

УДК 531. 332.3

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-3

О строгом математическом определении формы брахистохроны при учете теплового эффекта в зоне контакта

С. О. Гладков, С. Б. Богданова

^{1,2}Московский авиационный институт

(национальный исследовательский университет), Москва, Россия

¹sglad51@mail.ru, ²sonjaf@list.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* В настоящее время активно ведутся исследования, касающиеся свойств брахистохрон как линий с экстремальными свойствами. Актуальность настоящей работы обусловлена тем, что в ней впервые учтено влияние тепловых эффектов на форму брахистохроны. Главной целью исследования является аналитически строгое решение поставленной задачи. *Материалы и методы.* Основным методом решения задачи является метод подвижного базиса, хорошо зарекомендовавший себя при решении множества задач, связанных с исследованием различных свойств брахистохрон. *Результаты.* Приведено строгое аналитическое решение сформулированной задачи с учетом теплового эффекта, который был учтен с помощью введения диссипативной функции. *Выводы.* Благодаря предложенному в статье алгоритму сформулирован общий методический подход, полезный при решении подобного рода задач, связанных с учетом тепловых свойств материалов.

Ключевые слова: брахистохрона, градиент температуры, теплоемкость, подвижный базис, уравнения движения

Для цитирования: Гладков С. О., Богданова С. Б. О строгом математическом определении формы брахистохроны при учете теплового эффекта в зоне контакта // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 29–44. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-3

On a strict mathematical definition of the brachistochrone's shape taking into account the thermal effect in the contact zone

S.O. Gladkov¹, S.B. Bogdanova²

^{1,2}Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

¹sglad51@mail.ru, ²sonjaf@list.ru

Abstract. *Background.* Current research on the properties of brachistochrones as lines with extreme properties indicates that this work is relevant because it takes into account for the first time the influence of thermal effects on the shape of the brachistochrone. The purpose of the study is an analytically rigorous solution to the problem. *Materials and methods.* The main method for solving the problem is the moving basis method, which has proven itself well in solving many problems related to the study of various properties of brachistochrones. *Results.* A rigorous analytical solution of the formulated problem is given, taking into account the thermal effect, which was taken into account by introducing a dissipative function. *Conclusions.* Thanks to the algorithm proposed in the article, a general methodological approach has been formulated that is useful in solving such problems related to taking into account the thermal properties of materials.

Keywords: brachystochrone, gradient of temperature, heat capacity, movable basis, equations of motion

For citation: Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On a strict mathematical definition of the brachistochrone's shape taking into account the thermal effect in the contact zone. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):29–44. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-3

Введение

Любые вопросы, возникающие в процессе исследования каких-либо классических свойств брахистохроны, всегда вызывали и продолжают вызывать искренний интерес со стороны читательской аудитории. И дело тут вовсе не в модной теме, а в возможности постановки огромного количества задач, которые возникают в процессе более глубокого и детального знакомства с проблематикой исследования – влияния на форму брахистохроны проявления каких-либо внешних физических факторов.

В своей классической постановке задачи о брахистохроне Я. Бернулли [1] сформулировал ее просто как кривую наискорейшего спуска под действием на движущееся тело лишь одной силы тяжести.

Позднее для ее аналитического решения был использован строгий математический аппарат вариационного исчисления, разработанный Л. Эйлером, тонкости подхода которого подробно описаны, например, в монографиях [1, 2]. Однако на этом задача не закрывается, а порождает массу других проблем, связанных прежде всего с исследованием свойств брахистохроны при учете сил как сухого трения [3–8], так и вязкого [9]. При их учете форма траектории движения естественным образом весьма существенно изменяется. Тем не менее она продолжает называться брахистохроной в устоявшейся терминологии, хотя по большому счету это уже не она. Ее можно было бы назвать, например, «сухотроной» или «вязкотроной», а при анализе решаемой ниже задачи с учетом теплового эффекта получающуюся в результате траекторию можно было бы именовать более коротко – «термотохроной». На наш взгляд, все эти три названия вполне логично пересекаются с уже довольно давно устоявшимся в науке термином «таутохрона», который придумали в Америке и который благополучно прижился во всем мире. По крайней мере, все три названия мгновенно информировали бы нас, о чем конкретно идет речь.

1. Постановка задачи

Задача, решению которой посвящено настоящее сообщение, относится к общим проблемам исследования динамики движения тел по криволинейным траекториям, а ее основная суть связана с выяснением возможного изменения формы желоба в условиях, когда может оказаться важным учет теплового фактора, обусловленного локальным эффектом разогрева зоны контакта.

Подобное проявление неидеальности взаимодействия тела со средой, когда речь идет о чисто механических задачах, с физической точки зрения может быть связано лишь с учетом сил трения. Простым примером этого может служить, например, разогрев шин автомобиля при их контакте с дорожным полотном, что приводит к существенному повышению температуры резинового покрытия.

В рамках нашей задачи мы не акцентируем внимание на конкретном материале шара, катящегося по желобу, поскольку в общей постановке задачи нам интересна лишь оценка влияния на качественное изменение траектории движения (формы желоба) теплового эффекта, связанного с локальным разогревом зоны контакта.

С математической точки зрения поставленную задачу мы будем решать с помощью метода подвижного базиса, хорошо зарекомендовавшего себя при решении ряда подобных задач (см., например, работы [10–12]).

Но, прежде чем переходить к строго математическим аспектам решения, стоит также отметить следующее. Решение поставленной задачи интересно по двум причинам. Во-первых, она вполне актуальна и не только потому, что ранее никем не решалась, а просто потому, что представляет собой весьма интересную с чисто теоретической точки зрения проблему. А, во-вторых, ее решение весьма значимо в плане практического приложения, поскольку позволяет внести соответствующие корректировки в форму желоба в условиях проявления теплового фактора (который, кстати, всегда имеет место в реальности) для достижения эффекта оптимального режима движения по траектории, названной нами при указанных выше условиях термотехноной.

2. Основная часть. Уравнения движения и их анализ

Также как и в предыдущих работах [10, 11], решение будем искать с помощью метода подвижного базиса. Геометрическую постановку задачи удобно проиллюстрировать с помощью рис. 1. Показанное на рисунке вращение, которое всегда имеет место при движении шарообразных тел, приводящее к необходимости учета эффекта Магнуса (как это было сделано, например, в работе [12]), в настоящем сообщении во внимание приниматься не будет, что формально связано с малой скоростью движения.

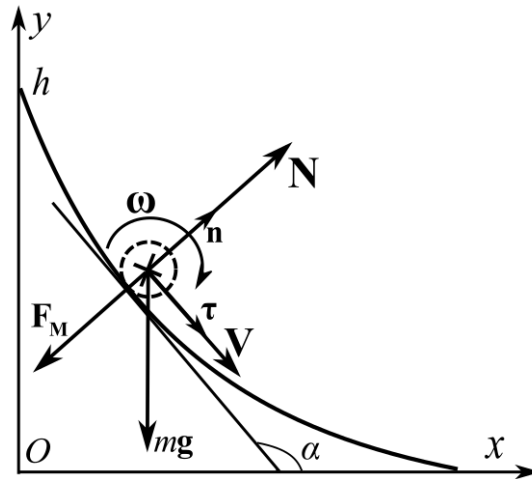


Рис. 1. Схематическая геометрия задачи: F_M – сила Магнуса, проявляющая себя при вращательном движении шарообразных тел

Как видно из рис. 1, единственным дополнительным вектором здесь является градиент температуры, направленный по единичной нормали $\mathbf{n}$ по-

движного базиса $\mathbf{n}-\boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ – единичный касательный вектор, определяемый как $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{v}}{v}$, где $\mathbf{v}$ – скорость.

Чтобы учесть эффект теплового влияния на уравнение движения зоны контакта, воспользуемся методикой вывода всех известных нам уравнений с помощью закона сохранения полной мощности системы, который весьма подробно описан в работе [13] и многократно апробировался при решении ряда задач (см., к примеру работы [14, 15]).

Действительно, можно записать, что

$$\dot{E} + \dot{Q} = 0, \quad (1)$$

где энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} - m\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}, \quad (2)$$

здесь m – масса тела; $\mathbf{g}$ – ускорение силы тяжести; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор, проведенный из начала координат в центр тяжести тела, а в формулу для $\dot{Q}$ входят все остальные физические эффекты.

В самом деле, для диссипативной функции мы имеем право записать, что

$$\dot{Q} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}_{fr} \cdot d\mathbf{r} + T\dot{S}, \quad (3)$$

где S – энтропия,

$$\mathbf{F}_{fr} = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{v} - F_S \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (4)$$

μ – коэффициент сухого трения; $\mathbf{N} = N\mathbf{n}$ – нормальная сила реакции желоба на тело; F_S – сила вязкого трения, например, это может быть сила Стокса, если тело представляет собой шар. В общем случае ее можно представить, как

$$\mathbf{F}_S = -k\mathbf{v}, \quad (5)$$

где k – коэффициент пропорциональности (в случае шара $k = 6\pi\eta R$, где η – динамическая вязкость, R – радиус шара).

Ниже будет рассмотрен частный случай, когда $k = 0$, т.е. вязкое сопротивление отсутствует.

Поскольку

$$T\dot{S} = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P \nabla T \cdot \mathbf{v} = k_B C_P (\nabla T \cdot \mathbf{v}), \quad (6)$$

где C_P – изобарическая теплоемкость, T – температура, k_B – постоянная Больцмана, то с учетом определений (2)–(4) получаем

$$\dot{E} + \dot{Q} = m\mathbf{v} \cdot \left(\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{g} - \frac{\mathbf{F}}{m} + \frac{k_B C_P \nabla T}{m} \Big|_{\Sigma_V} \right) = 0, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{fr} + \mathbf{N} = N(-\mu\boldsymbol{\tau} + \mathbf{n}). \quad (8)$$

Последнее слагаемое в (7) берется на границе контакта тела с желобом.

Это означает, что при условии непрерывности градиента температуры на границе, если тепловой поток направлен от тела к желобу, под изобарической теплоемкостью следует понимать C_{1P} , которая характеризует теплоемкость тела, а если тепловой поток направлен от желоба к телу, то под обозначением C_P следует понимать теплоемкость желоба C_{2P} .

Поскольку разложение градиента по базису $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$ имеет вид

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial T}{\partial \tau} \boldsymbol{\tau}, \quad (9)$$

то после приравнивания к нулю выражения в круглых скобках в равенстве (7) с учетом (9) мы получаем в результате следующее уравнение движения с учетом теплового эффекта:

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} + \frac{(-\mu\boldsymbol{\tau} + \mathbf{n})N}{m} + \frac{k_B C_P}{m} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial T}{\partial \tau} \boldsymbol{\tau} \right). \quad (10)$$

В случае криволинейного движения ускорение определяется как

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} = \frac{v^2}{R} \mathbf{n} + \dot{v} \boldsymbol{\tau}, \quad (11)$$

а ускорение свободного падения раскладывается по базису $\mathbf{n} - \boldsymbol{\tau}$ согласно формуле

$$\mathbf{g} = g(\mathbf{n} \cos \alpha + \boldsymbol{\tau} \sin \alpha). \quad (12)$$

Следовательно согласно (10)–(12) мы приходим к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{N}{m} = v \dot{\alpha} - g \cos \alpha - \frac{k_B C_P}{m} \frac{\partial T}{\partial n}, \\ \dot{v} = g \sin \alpha - \mu \frac{N}{m} - \frac{k_B C_P}{m} \frac{\partial T}{\partial \tau}. \end{cases} \quad (13)$$

В нижнем уравнении системы (13) производную по направлению касательной $\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial l}$ можно положить равной нулю, поскольку наиболее эффективный поток тепла должен быть направлен только по нормали к поверхности контакта (его вычисление приводится немного ниже).

В этом случае система (13) несколько упрощается и становится такой:

$$\begin{cases} \frac{N}{m} = v \dot{\alpha} - g \cos \alpha - \frac{k_B C_P}{m} \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma_V}, \\ \dot{v} = g \sin \alpha - \mu \frac{N}{m}, \end{cases} \quad (14)$$

где множитель $\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma_V}$ подчеркивает, что производная по нормали к траектории берется на границе контакта обоих тел.

Наша задача заключается теперь в вычислении этого множителя $\frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma_V}$. Согласно поставленной выше задаче, если сухое трение отсутствует, то никакого потока тепла нет. Это означает, что интересующая нас производная по нормали должна быть связана только с силами сухого трения. Для того чтобы эту зависимость получить, удобно воспользоваться условием равенства диссипативных функций.

Действительно, с одной стороны, при учете сухого трения диссипативную функцию можно представить как

$$\dot{Q}_{fr} = -\mathbf{F}_{fr} \cdot \mathbf{v}. \quad (15)$$

С другой стороны (полагая везде далее постоянную Больцмана равной единице), можно представить эффективную диссипативную функцию согласно [12] в виде

$$\int_{\Delta V} T \dot{q} dV = \int_{\Delta V} \kappa (\nabla T)^2 dV, \quad (16)$$

где κ – коэффициент теплопроводности; $\dot{q}$ – диссипативная функция единицы объема, а объем ΔV представляет собой область, взятую по обе стороны границы в непосредственной близости к поверхности контактирующих тел.

Приравнявая (15) и (16), имеем с учетом (4):

$$\int_{\Delta V} \mu T \frac{N}{m} v \rho dV = \int_{\Delta V} \kappa (\nabla T)^2 dV,$$

где ρ – плотность одного из тел.

Поскольку $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$, где ΔV_1 – объем вблизи границы со стороны тела, а ΔV_2 – объем вблизи границы контакта со стороны желоба (причем считаем, что $\Delta V_1 = \Delta V_2$), то согласно этому равенству мы немедленно приходим к интересующему нас соотношению

$$\mu (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) \frac{N}{m_1} v = (\kappa_1 - \kappa_2) \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^2. \quad (17)$$

Здесь стоит заметить, что равенство (17) представлено нами в феноменологическом виде, который связан с необходимостью выполнения двух условий. *Первое условие:* если материалы тела и желоба одинаковые, то при

равенстве $\rho_1 = \rho_2$ должно также выполняться и равенство $\kappa_1 = \kappa_2$, но их температуры могут быть разными! При этом, как и должно быть, в равенстве (17) и слева и справа автоматически получаются нули. *Второе условие*: если температуры тела и желоба вблизи поверхности одинаковые, но материалы разные, то градиент температуры также должен быть равен нулю, т.е. мы приходим к тождеству: $0 = 0$. Оба эти условия и были нами учтены в уравнении (17).

Возвращаясь к верхнему уравнению в системе (14), после его подстановки в (17) приходим к квадратному уравнению для определения $\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Sigma_V}$.

В самом деле, имеем в результате

$$(\kappa_1 - \kappa_2) \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)^2 - \mu (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) v C_P \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) - \mu (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) v (v \dot{\alpha} - g \cos \alpha) = 0.$$

Откуда следует интересующая нас зависимость:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\mu v (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) C_P}{2(\kappa_1 - \kappa_2)} \pm \sqrt{\left[\frac{\mu v (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) C_P}{2(\kappa_1 - \kappa_2)} \right]^2 + \frac{\mu v (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2) (v \dot{\alpha} - g \cos \alpha)}{\kappa_1 - \kappa_2}}. \quad (18)$$

Специфика брахистохроны (как это было показано, например, в работах [9, 10]) приводит к тому, что и при учете трения, и без его учета, в любом случае (но с точностью до μ^2 !) должно выполняться соотношение

$$\dot{\alpha} = \frac{1}{C_1}, \quad (19)$$

где C_1 – константа.

Поэтому, если коэффициент трения мал, т.е. $\mu \ll 1$, согласно (18) мы имеем право приближенно записать, что

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Sigma_V} \approx v \sqrt{\frac{2\mu (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2)}{C_1 (\kappa_1 - \kappa_2)}}. \quad (20)$$

И, следовательно, нижнее динамическое уравнение в системе (14) с учетом верхнего уравнения, а также полученного соотношения (20), приводится к весьма компактному виду:

$$\dot{v} + \mu a v \dot{\alpha} = g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha), \quad (21)$$

где

$$a = 1 + \frac{C_P}{m} \sqrt{\frac{2\mu (T_1 - T_2) (\rho_1 - \rho_2)}{C_1 (\kappa_1 - \kappa_2)}}. \quad (22)$$

С учетом того, что $\dot{\alpha} \approx \frac{1}{C_1}$, уравнение (21) легко свести к следующему:

$$v' + \mu a v = C_1 g (\sin \alpha + \mu \cos \alpha), \quad (23)$$

где «штрих» означает дифференцирование по α .

Решение уравнения (23) есть

$$v = A e^{-\mu a \alpha} + \frac{C_1 g}{1 + \mu^2 a^2} \left[\mu (a + 1) \sin \alpha - (1 - a^2 \mu^2) \cos \alpha \right].$$

Согласно начальному условию

$$v(\alpha_1) = 0 \quad (24)$$

имеем

$$A = -\frac{C_1 g}{1 + a^2 \mu^2} e^{\mu a \alpha_1} \left[\mu (a + 1) \sin \alpha_1 - (1 - a^2 \mu^2) \cos \alpha_1 \right].$$

И, таким образом, искомую зависимость скорости от угла α можно представить как

$$v = \frac{C_1 g}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ \mu (a + 1) \sin \alpha - (1 - a^2 \mu^2) \cos \alpha + D e^{\mu a (\alpha_1 - \alpha)} \right\}, \quad (25)$$

где введено сокращенное обозначение

$$D = (1 - a^2 \mu^2) \cos \alpha_1 - \mu (a + 1) \sin \alpha_1.$$

Чтобы вычислить угол α_1 , нам следует воспользоваться еще одним начальным условием:

$$\ddot{y}(\alpha_1) = -g. \quad (26)$$

И поскольку $\dot{y} = -v \sin \alpha$, а $\ddot{y} = -\dot{v} \sin \alpha - v \dot{\alpha} \cos \alpha$, то в силу условия (24) имеем $g = \sin \alpha_1 \dot{v}|_{\alpha=\alpha_1}$.

Поэтому согласно решению (25) (ср. с (21)):

$$\dot{v}|_{\alpha=\alpha_1} = C_1 g \dot{\alpha} (\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1),$$

и с учетом (19) мы приходим к уравнению на угол α_1 :

$$g = g \sin \alpha_1 (\sin \alpha_1 + \mu \cos \alpha_1),$$

откуда немедленно получаем, что $|\operatorname{tg} \alpha_1| = 1/\mu$.

А потому, учитывая, что угол α тупой, имеем

$$\cos \alpha_1 = -\mu/\sqrt{1 + \mu^2}, \quad \sin \alpha_1 = 1/\sqrt{1 + \mu^2}. \quad (27)$$

Следовательно, интересующую нас форму желоба при условии $x > 0$, $y > 0$, несложно установить с помощью уравнений:

$$\dot{x} = -v \cos \alpha,$$

$$\dot{y} = -v \sin \alpha.$$

Интегрируя их, получаем

$$\begin{cases} x = - \int_{\alpha_1}^{\alpha} v \cos \alpha \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}}, \\ y = H - \int_{\alpha_1}^{\alpha} v \sin \alpha \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}}, \end{cases} \quad (28)$$

где H – высота скатывания.

С помощью найденного решения (25) из системы (28) с учетом того, что константа $C_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, имеем

$$\begin{cases} X = \frac{x}{H} = - \frac{2}{1 + \mu^2 a^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left\{ \mu(a+1) \sin \alpha - (1 - a\mu^2) \cos \alpha + D e^{\mu a(\alpha_1 - \alpha)} \right\} \cos \alpha d\alpha, \\ Y = \frac{y}{H} = 1 - \frac{2}{1 + \mu^2 a^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha} \left\{ \mu(a+1) \sin \alpha - (1 - a\mu^2) \cos \alpha + D e^{\mu a(\alpha_1 - \alpha)} \right\} \sin \alpha d\alpha. \end{cases} \quad (29)$$

Несложное интегрирование позволяет получить следующий окончательный ответ:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ \mu(a+1) (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_1) + \right. \\ \left. + (1 - a\mu^2) \left(\alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \right) - \right. \\ \left. - 2D \left[(\sin \alpha - a\mu \cos \alpha) e^{a\mu(\alpha_1 - \alpha)} - (\sin \alpha_1 - a\mu \cos \alpha_1) \right] \right\}, \\ Y = 1 + \frac{1}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ \mu(a+1) \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \right) - \right. \\ \left. - (1 - a\mu^2) (\cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha_1) - \right. \\ \left. - 2D \left[-(\cos \alpha + a\mu \sin \alpha) e^{a\mu(\alpha_1 - \alpha)} + \cos \alpha_1 + a\mu \sin \alpha_1 \right] \right\}. \end{cases} \quad (30)$$

Если теперь ввести очевидные константы в (30):

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ -\mu(a+1) \cos^2 \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 (1 - a\mu^2) + 2D (\sin \alpha_1 - a\mu \cos \alpha_1) \right\}, \\ R_2 &= \frac{1}{1 + \mu^2 a^2} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \mu(a+1) + (1 - a\mu^2) \cos^2 \alpha_1 - 2D (\cos \alpha_1 + a\mu \sin \alpha_1) \right\}, \end{aligned}$$

то после их вычисления с учетом определений (25) и (27) получим

$$\begin{aligned} R_1 &= -\frac{\mu \left[3 + 2a + \mu^2 + 2a^2\mu^2(1-\mu^2) + 4a\mu^2 \right]}{(1+\mu^2a^2)(1+\mu^2)}, \\ R_2 &= \frac{\mu^2 \left[a + 2a^2(1-\mu^2) - 4 + a\mu^2 \right]}{(1+\mu^2a^2)(1+\mu^2)}. \end{aligned} \quad (31)$$

И, таким образом, решение (30) можно записать как

$$\left\{ \begin{aligned} X &= \frac{1}{1+\mu^2a^2} \left\{ \mu(a+1)\cos^2\alpha + (1-a\mu^2) \left(\alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\mu(2+a-a\mu^2)}{\sqrt{1+\mu^2}} (\sin\alpha - a\mu\cos\alpha) e^{a\mu(\alpha_1-\alpha)} \right\} - \\ &\quad - \frac{\mu \left[3 + 2a + \mu^2 + 2a^2\mu^2(1-\mu^2) + 4a\mu^2 \right]}{(1+\mu^2a^2)(1+\mu^2)}, \\ Y &= 1 + \frac{1}{1+\mu^2a^2} \left\{ \mu(a+1) \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2}\sin 2\alpha \right) - (1-a\mu^2)\cos^2\alpha - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\mu(2+a-a\mu^2)}{\sqrt{1+\mu^2}} (\cos\alpha + a\mu\sin\alpha) e^{a\mu(\alpha_1-\alpha)} \right\} + \\ &\quad + \frac{\mu^2 \left[a + 2a^2(1-\mu^2) - 4 + a\mu^2 \right]}{(1+\mu^2a^2)(1+\mu^2)}. \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Фактически формулы (31), (32) отвечают на поставленный вопрос о форме желоба в условиях учета локального разогрева между ним и движущимся телом.

Подчеркнем, что все сказанное выше относится только к случаю, когда незначительное изменение температуры обусловлено силами сухого трения. Если изначально температура тела была T_1 , а температура желоба T_2 , то при этом условии полученные выше формулы становятся несправедливыми. Они верны лишь для относительно малых градиентов температуры.

3. Анализ формул (32)

Как легко понять, возможны только два случая, а именно градиент температуры либо маленький, либо большой. В самом деле, если согласно (22) ввести параметр

$$b = \frac{C_P}{m} \sqrt{\frac{2\mu(T_1 - T_2)(\rho_1 - \rho_2)}{C_1(\kappa_1 - \kappa_2)}}, \quad (33)$$

то сказанное означает следующее:

1. Если градиент температуры мал, т.е. $b \ll 1$, то $a \approx 1$, в этом случае формулы (32) переходят в следующие:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{1+\mu^2} \left\{ 2\mu \cos^2 \alpha + (1-\mu^2) \left(\alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) + \right. \\ \left. + \frac{2\mu(3-\mu^2)}{\sqrt{1+\mu^2}} (\sin \alpha - a\mu \cos \alpha) e^{\mu(\alpha_1 - \alpha)} \right\} - \frac{\mu(5+7\mu^2-2\mu^4)}{(1+\mu^2)^2}, \\ Y = 1 + \frac{1}{1+\mu^2} \left\{ 2\mu \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - (1-\mu^2) \cos^2 \alpha - \right. \\ \left. - \frac{2\mu(3-\mu^2)}{\sqrt{1+\mu^2}} (\cos \alpha + a\mu \sin \alpha) e^{\mu(\alpha_1 - \alpha)} \right\} - \frac{\mu^2}{(1+\mu^2)}, \end{cases} \quad (34)$$

которые качественно соответствуют решению, полученному в работе [13].

2. Если градиент температуры большой ($b \gg 1$ и $a \gg 1$), то здесь возможны две ситуации:

а) $1 \ll a \ll \frac{1}{\mu}$.

В этом случае согласно (32) имеем

$$\begin{cases} X = \alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{2a\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} (\sin \alpha - a\mu \cos \alpha) + a\mu \cos^2 \alpha - \frac{2a\mu}{(1+\mu^2)}, \\ Y = \sin^2 \alpha - \frac{2a\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} (\cos \alpha + a\mu \sin \alpha) + a\mu \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right). \end{cases} \quad (35)$$

И, как видим, решение (35) описывает чуть-чуть «подпорченную» брахистохрону.

б) $\frac{1}{\mu^2} \gg a \gg \frac{1}{\mu}$.

Из (32) следует тогда, что

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\mu^2 a^2} \left\{ a\mu \cos^2 \alpha + \left(\alpha - \alpha_1 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \right\} - \frac{2}{\mu a (1+\mu^2)}, \\ Y = 1 + \frac{1}{\mu^2 a^2} \left\{ a\mu \left(\alpha - \alpha_1 - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) - \cos^2 \alpha \right\} + \frac{2(1-\mu^2)}{a(1+\mu^2)}. \end{cases} \quad (36)$$

Если для примера принять следующие численные значения параметров:

$$c_{1P} \sim c_{2P} \sim 10^{20} \frac{1}{\Gamma}, \quad k_B = 1,38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{К}}, \quad \frac{\partial T}{\partial n} \approx \frac{T_2 - T_1}{\delta}, \quad T_2 - T_1 = \Delta T \sim 10^{-6} \text{ К},$$

$$g \approx 10^3 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \delta \sim 10^{-6} \text{ см}, \quad \rho_2 \sim \rho_1, \quad \Delta V_2 = \Delta V_1,$$

то получим по порядку величины:

$$b = \frac{k_B c_{1P}}{g} \frac{\partial T}{\partial n} \sim \frac{1,38 \cdot 10^{-16} \cdot 10^{20} \cdot 10^{-6}}{10^3 \cdot 10^{-6}} \sim 10, \quad (37)$$

где c_{1P} – теплоемкость, отнесенная к единице массы.

Приведенная согласно (37) оценка позволяет сделать один очень важный вывод. Даже перегрев области контакта в одну миллионную градуса Кельвина (или Цельсия) приводит к весьма ощутимому изменению траектории, а именно более выгодным с энергетической точки зрения становится движение не по брахистохроне.

На рис. 2 показано качественное изменение траектории движения, обусловленное слабым перегревом зоны контакта, приводящим к неминуемой деформации формы желоба при выполнении условий Б).

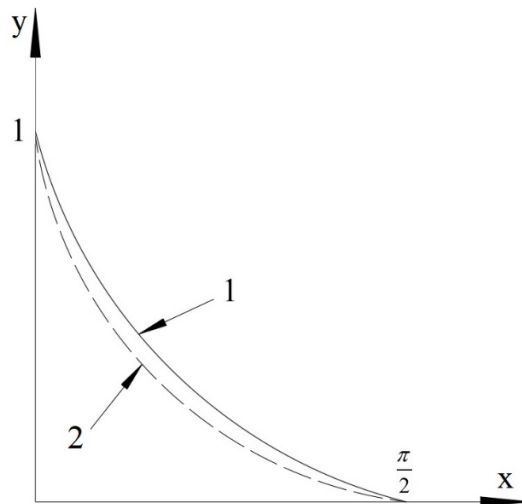


Рис. 2. Кривая 1 приближенно совпадает с брахистохроной в случае, если $p = 100$, для кривой 2 – $p = 70$

Как известно, время движения по классической брахистохроне (в отсутствие трения) определяется значением

$$t_B = \pi \sqrt{\frac{H}{2g}}. \quad (38)$$

Оценим время движения по линии, заданной уравнениями (32).

Действительно, согласно общему определению для времени скатывания имеем

$$\tilde{t} = \int_l \frac{dl}{v} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dl}{d\alpha} \frac{d\alpha}{v} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} R \frac{d\alpha}{R\dot{\alpha}} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}}. \quad (39)$$

При условии $\dot{\alpha} = \frac{1}{C_1}$ из (38) получаем

$$\tilde{t} = C_1 (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (40)$$

А так как $C_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$, мы приходим к следующей общей формуле для вычисления времени скатывания:

$$\tilde{t} = \sqrt{\frac{2H}{g}} (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (41)$$

В случае классической брахистохроны, когда $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, получаем формулу (38).

Если же у нас траектория задается уравнениями (32), то для нее начальный угол определяется формулами (27), а конечный угол α_2 должен определяться согласно уравнениям (29) с помощью следующих интегральных условий, учитывающих фиксированность нижней граничной точки:

$$\begin{cases} -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v \cos \alpha \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} = -C_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v \cos \alpha d\alpha = \frac{\pi}{2} H, \\ \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v \sin \alpha \frac{d\alpha}{\dot{\alpha}} = C_1 \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} v \sin \alpha d\alpha = H, \end{cases} \quad (42)$$

где скорость v дается решением (25).

Сказанное означает, что параметр b согласно определению (33) формально можно считать параметром переключения, если придерживаться общих принципов теории оптимального управления [16].

Заключение

В заключение работы, отметим:

- 1) получена система уравнений, описывающая изменение траектории движения при учете эффекта разогрева зоны контакта;
- 2) проанализировано решение этой системы уравнений и показано, что в зависимости от параметра b (или a) форма линии будет сильно изменяться;
- 3) приведена численная оценка для управляющего параметра b .

Список литературы

1. Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М. : Наука, 1969. 424 с.
2. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М. : Мир, 1974. 488 с.

3. Гладков С. О. О траектории движения тела, входящего в жидкость под произвольным углом // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 4. С. 164002-1–164002-5.
4. Lipp S. C. Brachistochrone with Coulomb friction // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35, № 2. P. 562–584.
5. Hayen J. C. Brachistochrone with Coulomb friction // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2005. Vol. 40, № 8. P. 1057–1075.
6. Гладков С. О., Богданова С. Б. Обобщенные динамические уравнения плоского криволинейного движения материального тела по желобу с учетом сил трения (их численный анализ в некоторых частных случаях) // Ученые записки физического факультета МГУ. 2017. № 1. С. 171101-1–171101-5.
7. Ashby N., Brittin W. E., Love W. F., Wyss W. Brachistochrone with Coulomb friction // American Journal of Physics. 1975. Vol. 43. P. 902–905.
8. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М. : Физматгиз, 1961. 284 с.
9. Гладков С. О., Богданова С. Б. Геометрический фазовый переход в задаче о брахистохроне // Ученые записки физического факультета МГУ. 2016. № 1. С. 161101-1–161101-5.
10. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 245, № 4. P. 528–537.
11. Gladkov S. O., Bogdanova S. B. On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them // Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 257, № 1. P. 27–30.
12. Гладков С. О., Богданова С. Б. О влиянии на форму брахистохроны эффекта Магнуса // Вестник Томского государственного университета. 2023. № 84. С. 33–39.
13. Гладков С. О. Об одном методическом подходе при выводе основных физических уравнений // Физическое образование в вузах. 2021. Т. 27, № 2. С. 5–11.
14. Гладков С. О. К вопросу о вычислении времени остановки вращающегося в вязком континууме цилиндрического тела и времени увлечения соосного с ним внешнего цилиндра // Журнал технической физики. 2018. Т. 88, № 3. С. 337–341.
15. Гладков С. О. К вопросу о самоорганизации процессов изменения численности населения Земли // Биофизика. 2021. Т. 66, № 5. С. 1005–1014.
16. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М. : Наука, 1969. 408 с.

References

1. Elsgolts L.E. *Differentsialnyye uravneniya i variatsionnoye ischisleniye = Differential equations and calculus of variations*. Moscow: Nauka, 1969:424. (In Russ.)
2. Yang L. *Lektsii po variatsionnomu ischisleniyu i teorii optimalnogo upravleniya = Lectures on the calculus of variations and optimal control theory*. Moscow: Mir, 1974:488. (In Russ.)
3. Gladkov S.O. On the trajectory of a body entering a liquid at an arbitrary angle. *Uchenyye zapiski fizicheskogo fakulteta MGU = Proceedings of the faculty of physics of MSU*. 2016;(4):164002-1–164002-5. (In Russ.)
4. Lipp S.C. Brachistochrone with Coulomb friction. *SIAM J. Control Optim.* 1997;35(2):562–584.
5. Hayen J.C. Brachistochrone with Coulomb friction. *Int. J. Non-Linear Mech.* 2005;40(8):1057–1075.
6. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. General dynamic equations of plane axial motion of a material body along a duct taking into account the strength of the friction (their numerical analysis in some frequent cases). *Uchenyye zapiski fizicheskogo fakulteta MGU = Proceedings of the faculty of physics of MSU*. 2017;(1):171101-1–171101-5. (In Russ.)

7. Ashby N., Brittin W.E., Love W.F., Wyss W. Brachistochrone with Coulomb friction. *Am. J. Phys.* 1975;43:902–905.
8. Gelfad I.M., Fomin S.V. *Variatsionnoye ischisleniye = Calculus of variations*. Moscow: Fizmatgiz, 1961:284. (In Russ.)
9. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Geometric phase transition in the brachistochrone problem. *Uchenyye zapiski fizicheskogo fakulteta MGU = Proceedings of the faculty of physics of MSU*. 2016;(1):161101-1–1611015. (In Russ.)
10. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. Analytical and numerical solution of the problem on brachistochrones in some general cases. *Journal of Mathematical Sciences*. 2020;245(4):528–537.
11. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On a class of planar geometrical curves with constant reaction forces acting on particles moving along them. *Journal of Mathematical Sciences*. 2021;257(1):27–30. (In Russ.)
12. Gladkov S.O., Bogdanova S.B. On the influence of the Magnus effect on the shape of the brachistochrone. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Bulletin of Tomsk State University*. 2023;(84):33–39. (In Russ.)
13. Gladkov S.O. On one methodical approach to deriving basic physical equations. *Fizicheskoye obrazovaniye v vuzakh = Physics education in universities*. 2021;27(2):5–11. (In Russ.)
14. Gladkov S.O. To the question of calculating the time of stopping the internal organs in the vertical continuum of the tibial body and the time of movement of the external tibial organ aligned with it. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki = Journal of Technical Physics*. 2018;88(3):337–341. (In Russ.)
15. Gladkov S.O. On the issue of self-organization of processes of change in the population of the Earth. *Biofizika = Biophysics*. 2021;66(5):1005–1014. (In Russ.)
16. Boltyanskiy V.G. *Matematicheskiye metody optimalnogo upravleniya = Mathematical methods of optimal control*. Moscow: Nauka, 1969:408. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Сергей Октябринович Гладков

доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры № 311
«Прикладные программные средства
и математические методы», Московский
авиационный институт (национальный
исследовательский университет)
(Россия, г. Москва, Волоколамское
шоссе, 4)

E-mail: sglad51@mail.ru

Sergey O. Gladkov

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, professor of the
sub-department No.311 of applied software
and mathematical methods, Moscow
Aviation Institute (National Research
University) (4 Volokolamskoye highway,
Moscow, Russia)

Софья Борисовна Богданова

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры № 311
«Прикладные программные средства
и математические методы», Московский
авиационный институт (национальный
исследовательский университет)
(Россия, г. Москва, Волоколамское
шоссе, 4)

E-mail: sonjaf@list.ru

Sofya B. Bogdanova

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department No.311
of applied software and mathematical
methods, Moscow Aviation Institute
(National Research University)
(4 Volokolamskoye highway,
Moscow, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 26.02.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.03.2025

Принята к публикации / Accepted 22.04.2025