Нечетко-случайные процессы с ортогональными и независимыми приращениями

В. Л. Хацкевич, О. А. Махинова

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия

Аннотация. В данной работе исследованы случайные процессы с нечеткими состояниями и непрерывным временем. Основное внимание уделено классу нечетко-случайных процессов с ортогональными и независимыми приращениями. Установлены характерные свойства дисперсий и ковариационных функций таких процессов. Рассмотрены гауссовские и винеровские нечетко-случайные процессы, являющиеся аналогами соответствующих вещественных случайных процессов. Полученные результаты опираются на свойства нечетко-случайных величин и классические результаты теории вещественных случайных процессов с ортогональными и независимыми приращениями. Примеры характеризуют возможность применения развитой теории к нечетко-случайным процессам треугольного вида.

Ключевые слова: нечетко-случайные процессы с ортогональными и независимыми приращениями, гауссовские и винеровские нечетко-случайные процессы.

DOI 10.14357/20718594230404 **EDN** SNMXIX

Введение

В настоящей работе изучены случайные процессы с нечеткими состояниями (нечетко-случайные процессы). При этом предполагается, что сечение нечетко-случайного процесса в любой момент времени из заданного промежутка вещественной оси представляет собой нечетко-случайную величину. В работе [1] изучены свойства нечетких ожиданий (ожиданий) и ковариационных функций нечетко-случайных процессов.

В данной работе основное внимание уделено введенному в статье классу нечетко-случайных процессов с ортогональными и независимыми приращениями. Для них установлены характерные свойства дисперсий и ковариационных функций, являющиеся модификацией известных утверждений для вещественных случайных процессов с ортогональными и независимыми приращениями. А именно – монотонность дисперсий и специальное представление ковариационной функции посредством дисперсии.

Кроме того, в настоящей статье введены и исследованы гауссовские и винеровские нечетко-случайные процессы, являющиеся аналогами соответствующих вещественных случайных процессов. В частности, рассмотрены гауссовские и винеровские нечетко-случайные процессы треугольного вида. Полученные в данной работе результаты ранее не отмечались. Представляется, что они значимы и актуальны в задачах математического моделирования динамики стохастических систем с неполными данными.

В своем исследовании мы опираемся на известные результаты по теории нечетко-случайных величин [2-5] и классические результаты теории вещественных случайных процессов [6, гл. V, 7].

Отметим отличие нашего подхода и результатов от работ, посвященных случайным процессам с дискретными нечеткими состояниями и непрерывным временем (см., напр., [8-10]).

Ниже, под нечетким числом $\tilde{z}$, заданным на универсальном пространстве R – вещественных чисел, будем понимать совокупность упорядоченных пар $\left(x, \mu_{\tilde{z}}(x)\right)$, где функция принадлежности $\mu_{\tilde{z}}: R \rightarrow [0,1]$, определяет степень принадлежности $\forall x \in R$ множеству $\tilde{z}$ ([11, гл. 5, 12, гл. 2-3]).

Мы будем использовать интервальное представление нечетких чисел. А именно, каждому нечеткому числу поставим в соответствие совокупность его α-интервалов.

Как известно, множество α-уровня нечеткого числа $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ определяется соотношением

$$Z_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\} \; (\alpha \in (0,1]), Z_0 = cl\{x | \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\},$$

где cl – обозначает замыкание множества

Будем считать, что все α-уровни нечеткого числа – замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую границу интервала Z_α через $z^-(\alpha)$, а правую через $z^+(\alpha)$. Таким образом, $Z_\alpha = [z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$. Функции $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют, соответственно, левым и правым α-индексами (индексами) нечеткого числа. Ниже предполагается, что они квадратично суммируемы на [0,1]. Совокупность таких нечетких чисел будем обозначать J.

Под суммой нечетких чисел понимается нечеткое число, индексы которого являются суммами соответствующих индексов слагаемых. Умножение нечеткого числа на положительное число означает умножение индексов на это число. Умножение на отрицательное вещественное число означает умножение индексов на это число и перемену их местами. Равенство нечетких чисел понимается как равенство всех соответствующих α-индексов (при $\forall\alpha \in [0,1]$).

Множество J можно метризовать различными способами. В частности, для нечетких чисел $\tilde{z}_1, \tilde{z}_2 \in J$ определяют метрику следующим равенством (см., напр., [13])

$$d(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) = \left(\int_0^1 \left(\left(z_1^-(\alpha) - z_2^-(\alpha) \right)^2 + \left(z_1^+(\alpha) - z_2^+(\alpha) \right)^2 \right) d\alpha \right)^{1/2}, \quad (1)$$

где $z_i^-(\alpha)$ и $z_i^+(\alpha)$ являются левым и, соответственно, правым индексами $\tilde{z}_i (i = 1,2)$.

1. Нечетко-случайные величины. Нечеткие ожидания, ожидания и ковариации

Пусть (Ω, Σ, P) – вероятностное пространство, где Ω – множество элементарных событий, Σ – σ-алгебра, состоящая из подмножеств множества Ω, P – вероятностная мера.

В метрическом пространстве J с метрикой (1) рассмотрим семейство борелевских подмножеств $\mathcal{F}$, как наименьшую σ-алгебру подмножеств из J, содержащих все открытые и все замкнутые подмножества J.

Отображение $\tilde{X}: \Omega \rightarrow J$ называют измеримым или нечетко-случайной величиной (кратко Н.С.В.), если для любого подмножества $M \in \mathcal{F}$ подмножество из Ω вида $\{\omega \in \Omega: \tilde{X}(\omega) \in M\}$ входит в σ-алгебру Σ.

Индексы нечеткого числа $\tilde{X}(\omega)$ будем обозначать $X^-(\omega, \alpha)$ и $X^+(\omega, \alpha)$. Функции $X^-(\omega, \alpha)$ и $X^+(\omega, \alpha)$ называются, соответсвенно, левым и правым индексом Н.С.В. $\tilde{X}(\omega)$.Как отмечено в [2, 3] (см. также [5]) при $\forall\alpha \in [0,1]$ индексы $X^-(\omega, \alpha)$ и $X^+(\omega, \alpha)$ являются измеримыми по ω вещественными функциями, т.е. случайными величинами.

В дальнейшем рассматривается класс $\mathcal{X}$ Н.С.В., для которых индексы $X^-(\omega, \alpha)$ и $X^+(\omega, \alpha)$ являются квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0,1]$ функциями.

Для Н.С.В. $\tilde{X}(\omega)$ положим

$$x^-(\alpha) = EX^-(\omega, \alpha), \qquad x^+(\alpha) = EX^+(\omega, \alpha). \quad (2)$$

Здесь и ниже символ E обозначает математическое ожидание случайной величины, т.е. для случайной величины $\xi(\omega)$ полагаем $E\xi = \int_\Omega \xi(\omega) dP$.

Нечеткое число с индексами, определяемыми формулой (2), называют нечетким ожиданием Н.С.В. $\tilde{X}$ (см., напр., [5]). Будем обозначать его $M(\tilde{X})$, а его индексы – $[M(\tilde{X})]_{\alpha}^{\pm}$.

Определенное формулой (2) нечеткое ожидание обладает свойствами, аналогичными свойствам математических ожиданий вещественных случайных величин (см., напр., [5, 14]).

Рассмотрим вопрос о дефазификации нечеткого ожидания.

Как известно, среднее нечеткого числа $\tilde{z}$ при интервальном подходе определяется равенством [15]

$$z_{\text{ср}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(z^-(\alpha) + z^+(\alpha)\right)d\alpha, \quad (3)$$

где $z^{\pm}(\alpha)$ – индексы нечеткого числа $\tilde{z}$.

В связи с (3) ожидание $m(\tilde{X})$ Н.С.В. $\tilde{X} \in \mathcal{X}$ определяют как усредняющий функционал посредством формулы

$$m(\tilde{X}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\left[M(\tilde{X})\right]^-(\alpha) + \left[M(\tilde{X})\right]^+(\alpha)\right)d\alpha, \quad (4)$$

где $M^{\pm}(\alpha)$ – индексы нечеткого ожидания $M(\tilde{X})$, задаваемые формулой (2). По существу, это один из способов дефазификации нечеткого ожидания.

Свойства ожиданий Н.С.В. обсуждаются, например, в [5, 14].

Для Н.С.В. $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ ковариацию определяют формулой ([3], [16, гл. 6])

$$cov(\tilde{X},\tilde{Y}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(cov(X_\alpha^-, Y_\alpha^-) + cov(X_\alpha^+, Y_\alpha^+)\right)d\alpha, \quad (5)$$

а дисперсию $D(\tilde{X}) = cov(\tilde{X},\tilde{X})$. В (5) ковариации вещественных случайных величин $X_\alpha^{\pm}$ и $Y_\alpha^{\pm}$ определены стандартной [6, гл. I] формулой

$$cov(X_\alpha^{\pm}, Y_\alpha^{\pm}) = E\left(X_\alpha^{\pm} - E(X_\alpha^{\pm})\right)\left(Y_\alpha^{\pm} - E(Y_\alpha^{\pm})\right).$$

Свойства ковариации Н.С.В. описаны в [3, 16, гл. 6].

2. Случайные процессы с нечеткими состояниями и непрерывным временем

Пусть $[t_0, T]$ расширенный отрезок числовой оси, $\mathcal{X}$ – совокупность Н.С.В. с квадратично суммируемыми на $\Omega \times [0,1]$ индексами.

Случайным процессом с нечеткими состояниями и непрерывным временем или нечетко-случайным процессом (Н.С.П.) будем называть отображение $\tilde{X}: [t_0, T] \to \mathcal{X}$, т.е. функцию $\tilde{X}(\omega, t)$, значениями которой при $\forall t \in [t_0, T]$ являются Н.С.В. из $\mathcal{X}$. Обозначим α-индексы Н.С.П. $\tilde{X}(\omega, t)$ через $X_\alpha^{\pm}(\omega, t)$.

Ниже будем рассматривать такие Н.С.П., для которых вещественные функции $X_\alpha^{\pm}(\omega, t)$ квадратично суммируемы по совокупности переменных на $\Omega \times [0,1] \times [t_0, T]$.

Определим нечеткое ожидание $M\left(\tilde{X}(\omega, t)\right)$ Н.С.П. $\tilde{X}(\omega, t)$ при каждом $t \in [t_0, T]$ как нечеткое ожидание, соответствующей Н.С.В., т.е. нечеткозначную функцию, имеющую индексы $\left[M\left(\tilde{X}(\omega, t)\right)\right]_\alpha^{\pm} = \int_\Omega X_\alpha^{\pm}(\omega, t)dP$.

Ниже будем обозначать Н.С.П. $\tilde{X}(\omega, t)$ коротко $\tilde{X}(t)$. Из определения нечеткого ожидания Н.С.П. и свойств нечетких ожиданий Н.С.В. вытекает

Утверждение 1 [1]**.** *Справедливы следующие свойства нечетких ожиданий Н.С.П.:*

1) Нечеткое ожидание от неслучайной функции $\tilde{z}: [t_0, T] \to J$ равно самой этой функции $M(\tilde{z}(t)) = \tilde{z}(t)$.

2) Неслучайный скалярный множитель $\varphi: [t_0, T] \to R$ можно выносить за знак нечеткого ожидания

$$M\left(\varphi(t)\tilde{X}(t)\right) = \varphi(t)M\left(\tilde{X}(t)\right),$$

где $\tilde{X}(t)$ – Н.С.П.

3) Нечеткое ожидание суммы двух Н.С.П. равно сумме нечетких ожиданий слагаемых

$$M\left(\tilde{X}(t)+\tilde{Y}(t)\right)=M\left(\tilde{X}(t)\right)+M\left(\tilde{Y}(t)\right).$$

Ожидание $m\left(\tilde{X}(t)\right)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ определим при каждом $t\in[t_0,T]$ как ожидание соответствующей Н.С.В. $\tilde{X}(t)$. Ожидание $m\left(\tilde{X}(t)\right)$ при любом $t\in[t_0,T]$ обладает свойствами, аналогичными приведенным в утверждении 1 [1].

Пример 1. Пусть случайные числовые (вещественные) процессы $\xi_i(\omega,t)$ $(i=1,2,3;\ \omega\in\Omega,t\in[t_0,T])$ квадратично суммируемы на $\Omega\times[t_0,T]$ и таковы, что $\xi_1(\omega,t)<\xi_2(\omega,t)<\xi_3(\omega,t)$ при всех $\omega\in\Omega,t\in[t_0,T]$.

Рассмотрим Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, для которого при каждом $\omega\in\Omega,t\in[t_0,T]$ нечеткое число $\tilde{X}(\omega,t)$ имеет треугольный вид $\left(\xi_1(\omega,t),\xi_2(\omega,t),\xi_3(\omega,t)\right)$. То есть функция принадлежности $\tilde{X}(\omega,t)$ при любом $\omega\in\Omega,t\in[t_0,T]$ описывается формулой

$$\mu_{\omega,t}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-\xi_1(\omega,t)}{\xi_2(\omega,t)-\xi_1(\omega,t)}, \text{если } x\in[\xi_1(\omega,t),\xi_2(\omega,t)];\\ \dfrac{x-\xi_3(\omega,t)}{\xi_2(\omega,t)-\xi_3(\omega,t)}, \text{если } x\in[\xi_2(\omega,t),\xi_3(\omega,t)];\\ 0, \qquad \text{в противном случае.}\end{cases}$$

В этом случае

$$X_\alpha^-(\omega,t)=(1-\alpha)\xi_1(\omega,t)+\alpha\xi_2(\omega,t), X_\alpha^+(\omega,t)=(1-\alpha)\xi_3(\omega,t)+\alpha\xi_2(\omega,t) \qquad (6)$$

Тогда нечеткое ожидание $M\big(\tilde{X}(t)\big)$ определяется формулами для α-индексов

$$\big[M\big(\tilde{X}\big)\big]_\alpha^-(t)=(1-\alpha)\int\limits_\Omega\xi_1(\omega,t)dP+\alpha\int\limits_\Omega\xi_2(\omega,t)dP=$$
$$=(1-\alpha)E\xi_1+\alpha E\xi_2\ (\forall\alpha\in[0,1])$$

и

$$\big[M\big(\tilde{X}\big)\big]_\alpha^+(t)=(1-\alpha)\int\limits_\Omega\xi_3(\omega,t)dP+\alpha\int\limits_\Omega\xi_2(\omega,t)dP=$$
$$=(1-\alpha)E\xi_3+\alpha E\xi_2\ (\forall\alpha\in[0,1]).$$

Ниже рассмотрим понятие ковариационной функции Н.С.П. и ее свойства. Ковариационной функцией Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ в соответствии с (5) назовем вещественную величину

$$K_{\tilde{X}}(t,s)=cov\left(\tilde{X}(t),\tilde{X}(s)\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(K_{X_\alpha^-}(t,s)+K_{X_\alpha^+}(t,s)\right)d\alpha. \qquad (7)$$

Здесь $K_{X_\alpha^-}(t,s)$ и $K_{X_\alpha^+}(t,s)$ – ковариационные функции вещественных случайных процессов $X_\alpha^-(\omega,t)$ и $X_\alpha^+(\omega,t)$ соответственно, равные

$$K_{X_\alpha^\pm}(t,s)=E\left[\left(X_\alpha^\pm(\omega,t)-EX_\alpha^\pm(\omega,t)\right)\left(X_\alpha^\pm(\omega,s)-EX_\alpha^\pm(\omega,s)\right)\right].$$

Дисперсия Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ определяется равенством $D_{\tilde{X}}(t)=K_{\tilde{X}}(t,t)$.

Отметим, что (7) является модификацией на нечеткий случай стандартного определения ковариационной функции вещественных случайных процессов (см., напр., [6, гл. V]).

Согласно (7) и свойствам ковариации Н.С.В. имеет место

Утверждение 2 [1]**.** *Ковариационная функция Н.С.П. обладает следующими свойствами:*

1) Симметричность. Для Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ при $\forall t_1,t_2\in[t_0,T]$ имеет место равенство

$$K_{\tilde{X}}(t_1,t_2)=K_{\tilde{X}}(t_2,t_1).$$

2) Если $\tilde{X}(t)$ – Н.С.П. и $\varphi(t)$ – неслучайная числовая функция, то для случайного процесса $\tilde{Y}(t)=\varphi(t)\tilde{X}(t)$ ковариационная функция $K_{\tilde{Y}}(t_1,t_2)$ имеет вид $K_{\tilde{Y}}(t_1,t_2)=\varphi(t_1)\varphi(t_2)K_{\tilde{X}}(t_1,t_2)$ при условии, что $\varphi(t_1)\varphi(t_2)>0$.

3) Если $\tilde{Y}(t) = \tilde{X}(t) + \varphi(t)$, *то* $K_{\tilde{Y}}(t_1, t_2) = K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$.

4) Справедливо соотношение $|K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_{\tilde{X}}(t_1) D_{\tilde{X}}(t_2)}$.

Пример 2 [1]. Пусть выполнены условия примера 1 и дополнительно вещественные случайные процессы $\xi_1(t), \xi_2(t)$, а также $\xi_2(t), \xi_3(t)$ попарно некоррелированны. Тогда ковариационная функция $K_{\tilde{X}}(t_1, t_2)$ Н.С.П. треугольного вида $\tilde{X}(t) = \left(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)\right)$ выражается через ковариационные функции $K_{\xi_1}(t_1, t_2), K_{\xi_2}(t_1, t_2), K_{\xi_3}(t_1, t_2)$ случайных процессов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ формулой

$$K_{\tilde{X}}(t_1, t_2) = \frac{1}{6}\left\{K_{\xi_1}(t_1, t_2) + 2K_{\xi_2}(t_1, t_2) + K_{\xi_3}(t_1, t_2)\right\}. \quad (8)$$

3. Нечетко-случайные процессы с ортогональными приращениями

Пусть $\{\xi(t), t \geq 0\}$ – вещественный гильбертов случайный процесс, т.е. $E\{\xi^2(t) < \infty\}$ для $\forall t > 0$. Как известно, приращением случайного процесса $\xi(t)$ на промежутке $(t, s]$, где $0 \leq t \leq s$, называется случайная величина $\Delta\xi(t, s) = \xi(s) - \xi(t)$. Важным классом случайных процессов являются случайные процессы с ортогональными приращениями. Таковы, в частности, винеровские случайные процессы.

Вещественный случайный гильбертов процесс $\xi(t)$ называют процессом с ортогональными приращениями (см., напр., [17, гл. III, §10]), если для произвольных моментов времени $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ выполнено соотношение для ковариаций

$$cov\left(\Delta\xi(t_1, t_2), \Delta\xi(t_3, t_4)\right) = 0. \quad (9)$$

Определим понятие Н.С.П. с ортогональными приращениями.

Назовем Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ процессом с ортогональными приращениями, если при всех $\alpha \in [0,1]$ его α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ являются вещественными случайными процессами с ортогональными приращениями, т.е. согласно (9) для произвольных моментов времени $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ выполнены соотношения

$$cov\left(\Delta X_\alpha^\pm(t_1, t_2), \Delta X_\alpha^\pm(t_3, t_4)\right) = 0 \ (\forall\alpha \in [0,1]). \quad (10)$$

Вещественный случайный процесс $\xi(t)$ называют выходящим из нуля, если $\xi(0) = 0$ с вероятностью 1.

Ниже будем называть Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ выходящим из нуля, если все его α-индексы $X_\alpha^\pm$ выходят из нуля, т.е. с вероятностью 1 выполнены соотношения

$$X_\alpha^\pm(0) = 0 \ (\forall\alpha \in [0,1]). \quad (11)$$

Как и в случае вещественных случайных процессов с ортогональными приращениями, ковариация и дисперсия Н.С.П. с ортогональными приращениями обладают рядом характерных свойств.

Теорема 1. *Пусть* $\tilde{X}(t)$ *– Н.С.П. с ортогональными приращениями. Пусть дополнительно α-индексы* $X_\alpha^\pm(t)$ *при* $\forall\alpha \in [0,1]$ *непрерывны в среднем квадратичном по t и при* $\forall t \geq 0$ *по α. Пусть, кроме того, выполнены соотношения (11). Тогда дисперсия* $D\left(\tilde{X}(t)\right) = D_{\tilde{X}}(t)$ *является монотонно неубывающей функцией.*

Действительно, согласно условию теоремы дисперсии $D_{X_\alpha^\pm}(t)$ непрерывны по *t* при $\forall\alpha \in [0,1]$ и непрерывны по *α* при $\forall t \geq 0$. Заметим, что согласно (7) справедлива формула

$$D_{\tilde{X}}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(D_{X_\alpha^-}(t) + D_{X_\alpha^+}(t)\right) d\alpha. \quad (12)$$

При этом в силу (10) и (11) каждая из дисперсий $D_{X_\alpha^\pm}(t)$ монотонно неубывает по *t* (см., напр., [17, гл. III, §10]). Тогда утверждение теоремы 1 следует из формулы (12).

Теорема 2. *Пусть для Н.С.П.* $\tilde{X}(t)$ *выполнены условия теоремы 1. Тогда для ковариационной функции* $K_{\tilde{X}}(t, s)$ *Н.С.П.* $\tilde{X}(t)$ *с ортогональными приращениями при* $\forall t, s \geq 0$ *справедливо представление через дисперсию*

$$K_{\tilde{X}}(t,s) = D_{\tilde{X}}\left(\min(t,s)\right).$$

Действительно, согласно [17, гл. III, §10] в условиях теоремы 2 ковариационные функции $K_{X_\alpha^\pm}(t,s) = D_{X_\alpha^\pm}\left(\min(t,s)\right)$. Тогда в силу формул (7), (12) имеем

$$K_{\tilde{X}}(t,s) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(D_{X_\alpha^-}\left(\min(t,s)\right) + D_{X_\alpha^+}\left(\min(t,s)\right)\right)d\alpha = D_{\tilde{X}}\left(\min(t,s)\right).$$

Пример 3. Пусть выполнены условия примера 2 при $t \geq 0$ и дополнительно вещественные случайные процессы $\xi_i(t)(i = 1,2,3)$ имеют ортогональные приращения. Тогда треугольный Н.С.П. $\tilde{X}(t) = \left(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)\right)$ имеет ортогональные приращения.

Действительно, пусть заданы произвольные моменты времени $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$. Тогда для приращений левых индексов Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ из формулы (6) вытекает

$$\Delta X_\alpha^-(t_1,t_2) = (1-\alpha)\Delta\xi_1(t_1,t_2) + \alpha\Delta\xi_2(t_1,t_2),$$

а для приращений правых индексов

$$\Delta X_\alpha^+(t_1,t_2) = (1-\alpha)\Delta\xi_3(t_1,t_2) + \alpha\Delta\xi_2(t_1,t_2).$$

Рассмотрим случай левых индексов. Согласно предыдущему,

$$cov\left(\Delta X_\alpha^-(t_1,t_2), \Delta X_\alpha^-(t_3,t_4)\right) = (1-\alpha)^2 cov\left(\Delta\xi_1(t_1,t_2), \Delta\xi_1(t_3,t_4)\right) +$$
$$+\alpha^2 cov\left(\Delta\xi_2(t_1,t_2), \Delta\xi_2(t_3,t_4)\right) + 2\alpha(1-\alpha)cov\left(\Delta\xi_1(t_1,t_2), \Delta\xi_2(t_3,t_4)\right).$$

Заметим, что первые два слагаемых справа в этой формуле обращаются в ноль в силу предположений об ортогональности приращений случайных процессов $\xi_1(t), \xi_2(t)$. Тогда указанное равенство можно переписать в виде

$$cov\left(\Delta X_\alpha^-(t_1,t_2), \Delta X_\alpha^-(t_3,t_4)\right) =$$
$$= 2\alpha(1-\alpha)cov\left(\xi_1(t_2) - \xi_1(t_1), \xi_2(t_4) - \xi_2(t_3)\right) = 0.$$

Здесь правая часть равенства обращается в ноль в силу предположения о некоррелированности процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

Аналогично для приращений правых индексов при любых $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ справедливо соотношение

$$cov\left(\Delta X_\alpha^+(t_1,t_2), \Delta X_\alpha^+(t_3,t_4)\right) = 0 \ (\forall\alpha \in [0,1]).$$

Таким образом, выполнены соотношения (10).

Пример 4. Пусть выполнены условия примера 1 при $t \geq 0$ и дополнительно при $\forall t \geq 0$ случайные величины $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, а также $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ попарно независимы. Пусть, кроме того, все случайные процессы $\xi_i(t)(i = 1,2,3)$ выходят из нуля (т.е. $\xi_i(0) = 0$ с вероятностью 1). Тогда Н.С.П. $\tilde{X}(t) = \left(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)\right)$ выходит из нуля в смысле определения (11).

Действительно, покажем, что левый α-индекс $X_\alpha^-(t)$ выходит из нуля, т.е. $P(X_\alpha^-(0) = 0) = 1$. Согласно 6 следует показать, что $P\left((1-\alpha)\xi_1(0) + \alpha\xi_2(0) = 0\right) = 1$.

По условию $P(\xi_1(0) = 0) = 1$ и $P(\xi_2(0) = 0) = 1$. Тогда $P\left((1-\alpha)\xi_1(0) = 0\right) = 1$ и $P(\alpha\xi_2(0) = 0) = 1$. Кроме того, согласно предположениям события $A = \{(1-\alpha)\xi_1(0) = 0\}$ и $B = \{\alpha\xi_2(0) = 0\}$ независимы. Рассмотрим событие $C = \{(1-\alpha)\xi_1(0) + \alpha\xi_2(0) = 0\}$. Оно следует из произведения событий AB. Поэтому для вероятностей имеем $P(AB) \leq P(C)$. При этом из независимости событий A и B следует $P(AB) = P(A)P(B) = 1$. Так что $P(C) = 1$, что и влечет требуемое. Аналогично рассматривается случай правых α-индексов $X_\alpha^+(t)$.

Вещественный случайный процесс $\xi(t)$ называется однородным (по времени), если для любых $t, s \geq 0$ закон распределения приращений $\Delta\xi(t, t+s)$ зависит только от s.

В соответствии с этим Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ назовем однородным, если для любых $\alpha \in [0,1]$ и $t, s \geq 0$ закон распределения приращения α-индексов $\Delta X_\alpha^\pm(t+s)$ зависит только от s, т.е. совпадает с законом распределения сечения $X_\alpha^\pm(s)$ при $\forall\alpha \in [0,1]$.

Оказывается, что требование однородности Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ позволяет получить явный вид функции ковариации $K_{\tilde{X}}(t,s)$ и дисперсии $D_{\tilde{X}}(t)$.

Теорема 3. *Пусть для Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ выполнены условия теоремы 1 и дополнительно $\tilde{X}(t)$ – однородный Н.С.П. Тогда справедливы равенства*

$$D_{\tilde{X}}(t) = \sigma^2 t, \tag{13}$$

$$K_{\tilde{X}}(t,s) = \sigma^2 \, min(t,s). \tag{14}$$

для некоторой постоянной $\sigma^2 > 0$.

Действительно, по предположению теоремы все α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ являются однородными случайными процессами с ортогональными приращениями, выходящими из нуля. Тогда, согласно известному результату (см., напр., [17, гл. III, §10]), их дисперсии $D_{X_\alpha^\pm}(t)$ имеют вид

$$D_{X_\alpha^\pm}(t) = \left(\sigma_\alpha^\pm\right)^2 t,$$

где $\left(\sigma_\alpha^\pm\right)^2$ – интенсивности соответствующих вещественных случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$. При этом интенсивности $\left(\sigma_\alpha^\pm\right)^2$ непрерывно зависят от α, поскольку таковы индексы $X_\alpha^\pm(t)$, а, следовательно, и дисперсии $D_{X_\alpha^\pm}(t)$.

Тогда, согласно формуле (12),

$$D_{\tilde{X}}(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(D_{X_\alpha^-} + D_{X_\alpha^+}\right) d\alpha = \frac{1}{2} t \int_0^1 ((\sigma_\alpha^-)^2 + (\sigma_\alpha^+)^2) d\alpha.$$

Таким образом, в качестве константы σ^2 в формуле (13) теоремы 3 выступает величина $\sigma^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 ((\sigma_\alpha^-)^2 + (\sigma_\alpha^+)^2) d\alpha$.

Кроме того, ковариации случайных процессов $X_\alpha^\pm(t)$, согласно (10), (11) и результату для вещественных случайных процессов с ортогональными приращениями, имеют вид (см., напр., [17, гл. III, §10])

$$K_{X_\alpha^\pm}(t,s) = \left(\sigma_\alpha^\pm\right)^2 min(t,s).$$

Поэтому формула (14) следует из формулы (7) и определения σ^2, приведенного выше.

4. Нечетко-случайные процессы с независимыми приращениями

Важным частным случаем случайных процессов с ортогональными приращениями являются процессы с независимыми приращениями.

Как известно [7, гл. II], случайная функция $\{\xi(t), t \geq 0\}$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любых моментов $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n, n \geq 1$ случайные величины $\xi(0), \Delta\xi(0,t_1), \Delta\xi(t_1,t_2), \ldots, \Delta\xi(t_{n-1},t_n)$ независимы в совокупности.

Назовем Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ процессом с независимыми приращениями, если все его α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ являются случайными процессами с независимыми приращениями.

Как известно (см., напр., [17, гл. III, §10]) имеет место

Лемма 1. *В случае $E\{\xi^2(t)\} < \infty$ при всех $t \geq 0$ случайный процесс с независимыми приращениями является также процессом с ортогональными приращениями.*

Замечание 1. В соответствии с леммой 1 утверждения теорем 1-3 сохраняют силу, если в них условие ортогональности приращений Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ заменить условием независимости приращений и дополнительно предположить, что $E\left(X_\alpha^\pm(t)\right)^2 < \infty$ при всех $t \geq 0$.

Пример 5. Пусть выполнены условия примера 1 при $t \geq 0$ и дополнительно при $\forall t \geq 0$ случайные величины $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, а также $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ попарно независимы. Пусть, кроме того, все случайные процессы $\xi_i(t)(i = 1,2,3)$ имеют независимые приращения. Тогда Н.С.П. $\tilde{X}(t) = \left(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)\right)$ имеет независимые приращения.

Действительно, поскольку линейная комбинация двух независимых случайных процессов, имеющих независимые приращения, также имеет независимые приращения, то при $\forall\alpha \in [0,1]$ α-индексы $X_\alpha^+(t)$ и $X_\alpha^-(t)$ Н.С.П. $\tilde{X}(t)$, определяемые формулами (6), являются случайными процессами с независимыми приращениями.

Как известно [7, гл. VI], всякий случайный процесс с независимыми приращениями является марковским случайным процессом. Марковские случайные процессы характеризуются важным свойством независимости будущего поведения от всего прошлого (отсутствием последействия). А именно, случайный процесс $\{\xi(t), t \geq 0\}$ называется марковским, если для всех $n > 1$ любых вещественных неотрицательных $t_1 < t_2 <\ldots< t_n$ и любого борелевского множества $B \in B(R)$ выполняется равенство для условных вероятностей

$$P\{\xi(t_n) \in B | \xi(t_1) = x_1, \xi(t_2) = x_2, \ldots, \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}\} = P\{\xi(t_n) \in B | \xi(t_{n-1}) = x_{n-1}\},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – произвольные и допустимые значения случайных величин $\xi(t_1), \xi(t_2), \ldots, \xi(t_{n-1})$.

Назовем Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ марковским, если все его α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ являются марковскими случайными процессами. Пример 5 дает пример треугольного марковского Н.С.П.

Рассмотрим гауссовские случайные процессы. Обратное к лемме 1 утверждение в общем случае не справедливо. Однако имеет место (см., напр., [17, гл. III, §10])

Лемма 2. *Всякий гауссовский случайный процесс с ортогональными приращениями, выходящий из нуля, также является и процессом с независимыми приращениями.*

Как известно, действительный случайный процесс $\{\xi(t), t \geq 0\}$, называют гауссовским процессом, если $\left(\xi(t_1), \ldots, \xi(t_n)\right)$ есть гауссовский вектор для $\forall n \in N$ и любого конечного набора точек $t_1, \ldots, t_n \geq 0$. При этом случайный вектор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называют гауссовским или нормально распределенным, если его характеристическая функция $\varphi_\xi(t)$ имеет следующий вид:

$$\varphi_\xi(t) = e^{i(t,m)-\frac{1}{2}(Kt,t)},$$

где $t = (t_1, \ldots, t_n), m = (m_1, \ldots, m_n), K = (k_{gl})$ симметричная неотрицательно определенная матрица порядка $n \times n$. Скалярное произведение $(t, m) = \sum_{j=1}^{n} t_j m_j$. Вектор m состоит из средних значений $m_j = E\xi_j$, а K – матрица ковариаций $k_{gl} = cov(\xi_g, \xi_l)$. Этот факт обозначают $\xi \sim N(m, K)$.

Назовем Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ гауссовским, если при любых $\alpha \in [0,1]$ его α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ являются гауссовскими случайными процессами.

В соответствии с леммой 2 имеет место

Утверждение 3. *Н.С.П. $\tilde{X}(t)$ с ортогональными приращениями является процессом с независимыми приращениями, если все его α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ являются гауссовскими процессами, выходящими из нуля.*

Пример 6. Пусть выполнены условия примера 2 при $t \geq 0$ и дополнительно все вещественные случайные процессы $\xi_i(t) (i = 1,2,3)$ являются гауссовскими случайными процессами. Тогда Н.С.П. $\tilde{X}(t) = \left(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)\right)$ является гауссовским.

Действительно, поскольку линейная комбинация двух некоррелированных гауссовских случайных процессов является гауссовским случайным процессом, то при каждом $\alpha \in [0,1]$ сумма $(1-\alpha)\xi_1(t) + \alpha\xi_2(t)$, равная, согласно (6), $X_\alpha^-(t)$, будет гауссовским случайным процессом. Аналогично для $X_\alpha^+(t) = (1-\alpha)\xi_3(t) + \alpha\xi_2(t)$. Поэтому треугольный Н.С.П. $\tilde{X}(t) = \left(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)\right)$ является гауссовским случайным процессом.

Как известно [7, гл. II], вещественный случайный процесс $\{w(t), t \geq 0\}$ называют винеровским, если

а) $w(0) = 0$ с вероятностью 1, $E\left(w(t)\right) = 0$;

б) $w(t)$ – однородный процесс с независимыми приращениями;

в) $w(t)$ – гауссовский процесс.

В соответствии с этим, назовем Н.С.П. $\tilde{X}(t), t \geq 0$ винеровским Н.С.П., если все его α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ являются винеровскими случайными процессами, т.е. при всех $\alpha \in [0,1]$ выполнены условия:

а) $X_\alpha^\pm(0) = 0$ с вероятностью 1, $E\left(X_\alpha^\pm(t)\right) = 0$;

б) $X_\alpha^\pm(t)$ – однородный процесс с независимым приращением;

в) $X_\alpha^\pm(t)$ – гауссовский процесс.

Пример 7. Пусть выполнены условия примера 1 при $t \geq 0$, причем при $\forall t \geq 0$ случайные величины $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, а также $\xi_2(t)$ и $\xi_3(t)$ попарно независимы. Пусть, кроме того, все случайные процессы $\xi_i(t)(i = 1,2,3)$ являются винеровскими случайными процессами. Тогда треугольный Н.С.П. $\tilde{X}(t) = \left(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)\right)$ является винеровским Н.С.П.

Действительно, по предположению случайные процессы $\xi_i(t)$ выходят из нуля. Тогда, согласно примеру 4, и все α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ при $\alpha \in [0,1]$ выходят из нуля. Далее, на основании формул (6), $E(X_\alpha^-) = (1-\alpha)E\xi_1(t) + \alpha E\xi_2(t)$ и $E(X_\alpha^+) = (1-\alpha)E\xi_3(t) + \alpha E\xi_2(t)$. По предположению $E\left(\xi_i(t)\right) = 0$ $(i = 1,2,3)$. Тогда $E\left(X_\alpha^\pm(t)\right) = 0$ при всех $\alpha \in [0,1]$.

Кроме того, в силу формул (6)

$$\Delta X_\alpha^-(t, t+s) = (1-\alpha)\Delta\xi_1(t, t+s) + \alpha\Delta\xi_2(t, t+s)$$

и

$$\Delta X_\alpha^+(t, t+s) = (1-\alpha)\Delta\xi_3(t, t+s) + \alpha\Delta\xi_2(t, t+s).$$

Поэтому однородность процессов $X_\alpha^\pm(t)$ обеспечивается однородностью случайных процессов $\xi_i(t)(i = 1,2,3)$.

По предположению, $\xi_i(t)$ имеют независимые приращения, следовательно, они имеют ортогональные приращения. Тогда по примеру 3 α-индексы $X_\alpha^\pm(t)$ имеют ортогональные приращения. К тому же, $X_\alpha^\pm(t)$ являются гауссовскими случайными процессами согласно примеру 6, поскольку таковы $\xi_i(t)$. Тогда согласно утверждению 3 $X_\alpha^\pm(t)$ имеют независимые приращения. Резюмируя, заключаем, что Н.С.П. $\tilde{X}(t) = \left(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)\right)$ является винеровским.

Заключение

Теоремы 1-3 показывают полезность выделения класса нечетко-случайных процессов с ортогональными и независимыми приращениями. Существенным в данной работе является введение понятий гауссовского и винеровского нечетко-случайных процессов.

Как известно, вещественные гауссовские и винеровские случайные процессы используются при моделировании различных прикладных динамических процессов. Соответствующие Н.С.П. могут быть применены в стохастических динамических моделях, содержащих неполную информацию.

Важную роль в настоящей работе имеют примеры. Примеры 1, 2 носят иллюстративный характер. Примеры 3-7 показывают возможность применения развитой теории к треугольным нечетко-случайным процессам, в частности, гауссовским и винеровским Н.С.П. Аналогичные выводы могут быть установлены для трапецеидальных и других Н.С.П.

Результаты настоящей работы могут быть использованы при подготовке данных для принятия обоснованных решений в различных прикладных задачах.

Отметим, что результаты представленной статьи дополняют известные по работам [18, 19].

Литература

1. Хацкевич В.Л., Махинова О.А. Числовые характеристики нечетко-случайных процессов // Искусственный интеллект и принятие решений. 2023. № 1. С. 32-41.
2. Puri M. L., Ralesku D.A. Fuzzy random variables // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1986. No 114. P. 409-422.
3. Feng Y., Hu. L., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. No 120. P. 487-497.
4. H.T. Nguyen and B. Wu. Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data // Springer-Verlag. Berlin: Heidelberg. 2006.
5. Шведов А.С. Оценивание средних и ковариаций нечетко-случайных величин // Прикладная эконометрика. 2016. Т. 42. С. 121-138.
6. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1985.
7. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005.
8. Деменков Н.П., Микрин Е.А., Мочалов И.А. Марковские и полумарковские процессы с нечеткими состояниями. Часть 1. Марковские процессы // Информационные технологии. 2020. Т. 26. № 6. С. 323-334.
9. Liu Y., Zhu Q., Fan X. Event-Triggered Adaptive Fuzzy Control for Stochastic Nonlinear Time-delay Systems // Fuzzy Sets and Systems. 2023. V. 452. Issue C. P. 42-60.
10. Hao Shen, Jiacheng Wu, Feng Li, Xiangyong Chen, Jing Wang. Fuzzy multi-objective fault-tolerant control for nonlinear Markov jump singularly perturbed system with persistent dwell-time switched transition probabilities // Fuzzy sets and systems. Cjan. 2023. V. 452. P. 131-148.
11. Аверкин А.Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука,1986.
12. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
13. Diamond P., Kloeden P. Metric Spaces of Fuzzy Sets // Fuzzy Sets and Systems. 1990. V. 35. Issue 2. P. 241-249.
14. Хацкевич В.Л. О некоторых свойствах нечетких ожиданий и нелинейных нечетких ожиданий нечетко-случайных величин // Известия вузов. Математика. 2022. № 11. С. 1-13.

15. Dubois D., Prade H. The mean value of fuzzy number // Fuzzy sets and systems. 1987. No 24. P. 279-300.
16. Язенин А.В. Основные понятия теории возможностей. М.: Физматлит, 2016.
17. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002.
18. Y. Ogura, H.T. Nguyen. Gaussian processes and martingales for fuzzy valued variables with continuous parameter // Information Sciences. 2001. V. 133. Issue 1. P. 7-21.
19. Sh. Li, Li Guan. Fuzzy set-valued Gaussian processes and Brownian motions // Information Sciences. 2007. V. 177. Issue 16. P. 3251-3259.

Хацкевич Владимир Львович. Доктор технических наук, профессор. Профессор кафедры математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина». Области исследований: математическое моделирование. E-mail: vlkhats@mail.ru (ответственный за переписку)

Махинова Ольга Алексеевна. Кандидат физико-математических наук, доцент. Доцент кафедры математики, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина». Области исследований: математическое моделирование. E-mail: olga.maxinova@list.ru

Fuzzy-Random Processes with Orthogonal and Independent Increments

V. L. Khatskevich, O. A. Makhinova

Air Force Academy named after N.E. Zhukovsky and Y.U. Gagarin, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, random processes with fuzzy states and continuous time are investigated. The main attention is paid to the class of fuzzy random processes with orthogonal and independent increments. The characteristic properties of the variances and covariance functions of such processes are established. Gaussian and Wiener fuzzy random processes, which are analogs of the corresponding real random processes, are considered. The obtained results are based on the properties of fuzzy random variables and the classical results of the theory of real random processes with orthogonal and independent increments. Examples characterize the possibility of applying the developed theory to fuzzy-random processes of a triangular type.

Keywords: fuzzy random processes with orthogonal and independent increments, Gaussian and Wiener fuzzy random processes.

DOI 10.14357/20718594230404 **EDN** SNMXIX

References

1. Khatskevich V.L., Makhinova O.A. Chislovye harakteristiki nechetko-sluchajnyh processov [Numerical characteristics of fuzzy random processes] // Iskusstvennyj intellekt i prinyatie reshenij [Artificial intelligence and decision-making]. 2023. No 1. P. 32-41.
2. Puri M. L., Ralesku D.A. Fuzzy random variables // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1986. No 114. P. 409-422.
3. Feng Y., Hu. L., Shu H. The variance and covariance of fuzzy random variables // Fuzzy Sets and Systems. 2001. No 120. P. 487-497.
4. H.T. Nguyen and B. Wu. Fundamentals of Statistics with Fuzzy Data // Springer-Verlag. Berlin: Heidelberg. 2006.
5. Shvedov A.S. Ocenivanie srednih i kovariacij nechetko-sluchajnyh velichin [Estimation of averages and covariances of fuzzy random variables] // Prikladnaya ekonometrika [Applied Econometrics]. 2016. P. 121-138.
6. Rozanov Yu.A. Teoriya veroyatnostej, sluchajnye processy i matematicheskaya statistika [Probability theory, random processes and mathematical statistics]. Moscow: Nauka, 1985.
7. Bulinsky A.V., Shiryaev A.N. Teoriya sluchajnyh processov [Theory of random processes]. Moscow: Fizmatlit, 2005.
8. Demenkov N.P., Mikrin E.A., Mochalov I.A. Markovskie i polumarkovskie processy s nechetkimi sostoyaniyami. CHast' 1. Markovskie processy [Markov and semi-Markov processes with fuzzy states. Part 1. Markov processes] // Informacionnye tekhnologii [Information technology]. 2020. V. 26. No. 6. P. 323-334.
9. Liu Y., Zhu Q., Fan X. Event-Triggered Adaptive Fuzzy Control for Stochastic Nonlinear Time-delay Systems // Fuzzy Sets and Systems. 2023. V. 452. Issue C. P. 42-60.
10. Hao Shen, Jiacheng Wu, Feng Li, Xiangyong Chen, Jing Wang. Fuzzy multi-objective fault-tolerant control for nonlinear Markov jump singularly perturbed system with persistent dwell-time switched transition probabilities // Fuzzy sets and systems. Cjan. 2023. V. 452. P. 131-148.
11. Averkin A.N. Nechetkie mnozhestva v modelyah upravleniya i iskusstvennogo intellekta [Fuzzy sets in control and artificial intelligence models]. Moscow: Nauka, 1986.

12. Piegat A. Nechetkoe modelirovanie i upravlenie [Fuzzy modeling and control]. Moscow: BINOM. Laboratoriya znanij, 2015.
13. Diamond P., Kloeden P. Metric Spaces of Fuzzy Sets // Fuzzy Sets and Systems. 1990. V. 35. Issue 2. P. 241-249.
14. Khatskevich V.L. O nekotoryh svojstvah nechetkih ozhidanij i nelinejnyh nechetkih ozhidanij nechetko-sluchajnyh velichin [On some properties of fuzzy expectations and nonlinear fuzzy expectations of fuzzy random variables] // Izvestiya vuzov. Matematika [News of universities. Mathematics]. 2022. No 11. P. 1-13.
15. Dubois D., Prade H. The mean value of fuzzy number // Fuzzy sets and systems. 1987. No 24. P. 279-300.
16. Yazenin A.V. Osnovnye ponyatiya teorii vozmozhnostej [Basic concepts of the theory of possibilities]. Moscow: Fizmatlit, 2016.
17. Miller B.M., Pankov A.R. Teoriya sluchajnyh processov v primerah i zadachah [Theory of random processes in examples and problems]. Moscow: Fizmatlit, 2002.
18. Y. Ogura, H.T. Nguyen. Gaussian processes and martingales for fuzzy valued variables with continuous parameter // Information Sciences. 2001. V. 133. Issue 1. P. 7-21.
19. Sh. Li, Li Guan. Fuzzy set-valued Gaussian processes and Brownian motions // Information Sciences. 2007. V. 177. Issue 16. P. 3251-3259.

Khatskevich Vladimir L. Doctor of Technical Sciences, Professor. Professor of the Department of Mathematics, Air Force Academy named after N.E. Zhukovsky and Y.U. Gagarin. Research areas: mathematical modeling. E-mail: vlkhats@mail.ru

Makhinova Olga A. Candidate of Physical and Mathematical Sciences, docent. Docent of the Department of Mathematics, Air Force Academy named after N.E. Zhukovsky and Y.U. Gagarin. Research areas: mathematical modeling. E-mail: olga.maxinova@list.ru