zamm.200410208

13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2006. Vol. 54. Issue 4. Pp. 756–782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008

14. Kaveh A. Optimal analysis of structures by concepts of symmetry and regularity. Springer Vienna, 2013. DOI: 10.1007/978-3-7091-1565-7

15. Тиньков Д.В. Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 66–73. DOI: 10.5862/MCE.57.6. EDN UHLIHV.

16. Галишикова В.В., Игнатьев В.А. Регулярные стержневые системы: теория и методы расчета. Волгоград : ВолГАСУ, 2006. EDN QNMMHT.

17. Мелёхин Е.А. Анализ напряженно-деформированного состояния пролетной трехгранной фермы при линейных нагрузках // Вестник МГСУ. 2023. Т. 18. № 4. С. 556–571. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.4.556-571. EDN ZAYUKQ.

18. Петренко В.Ф. Оценка собственной частоты двухпролетной фермы с учетом жесткости опор // Строительная механика и конструкции. 2021. №4(31). С. 16–25. DOI: 10.36622/VSTU.2021.31.4.002. EDN: QJZZJK.

19. Saglik H., Balkaya C., Chen A., Ma R., Doran B. Development of natural frequency in multi-span composite bridges with variable cross-section: Analytical and numerical solutions // Structures. 2022. Vol. 45. Pp. 1657–1666. DOI: 10.1016/j.istruc.2022.09.082

20. Бука-Вайваде К., Курсанов М.Н., Сердюк Д.О. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels // Вестник МГСУ. 2020. Т. 15. № 4. С. 510–517. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42777640> DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517

21. Курсанов М.Н. Кинематический анализ и оценка частоты собственных колебаний плоской решетки // Вестник МГСУ. 2022. Т. 17. № 10. С. 1324–1330.

URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50118989>  
DOI: 10.22227/1997-0935.2022.10.1324-1330

22. Курсанов М.Н. Плоские фермы. Схемы и расчетные формулы : справочник. М. : ИНФРА-М, 2019. 238 с.

23. Low K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses // International Journal of Mechanical Sciences. 2000. Vol. 42. Issue 7. Pp. 1287–1305. DOI: 10.1016/S0020-7403(99)00049-1

24. Kirsanov M., Ivanitskii A. Bilateral analytical estimation of the natural oscillation frequency of a planar triangular truss // AlfaBuild. 2023. Vol. 26. P. 2601. DOI: 10.57728/ALF.26.1

25. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss // Construction of Unique Buildings and Structures. 2023. Vol. 108. P. 10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1

Поступила в редакцию 27 сентября 2023 г.

Принята в доработанном виде 8 октября 2023 г.

Одобрена для публикации 28 ноября 2023 г.

ОБ АВТОРЕ: **Михаил Николаевич Курсанов** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин; **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»);** 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14; SPIN-код: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IstinaresearcherID: 2939132; C216@ya.ru.

## REFERENCES

1. Klepov M.V., Ivanov S.Yu. Accounting for vibration damping under dynamic loads in the PC “Lira”. *Review-competition of scientific, design and technological works of students of the Volgograd State Technical University*. 2019; 393-394. EDN XPKWLG. (rus.).

2. Bryantsev A.A. Variant design of trusses using the LIRA-SAPR program. *Bulletin of KazGASA*. 2020; 3:77. (rus.).

3. Ignatiev V.A., Ignatiev A.V. *Finite element method in the form of the classical mixed method of structural mechanics (theory, mathematical models and algorithms)*. Moscow, ASV Publishing House, 2022; 306. (rus.).

4. Kanatova M. Frequency equation and vibration analysis of a flat beam truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. 2015; 31-34. EDN ZBBKPI. (rus.).

5. Petrichenko E.A. Lower bound of the natural oscillation frequency of the Fink truss. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 3(26):21-29. EDN PINHFN. (rus.).

6. Sud I.B. Derivation of formulas for deflection of the girder truss with an arbitrary number of panels in the maple system. *Structural Mechanics and Structures*. 2020; 2(25):25-32. EDN VI0BNE. (rus.).

7. Chalecki M. The algorithm for calculation of displacements in flat frame constructions. *Mechanics. Scientific Research and Educational and Methodological Developments*. 2013; 7:237-252. EDN XXEBKX. (rus.).

8. Komerzan E.V., Lushnov N.A., Osipova T.S. Analytical calculation of the deflection of a planar truss with an arbitrary number of panels. *Structural Mechanics and Structures*. 2022; 2(33):17-25. DOI: 10.36622/VSTU.2022.33.2.002. EDN NTJXAL. (rus.).

9. Manukalo A.S. Analysis of a planar Sprengel truss first frequency natural oscillations value. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 2(37):54-60. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.006. EDN UXEELW. (rus.).

10. Komerzan E.V., Maslov A.N. Estimation of the I-shaped spatial truss fundamental frequency oscillations. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 2(37):35-45. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.004. EDN UGWBIP. (rus.).

11. Komerzan E.V., Maslov A.N. Analytical evaluation of a regular truss natural oscillations fundamental frequency. *Structural Mechanics and Structures*. 2023; 2(37):17-26. DOI: 10.36622/VSTU.2023.37.2.002. EDN GMNMJQ. (rus.).

12. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Microarchitected cellular solids — the hunt for statically determinate periodic trusses. *ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*. 2005; 85(9):607-617. DOI: 10.1002/zamm.200410208
13. Hutchinson R.G., Fleck N.A. The structural performance of the periodic truss. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2006; 54(4):756-782. DOI: 10.1016/j.jmps.2005.10.008
14. Kaveh A. *Optimal analysis of structures by concepts of symmetry and regularity*. Springer Vienna, 2013. DOI: 10.1007/978-3-7091-1565-7
15. Tinkov D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure deflection. *Magazine of Civil Engineering*. 2015; 5(57):66-73. DOI: 10.5862/MCE.57.6. EDN UHLIHV. (rus.).
16. Galishnikova V.V., Ignatiev V.A. *Regular rod systems: theory and calculation methods*. Volgograd, VolgGASU, 2006. EDN QNMMHT. (rus.).
17. Melyokhin E.A. Analysis of the stress-strain state of the spanning trihedral truss under linear loads. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2023; 18(4):556-571. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.4.556-571. EDN ZAYUKQ. (rus.).
18. Petrenko V.F. Estimation of the natural frequency of a two-span truss, taking into account the support stiffness. *Structural Mechanics and Structures*. 2021; 4(31):16-25. DOI: 10.36622/VSTU.2021.31.4.002. EDN: QJZZJK. (rus.).
19. Saglik H., Balkaya C., Chen A., Ma R., Doran B. Development of natural frequency in multi-span composite bridges with variable cross-section: Analytical and numerical solutions. *Structures*. 2022; 45:1657-1666. DOI: 10.1016/j.istruc.2022.09.082
20. Buka-Vaivade K., Kirsanov M.N., Serdjuk D.O. Calculation of deformations of a cantilever-frame planar truss model with an arbitrary number of panels. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2020; 15(4):510-517. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42777640> DOI: 10.22227/1997-0935.2020.4.510-517
21. Kirsanov M.N. Kinematic analysis and estimation of the frequency of natural oscillations of a planar lattice. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2022; 17(10):1324-1330. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=50118989> DOI: 10.22227/1997-0935.2022.10.1324-1330 (rus.).
22. Kirsanov M.N. *Planar trusses. Schemes and calculation formulas : handbook*. Moscow, INFRA-M, 2019; 238. (rus.).
23. Low K.H. A modified Dunkerley formula for eigenfrequencies of beams carrying concentrated masses. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2000; 42(7):1287-1305. DOI: 10.1016/s0020-7403(99)00049-1
24. Kirsanov M., Ivanitskii A. Bilateral analytical estimation of the natural oscillation frequency of a planar triangular truss. *AlfaBuild*. 2023; 26:2601. DOI: 10.57728/ALF.26.1
25. Kirsanov M. Simplified Dunkerley method for estimating the first oscillation frequency of a regular truss. *Construction of Unique Buildings and Structures*. 2023; 108:10801. DOI: 10.4123/CUBS.108.1

Received September 27, 2023.

Adopted in revised form on October 8, 2023.

Approved for publication on November 28, 2023.

**BIONOTES:** **Mikhail N. Kirsanov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Robotics, Mechatronics, Dynamics and Strength of Machines; **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**; 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation; SPIN-code: 8679-6853, Scopus: 16412815600, ResearcherID: H-9967-2013, ORCID: 0000-0002-8588-3871, Google Scholar: FfoNGFwAAAAJ, IstinaresearcherID: 2939132; C216@ya.ru.