

УДК 517.9

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-1

Измерение ближнего электромагнитного поля и восстановление параметров неоднородностей в диэлектрическом теле

А. О. Лапич¹, Ю. Г. Смирнов²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹lapich.a@yandex.ru, ²smirnovyug@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Обратные задачи электромагнитного зондирования, направленные на определение внутренних параметров объекта по внешним измерениям электромагнитного поля, являются некорректно поставленными и сложными в вычислительном плане. Нелинейность и неустойчивость решений требуют применения специальных методов регуляризации. Разработка эффективных неитерационных методов решения таких задач, особенно для трехмерных объектов, остается актуальной задачей для различных областей, таких как медицинская визуализация, геофизика и неразрушающий контроль. Целью является разработка и анализ неитерационного метода решения обратной задачи электромагнитного рассеяния для определения диэлектрической проницаемости ограниченного трехмерного объекта по измерениям ближнего поля. *Материалы и методы.* Работа основана на решении прямой задачи дифракции монохроматической электромагнитной волны на ограниченном объемном рассеивателе с использованием сингулярного интегро-дифференциального уравнения электрического поля. Для решения обратной задачи предлагается двухшаговый неитерационный метод. Он основан на измерении ближнего поля, рассеянного объектом, и применяется для решений в конечномерных пространствах кусочно-постоянных функций. *Результаты.* Реализован метод решения обратной задачи электромагнитного рассеяния. Представлены результаты решения прямой и обратной задач. Получено сравнение коэффициентов прохождения для нескольких экспериментов. *Выводы.* Разработанный неитерационный метод решения обратной задачи электромагнитного рассеяния обеспечивает определение диэлектрической проницаемости ограниченного трехмерного объекта по измерениям ближнего поля. Метод демонстрирует эффективность и может быть применен в различных областях, требующих неинвазивного определения параметров объекта.

Ключевые слова: обратная задача, интегральное уравнение, краевая задача, численный метод, двухшаговый метод, коэффициент прохождения, волноводы

Финансирование: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по гранту Государственного задания (Пер. № 124020200015-7).

Для цитирования: Лапич А. О., Смирнов Ю. Г. Измерение ближнего электромагнитного поля и восстановление параметров неоднородностей в диэлектрическом теле // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 3–12. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-1

Measurement of the near electromagnetic field and restoration of inhomogeneity parameters in a dielectric body

A.O. Lapich¹, Yu.G. Smirnov²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹lapich.a@yandex.ru, ²smirnovyug@mail.ru

Abstract. *Background.* The inverse problems of electromagnetic sensing, aimed at determining the internal parameters of the object from external measurements of the electromagnetic field, are incorrectly posed and computationally complex. Non-linearity and instability of solutions require the use of special regularization methods. The development of effective non-iterative methods for solving such problems, especially for three-dimensional objects, remains an urgent task for various fields such as medical imaging, geophysics and non-destructive testing. The purpose of the work is to develop and analyze a non-iterative method for solving the inverse electromagnetic scattering problem for determining the dielectric constant of a limited three-dimensional object based on near-field measurements. *Materials and methods.* The work is based on solving the direct problem of diffraction of a monochromatic electromagnetic wave on a limited volume diffuser using a singular integro-differential equation of an electric field. A two-step non-iterative method is proposed to solve the inverse problem. It is based on the measurement of the near field scattered by an object, and can be applied for solutions from finite-dimensional spaces of piecewise constant functions. *Results.* A method for solving the inverse problem of electromagnetic scattering is implemented. The results of solving the direct and inverse problems are presented. A comparison of transmission coefficients for several experiments is obtained. *Conclusions.* The developed non-iterative method for solving the inverse problem of electromagnetic scattering provides determination of the dielectric constant of a limited three-dimensional object based on near-field measurements. The method demonstrates its effectiveness and can be applied in various fields requiring non-invasive determination of object parameters.

Keywords: inverse problem, integral equation, boundary value problem, numerical method, two-step method, transmission coefficient, waveguides

Financing: the research was financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the grant of the State Assignment (Reg. No. 124020200015-7).

For citation: Lapich A.O., Smirnov Yu.G. Measurement of the near electromagnetic field and restoration of inhomogeneity parameters in a dielectric body. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):3–12. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-1

Введение

Обратные задачи электромагнитного зондирования относятся к классу некорректно поставленных задач, в которых требуется определить внутренние параметры объекта (например, распределение диэлектрической проницаемости, магнитной проницаемости, проводимости и др.) по результатам измерений внешнего электромагнитного поля. В отличие от прямых задач, где заданы параметры объекта и требуется определить рассеянное электромагнитное поле, обратные задачи характеризуются нелинейностью и неустойчивостью решения. Это означает, что небольшие изменения в измеренных данных могут приводить к значительным изменениям в восстанавливаемых параметрах объекта.

Это, как правило, нелинейная обратная задача, не имеющая единственного решения и чувствительная к шуму в данных. Поэтому для решения обратных задач используются методы регуляризации, которые вводят дополнительные ограничения, чтобы стабилизировать решение. Часто применяются метод наименьших квадратов с регуляризацией Тихонова и другие итерационные методы, стремящиеся минимизировать функционал, представляющий разницу между измеренным и модельным полем. Для данной задачи предлагается применение неитерационного метода решения обратной задачи электромагнитного рассеяния для определения диэлектрической проницаемости ограниченного трехмерного объекта. Метод основан на измерении ближнего поля, рассеянного объектом под воздействием монохроматической электромагнитной волны.

Сформулирована прямая задача о дифракции монохроматической электромагнитной волны на ограниченном объемном рассеивателе с заданной постоянной магнитной проницаемостью и известной неоднородной диэлектрической проницаемостью. Исходная краевая задача для уравнений Максвелла сводится к системе, состоящей из сингулярного интегро-дифференциального уравнения электрического поля по области неоднородности и интегрального представления полного электрического поля вне рассеивателя. Приведены основные результаты о разрешимости прямой задачи дифракции.

Затем решается обратная задача, заключающаяся в нахождении неизвестной диэлектрической проницаемости объемного тела заданной формы. Показано, что интегро-дифференциальное уравнение первого рода имеет не более одного решения в конечномерных пространствах кусочно-постоянных функций.

1. Постановка задачи и результаты вычислительного эксперимента

Рассмотрим задачу дифракции электромагнитной волны на изотропном неоднородном диэлектрическом теле $Q \subset \mathbb{R}^3$ в форме полушара (рис. 1). Граница полушара ∂Q является кусочно-гладкой поверхностью. Внутри полушара относительная диэлектрическая проницаемость ϵ_r , а вне полушара среда однородна с постоянными значениями диэлектрической проницаемости ϵ_0 и магнитной проницаемости μ_0 .

Поле возбуждается точечным источником излучения в точке $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}$, порождающим электромагнитную волну $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$, удовлетворяющую системе уравнений Максвелла вне этой точки:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_0. \end{cases} \quad (1)$$

Электромагнитное (полное) поле в точке состоит из двух составляющих: падающего поля $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ и поля $\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s$, рассеянного объектом Q :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s. \quad (2)$$

Решение прямой задачи дифракции – полное электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ – удовлетворяет в $\mathbb{R}^3 \setminus \partial Q$ уравнениям Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu_0 \mathbf{H}. \end{cases} \quad (3)$$

Предполагаем, что на границе раздела двух сред выполняются условия непрерывности касательных компонент поля на границе области неоднородности:

$$[\mathbf{E}_\tau]|_{\partial Q} = [\mathbf{H}_\tau]|_{\partial Q} = 0, \quad (4)$$

условия конечности энергии в любом ограниченном объеме пространства:

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{L}_{2,loc}(\mathbb{R}^3) \quad (5)$$

и условия Зоммерфельда на бесконечности. Подробная постановка задачи (1)–(5) и результаты о ее разрешимости имеются в [1].

Краевую задачу (1)–(5) можно свести [1] к системе, состоящей из интегро-дифференциального уравнения по области неоднородности:

$$\mathbf{E}(x) - (k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q, \quad (6)$$

и интегрального представления поля вне тела:

$$\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}_0(x) + (k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q G(x, y) (\varepsilon_r(y) - 1) \mathbf{E}(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{Q}, \quad (7)$$

где $G(x, y) = \frac{e^{ik_0|x-y|}}{4\pi|x-y|}$; $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ – относительная диэлектрическая проницаемость. Магнитное поле всюду выражается через электрическое по формуле

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Введем в области Q вектор-функцию $\mathbf{J}(x) := (\varepsilon_r(x) - 1)\mathbf{E}(x)$, предполагая, что всюду в Q выполнено условие $|\varepsilon_r(x)| \geq \tilde{\varepsilon} > 1$.

Определение неизвестной диэлектрической проницаемости ограниченного объекта по измерениям ближнего поля вне его осуществляется двухшаговым методом [2–9]. Сначала решается линейное интегральное уравнение первого рода для нахождения тока поляризации внутри объекта, используя известные значения падающего и полного поля вне объекта (падающего поля $\mathbf{E}_0(x)$ и полного поля $\mathbf{E}(x)$ в некоторой области D), т.е. из представления поля вне рассеивателя получим уравнение для $\mathbf{J}(x)$:

$$(k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}(x) - \mathbf{E}_0(x), \quad x \in D. \quad (8)$$

Относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(x)$ вычисляется непосредственно через найденный ток поляризации:

$$\frac{\mathbf{J}(x)}{\varepsilon_r(x) - 1} - (k_0^2 + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \int_Q G(x, y) \mathbf{J}(y) dy = \mathbf{E}_0(x), \quad x \in Q. \quad (9)$$

Для случая полушара численный метод, базисные функции и необходимые расчетные формулы представлены в [10]. Отметим, что из формулы (9) относительная диэлектрическая проницаемость может быть найдена неоднозначно. Однозначность будет, если считать диэлектрическую проницаемость диагональным тензором. При этом для изотропного материала компоненты приближенно найденного тензора диэлектрической проницаемости будут незначительно отличаться друг от друга, что подтверждают вычислительные эксперименты.

На рис. 1 представлено решение задачи двухшаговым методом для полушара с неоднородностями, имеющими различные показатели, визуализированные цветовой шкалой. Сравнение решений прямой задачи (рис. 1,а) – точные значения, и решения обратной задачи (рис. 1,б) – приближенные значения, показывает небольшое расхождение в значениях относительных диэлектрических проницаемостей неоднородностей, однако положение и размер неоднородностей не изменяется. Таким образом, полученные в результате решения обратной задачи данные о положении и параметрах неоднородностей демонстрируют хорошую точность.

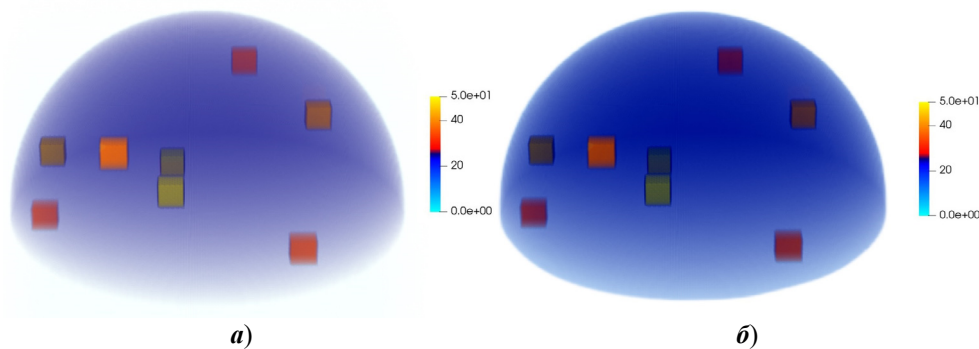


Рис. 1. Результат решения прямой и обратной задачи (исходные и восстановленные значения)

2. Измерительная установка и результаты эксперимента

В данной части работы показан измерительный комплекс, используемый для реального эксперимента, а также представлены результаты измерений.

Измерительная установка (рис. 2) состоит из двух направленных друг на друга волноводов (1 и 2 на рис. 3), между которыми в области ближней зоны располагался исследуемый образец с неоднородностью внутри него (3 на рис. 3). Положение второго волновода изменяется (происходит движение вокруг образца на небольшом расстоянии от него в двух направлениях – по сферическим координатам) для получения большого количества измерений.

Получение большого количества измерений принципиально важно для достижения достаточной точности решения обратной задачи. Как показывают эксперименты, достаточная точность может быть достигнута при количестве измерений больше 300.

Измерения проводились с помощью двухпортового векторного анализатора цепей Rohde&Schwarz (4 на рис. 3) и персонального компьютера в ча-

стотном диапазоне 5,3–5,7 ГГц. Полученные данные обрабатывались на персональном компьютере (5 на рис. 3). С целью использования волновода небольших размеров и измерений в указанном диапазоне частот волновод был заполнен диэлектриком (фторопласт-4). Абсолютная диэлектрическая проницаемость данного материала составляет 1,9–2,2. Диэлектрик изменяет диэлектрическую проницаемость среды внутри волновода. Это, в свою очередь, снижает скорость распространения электромагнитной волны по волноводу, поскольку скорость обратно пропорциональна квадратному корню из произведения относительных диэлектрической (ϵ) и магнитной (μ) проницаемостей. Отсюда происходит изменение критической (минимальной) частоты, при которой возможно распространение волн в направляющей системе.



Рис. 2. Измерительная установка

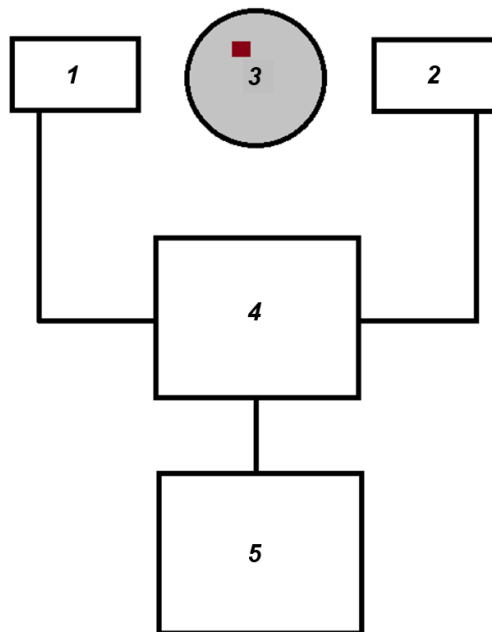


Рис. 3. Схема измерительной установки

На рис. 4, 5 показаны графики вещественной и мнимой частей коэффициента прохождения для одного положения волноводов (напротив друг друга) при наличии и отсутствии неоднородностей.

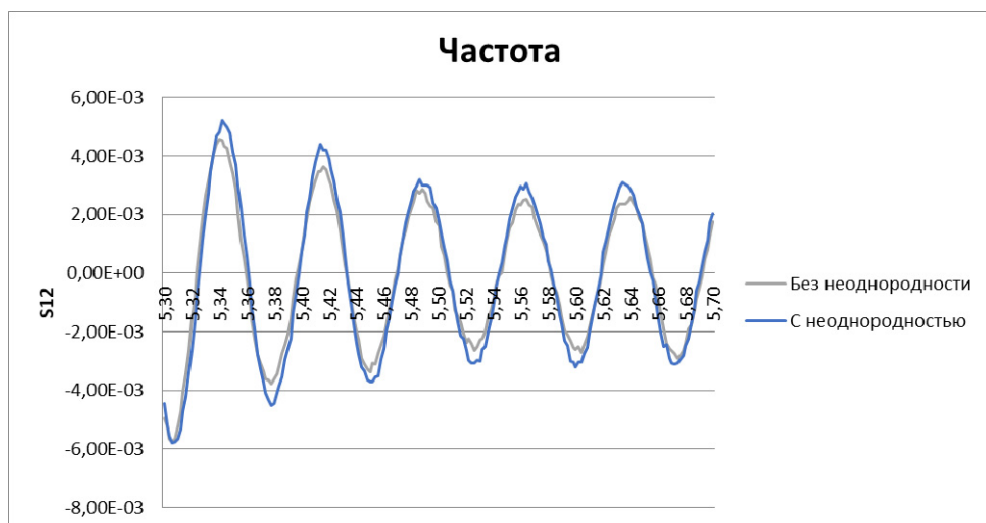


Рис. 4. Значение коэффициента прохождения (вещественная часть S12) в зависимости от частоты для двух образцов

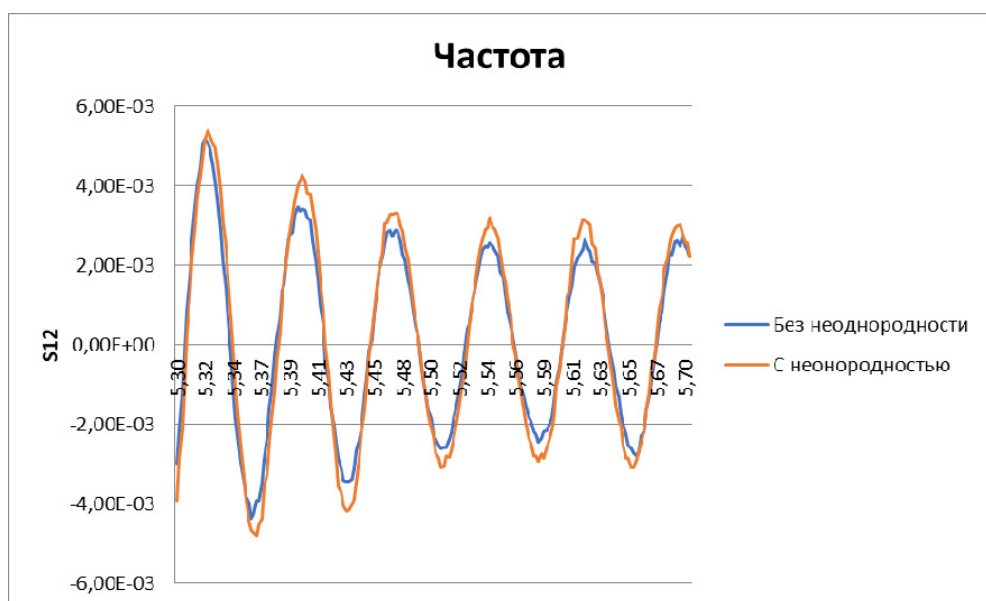


Рис. 5. Значение коэффициента прохождения (мнимая часть S12) в зависимости от частоты для двух образцов

Сравнительный анализ графиков выявил значимые изменения коэффициента прохождения (как вещественной, так и мнимой частей) на рис. 4, 5. Представленные графики иллюстрируют результаты двух независимых экспериментов (образец с неоднородностью и без нее). Отличия на пиках синусо-

соидальной кривой обусловлены влиянием неоднородности на прохождение электромагнитной волны.

Для восстановления неоднородности по результатам эксперимента необходимо использование данных всех измерений (при различных положениях волноводов) и решения обратной задачи с этими данными.

Заключение

В статье использован двухшаговый неитерационный метод решения электромагнитной обратной задачи СВЧ-томографии для определения структуры неоднородного диэлектрического тела по измерениям ближнего поля. Численное моделирование на примере полушара подтверждает высокую точность восстановления структуры. Экспериментальные исследования с использованием измерительной установки демонстрируют возможность обнаружения небольших неоднородностей в диэлектрике путем измерения электромагнитного поля на различных частотах в ближней зоне.

Список литературы

1. Смирнов Ю. Г. Задача дифракции электромагнитной волны на системе произвольно расположенных тел и экранов // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2017. Т. 20, № 3-1. С. 36–42.
2. Медведик М. Ю., Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Решение векторной трехмерной обратной задачи дифракции на объемном неоднородном теле двухшаговым методом // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. Т. 56, № 4. С. 5–23.
3. Medvedik M. Y., Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Two-step method for solving inverse problem of diffraction by an inhomogeneous body // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 38th. Nonlinear and Inverse Problems in Electromagnetics – PIERS 2017. 2018. Vol. 243. P. 83–92.
4. Medvedik M. Y., Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3d diffraction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2020. Vol. 28, № 10. P. 1474–1492.
5. Medvedik M. Y., Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. 2023. Vol. 32, № 3. P. 453–465.
6. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Алгоритм поиска неоднородностей в обратных нелинейных задачах дифракции // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2024. Т. 166, № 3. С. 395–406.
7. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Метод микроволновой томографии для решения обратной задачи на телах цилиндрической формы // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2024. № 1. С. 107–117.
8. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Метод восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2023. № 4. С. 142–153.
9. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Метод обобщенных и объединенных расчетных сеток для восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // Математическое Моделирование. 2024. Т. 36, № 4. С. 24–36.
10. Smirnov Y., Smolkin E., Snegur M. Solution of the Vector Three-Dimensional Inverse Problem on an Inhomogeneous Dielectric Hemisphere Using a Two-Step Method // Computation. 2024. Vol. 12. P. 213.

References

1. Smirnov Yu.G. The task of diffraction of the electromagnetic wave on the system of arbitrarily located bodies and screens. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy = Physics of wave processes and radio engineering systems*. 2017;20(3-1):36–42. (In Russ.)
2. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. The solution of a vector three - dimensional reverse problem of diffraction on a voluminous heterogeneous body with a two-step method // *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2020;56(4):5–23. (In Russ.)
3. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Two-step method for solving inverse problem of diffraction by an inhomogeneous body. *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 38th. Nonlinear and Inverse Problems in Electromagnetics – PIERS 2017*. 2018;243:83–92.
4. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3d diffraction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020;28(10):1474–1492.
5. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity. *Journal of Inverse and III-Posed Problems*. 2023;32(3):453–465.
6. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. The algorithm for finding heterogeneity in the opposite non-linear tasks of diffraction. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki = Proceedings of Kazan University. Series: Physical and mathematical sciences*. 2024;166(3):395–406. (In Russ.)
7. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Microwave tomography method to solve the reverse problem on the bodies of a cylindrical shape. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2024;(1):107–117. (In Russ.)
8. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. The method of restoring the parameters of heterogeneity of the body according to the results of measurements of the electromagnetic field. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, systems, networks in economics, equipment, nature and society*. 2023;(4):142–153. (In Russ.)
9. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. The method of generalized and united calculated nets to restore the parameters of heterogeneity of the body according to the results of measurements of the electromagnetic field. *Matematicheskoe Modelirovanie = Mathematical modeling*. 2024;36(4):24–36. (In Russ.)
10. Smirnov Yu., Smolkin E., Snegur M. Solution of the Vector Three-Dimensional Inverse Problem on an Inhomogeneous Dielectric Hemisphere Using a Two-Step Method. *Computation*. 2024;12:213.

Информация об авторах / Information about the authors

Андрей Олегович Лапич

аспирант, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Andrey O. Lapich

Postgraduate student, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

E-mail: lapich.a@yandex.ru

Юрий Геннадьевич Смирнов

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: smirnovyug@mail.ru

Yuriy G. Smirnov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of the
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 06.03.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 14.04.2025

Принята к публикации / Accepted 28.04.2025