НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER
УДК 624.071:624.044
DOI: 10.22227/1997-0935.2024.7.1091-1103

Усовершенствованная методика расчета гибких вант

Андрей Владимирович Чесноков, Виталий Витальевич Михайлов
Липецкий государственный технический университет (ЛГТУ); г. Липецк, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Вантовые системы принадлежат к числу перспективных направлений развития конструкций покрытия. Анализ вантовых конструкций в специализированных расчетных комплексах, не нацеленных на поиск оптимальных параметров и вариантную проработку, приводит к неэффективным проектным решениям. Совершенствование методов расчета и проектирования вантовых систем — важная задача. Предлагается методика расчета гибких вант, включающая однотипные операции суммирования коэффициентов и их произведений, что позволяет реализовать ее в общедоступных математических программных комплексах, обладающих инструментами численного моделирования и оптимизации.

Материалы и методы. Разработанная методика основана на разложении функции формы гибкой ванты и внешней нагрузки в тригонометрические ряды с последующим преобразованием дифференциального уравнения равновесия ванты в систему алгебраических уравнений. Интегральное выражение длины пологой ванты преобразовано в алгебраическую форму, используя выражения квадратов и четвертых степеней суммы ряда.

Результаты. Получено уравнение гибкой ванты, связывающее ее ординату, продольную жесткость, относительную деформацию и параметры внешней нагрузки. Предложены методика нахождения продольной жесткости из условия обеспечения работоспособного состояния ванты, методика расчета вертикальных перемещений от действия внешних нагрузок, а также методика нахождения стрелы и начальной длины ванты в исходном состоянии. Получено выражение для расчета длины ванты под нагрузкой и выражение для определения ординаты по известной длине.

Выводы. Разработанная методика позволяет выполнить расчет вант на действие распределенных по длине пролета поперечных нагрузок. Коэффициенты разложения сложной нагрузки являются суммой коэффициентов отдельных составляющих. Методика нацелена на выполнение автоматизированного расчета, способствуя глубокой проработке конструкции на предпроектной стадии в части получения оптимальных параметров. Дальнейшее развитие предложенной методики находится в области анализа работы под нагрузкой не пологих вант, многоярусных вантовых систем, вантовых конструкций с балками жесткости, шпренгельных систем и пространственных покрытий.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: тригонометрический ряд, ряд Фурье, пологая ванта, гибкая нить, длина ванты, функция формы, деформация

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: *Чесноков А.В., Михайлов В.В.* Усовершенствованная методика расчета гибких вант // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19. Вып. 7. С. 1091–1103. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.7.1091-1103

Автор, ответственный за переписку: Андрей Владимирович Чесноков, andreychess742@mail.ru.

Advanced technique for flexible cable analysis

Andrei V. Chesnokov, Vitalii V. Mikhailov
Lipetsk State Technical University (LGTU); Lipetsk, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. Cable structures belong to perspective roof systems. Specialized software packages for structural analysis, however, do not provide optimization tools for obtaining efficient design solutions of the cable structures. Thus, development of improved methods for design and analysis of cable systems is an important task to be solved. An advanced technique for flexible cable analysis is proposed. It includes ordinary operations of summing the coefficients and their products. The technique is applicable for non-commercial mathematical software packages with numerical simulation tools included, thus providing structural optimization capabilities.

Materials and methods. The technique proposed is based on the sine-series expansion of the external load and the shape function of the flexible cable. The differential equation of cable equilibrium is thus transformed into the set of algebraic equations. The cable length is expressed in algebraic form by means of the power expressions for the sum of the series.

Results. The equation for the flexible cable is derived. It includes cable ordinate, axial stiffness, relative elongation and the external load parameters. The technique for determination of the axial stiffness of the cable is proposed under the operability conditions. The techniques for finding load-induced vertical displacements, as well as the initial cable sag and the undeformed length are given. The length of the cable under load and the ordinate given the cable length are proposed.

Conclusions. The technique for flexible cable analysis allows taking into account distributed transverse external loads. For a combined load the coefficients of the series are the sum of the particular load coefficients. The technique is intended for automated structural solution. It allows facilitating the preliminary design stage, thus providing optimal parameters determination and in-depth design study implementation. Further development of the proposed technique encompasses the fields of non-shallow cable analysis, multy-chord cable systems, cable structures with stiffening girders, strutted cable systems and spatial roof structures.

© А.В. Чесноков, В.В. Михайлов, 2024
Распространяется на основании Creative Commons Attribution Non-Commercial (CC BY-NC)

Вестник МГСУ • ISSN 1997-0935 (Print) ISSN 2304-6600 (Online) • **Том 19. Выпуск 7, 2024**
Vestnik MGSU • Monthly Journal on Construction and Architecture • **Volume 19. Issue 7, 2024**

KEYWORDS: sine-series expansion, fourier series, shallow cable, flexible cable, cable length, shape function, deformation

FOR CITATION: Chesnokov A.V., Mikhailov V.V. Advanced technique for flexible cable analysis. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2024; 19(7):1091-1103. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.7.1091-1103 (rus.).

Corresponding author: Andrei V. Chesnokov, andreychess742@mail.ru.

ВВЕДЕНИЕ

Вантовые системы принадлежат к числу перспективных направлений развития конструкций покрытия зданий и сооружений. Они обладают малым собственным весом и хорошей архитектурной выразительностью, а их применение способствует повышению эффективности использования высокопрочных сталей при перекрытии значительных по размеру пролетов, свободных от промежуточных опор [1, 2].

В работе [3] приводится критический анализ конструктивных решений вантовых систем с выделением области их эффективного применения. Гибкие ванты (нити), структурно объединенные со сжатоизогнутыми элементами, образуют так называемые комбинированные конструкции: арочно-вантовые [4, 5], шпренгельные [6], подвесные системы с жесткой пролетной конструкцией [7–9], комбинированные тросовые купола [10–12], а также bending-active системы [13, 14]. Комбинированные конструкции обладают большими перспективами практического применения [15].

Высокопрочные гибкие ванты выполняют разгружающую, поддерживающую и стабилизирующую роль в комбинированных конструкциях, обеспечивая выполнение требований второй группы предельных состояний [16, 17]. Они являются основными несущими элементами tensegrity-систем, в которых отдельные сжатые распорки объединяют непрерывные растянутые элементы, охватывающие конструкцию в целом [18]. Сокращение доли сжатых элементов делает tensegrity-системы перспективными для большепролетных зданий с редкой сеткой колонн.

Развитие теории гибкой нити вносит вклад в разработку методов создания предварительных напряжений в сложных вантовых конструкциях [19]. Гибкие нити находят применение для разработки упрощенных расчетных схем тентовых строительных конструкций и пневматических оболочек [20], для которых получение точного аналитического решения осложняется проявлением физически нелинейной работы материала, влиянием изменения температуры эксплуатации и вариацией внутреннего давления воздуха [21, 22].

В исследовании [23] гибкая нить применена для создания расчетной схемы железобетонного перекрытия при разрушении несущей колонны нижерасположенного этажа с целью оценки несущей способности усиленной конструкции, а также для выполнения расчета здания на прогрессирующее обрушение. Расчетная схема гибкой нити используется для теоретического обоснования механизма взаимодействия податливого опорного контура и вантового покрытия, определения равновесной формы поверхности покрытия [24, 25], а также для разработки методик расчета многопролетных вантовых покрытий [26].

Анализ чувствительности комбинированных конструкций к повреждению и провисанию вантовых элементов служит неотъемлемой частью процесса оценки обеспечения их работоспособного состояния [27].

Таким образом, разработка и совершенствование методов расчета гибких вантовых элементов — важная задача, решение которой позволит повысить эффективность современной строительной отрасли.

Вывод, что анализ работы под нагрузкой вантовых строительных конструкций должен выполняться «в больших перемещениях» с учетом нелинейной зависимости между перемещениями узлов и деформациями элементов приведен в публикации [28]. Один из наиболее распространенных приемов анализа нелинейных конструкций — применение итерационных методик, позволяющих найти решение за конечное число шагов и включающих этап построения касательной матрицы жесткости деформируемой системы.

В труде [29] предложена касательная матрица жесткости двухузлового вантового элемента, учитывающая его начальную кривизну. Предложена уточненная матрица жесткости криволинейного вантового элемента в деформированном состоянии с учетом геометрической и физической нелинейности, а также изменения температуры [30]. Рассмотрены усовершенствованные вантовые элементы для применения в геометрически нелинейном конечно-элементном анализе [31].

Для определения горизонтального распора при установлении длины ванты используется метод Ньютона – Рафсона [26], который также находит применение в задаче нахождения равновесного состояния вантовой фермы, состоящей из ряда элементарных модулей [32].

Двухстадийная методика статического анализа вантовых конструкций предложена в исследовании [33]. На первой стадии для определения исходной формы гибких вантовых элементов и их начальных натяжений (преднапряжений) разработана модификация метода плотности сил catenary force density method, учитывающая собственный вес вантовых элементов. Вторая стадия, заключающаяся в анализе вантовой конструкции на действие внешних нагрузок, состоит в итерационном поиске решения путем ми-

нимизации узловых неуравновешенностей методом Ньютона – Рафсона.

Несмотря на множество преимуществ численных методов и постоянный рост доступных ресурсов современной компьютерной техники, их применение вместе с тем требует предварительного задания основных параметров вантовых конструкций. Аналитические подходы к статическому расчету, таким образом, сохраняют свою актуальность, позволяя оценить требуемые жесткостные характеристики и уровень начальных напряжений элементов вантовых систем [34].

Уравнения равновесия в дифференциальной форме для вантового элемента приведены в публикации [35]. В результате их интегрирования с учетом граничных условий получены перемещения концов ванты. Данный подход применим для статического анализа вантовых систем, несущих равномерно распределенные нагрузки.

С целью установления приращений распоров вантовых поясов, используемых при вычислении прогиба вантовой фермы от внешней нагрузки [36], предлагается система нелинейных уравнений, получение коэффициентов которой сопряжено с построением эпюр изгибающих моментов в фиктивной шарнирно опертой балке, а также с операциями интегрирования. Для вычисления длины ванты даны выражения [37], использующие интеграл от квадрата балочных поперечных сил (характеристика нагрузки). Статический анализ вантовых конструкций сопряжен с трудоемкими процедурами расчета коэффициентов и итерационного решения нелинейных систем.

Упрощение методик анализа строительных конструкций и составляющих их элементов достигается использованием тригонометрических рядов. В работах [38, 39] тригонометрические ряды применены для расчета мембраны и композитной балки, в труде [40] — для анализа прямоугольной пластины, в [41] — для выполнения геометрически нелинейного расчета подвесных мостов с балкой жесткости. Делается вывод, что применение тригонометрических рядов позволяет вести расчеты конструкций на действие произвольных нагрузок. Выражения для получения коэффициентов ряда имеют стандартную форму, не требуют построения эпюр внутренних силовых факторов и могут быть реализованы в программных комплексах (ПК) математических расчетов общего назначения, например MathCad или MathLab.

Из приведенного литературного обзора следует вывод о том, что, несмотря на хорошо проработанные к настоящему времени численные методы расчета вантовых систем, реализуемые в специализированных ПК конечно-элементного анализа, аналитические подходы к статическому расчету сохраняют свою актуальность, позволяя получить оптимальные параметры вантовых конструкций, а также служа инструментом оценки правильности принятых расчетных схем и полученных численными методами результатов.

Среди основных требований, предъявляемых к аналитическим решениям, можно выделить их применимость в ПК математических расчетов общего назначения, обладающих широким спектром инструментов численного моделирования для решения задач оптимизации и аппроксимации, а также для графического представления полученных результатов. Разработанные к данному моменту аналитические решения для гибких вант вместе с тем связаны с решением систем нелинейных уравнений, а также с построением и последующим интегрированием эпюр поперечных сил или изгибающих моментов в фиктивной балке, что представляет сложности при выполнении практических расчетов.

Цель исследования — разработка эффективного инструмента анализа гибких вант, требующего выполнения однотипных операций суммирования коэффициентов и их произведений, реализуемых в ПК математических расчетов общего назначения.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Расчетная схема одиночной ванты представляет собой гибкую нить, подверженную действию внешней распределенной нагрузки и закрепленную в опорных узлах (рис. 1).

Приняты следующие предпосылки для дальнейших расчетов. Опорные узлы неподвижны, внешние нагрузки действуют вертикально, а материал работает в линейно-упругой стадии. В исходном (условно ненапряженном) состоянии ванта подвержена действию бесконечно малой поперечной нагрузки, задающей ее начальную форму. Рас-

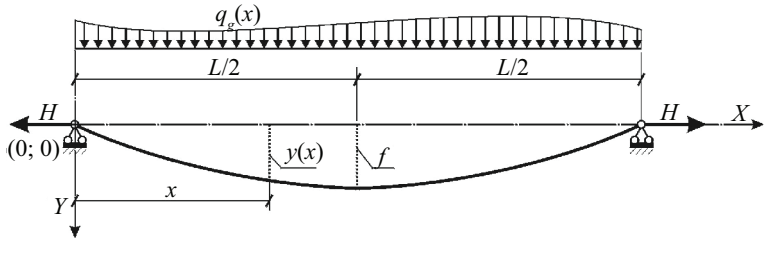

Рис. 1. Расчетная схема гибкой ванты

Fig. 1. Design diagram of the flexible cable

смотрены только пологие ванты, подчиняющиеся следующему условию:

$$k \in \left[k_{\lim,1} \ldots k_{\lim,2} \right], \quad (1)$$

где $k_{\lim,1} = 1/24$, $k_{\lim,2} = 1/8$, — границы диапазона k, являющегося отношением стрелы ванты f к пролету L:

$$k = f/L. \quad (2)$$

С учетом пологости ванты вариация усилия $N(x)$ по длине незначительна и можно записать приближенное равенство:

$$N(x) \approx H, \quad (3)$$

где H — горизонтальная реакция (распор).

Представим форму ванты и внешнюю нагрузку в виде тригонометрических рядов:

$$y(x) = \sum_{m=1}^{n_M} \psi_m \cdot \sin(m \cdot \pi \cdot x/L); \quad (4)$$

$$q(x) = \sum_{m=1}^{n_M} kq_m \cdot \sin(m \cdot \pi \cdot x/L), \quad (5)$$

где $y(x)$ — функция формы ванты; $q(x)$ — функция, аппроксимирующая заданную внешнюю поперечную нагрузку на ванту $q_g(x)$; m — номер элемента ряда; n_M — число учитываемых элементов; ψ_m и kq_m — коэффициенты рядов, представленные в векторной форме:

$$\vec{\psi} = \left(\psi_1 \ldots \psi_m \ldots \psi_{n_M} \right)^T; \quad (6, а)$$

$$\vec{kq} = \left(kq_1 \ldots kq_m \ldots kq_{n_M} \right)^T. \quad (6, б)$$

Коэффициенты разложения внешней нагрузки [42]:

$$kq_m = \frac{2}{L} \cdot \int_0^L \left(q_g(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \right) dx. \quad (7)$$

Дифференциальное уравнение гибкой ванты, подверженной внешней поперечной нагрузке [37], с учетом формулы (3):

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) = \frac{-q(x)}{N}, \quad (8)$$

где $N = N(\vec{\psi})$ — среднее продольное усилие в ванте, определяемое по закону Гука вследствие линейной упругости материала:

$$N = EA \cdot \varepsilon_c, \quad (9)$$

где EA — жесткость ванты на растяжение; $\varepsilon_c = \varepsilon(\vec{\psi})$ — относительная деформация:

$$\varepsilon_c = \frac{L_g}{L_{c,0}} - 1, \quad (10)$$

где $L_g = L_g(\vec{\psi})$ — длина ванты под нагрузкой; $L_{c,0}$ — начальная длина ванты в исходном состоянии.

Начальная длина одиночной ванты $L_{c,0}$ совпадает с так называемой геометрической длиной кривой, имеющей ординату (стрелу) в центре пролета f_0 в исходном (условно ненапряженном) состоянии. Длина ванты под нагрузкой представляет собой геометрическую длину кривой L_g, определяемой функцией формы (4), на участке между опорными узлами. С учетом пологости геометрическая длина может быть выражена следующим образом [37]:

$$L_g = \int_0^L \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^2 - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{dy(x)}{dx} \right)^4 \right) dx. \quad (11)$$

Представим производную от функции $y(x)$ (4) в виде суммы ряда A_m:

$$\frac{d}{dx} y(x) = \frac{\pi}{L} \cdot \sum_{m=1}^{n_M} A_m, \quad (12)$$

где

$$A_m = m \cdot \psi_m \cdot \cos\left(\frac{m \cdot \pi}{L} \cdot x \right). \quad (13)$$

Для выражения длины ванты (11) через коэффициенты функции формы применим выражения для суммы ряда A_m, возведенной во вторую и четвертую степени:

$$\left(\sum_{m=1}^{n_M} A_m \right)^2 = \sum_{m_1=1}^{n_M} \sum_{m_2=1}^{n_M} A_{m_1} \cdot A_{m_2}; \quad (14)$$

$$\left(\sum_{m=1}^{n_M} A_m \right)^4 = \sum_{m_1=1}^{n_M} \sum_{m_2=1}^{n_M} \sum_{m_3=1}^{n_M} \times \times \sum_{m_4=1}^{n_M} A_{m_1} \cdot A_{m_2} \cdot A_{m_3} \cdot A_{m_4}. \quad (15)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Основное уравнение гибкой ванты

Подставив функцию формы гибкой ванты (4) и внешнюю нагрузку (5) в дифференциальное уравнение (8), получим зависимость компонентов вектора $\vec{\psi}$ от коэффициентов разложения нагрузки kq_m:

$$m^2 \cdot \frac{\psi_m}{kq_m} = \frac{1}{N(\vec{\psi})} \cdot \frac{L^2}{\pi^2}, \quad (16)$$

где $m = 1 \ldots n_M$.

При $kq_m = 0$ имеет место тривиальное решение: $\psi_m = 0$. Ненулевые коэффициенты функции формы ψ_m имеют место при $kq_m \neq 0$. Правые части всех уравнений, входящих в выражение (16), не зависят от индекса m и являются одинаковыми при заданном векторе $\vec{\psi}$. Таким образом, для левых частей, соответствующих индексам m и j, можно записать равенство:

$$m^2 \cdot \frac{\psi_m}{kq_m} = j^2 \cdot \frac{\psi_j}{kq_j} \quad (17)$$

при $kq_m \neq 0$ и $kq_j \neq 0$.

Вестник МГСУ • ISSN 1997-0935 (Print) ISSN 2304-6600 (Online) • Том 19. Выпуск 7, 2024
Vestnik MGSU • Monthly Journal on Construction and Architecture • Volume 19. Issue 7, 2024

Из формулы (17) получена зависимость между коэффициентами ряда (4):

$$\psi_m = (j/m)^2 \cdot k_{m,j} \cdot \psi_j, \quad (18)$$

где $k_{m,j}$ — приведенный коэффициент разложения нагрузки по базовому индексу j:

$$k_{m,j} = kq_m/kq_j. \quad (19)$$

Приведенные коэффициенты зависят от типа внешней нагрузки и не зависят от ее интенсивности. Так как ряд (4) — убывающий, следует принимать как можно меньший базовый индекс при условии $kq_j \neq 0$. Для всех нагрузок, кроме обратно симметричных, рекомендуется $j = 1$, в то время как для обратно симметричных нагрузок: $j = 2$.

Подставив выражение (18) в (16), получено уравнение для определения неизвестного коэффициента функции формы ψ_j:

$$\psi_j = \frac{kq_j}{N(\psi_j)} \cdot \frac{L^2}{j^2 \cdot \pi^2}. \quad (20)$$

Для получения усилия в ванте $N(\psi_j)$ необходимо выразить длину ванты в зависимости от коэффициента ψ_j. Подставив (14) и (15) в (11), с учетом (12), получим длину ванты в следующем виде:

$$L_g = L + \frac{\pi^2}{2 \cdot L^2} \cdot \sum_{m_1=1}^{n_M} \sum_{m_2=1}^{n_M} \nu_{m_1} \cdot \nu_{m_2} \cdot I_{m_1,m_2} - \ldots$$
$$\ldots - \frac{\pi^4}{8 \cdot L^4} \sum_{m_1=1}^{n_M} \sum_{m_2=1}^{n_M} \sum_{m_3=1}^{n_M} \times$$
$$\times \sum_{m_4=1}^{n_M} \nu_{m_1} \cdot \nu_{m_2} \cdot \nu_{m_3} \cdot \nu_{m_4} \cdot I_{m_1,m_2,m_3,m_4}, \quad (21)$$

где $v_{m_i} = m_i \cdot \psi_{m_i}$, $m_i \in [1 \ldots n_M]$; I — интегральные выражения произведения тригонометрических функций:

$$I_{m_1,m_2} = \int_0^L \cos(\tau_{m_1} \cdot x) \cdot \cos(\tau_{m_2} \cdot x) dx; \quad (22, а)$$

$$I_{m_1,m_2,m_3,m_4} = \int_0^L \cos(\tau_{m_1} \cdot x) \cdot \cos(\tau_{m_2} \cdot x) \times$$
$$\times \cos(\tau_{m_3} \cdot x) \cdot \cos(\tau_{m_4} \cdot x) dx, \quad (22, б)$$

где $\tau_{m_i} = m_i \cdot \pi/L$.

Преобразовав выражения (22, а) и (22, б), получим:

$$I_{m_1,m_2} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i_1=1}^{2} \frac{\sin\left[\left((-1)^{i_1} \cdot \tau_{m_1} + \tau_{m_2}\right) \cdot L\right]}{(-1)^{i_1} \cdot \tau_{m_1} + \tau_{m_2}}; \quad (23, а)$$

$$I_{m_1,m_2,m_3,m_4} = \frac{1}{8} \cdot \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \times$$
$$\times \sum_{i_3=1}^{2} \frac{\sin\left[\left((-1)^{i_1} \cdot \tau_{m_1} + (-1)^{i_2} \times \right.\right.}{(-1)^{i_1} \cdot \tau_{m_1} + (-1)^{i_2} \times}$$
$$\frac{\left.\left. \times \tau_{m_2} + (-1)^{i_3} \cdot \tau_{m_3} + \tau_{m_4}\right) \cdot L\right]}{\times \tau_{m_2} + (-1)^{i_3} \cdot \tau_{m_3} + \tau_{m_4}}. \quad (23, б)$$

Учитывая, что индексы m_i являются целыми положительными числами, числители выражений (23, а) и (23, б) стремятся к нулю. Таким образом, ненулевые слагаемые в суммах (23, а) и (23, б) будут лишь при условии, когда их знаменатели также стремятся к нулю:

$$D^{i_1}_{m_1,m_2} = (-1)^{i_1} \cdot m_1 + m_2 \to 0; \quad (24, а)$$

$$D^{i_1,i_2,i_3}_{m_1,m_2,m_3,m_4} = (-1)^{i_1} \cdot m_1 + (-1)^{i_2} \cdot m_2 + (-1)^{i_3} \times$$
$$\times m_3 + m_4 \to 0, \quad (24, б)$$

где i_1, i_2, i_3 — индексы, принимающие значения 1 или 2.

Учитывая, что

$$\lim_{a \to 0} \left(\frac{\sin(a \cdot L)}{a} \right) \to L, \quad (25)$$

преобразуем выражения (23, а) и (23, б):

$$I_{m_1,m_2} = L/2 \text{ при условии } m_1 = m_2; \quad (26, а)$$

$$I_{m_1,m_2} = 0 \text{ при условии } m_1 \neq m_2 \quad (26, б)$$

и

$$I_{m_1,m_2,m_3,m_4} = \frac{L}{8} \cdot \vartheta_{m_1,m_2,m_3,m_4}, \quad (27)$$

где $\vartheta_{m_1,m_2,m_3,m_4}$ — количество нулевых комбинаций при заданных значениях индексов m_i: $D^{i_1,i_2,i_3}_{m_1,m_2,m_3,m_4} = 0$.

Учитывая формулы (26), (27) и (18), преобразуем выражение для длины ванты (21) к следующему виду:

$$L_g(\psi_j) = L + \chi_2 \cdot \psi_j^{\,2} - \chi_4 \cdot \psi_j^{\,4}, \quad (28)$$

где χ_2 и χ_4 — коэффициенты:

$$\chi_2 = \frac{\pi^2 \cdot j^4}{4 \cdot L} \sum_{m_1=1}^{n_M} \xi^2_{m_1}; \quad (29, а)$$

$$\chi_4 = \frac{\pi^4 \cdot j^8}{64 \cdot L^3} \cdot \sum_{m_1=1}^{n_M} \sum_{m_2=1}^{n_M} \sum_{m_3=1}^{n_M} \xi_{m_1} \times$$
$$\times \xi_{m_2} \cdot \xi_{m_3} \cdot \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \sum_{i_3=1}^{2} \xi_{m_4} \quad (29, б)$$

при

$$m_4 = (-1)^{i_1} \cdot m_1 + (-1)^{i_2} \cdot m_2 + (-1)^{i_3} \cdot m_3. \quad (30)$$

Коэффициенты $\xi_{m_1} \ldots \xi_{m_3}$ являются отношениями приведенных коэффициентов разложения нагрузки к соответствующему номеру элемента ряда:

$$\xi_m = k_{m,j}/m. \quad (31)$$

Коэффициент ξ_{m_4} также определяется по формуле (31), если значение m_4, найденное по выражению (30), принадлежит интервалу $[1 \ldots n_m]$. При

Вестник МГСУ • ISSN 1997-0935 (Print) ISSN 2304-6600 (Online) • Том 19. Выпуск 7, 2024
Vestnik MGSU • Monthly Journal on Construction and Architecture • Volume 19. Issue 7, 2024

$m_4 \notin [1 \ldots n_m]$ коэффициент ξ_{m_4} принимается равным нулю.

Подставив формулу (18) в (4), получим ординату ванты в заданной точке пролета $x \in (0 \ldots L)$ в зависимости от коэффициента ψ_j:

$$y(x) = \psi_j \cdot \Psi(x), \tag{32}$$

где $\Psi(x)$ — следующая функция:

$$\Psi(x) = j^2 \cdot \sum_{m=1}^{n_M} \mu_m \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right), \tag{33}$$

где μ_m — коэффициент:

$$\mu_m = k_{m,j} / m^2. \tag{34}$$

Выразив коэффициент ψ_j из выражения (32) и подставив его в формулу (28), получим зависимость длины ванты от типа внешней нагрузки, определяемого коэффициентами $k_{m,j}$, и ее ординаты $y(x)$:

$$L_g = \Phi_4(x) \cdot y(x)^4 + \Phi_2(x) \cdot y(x)^2 + L, \tag{35}$$

где

$$\Phi_4(x) = -\chi_4 / \Psi(x)^4; \tag{36, а}$$

$$\Phi_2(x) = \chi_2 / \Psi(x)^2. \tag{36, б}$$

Подставив выражения (9) и (32) в (20), учитывая (10), получим основное уравнение одиночной ванты, связывающее ее ординату $y(x)$ в точке x, продольную жесткость EA, относительную деформацию ε_c и параметры внешней нагрузки:

$$y(x) = \left(\frac{L}{j \cdot \pi}\right)^2 \cdot \frac{\Psi(x) \cdot kq_j}{EA \cdot \varepsilon_c}, \tag{37}$$

где kq_j — коэффициент разложения внешней нагрузки (7), имеющий индекс j.

Учитывая, что компоненты (37), за исключением ординаты $y(x)$ и функции $\Psi(x)$, не зависят от абсциссы x, запишем соотношение между ординатами ванты:

$$y(x) = y(x_g) \cdot \frac{\Psi(x)}{\Psi(x_g)}, \tag{38}$$

где x и x_g — абсциссы двух узлов ванты в пределах пролета; $y(x)$ и $y(x_g)$ — ординаты данных узлов.

Для широко распространенного на практике случая действия нагрузки, состоящей из равномерного загружения левой и правой половин пролета интенсивностью q_L и q_R, при $q_L \neq -q_R$ получено выражение значения функции (33) в центре пролета (при $x = L/2$):

$$\Psi_c^* = \pi^3 / 32. \tag{39}$$

Из (39) видно, что при данном характере загружения ванты значение функции (33) в центре пролета не зависит от значений q_L и q_R (за исключением случая $q_L = -q_R$) и является константой, а выражение (38) принимает упрощенный вид:

$$y(x) = f \cdot \Psi(x) / \Psi_c^*, \tag{40}$$

где $f = y(L/2)$.

Расчет ванты на действие наиболее неблагоприятной внешней нагрузки

Продольная жесткость ванты EA, подверженной действию внешней нагрузки q_g и имеющей заданную ординату $y(x)$ и относительную деформацию ε_c, определяется из решения уравнения (37). Выбор нагрузки q_g из множества нагрузок $q_{g,i}$, действующих на ванту, следует осуществлять по максимуму произведения:

$$D_t = \Psi(L/2) \cdot kq_1. \tag{41}$$

Величина D_t является аналогом так называемой «грузовой характеристики», которая используется в работе [37] для выбора предельной нагрузки, т.е. нагрузки, создающей наибольшее растягивающее усилие в ванте.

Для назначения величины относительной деформации ε_c запишем условия обеспечения несущей способности и нормальной эксплуатации вантового элемента:

$$\Theta_{\lim,1} \leq \Theta_c \leq \Theta_{\lim,2}, \tag{42}$$

где $\Theta_{\lim,1} \ldots \Theta_{\lim,2}$ — допустимый диапазон для Θ_c, являющегося отношением нормального напряжения в ванте σ_c к ее расчетному сопротивлению R_c (коэффициент использования несущей способности):

$$\Theta_c = \frac{\sigma_c}{R_c \cdot \gamma_c}, \tag{43}$$

где γ_c — коэффициент, учитывающий неравномерность усилий по длине ванты:

$$\gamma_c = \frac{H}{N_{\max}}, \tag{44, а}$$

где H — распор в ванте; $N_{\max}$ — максимальное усилие в ванте.

При равномерной поперечной нагрузке, действующей на ванту:

$$\gamma_c = \frac{1}{\sqrt{1 + 16 \cdot k^2}}, \tag{44, б}$$

где k — отношение стрелы ванты к пролету (2).

С учетом формулы (1) диапазон изменения коэффициента γ_c составит:

$$\gamma_c \in [0{,}89 \ldots 0{,}98]. \tag{44, в}$$

Применяя закон Гука, запишем отношение Θ_c (43) через относительную деформацию вантового элемента ε_c:

$$\Theta_c = \frac{\varepsilon_c}{\zeta_c}, \tag{45}$$

где ζ_c — предельно допустимая деформация:

Вестник МГСУ • ISSN 1997-0935 (Print) ISSN 2304-6600 (Online) • Том 19. Выпуск 7, 2024
Vestnik MGSU • Monthly Journal on Construction and Architecture • Volume 19. Issue 7, 2024

$$\zeta_c = \frac{R_c \cdot \gamma_c}{E_c}, \quad (46)$$

где E_c — модуль упругости ванты.

Учитывая формулы (42) и (45), запишем допустимый диапазон относительных деформаций вантового элемента:

$$\varepsilon_c \in \left[\varepsilon_{c,1} \ldots \varepsilon_{c,2}\right], \quad (47)$$

где $\varepsilon_{c,1} = \Theta_{\lim,1} \cdot \zeta_c$ и $\varepsilon_{c,2} = \Theta_{\lim,2} \cdot \zeta_c$.

Для диапазона $\Theta_{\lim,1} \ldots \Theta_{\lim,2}$ предлагается принять следующие граничные значения: $\Theta_{\lim,1} = 0{,}01$ и $\Theta_{\lim,2} = 1{,}0$. При этом верхняя граница $\Theta_{\lim,2}$ соответствует максимально допустимому напряжению, не приводящему к разрыву ванты, в то время как нижняя граница диапазона $\Theta_{\lim,1}$ соответствует минимальному растягивающему напряжению, обеспечивающему работоспособное состояние вантового элемента.

Таким образом, выбрав относительную деформацию ванты ε_c из допустимого диапазона (47), производится определение ее продольной жесткости EA по выражению (37) при ординате $y_q(x)$, которую должна иметь ванта под действием данной нагрузки.

В случае, если вместо ординаты $y_q(x)$ заданной является стрела ванты f_0 в исходном состоянии, для нахождения продольной жесткости необходимо предварительно определить значение $y_q(x)$ в соответствии со следующим алгоритмом:

- найти начальную длину ванты $L_{c,0}$ по формуле (35) при $y = f_0$ и коэффициентах Φ_2 и Φ_4, полученных по (36, а) и (36, б) для нагрузки исходного состояния;
- найти длину ванты L_g под заданной нагрузкой из выражения (10) при относительной деформации ε_c, выбранной из допустимого диапазона (47);
- определить искомую ординату $y_q(x)$ при известной длине L_g и коэффициентах Φ_2 и Φ_4, полученных по выражениям (36, а) и (36, б) для заданной нагрузки q_g и абсциссы x:

$$y(x) = \frac{\sqrt{-2 \cdot \Phi_4 \cdot \left(\Phi_2 - \sqrt{\Phi_2^{\,2} + 4 \cdot \Phi_4 \cdot (L_g - L)}\right)}}{-2 \cdot \Phi_4}. \quad (48, а)$$

В частном случае при равномерно распределенной нагрузке ордината ванты длиной L_g пролетом L в сечении $x_c = L/2$ составит:

$$f = y\left(x_c\right) = \frac{L}{2} \cdot \sqrt{\frac{5}{6}} \times \sqrt{1 - \sqrt{1 - 3{,}6 \cdot \left(\frac{L_g}{L} - 1\right)}}. \quad (48, б)$$

Для проверки деформативности ванты производится определение вертикальных перемещений относительно исходного состояния:

$$\Delta y(x) = y(x) - y_0(x), \quad (49)$$

где $y(x)$ — ордината ванты при действии нагрузки q_g (38); $y_0(x)$ — ордината ванты исходного состояния.

Если стрела в исходном состоянии f_0 и начальная длина ванты $L_{c,0}$ неизвестны, их определение выполняется в следующей последовательности, требуется:

- найти значения функций (36, а) и (36, б) при заданной нагрузке q_g и абсциссе узла ванты x_g;
- найти длину ванты под нагрузкой L_g (35) при известной ординате узла ванты $y(x_g)$;
- найти начальную длину ванты $L_{c,0}$ (10) при известной длине L_g и относительной деформации ε_c;
- определить искомую стрелу f_0 при $L_g = L_{c,0}$ для равномерно распределенной нагрузки исходного состояния по выражению (48, б), в общем случае — по (48, а).

Вертикальные перемещения узлов ванты от действия всех внешних нагрузок

Рассмотрим действие нагрузки p, которая отличается от нагрузки q_g. Продольная жесткость ванты EA, а также стрела в исходном состоянии f_0 и начальная длина ванты $L_{c,0}$, найденные для нагрузки q_g, должны остаться неизменными. Выразим ординату ванты в центре пролета f_p:

$$f_p = f_0 + \Delta f_p, \quad (50)$$

где Δf_p — искомое вертикальное перемещение в центре пролета от нагрузки p относительно исходного состояния.

Подставив выражения (10) и (50) в (37), учитывая формулу (35) при $x = L/2$ и $y(x) = f_p$, получим нелинейное уравнение относительно искомого приращения Δf_p. Учитывая, что величины перемещений намного меньше, чем геометрические размеры конструкции, предлагается отбросить члены уравнения, содержащие перемещения в третьей и более высоких степенях. Получив таким образом квадратное уравнение, решение которого может быть записано в следующем виде:

$$\Delta f_p = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^{\,2} + 4 \cdot A_2 \cdot (A_3 - A_0 \cdot f_0)}}{2 \cdot A_2}, \quad (51)$$

где A_0, A_1, A_2 и A_3 — коэффициенты:

$$A_0 = \Phi_4 \cdot f_0^{\,4} + \Phi_2 \cdot f_0^{\,2} + L - L_{c,0}; \quad (52, а)$$

$$A_1 = A_0 + 2 \cdot f_0^{\,2} \cdot [2 \cdot \Phi_4 \cdot f_0^{\,2} + \Phi_2]; \quad (52, б)$$

$$A_2 = f_0 \cdot [10 \cdot \Phi_4 \cdot f_0^{\,2} + 3 \cdot \Phi_2]; \quad (52, в)$$

$$A_3 = \frac{kq_j}{EA} \cdot \frac{L^2}{j^2 \cdot \pi^2} \cdot L_{c,0} \cdot \Psi_x, \quad (52, г)$$

где Ψ_x, Φ_2 и Φ_4 — коэффициенты, вычисляемые для нагрузки p в сечении с абсциссой $x = L/2$ по уравнениям (33) и (36); kq_j — коэффициент разложения внешней нагрузки p (7), имеющий индекс j.

Вестник МГСУ • ISSN 1997-0935 (Print) ISSN 2304-6600 (Online) • Том 19. Выпуск 7, 2024
Vestnik MGSU • Monthly Journal on Construction and Architecture • Volume 19. Issue 7, 2024

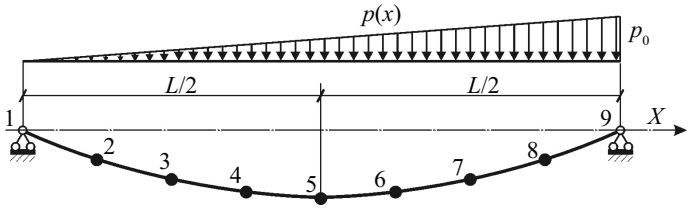

Рис. 2. Схема ванты к численному примеру: показана нумерация узлов и схема действия внешней нагрузки

Fig. 2. Diagram of the cable for the numerical example: node numbering and the external load are shown

Вертикальные перемещения узлов ванты в произвольном сечении x в пределах пролета определяются по формуле (49) с использованием (38), где $y(x_g) = f_p$, а значения функции Ψ вычисляются по (33) для нагрузки p, в сечениях с абсциссами x и $x_g = L/2$.

Численный пример

Рассмотрим ванту пролетом $L = 40$ м, несущую нагрузку, распределенную по треугольнику с максимумом на правой опоре: $p(x) = p_0 \cdot x/L$, где $p_0 = 4{,}905$ кН/м (0,5 тс/м) [43]. Расчетная схема ванты с обозначением номеров узлов, расположенных с шагом 5,0 м по длине пролета, приведена на рис. 2. Начальная длина ванты задана и составляет $L_{c,0} = 41$ м. Продольная жесткость ванты $EA = 9{,}633 \cdot 10^4$ кН (арматурная сталь с модулем упругости $2 \cdot 10^6$ кгс/см^2 и площадью поперечного сечения 4,91 см^2).

Ордината в центре пролета под нагрузкой p без учета деформирования ванты найдена из выражения (48, а) при $L_g = L_{c,0}$ и коэффициентах $\Phi_2 = 0{,}0711$ и $\Phi_4 = -1{,}35 \cdot 10^{-4}$ (36) для $x = L/2$: $y_5 = 3{,}803$ м, где нижний индекс означает номер узла по рис. 2. Ординаты остальных узлов ванты получены из формулы (38) при $x = 5{,}0 \cdot (i - 1)$, где i — номер узла; $x_g = L/2$; $y(x_g) = y_5$; $\Psi(x_g) = 0{,}969$ (33). Вертикальное перемещение узла ванты в центре пролета от действия внешней нагрузки получено по выражению (51): $\Delta f_p = 0{,}104$ м. Ордината ванты в центре пролета в деформированном состоянии: $f_p = 3{,}907$ м. Ординаты ванты во всех рассматриваемых сечениях и узловые перемещения получены по формулам (38) и (49).

Сравнение результатов предложенной методики и результатов, полученных в работе [43], приведено в таблице. Процентные расхождения определены по формуле:

$$\varpi = 200 \cdot \frac{|V_1 - V_2|}{|V_1 + V_2|}, \ \%, \qquad (53)$$

где V_1 и V_2 — сравниваемые значения.

Длина ванты под нагрузкой получена по формуле (35) при $y(x) = f_p$. Относительная деформация ванты и продольное усилие найдены по выражениям (9) и (10): $\varepsilon_c = 1{,}304 \cdot 10^{-3}$ и $N = 125{,}6$ кН. Расхождение с усилием, приведенным в публикации [43] $N_e = 127{,}3$ кН (12,98 тс), составляет $\varpi = 1{,}34$ % (53).

При найденной ординате в центре пролета f_p и относительной деформации под нагрузкой ε_c оценим величину продольной жесткости ванты по формуле (37): $EA_{chk} = 9{,}628 \cdot 10^4$ кН. Расхождение с заданной жесткостью EA составляет 0,05 % (53).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Предложена методика статического анализа гибкой ванты, основанная на применении тригонометрических рядов для решения дифференциального уравнения равновесия. Методика позволяет

Сравнение ординат недеформированной ванты и вертикальных перемещений от действия внешней нагрузки, полученных по предложенной методике, с результатами работы [43]

Comparison of the cable ordinates in the undeformed state and load-induced vertical displacements, obtained by means of the proposed technique, with the results by [43]

Номер узла ванты Node number of the cable	Ординаты Ordinates			Вертикальные перемещения Vertical displacements		
	Предложенная методика, мм The proposed technique, mm	Результаты работы [43], мм Results by [43], mm	Расхождение ϖ, % (53) Discrepancy ϖ, % (53)	Предложенная методика, мм The proposed technique, mm	Результаты работы [43], мм Results by [43], mm	Расхождение ϖ, % (53) Discrepancy ϖ, % (53)
2	1248	1233	1,21	34	34	0,00
3	2377	2349	1,18	65	64	1,55
4	3268	3231	1,14	89	87	2,27
5	3803	3761	1,11	104	101	2,93
6	3862	3822	1,04	105	103	1,92
7	3327	3297	0,91	91	89	2,22
8	2080	2069	0,53	57	56	1,77

выполнять расчет вант на действие произвольных поперечных нагрузок. Коэффициенты разложения внешней нагрузки (7) могут быть найдены для составляющих нагрузки по отдельности и затем просуммированы для получения коэффициентов разложения нагрузки в целом.

Получено уравнение гибкой ванты, связывающее ее ординату, продольную жесткость, относительную деформацию и параметры внешней нагрузки. Предложены методика для определения продольной жесткости ванты в зависимости от заданной относительной деформации, принятой из допустимого диапазона, методика для нахождения вертикальных перемещений ванты от внешней нагрузки, методика определения формы ванты под нагрузкой, а также методика нахождения стрелы и начальной длины ванты в исходном состоянии.

Приведены выражения для получения коэффициентов (29), (33), (36), используемых при расчете длины ванты, которые в отличие от предшествующих работ не требуют построения и последующего интегрирования эпюр поперечных сил и изгибающих моментов в фиктивной шарнирно опертой балке, но содержат однотипные операции суммирования коэффициентов и их произведений. Это более предпочтительно с точки зрения выполнения автоматизированного расчета, способствуя упрощению численного моделирования и оптимизации вантовых конструкций при помощи математических программных комплексов.

Результаты работы вносят вклад в развитие методов анализа многоярусных вантовых систем, вантовых конструкций с балками жесткости, шпренгельных систем и пространственных вантовых покрытий.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. *Энгель Х.* Несущие системы / пер. с нем. Л.А. Андреевой. М. : АСТ Астрель, 2007. 344 с.

2. *Zhang Z., Dong S., Fu X.* Structural design of lotus arena: a large-span suspen-dome roof // International Journal of Space Structures. 2009. Vol. 24. Issue 3. Pp. 129–142. DOI: 10.1260/026635109789867634

3. *Еремеев П.Г.* Висячие конструкции // Строительные материалы. 2022. № 10. С. 62–67. DOI: 10.31659/0585-430X-2022-807-10-62-67. EDN HOJHSN.

4. *Ибрагимов А.М., Гнедина Л.Ю., Долгушева В.В.* Проблемы применения и проектирования арочных комбинированных систем // Вестник Поволжского государственного технологического университета. Серия: Материалы. Конструкции. Технологии. 2021. № 2. С. 25–35. DOI: 10.25686/2542-114X.2021.2.25. EDN PKRRXZ.

5. *Еремеев П.Г., Киселев Д.Б.* Современные арочно-вантовые комбинированные конструкции // Монтажные и специальные работы в строительстве. 2005. № 9. С. 11–16. EDN YPOPTI.

6. *Llorens J.* Detailing masts // Proceedings of the IASS Annual Symposium. Structural membranes 2019. 2019. Pp. 359–366.

7. *Arellano H., Gomez R., Tolentino D.* Parametric analysis of multi-span cable-stayed bridges under alternate loads // The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering. 2019. Vol. 14. Issue 4. Pp. 543–567. DOI: 10.7250/bjrbe.2019-14.457

8. *Al-Rousan R.* The impact of cable spacing on the behavior of cable-stayed bridges // Magazine of Civil Engineering. 2019. No. 7 (91). Pp. 49–59. DOI: 10.18720/MCE.91.5. EDN YJWAIV.

9. *Mushchanov V., Protopopov I., Korsun O., Garifullin M.* Definition of the rational geometry of the cable-beam cover over stadium tribunes // Procedia Engineering. 2015. Vol. 117. Pp. 1001–1012. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.08.209

10. *Yan X., Yang Y., Chen Z., Ma Q.* Mechanical properties of a hybrid cable dome under non-uniform snow distribution // Journal of Constructional Steel Research. 2019. Vol. 153. Pp. 519–532. DOI: 10.1016/j.jcsr.2018.10.022

11. *Xue Y., Luo Y., Wang Y., Xu X., Wan H.P. et al.* A new configuration of Geiger-type cable domes with sliding ridge cables: Computational framework and structural feasibility investigation // Engineering Structures. 2023. Vol. 286. P. 116028. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116028

12. *Krishnan S.* Structural design and behavior of prestressed cable domes // Engineering Structures. 2020. Vol. 209. P. 110294. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110294

13. *Lienhard J., Alpermann H., Gengnagel C., Knippers J.* Active bending, a review on structures where bending is used as a self-formation process // International Journal of Space Structures. 2013. Vol. 28. Issue 3–4. Pp. 187–196. DOI: 10.1260/0266-3511.28.3-4.187

14. *Mazzola C., Stimpfle B., Zanelli A., Canobbio R.* TemporActive Pavilion: first loop of design and prototyping of an ultra-lightweight temporary architecture // Proceedings of the TensiNet Symposium. 2019. Pp. 390–401.

15. *Еремеев П.Г.* Металлические комбинированные конструкции покрытий // Вестник НИЦ Строительство. 2019. № 2 (21). С. 30–40. EDN XGKKKL.

16. *Ситников И.Р., Голиков А.В.* Регулирование усилий в большепролетных конструкциях при разработке рациональной конструктивной формы здания дельфинария в Волгограде // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений.

2018. Т. 14. № 4. С. 278–292. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-4-278-292. EDN XXRMGL.

17. *Окунева М.А., Сахарова Д.В., Хазов П.А.* Самосогласованная система «несущие конструкции — упругое основание» с применением предварительно напряженных вантовых элементов // Приволжский научный журнал. 2022. № 1 (61). С. 81–87. EDN OLITFZ.

18. *Еремеев П.Г.* Вантовая комбинированная конструктивная система «Тенсегрити» // Промышленное и гражданское строительство. 2021. № 1. С. 21–27. DOI: 10.33622/0869-7019.2021.01.21-27. EDN XVAVUG.

19. *Zhao Y., Guo J., Jiang Z., Chen W., Zhou G.* Control method for determining feasible pre-stresses of cable-struts structure // Thin-Walled Structures. 2022. Vol. 174. P. 109159. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109159

20. *Еремеев П.Г.* Тентовые мембраны для ограждающих конструкций покрытий над трибунами стадионов // Промышленное и гражданское строительство. 2015. № 4. С. 33–36. EDN TPXBCT.

21. *Wagner R.* Simplified design tools for single/double curved membranes and inflated cushions // International Journal of Space Structures. 2008. Vol. 23. Issue 4. Pp. 233–241. DOI: 10.1260/026635108786959843

22. *Borgart A.* An approximate calculation method for air inflated cushion structures for design purposes // International Journal of Space Structures. 2010. Vol. 25. Issue 2. Pp. 83–91. DOI: 10.1260/0266-3511.25.2.83

23. *Краснощеков Ю.В., Макеев С.А., Красотина Л.В.* Применение схемы гибкой нити для расчета перекрытий при аварийном отказе колонны связевого каркаса // Научный журнал строительства и архитектуры. 2017. № 4 (48). С. 11–20. EDN ZVZSUP.

24. *Xue S., Li X., Liu Y.* Advanced form finding of cable roof structures integral with supporting frames: numerical methods and case studies // Journal of Building Engineering. 2022. Vol. 60. P. 105204. DOI: 10.1016/j.jobe.2022.105204

25. *Nie R., He B., Hodges D.H., Ma X.* Form finding and design optimization of cable network structures with flexible frames // Computers & Structures. 2019. Vol. 220. Pp. 81–91. DOI: 10.1016/j.compstruc.2019.05.004

26. *Chen S., Yang M., Meng D., Hu S.* Theoretical solution for multi-span continuous cable structures considering sliding // International Journal of Solids and Structures. 2020. Vol. 207. Pp. 42–54. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.09.024

27. *Yuan P., He B., Nie R., Zhang L., Yu H., Wang W. et al.* Member importance prediction and failure response analysis for cable network antennas // Engineering Structures. 2022. Vol. 266. P. 114642. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.114642

28. *Freire A.M.S., Negrao J.H.O., Lopes A.V.* Geometrical nonlinearities on the static analysis of highly flexible steel cable-stayed bridges // Computers & Structures. 2006. Vol. 84. Issue 31–32. Pp. 2128–2140. DOI: 10.1016/j.compstruc.2006.08.047

29. *Chunjiang W., Renpeng W., Shilin D., Ruojun Q.* A new catenary cable element // International Journal of Space Structures. 2003. Vol. 18. Issue 4. Pp. 269–275. DOI: 10.1260/026635103322987986

30. *Costa R.S., Lavall A.C.C., Lanna da Silva R.G., Porcino dos Santos A., Viana H.F.* Cable structures: An exact geometric analysis using catenary curve and considering the material nonlinearity and temperature effect // Engineering Structures. 2022. Vol. 253. P. 113738. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113738

31. *Abad M.S.A., Shooshtari A., Esmaeili V., Riabi A.N.* Nonlinear analysis of cable structures under general loadings // Finite Elements in Analysis and Design. 2013. Vol. 73. Pp. 11–19. DOI: 10.1016/j.finel.2013.05.002

32. *Ma S., Yuan X.F., Deng M., Yang L.* Minimal mass design of a new cable truss in two states // Mechanics Research Communications. 2022. Vol. 125. P. 103995. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2022.103995

33. *Greco L., Impollonia N., Cuomo M.* A procedure for the static analysis of cable structures following elastic catenary theory // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. Issue 7–8. Pp. 1521–1533. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.01.001

34. *Wagner R.* Bauen mit seilen und membranen. Berlin : Beuth Verlag GmbH, 2016. 517 p.

35. *Huang Y., Lan W.* Static analysis of cable structure // Applied Mathematics and Mechanics. 2006. Vol. 27. Issue 10. Pp. 1425–1430. DOI: 10.1007/s10483-006-1015-y

36. *Kmet S., Kokorudova Z.* Non-linear closed-form computational model of cable trusses // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2009. Vol. 44. Issue 7. Pp. 735–744. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.03.004

37. *Москалев Н.С.* Конструкции висячих покрытий. М. : Стройиздат, 1980. 336 с.

38. *Турусов Р.А., Андреев В.И., Цыбин Н.Ю.* Общее решение задачи об изгибе многослойной балки в рядах Фурье // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 4. С. 34–42. DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-34-42. EDN ZHAIYZ.

39. *Чернышов А.Д., Горяйнов В.В., Кузнецов С.Ф., Никифорова О.Ю.* Применение быстрых разложений для построения точных решений задачи о прогибе прямоугольной мембраны под действием переменной нагрузки // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 70. С. 127–142. DOI: 10.17223/19988621/70/11. EDN REGKRY.

40. *Yessenbayeva G.A., Akhanov F.M., Makazhanova T.Kh.* On the calculation of rectangular plates by the trigonometric series // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. 2019. Vol. 94. Issue 2. Pp. 115–120. DOI: 10.31489/2019M2/115-120

41. *Shah N.D., Shah D.A., Desai J.A., Patil H.S.* Analysis of long span suspension bridges using series method // International Journal of Advanced Engineering Technology. 2010. Vol. 1. Issue 1. Pp. 84–94.

42. *Tolstov G.P.* Fourier series. Dover Publications, 2012. 352 p.

43. *Дмитриев Л.Г., Касилов А.В.* Вантовые покрытия (расчет и конструирование). Киев : Будівельник, 1974. 271 с.

Поступила в редакцию 9 января 2024 г.
Принята в доработанном виде 27 апреля 2024 г.
Одобрена для публикации 27 апреля 2024 г.

Об авторах: **Андрей Владимирович Чесноков** — кандидат технических наук, доцент кафедры строительного производства; **Липецкий государственный технический университет (ЛГТУ)**; 398055, г. Липецк, ул. Московская, д. 30; РИНЦ ID: 473598, Scopus: 57170021900, ResearcherID: U-4758-2018, ORCID: 0000-0003-3687-0510; andreychess742@mail.ru;

Виталий Витальевич Михайлов — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительного производства; **Липецкий государственный технический университет (ЛГТУ)**; 398055, г. Липецк, ул. Московская, д. 30; РИНЦ ID: 821209, Scopus: 57215327886, ResearcherID: ISU-9851-2023, ORCID: 0000-0001-8274-9346; mmvv46@rambler.ru.

Вклад авторов:
Чесноков А.В. — развитие методологии, вывод основных формул, написание исходного текста.
Михайлов В.В. — научное руководство, концепция исследования, научное редактирование текста, итоговые выводы.
Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Engel H. *Support systems.* Moscow, AST Astrel' Publ., 2007; 344. (rus.).

2. Zhang Z., Dong S., Fu X. Structural design of lotus arena: a large-span suspen-dome roof. *International Journal of Space Structures.* 2009; 24(3):129-142. DOI: 10.1260/026635109789867634

3. Eremeev P.G. Hanging structures. *Construction Materials.* 2022; 10:62-67. DOI: 10.31659/0585-430X-2022-807-10-62-67. EDN HOJHSN. (rus.).

4. Ibragimov A.M., Gnedina L.Iu., Dolgusheva V.V. Problems of application and design of combined arc systems. Vestnik of Volga State University of Technology. *Series: Materials. Constructions. Technologies.* 2021; 2:25-35. DOI: 10.25686/2542-114X.2021.2.25. EDN PKRRXZ. (rus.).

5. Eremeev P.G., Kiselev D.B. Modern combined arch-backstays constructions. *Mounting and Special Works in Construction.* 2005; 9:11-16. EDN YPOPTI. (rus.).

6. Llorens J. Detailing masts. Proceedings of the IASS Annual Symposium. *Structural membranes 2019.* 2019; 359-366.

7. Arellano H., Gomez R., Tolentino D. Parametric analysis of multi-span cable-stayed bridges under alternate loads. *The Baltic Journal of Road and Bridge Engineering.* 2019; 14(4):543-567. DOI: 10.7250/bjrbe.2019-14.457

8. Al-Rousan R. The impact of cable spacing on the behavior of cable-stayed bridges. *Magazine of Civil Engineering.* 2019; 7(91):49-59. DOI: 10.18720/MCE.91.5. EDN YJWAIV.

9. Mushchanov V., Protopopov I., Korsun O., Garifullin M. Definition of the rational geometry of the cable-beam cover over stadium tribunes. *Procedia Engineering.* 2015; 117:1001-1012. DOI: 10.1016/j.proeng.2015.08.209

10. Yan X., Yang Y., Chen Z., Ma Q. Mechanical properties of a hybrid cable dome under non-uniform snow distribution. *Journal of Constructional Steel Research.* 2019; 153:519-532. DOI: 10.1016/j.jcsr.2018.10.022

11. Xue Y., Luo Y., Wang Y., Xu X., Wan H.P. et al. A new configuration of Geiger-type cable domes with sliding ridge cables: Computational framework and structural feasibility investigation. *Engineering Structures.* 2023; 286:116028. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.116028

12. Krishnan S. Structural design and behavior of prestressed cable domes. *Engineering Structures.* 2020; 209:110294. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110294

13. Lienhard J., Alpermann H., Gengnagel C., Knippers J. Active bending, a review on structures where bending is used as a self-formation process. *International Journal of Space Structures.* 2013; 28(3-4):187-196. DOI: 10.1260/0266-3511.28.3-4.187

14. Mazzola C., Stimpfle B., Zanelli A., Canobbio R. TemporActive Pavilion: first loop of design and prototyping of an ultra-lightweight temporary architecture. *Proceedings of the TensiNet Symposium.* 2019; 390-401.

15. Yeremeyev P. The metal hybrid structures of roofs. *Bulletin of the Scientific Research Center "Construction".* 2019; 2(21):30-40. EDN XGKKKL. (rus.).

16. Sitnikov I.R., Golikov A.V. Adjustment of forces in large-span structures in the design of a rational constructive form of a dolphinarium in Volgograd. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2018; 14(4):278-292. DOI: 10.22363/1815-5235-2018-14-4-278-292. EDN XXRMGL. (rus.).

17. Okuneva M.A., Sakharova D.V., Khazov P.A. Self-consistent system “Load-bearing structures — elastic base” with the use of prestressed cable-stayed elements. *Privolzhsky Scientific Journal.* 2022; 1(61):81-87. EDN OLITFZ. (rus.).

18. Yeremeyev P.G. Cable-stayed combined structural system “Tensegrity”. *Industrial and Civil Engineering.* 2021; 1:21-27. DOI: 10.33622/0869-7019.2021.01.21-27. EDN XVAVUG. (rus.).

19. Zhao Y., Guo J., Jiang Z., Chen W., Zhou G. Control method for determining feasible pre-stresses of cable-struts structure. *Thin-Walled Structures.* 2022; 174:109159. DOI: 10.1016/j.tws.2022.109159

20. Eremeev P.G. Tent membranes for enveloping structures of roof over stadium tribunes. *Industrial and Civil Engineering.* 2015; 4:33-36. EDN TPXBCT. (rus.).

21. Wagner R. Simplified design tools for single/double curved membranes and inflated cushions. *International Journal of Space Structures.* 2008; 23(4):233-241. DOI: 10.1260/026635108786959843

22. Borgart A. An approximate calculation method for air inflated cushion structures for design purposes. *International Journal of Space Structures.* 2010; 25(2):83-91. DOI: 10.1260/0266-3511.25.2.83

23. Krasnoshchekov Yu.V., Makeev S.A., Krasotina L.V. Application of a chart of flexible filament for the calculation of ceiling at crash of column of framework. *Russian Journal of Building Construction and Architecture.* 2017; 4(48):11-20. EDN ZVZSUP. (rus.).

24. Xue S., Li X., Liu Y. Advanced form finding of cable roof structures integral with supporting frames: numerical methods and case studies. *Journal of Building Engineering.* 2022; 60:105204. DOI: 10.1016/j.jobe.2022.105204

25. Nie R., He B., Hodges D.H., Ma X. Form finding and design optimization of cable network structures with flexible frames. *Computers & Structures.* 2019; 220:81-91. DOI: 10.1016/j.compstruc.2019.05.004

26. Chen S., Yang M., Meng D., Hu S. Theoretical solution for multi-span continuous cable structures considering sliding. *International Journal of Solids and Structures.* 2020; 207:42-54. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2020.09.024

27. Yuan P., He B., Nie R., Zhang L., Yu H., Wang W. et al. Member importance prediction and failure response analysis for cable network antennas. *Engineering Structures.* 2022; 266:114642. DOI: 10.1016/j.engstruct.2022.114642

28. Freire A.M.S., Negrao J.H.O., Lopes A.V. Geometrical nonlinearities on the static analysis of highly flexible steel cable-stayed bridges. *Computers & Structures.* 2006; 84(31-32):2128-2140. DOI: 10.1016/j.compstruc.2006.08.047

29. Chunjiang W., Renpeng W., Shilin D., Ruojun Q. A new catenary cable element. *International Journal of Space Structures.* 2003; 18(4):269-275. DOI: 10.1260/026635103322987986

30. Costa R.S., Lavall A.C.C., Lanna da Silva R.G., Porcino dos Santos A., Viana H.F. Cable structures: An exact geometric analysis using catenary curve and considering the material nonlinearity and temperature effect. *Engineering Structures.* 2022; 253:113738. DOI: 10.1016/j.engstruct.2021.113738

31. Abad M.S.A., Shooshtari A., Esmaeili V., Riabi A.N. Nonlinear analysis of cable structures under general loadings. *Finite Elements in Analysis and Design.* 2013; 73:11-19. DOI: 10.1016/j.finel.2013.05.002

32. Ma S., Yuan X.F., Deng M., Yang L. Minimal mass design of a new cable truss in two states. *Mechanics Research Communications.* 2022; 125:103995. DOI: 10.1016/j.mechrescom.2022.103995

33. Greco L., Impollonia N., Cuomo M. A procedure for the static analysis of cable structures following elastic catenary theory. *International Journal of Solids and Structures.* 2014; 51(7-8):1521-1533. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2014.01.001

34. Wagner R. *Bauen mit seilen und membranen.* Berlin, Beuth Verlag GmbH, 2016; 517.

35. Huang Y., Lan W. Static analysis of cable structure. *Applied Mathematics and Mechanics.* 2006; 27(10):1425-1430. DOI: 10.1007/s10483-006-1015-y

36. Kmet S., Kokorudova Z. Non-linear closed-form computational model of cable trusses. *International Journal of Non-Linear Mechanics.* 2009; 44(7):735-744. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2009.03.004

37. Moskalev N.S. *Hanging roof structures.* Moscow, Stroyizdat Publ., 1980; 336. (rus.).

38. Turusov R.A., Andrev V.I., Tsybin N.Yu. General solution of bending of multilayer beams in fourier series. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings.* 2017; 4:34-42. DOI: 10.22363/1815-5235-2017-4-34-42. EDN ZHAIYZ. (rus.).

39. Chernyshov A.D., Goryainov V.V., Kuznetsov S.F., Nikiforova O.Yu. Application of fast expansions to obtain exact solutions to a problem on rectangular membrane deflection under alternating load. *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics.* 2021; 70:127-142. DOI: 10.17223/19988621/70/11. EDN REGKRY. (rus.).

40. Yessenbayeva G.A., Akhanov F.M., Makazhanova T.Kh. On the calculation of rectangular plates by the trigonometric series. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series.* 2019; 94(2):115-120. DOI: 10.31489/2019M2/115-120

41. Shah N.D., Shah D.A., Desai J.A., Patil H.S. Analysis of long span suspension bridges using series method. *International Journal of Advanced Engineering Technology.* 2010; 1(1):84-94.

42. Tolstov G.P. *Fourier Series.* Dover Publications Publ., 2012; 352.

43. Dmitriyev L.G., Kasilov A.V. *Cable-stayed roofs (calculation and design).* Kiev, Budivel’nik Publ., 1974; 271. (rus.).

Received January 9, 2024.
Adopted in revised form on April 27, 2024.
Approved for publication on April 27, 2024.

Bionotes: **Andrei V. Chesnokov** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Construction Production; **Lipetsk State Technical University (LSTU)**; 30 Moskovskaya st., Lipetsk, 398055, Russian Federation; ID RSCI: 473598, Scopus: 57170021900, ResearcherID: U-4758-2018, ORCID: 0000-0003-3687-0510; andreychess742@mail.ru;

Vitalii V. Mikhailov — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Construction Production; **Lipetsk State Technical University (LSTU)**; 30 Moskovskaya st., Lipetsk, 398055, Russian Federation; ID RSCI: 821209, Scopus: 57215327886, ResearcherID: ISU-9851-2023, ORCID: 0000-0001-8274-9346; mmvv46@rambler.ru.

Contribution of the authors:
Andrei V. Chesnokov — development of the methodology, derivation of the main mathematical expressions, preparation of the text version.
Vitalii V. Mikhailov — scientific supervision, research concept, scientific text editing, final conclusions.
The authors declare no conflicts of interests.