

УДК 519.8

doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-8

Исследование теплообмена и магнитной гидродинамики при течении жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами

С. В. Соловьев

Вычислительный центр Дальневосточного отделения

Российской академии наук, Хабаровск, Россия

solovjovsv@rambler.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Исследования течения вязкой жидкости между вращающимися цилиндрами (известного как течение Куэтта), как экспериментальные, так и теоретические, актуальны до настоящего времени и находят широкое применение в технических приложениях (теплообменные аппараты, атомные и химические реакторы, сепараторы, астрофизика). Данный класс задач усложняется, когда наряду с гидродинамикой имеет место теплообмен вязкой жидкости. Степень сложности таких задач возрастает при совместном рассмотрении теплообмена и течения вязкой электропроводной жидкости между вращающимися с разной угловой скоростью цилиндрами. Для изучения и более глубокого понимания таких сложных процессов необходимы дальнейшие исследования, которые послужат уточнению математических моделей теплообмена и магнитной гидродинамики. Рассматривается теплообмен и магнитная гидродинамика жидкости (при заданном поле скорости) между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами. Целью работы является исследование влияния угловых скоростей вращения цилиндров, диссипации джоулева тепла, внутренних источников/стоков тепла, толщины цилиндрического слоя и магнитного числа Рейнольдса на поля температуры и магнитной индукции жидкости в цилиндрическом слое. *Материалы и методы.* Задача теплообмена и магнитной гидродинамики электропроводной жидкости решается численно методом контрольного объема (Патанкара) в цилиндрической системе координат. *Результаты.* Исследовано влияние поля скорости, внутренних источников/стоков тепла, диссипации джоулевой теплоты, толщины цилиндрического слоя на поля температуры, радиальной и угловой составляющих магнитной индукции электропроводной жидкости между двумя коаксиальными вращающимися цилиндрами. Установлено, что изменение направления вращения цилиндров приводит к изменению вида экстремума угловой составляющей магнитной индукции. Уменьшение магнитного числа Рейнольдса увеличивает интенсивность теплообмена в жидкости. *Выводы.* Полученные результаты могут быть использованы как при исследовании тепловых и магнитогидродинамических процессов, так и проектировании энергетических и химических аппаратов, сепараторов, приборов и установок.

Ключевые слова: математическое моделирование, конвективный теплообмен, магнитная гидродинамика, диссипация джоулевой теплоты, цилиндрический слой

Для цитирования: Соловьев С. В. Исследование теплообмена и магнитной гидродинамики при течении жидкости между двумя коаксиальными цилиндрами // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 1. С. 93–109. doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-8

Research of heat transfer and magnetohydrodynamics in the flow of liquid between two coaxial cylinders

© Соловьев С. В., 2025. Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 License / This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 License.

S.V. Solov'ev

Computing Center of Far Eastern Branch
of the Russian Academy of Sciences, Khabarovsk, Russia
solovjovsv@rambler.ru

Abstract. *Background.* Studies of viscous fluid flow between rotating cylinders (known as the Couette flow), both experimental and theoretical, are still relevant and are widely used in technical applications (heat exchangers, nuclear and chemical reactors, separators, astrophysics). This class of problems becomes more complicated when heat exchange takes place along with hydrodynamics. The complexity of such problems increases with a joint consideration of heat exchange and the flow of viscous conductive fluid between cylinders rotating with different angular velocities. Further research is needed to study and better understand such complex processes, which will serve to clarify the mathematical models of heat exchange and magnetohydrodynamics. The paper considers heat exchange and magnetohydrodynamics of fluid (for a given velocity field) between two rotating coaxial cylinders. The purpose of the work is to study the influence of angular velocities of cylinder rotation, Joule heat dissipation, internal heat sources/sinks, cylindrical layer thickness and magnetic Reynolds number on the temperature and magnetic induction fields of liquid in the cylindrical layer. *Materials and methods.* In dimensionless form, the problem of heat exchange and flow of electrically conductive liquid between two rotating cylinders is solved numerically in a cylindrical coordinate system. The control volume method (Patankar method) is used to solve the problem. *Results.* The influence of the velocity field, internal heat sources/sinks, Joule heat dissipation, cylindrical layer thickness on the temperature fields, radial and angular components of the magnetic induction of an electrically conducting liquid between two coaxial rotating cylinders is investigated. It is found that changing the direction of rotation of the cylinders leads to a change in the type of extremum of the angular component of magnetic induction. Reducing the magnetic Reynolds number increases the intensity of heat exchange in the liquid. *Conclusions.* The results obtained can be used both in the study of thermal and magnetohydrodynamics processes and in the design of power and chemical devices, separators, instruments and installations.

Keywords: mathematical modeling, convective heat exchange, magnetohydrodynamics, Joule heat dissipation, cylindrical layer

For citation: Solov'ev S.V. Research of heat transfer and magnetohydrodynamics in the flow of liquid between two coaxial cylinders. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* = *University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(1):93–109. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-1-8

Введение

Задачи магнитной гидродинамики имеют большое значение и находят широкое применение в различных областях физики, магнитногидродинамических генераторах, атомной промышленности и астрофизики [1–12]. Одним из классов задач гидродинамики является исследование движения жидкости между вращающимися цилиндрами (течение Куэтта), которое имеет большое значение в технических установках, например в тепловых генераторах, где наличие вязкости жидкости, движущейся между двумя вращающимися цилиндрами, приводит к диссипации энергии, переходящей в тепло. Эта задача усложняется, если рассматривается электропроводная жидкость. В этом случае к энергии диссипации, связанной с вязкостью жидкости, добавляется энергия диссипации, связанная с электрической проводимостью жидкости (джоулево тепло) [13]. И эта суммарная энергия переходит в тепло. Задачи

магнитной гидродинамики становятся еще более сложными, когда приходится учитывать процессы теплообмена. В этом случае математический аппарат магнитной гидродинамики составляют уравнения электродинамики, энергии и уравнения движения электропроводной среды, в которых учитываются все действующие силы. Аналитическое решение таких уравнений представляет собой довольно сложную задачу, поэтому применение численных методов является актуальным.

Целью настоящей работы является исследование путем математического моделирования уравнений магнитной гидродинамики и теплообмена электропроводящей жидкости, заключенной между двумя вращающимися вокруг своей оси коаксиальными бесконечными (по оси z) цилиндрами с заданным полем скорости (рассматривается кинематическая модель).

Математическая постановка задачи

Математическая постановка задачи в безразмерной форме, описывающая теплообмен электропроводной жидкостью между двумя коаксиальными цилиндрами с учетом внутренних, равномерно распределенных объемных источников/стоков тепла, и диссипации джоулевой теплоты, описывается системой уравнений магнитной индукции и теплообмена:

$$\frac{\partial B}{\partial Fo} = \text{rot}(V \times B)Pe + Pr_m \Delta B, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pe (V \nabla) \theta = \Delta \theta + Q_v + \frac{Ha^2 \cdot Ec \cdot Pr}{Re_m^2} (\text{rot } B)^2, \quad (2)$$

которая может быть представлена в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных в цилиндрической системе координат r, φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r}{\partial Fo} = Pe \left[B_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - V_r \frac{\partial B_r}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right] + \\ + Pr_m \left(\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \varphi^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\varphi}{\partial Fo} = Pe \left[B_r \frac{\partial V_\varphi}{\partial r} + \frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} - V_r \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \\ + Pr_m \left(\frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\varphi}{\partial \varphi^2} - \frac{B_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} + Pe \left(V_r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} + Q_v + \frac{Ha^2 \cdot Ec \cdot Pr}{Re_m^2} \times \\ \times \left[\frac{B_\varphi^2}{r^2} + \left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{2B_\varphi}{r} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right)^2 - \frac{2}{r} \left(\frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \frac{B_\varphi}{r} + \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Для составляющих магнитной индукции и температуры на внутренней и наружной поверхности цилиндров задавались граничные условия первого рода:

$$B|_{r_1}, B|_{r=1} = \text{const}, B_\varphi|_{r_1} = B_\varphi|_{r=1} = \text{const}, \theta|_{r_1}, \theta|_{r=1} = \text{const}.$$

На оси симметрии выполнялись условия:

$$\left. \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \pi} = \left. \frac{\partial B_\varphi}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \pi} = 0, \left. \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \pi} = 0.$$

В качестве начальных условий задавались нулевые значения составляющих магнитной индукции и температуры. При записи уравнений (1)–(5) приняты следующие обозначения: B_r , B_φ , $\theta = (T - T_2) / (T_1 - T_2)$, $Q_V = q_V R_2^2 / \lambda (T_1 - T_2)$ – радиальная и угловая составляющие магнитной индукции, температура и внутренний объемный источник/сток тепла; $Fo = at / R_2^2$, $Re_m = V_0 R_2 / \nu_m$, $Re = V_0 R_2 / \nu$, $Pr_m = \nu_m / a$, $Pr = \nu / a$, $Pe = Re \cdot Pr$, $Ec = V_0^2 / c_p (T_1 - T_2)$, $Ha = B_0 R_2 \sqrt{\sigma / \eta}$ – числа Фурье, магнитные и динамические числа Рейнольдса и Прандтля, Пекле, Эккерта и Гартманна; R_1 , R_2 – размерные радиусы внутреннего и внешнего цилиндров, $r = R / R_2$, $r_1 = R_1 / R_2$; V_0 – масштаб скорости. Численное решение задачи осуществлялось методом контрольного объема [14]. Фрагмент контрольного объема приведен на рис. 1.

Проинтегрировав дифференциальные уравнения (3)–(5) по всем контрольным объемам, получим систему дискретных аналогов.

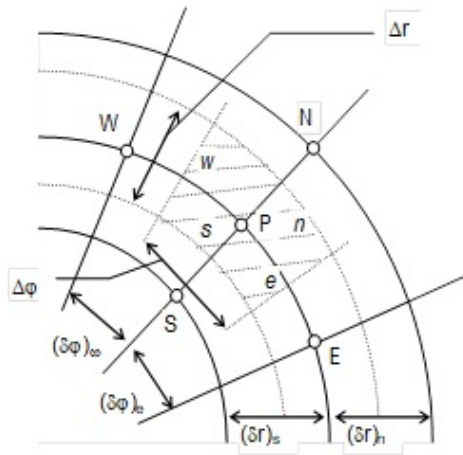


Рис. 1. Фрагмент сетки контрольного объема

Для магнитной индукции имеем:

$$a_P B_r^P = a_E B_r^E + a_W B_r^W + a_S B_r^S + a_N B_r^N + a,$$

$$\begin{aligned}
a_E &= -Pe \frac{V_\phi^P \Delta r}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{Pr_m}{(\delta\phi)_e}, \quad a_W = Pe \frac{V_\phi^P \Delta r}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{Pr_m}{(\delta\phi)_\omega}, \\
a_N &= Pe \frac{V_r^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{Pr_m r_P \Delta\phi}{(\delta r)_n} + \frac{Pr_m \Delta\phi}{2}, \quad a_S = \frac{r_P \Delta\phi Pr_m}{(\delta r)_s} - \frac{\Delta\phi Pr_m}{2}, \\
a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S - Pe(V_r^e - V_r^\omega) r_P \Delta\phi + \frac{Pr_m \Delta r \Delta\phi}{r_P} + b_P^0, \\
a &= b_P^0 B_r^P - 2 \frac{Pr_m \Delta r}{r_P} (B_\phi^e - B_\phi^\omega) + Pe \cdot B_\phi^P (V_r^e - V_r^\omega) r_P \Delta\phi; \\
b_P B_\phi^P &= b_E B_\phi^E + b_W B_\phi^W + b_S B_\phi^S + b_N B_\phi^N + b, \\
b_E &= -Pe \frac{V_\phi^P \Delta r}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{Pr_m}{(\delta\phi)_e}, \quad b_W = Pe \frac{V_\phi^P \Delta r}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{Pr_m}{(\delta\phi)_\omega}, \\
b_N &= -Pe \frac{V_\phi^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{\Delta\phi Pr_m}{2} + \frac{r_P \Delta\phi Pr_m}{2(\delta r)_n}, \\
b_S &= Pe \frac{V_r^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{r_P \Delta\phi Pr_m}{(\delta r)_s} - \frac{\Delta\phi Pr_m}{2}, \\
b_P &= b_E + b_W + b_N + b_S - Pe \Delta r (V_\phi^e \Delta\phi + (V_\phi^e - V_\phi^\omega)) + \frac{\Delta\phi \Delta r Pr_m}{r_P} + b_P^0, \\
b &= b_P^0 + Pe \Delta\phi B_r^P (r_P (V_\phi^n - V_\phi^s) - V_\phi^P \Delta r) + 2 \frac{\Delta r Pr_m}{r_P} (B_r^e - B_r^\omega).
\end{aligned}$$

Для температуры имеем:

$$\begin{aligned}
c_P \theta^P &= c_E \theta^E + c_W \theta^W + c_S \theta^S + c_N \theta^N + c, \\
c_E &= -Pe \frac{V_\phi^P \Delta r}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{1}{(\delta\phi)_e}, \quad c_W = Pe \frac{V_r^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{\Delta r}{r_P} \frac{1}{(\delta\phi)_\omega} - \frac{\Delta\phi}{2}, \\
c_N &= -Pe \frac{V_r^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{r_P \Delta\phi}{(\delta r)_n} + \frac{\Delta\phi}{2}, \quad c_S = Pe \frac{V_r^P r_P \Delta\phi}{2} + \frac{r_P \Delta\phi}{(\delta r)_s} - \frac{\Delta\phi}{2}, \\
c_P &= c_E + c_W + c_N + c_S + b_P^0, \\
c &= b_P^0 + Q_V r_P \Delta r \Delta\phi + \frac{Ha^2 \cdot Ec \cdot Pr}{Re_m^2} \left[2 B_r^P \Delta\phi (B_\phi^n - B_\phi^s) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2B_{\varphi}^P (B_r^e - B_r^{\omega}) \frac{\Delta r}{r_P} + (B_{\varphi}^P)^2 \frac{\Delta r \Delta \varphi}{r_P} + r_P^2 \Delta \varphi \left(\frac{(B_{\varphi}^n - B_{\varphi}^s)^2}{\Delta r} \right)^2 + \\
 & + \frac{\Delta r (B_r^e - B_r^{\omega})}{r_P \Delta \varphi} (B_r^e - B_r^{\omega}) - 2(B_r^e - B_r^{\omega})(B_{\varphi}^n - B_{\varphi}^s) \Big], \\
 & B_{\varphi}^{\omega} = \frac{B_{\varphi}^W + B_{\varphi}^P}{2}, \quad B_{\varphi}^e = \frac{B_{\varphi}^E + B_{\varphi}^P}{2}, \quad B_{\varphi}^n = \frac{B_{\varphi}^N + B_{\varphi}^P}{2}, \quad B_{\varphi}^s = \frac{B_{\varphi}^S + B_{\varphi}^P}{2}, \\
 & B_r^{\omega} = \frac{B_r^W + B_r^P}{2}, \quad B_r^e = \frac{B_r^E + B_r^P}{2}, \quad V_{\varphi}^n = \frac{V_{\varphi}^N + V_{\varphi}^P}{2}, \quad V_{\varphi}^s = \frac{V_{\varphi}^S + V_{\varphi}^P}{2}, \\
 & V_{\varphi}^{\omega} = \frac{V_{\varphi}^W + V_{\varphi}^P}{2}, \quad V_{\varphi}^e = \frac{V_{\varphi}^E + V_{\varphi}^P}{2}, \quad b_P^0 = \frac{r_P \Delta r \Delta \varphi}{\Delta F o}, \\
 & V_r^e = \frac{V_r^E + V_r^P}{2}, \quad V_r^{\omega} = \frac{V_r^W + V_r^P}{2}, \quad V_r^n = \frac{V_r^N + V_r^P}{2}, \quad V_r^s = \frac{V_r^S + V_r^P}{2}.
 \end{aligned}$$

Для решения системы дискретных аналогов использовался метод Зейделя. Вычисления прекращались при достижении заданной степени точности 10^{-7} .

В качестве кинематической модели, когда внутренний и внешний цилиндры вращаются с разными угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 , принято следующее распределение скорости жидкости [15]:

$$V_z = V_r = 0, \quad V_{\varphi} = \left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1 r_1^2}{1 - r_1^2} R_2 r + \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_1}{1 - r_1^2} \frac{r_1}{r} \right) / V_0.$$

На рис. 2–9 приведены поля скорости течения жидкости, магнитной индукции и температуры при граничных условиях вида

$$B_r|_{r_1} = B_r|_{r=1} = 1, \quad B_{\varphi}|_{r_1} = B_{\varphi}|_{r=1} = 0, \quad \theta|_{r_1} = 1, \quad \theta|_{r=1} = 0.$$

Результаты

На рис. 2 приведены результаты расчетов для стационарного режима с учетом диссипации джоулевой теплоты, когда внутренний и внешний цилиндры вращаются с угловыми скоростями $\Omega_1 = -1$ и $\Omega_2 = 1$ соответственно. Расчеты выполнены для следующих значений критериев подобия $Pe = Pr_m = Pr = Ha = Ec = 1$, $Re_m = 0,1$, $Q_v = 0$, $r_1 = 0,5$ ($R_1 = 1$, $R_2 = 2$).

На рис. 2,а приведено поле скорости течения жидкости в цилиндрическом слое. Вблизи внутренней границы слоя жидкость движется по направлению часовой стрелки, а вблизи внешней границы – по направлению против часовой стрелки.

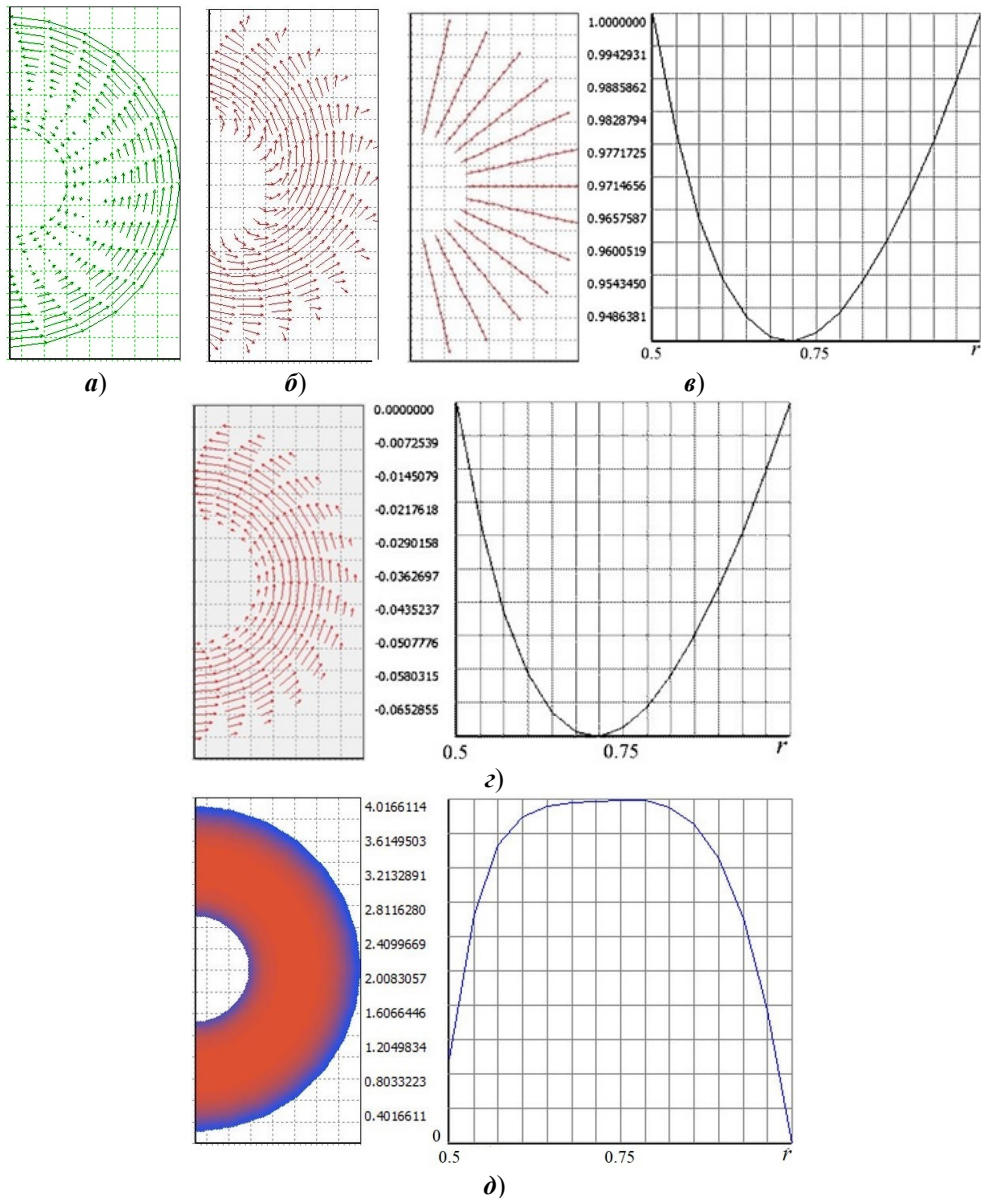


Рис. 2. Поля скорости (a), магнитной индукции (b), радиальной (v) и угловой (z) составляющих магнитной индукции, температуры (d)

На рис. 2,б приведено поле магнитной индукции (сумма радиальной и угловой составляющих магнитной индукции $\mathbf{B} = B_r \mathbf{e}_r + B_\phi \mathbf{e}_\phi$). Векторы магнитной индукции («магнитные стрелки») направлены по направлению против часовой стрелки (рис. 2,б). Поля и распределения радиальной и угловой составляющих магнитной индукции представлены на рис. 2,в,г. Векторы радиальной составляющей магнитной индукции направлены по радиусу от внутренней границы цилиндрического слоя жидкости к наружной (рис. 2,в). Векторы угловой составляющей магнитной индукции направлены по направлению против часовой стрелки (рис. 2,г). Профили распределений радиальной и угловой составляющих магнитной индукции (рис. 2,в,г) параболические,

причем минимумы величин B_r и B_ϕ расположены при $r \approx 0,7$. Значения радиальной составляющей магнитной индукции положительные, находятся в узком интервале $B_r \in [0,948; 1]$ (рис. 2,б). Значения угловой составляющей магнитной индукции отрицательные (рис. 2,г). Из сравнения полей индукции (рис. 2,б) и ее угловой составляющей (рис. 2,г) можно заметить, что различие между ними незначительное. Данный факт свидетельствует о малом влиянии поля радиальной составляющей магнитной индукции (рис. 2,б) на поле индукции (рис. 2,б).

На рис. 2,д показано поле и распределение температуры. Теплообмен в жидкости осуществляется теплопроводностью. Учет диссипации джоулевой теплоты увеличивает интенсивность теплообмена в жидкости, что приводит к возрастанию ее температуры до максимального значения $\theta_{\max} = 4,017$. Практически во всей расчетной области температура жидкости превышает значение $\theta > 1$ (выделено красным цветом) и лишь в окрестности внешней поверхности цилиндрического слоя жидкости ее температура $\theta < 1$ (выделено синим цветом).

На рис. 3 приведены поле и распределение температуры в слое жидкости для условий рис. 2, но без учета диссипации джоулевой теплоты и при $Q_v = 0, \pm 20$.

Для всех трех режимов перенос тепла в жидкости происходит теплопроводностью. Неучет диссипации джоулевой теплоты приводит к изменению поля и распределения температуры (рис. 3,а) по сравнению с результатом, представленным на рис. 2,д. В этом случае (рис. 3,а) температура жидкости не превосходит максимального значения $\theta_{\max} = 1$. Значительная часть поля температуры жидкости (выделено синим цветом) имеет температуру из интервала $0 \leq \theta < 1$, и лишь вблизи поверхности внутреннего цилиндра поле температуры (окрашено в оттенки красного цвета) имеет температуру жидкости $\theta \leq 1$. При учете внутренних источников тепла ($Q_v = 20$, рис. 3,б) максимальное значение температуры жидкости $\theta_{\max} = 1,181$. В случае внутренних стоков тепла ($Q_v = -20$, рис. 3,в) температура жидкости принимает как отрицательные, так и положительные значения, а ее минимальная температура $\theta_{\min} = -0,278$. При учете внутренних источников/стоков тепла профиль температуры параболический с максимумом для $Q_v = 20$ (рис. 3,б) и с минимумом для $Q_v = -20$ (рис. 3,в). Оказалось, что поля магнитной индукции и ее составляющих качественно и количественно аналогичны результатам рис. 2,б,в,г.

На рис. 4 приведены результаты расчетов для условий рис. 2, за исключением значений угловых скоростей: $\Omega_1 = 1, \Omega_2 = -1$. Изменение угловых скоростей на противоположные, по сравнению с режимом рис. 2, приводит к изменению поля скорости (рис. 4,а), магнитной индукции и ее угловой составляющей (рис. 4,б,в).

Векторы индукции и ее угловой составляющей (рис. 4,б,в) направлены по часовой стрелке, в отличие от результатов, показанных на рис. 2,б,г. Профиль распределения угловой составляющей магнитной индукции B_ϕ (рис. 4,в) параболический, имеющий максимум (при $r \approx 0,7$), а не минимум, как в случае результата, приведенного на рис. 2,г. Изменение угловых скоро-

стей привело к изменению отрицательных значений B_φ (рис. 2,з) на положительные (рис. 4,в). Оказалось, что поля и распределения температуры и радиальной составляющей магнитной индукции качественно и количественно аналогичны результатам рис. 2,д,в.

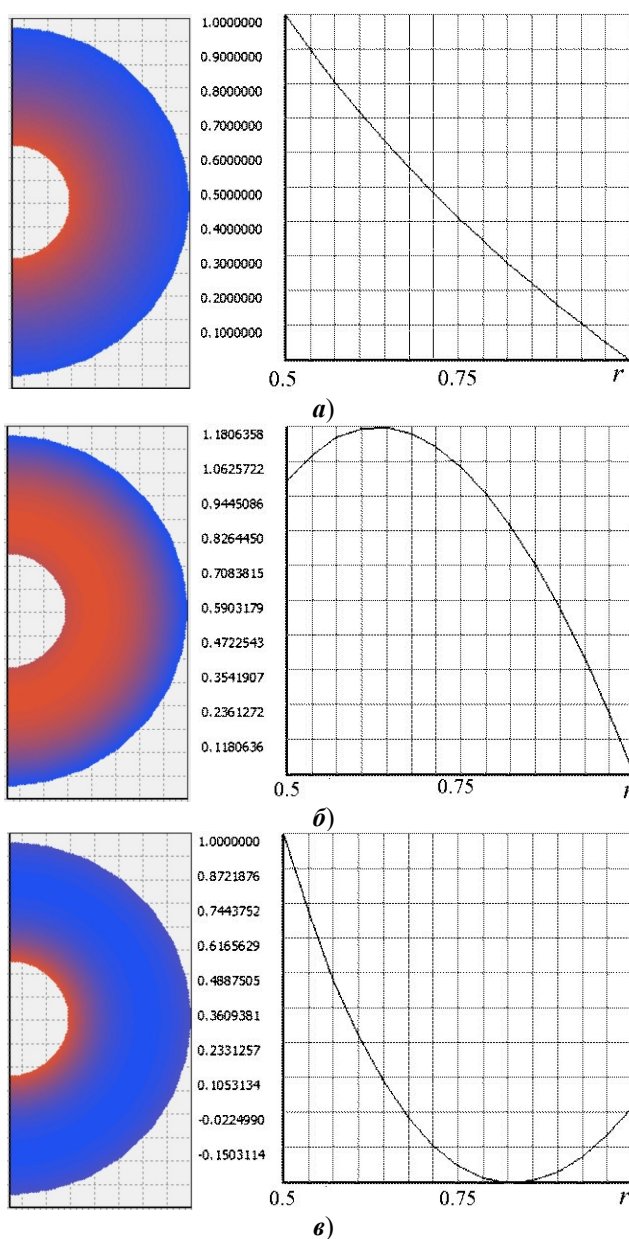


Рис. 3. Поле и распределение температуры: а – $Q_v = 0$; б – $Q_v = 20$; в – $Q_v = -20$

На рис. 5,а,б представлены поля скорости и магнитной индукции. Увеличение скорости вращения цилиндров в два раза привело к возрастанию значений угловой составляющей магнитной индукции (рис. 5,в) практически в два раза по сравнению с результатом, представленным на рис. 2,з. Поле и распределение радиальной составляющей магнитной индукции не измени-

лись и аналогичны результатам рис. 2, *в*. Температура жидкости (рис. 5, *з*) увеличивается в 3,7 раза по сравнению с результатом, приведенным на рис. 2, *д*, достигнув своего максимального значения $\theta_{\max} \approx 15$.

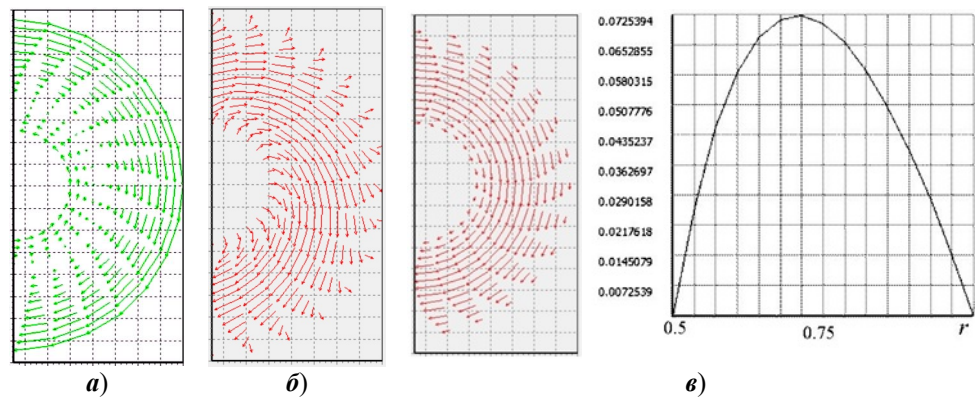


Рис. 4. Поля скорости (*a*), магнитной индукции (*б*), угловой составляющей магнитной индукции (*в*)

На рис. 5 приведены результаты расчетов для условий рис. 2 за исключением значений угловых скоростей: $\Omega_1 = -2$ и $\Omega_2 = 2$.

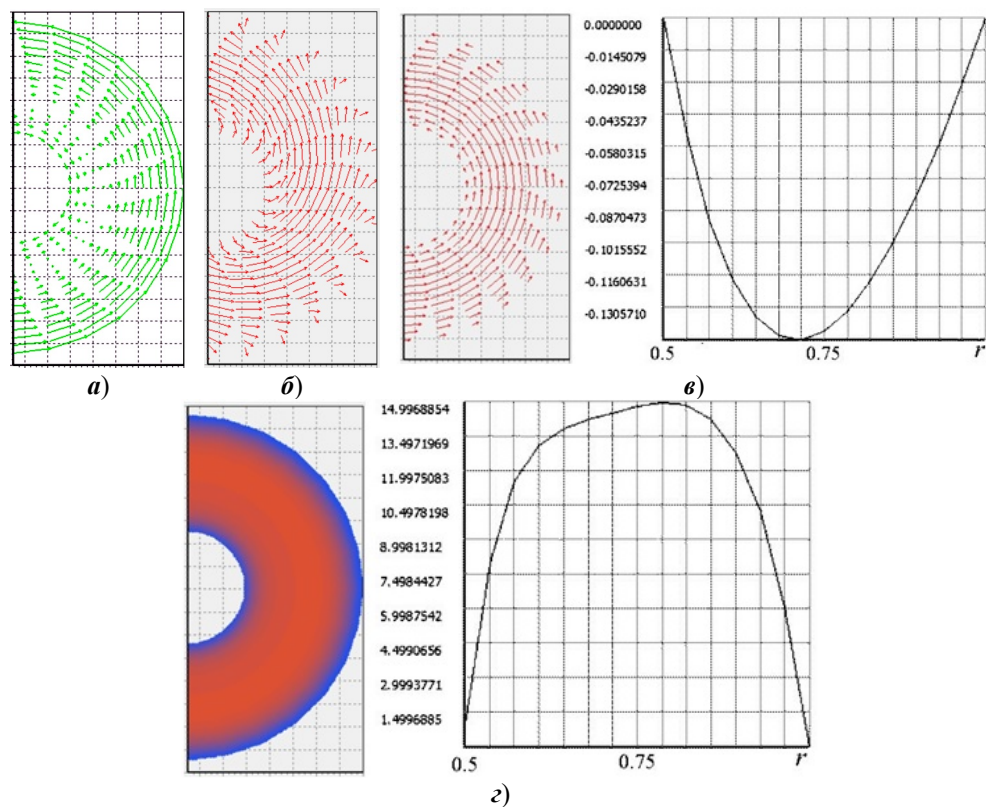


Рис. 5. Поля скорости (*a*), магнитной индукции (*б*), угловой составляющей магнитной индукции (*в*), температуры (*з*)

На рис. 6 приведены результаты расчетов для условий режима, приведенного на рис. 2, когда $Re_m = 0,05$ и $0,2$.

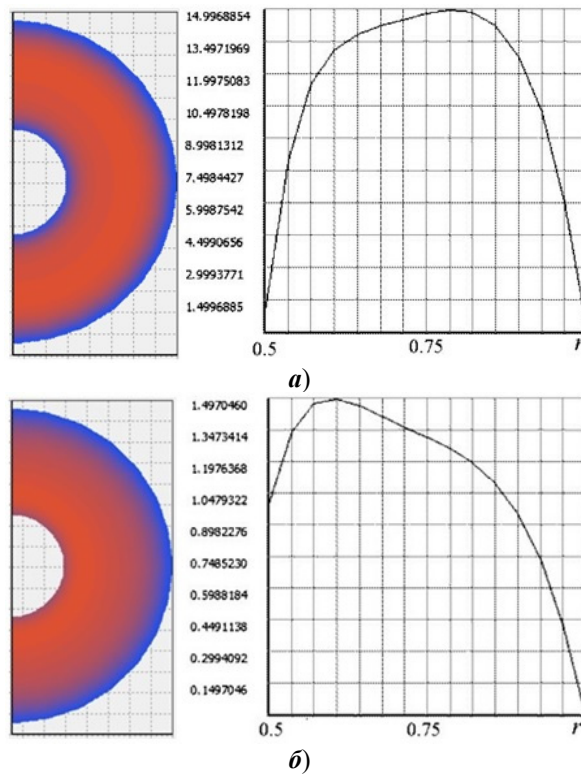


Рис. 6. Поле и распределение температуры: *a* – $Re_m = 0,05$; *б* – $Re_m = 0,2$

Уменьшение значения магнитного числа Рейнольдса в два раза (рис. 6,*a*) по сравнению с режимом, приведенным на рис. 2,*д*, приводит к увеличению интенсивности теплообмена в жидкости за счет возрастания вклада диссипации джоулевой теплоты. При этом максимальная температура жидкости увеличивается в 3,8 раза (рис. 6,*a*) до значения $\theta_{\max} \approx 15$ по сравнению с режимом, показанным на рис. 2,*д*. Увеличение значения магнитного числа Рейнольдса в два раза (рис. 6,*б*) по сравнению с режимом, приведенным на рис. 2,*д*, приводит к снижению интенсивности теплообмена в жидкости за счет уменьшения вклада диссипации джоулевой теплоты. При этом максимальная температура жидкости уменьшается в 2,7 раза (рис. 6,*б*) до значения $\theta_{\max} \approx 1,5$ по сравнению с режимом, представленным на рис. 2,*д*. Поля составляющих магнитной индукции и суммарной магнитной индукция качественно и количественно аналогичны результатам рис. 2,*б,в,г*.

На рис. 7 приведены результаты расчетов для условий режима, приведенного на рис. 2, когда внешний цилиндр не вращается ($\Omega_2 = 0$), а внутренний цилиндр вращается со скоростью $\Omega_1 = -1$.

В расчетной области жидкость движется по направлению часовой стрелки (рис. 7,*a*). Поле магнитной индукции и ее угловой составляющей представлено на рис. 7,*б,в*. Задание $\Omega_2 = 0$ (условие прилипания жидкости на

поверхности внешнего цилиндра) приводит к уменьшению в 2,7 раза максимальной температуры жидкости $\theta_{\max} = 1,497$ (рис. 7,з) по сравнению с результатом, приведенным на рис. 2,з,д ($\theta_{\max} = 4,017$). Распределение температуры жидкости (рис. 7,з) достигает своего максимального значения $\theta_{\max} = 1,497$ при $r \approx 0,61$. Поле и распределение радиальной составляющей магнитной индукции качественно и количественно аналогично результату, представленному на рис. 2,в.

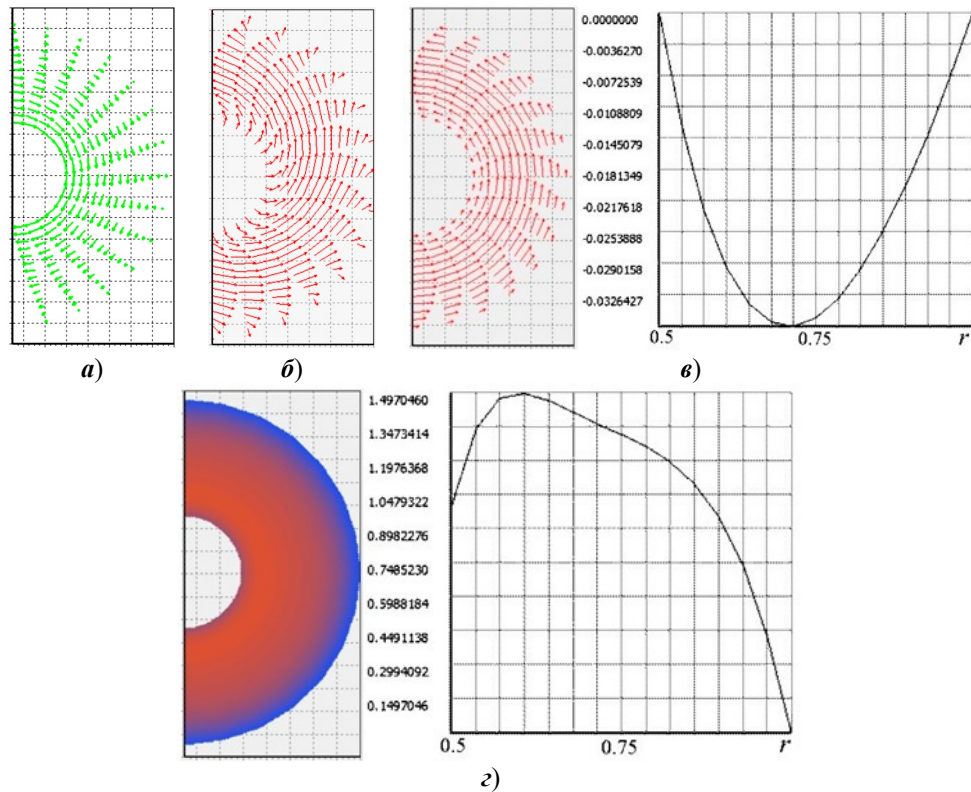


Рис. 7. Поля скорости (а), магнитной индукции (б), угловой составляющей магнитной индукции (в), температуры (з)

На рис. 8 приведены результаты расчетов для условий режима, приведенного на рис. 2, но для $r_1 = 1/3$ ($R_1 = 1$, $R_2 = 3$).

Увеличение толщины цилиндрического слоя в полтора раза по сравнению с режимом, представленным на рис. 2, приводит к незначительному качественному отличию распределения температуры (рис. 8,д) от результата рис. 2,д и к уменьшению максимального значения температуры ($\theta_{\max} = 2,032$, рис. 8,д) практически в два раза ($\theta_{\max} = 4,017$, рис. 2,д). Максимум температуры (рис. 8,д) расположен при $r \approx 0,48$. Оказалось, что поля скорости, магнитной индукции и ее составляющих (рис. 8,а,б,в,з) качественно аналогичны соответствующим полям, представленным на рис. 2.

На рис. 9 представлены результаты расчетов для условий режима, приведенного на рис. 2, при $r_1 = 0,25$ ($R_1 = 1$, $R_2 = 4$).

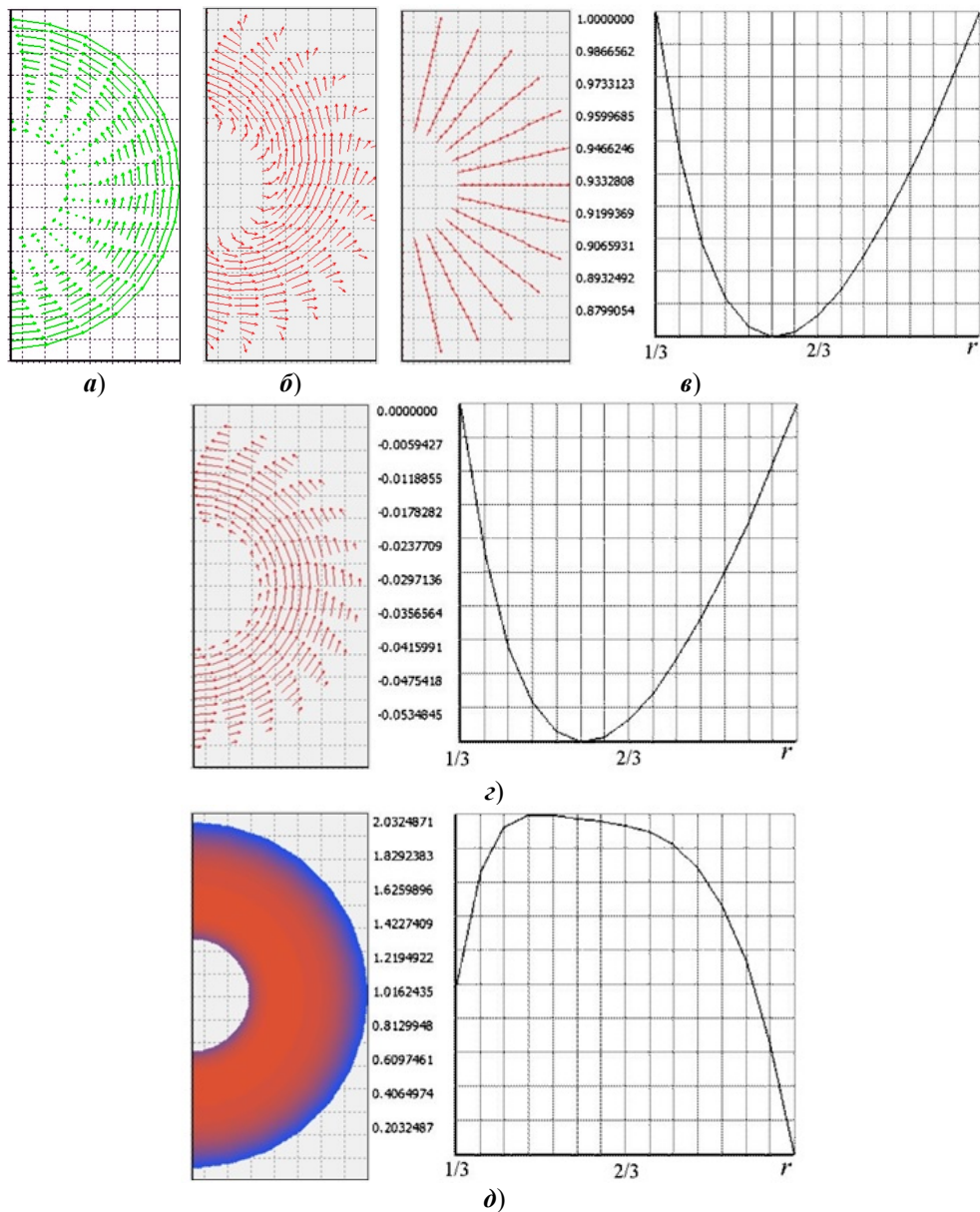


Рис. 8. Поля скорости (а), магнитной индукции (б), радиальной (в) и угловой (г) составляющих магнитной индукции, температуры (д)

При дальнейшем увеличении толщины цилиндрического слоя по сравнению с результатами, приведенными на рис. 8, имеет место изменение распределения температуры (рис. 9, д). Максимальное значение температуры жидкости $\theta_{\max} = 1,298$ (рис. 9, д) уменьшается примерно в 1,6 раза по сравнению с результатом, приведенным на рис. 8, д ($\theta_{\max} = 2,032$). Максимум температуры (рис. 9, д) расположен при $r \approx 0,32$. Поля скорости, магнитной индукции, радиальной и угловой составляющих магнитной индукции (рис. 9, а, б, в, г) качественно аналогичны соответствующим полям, представленным на рис. 8.

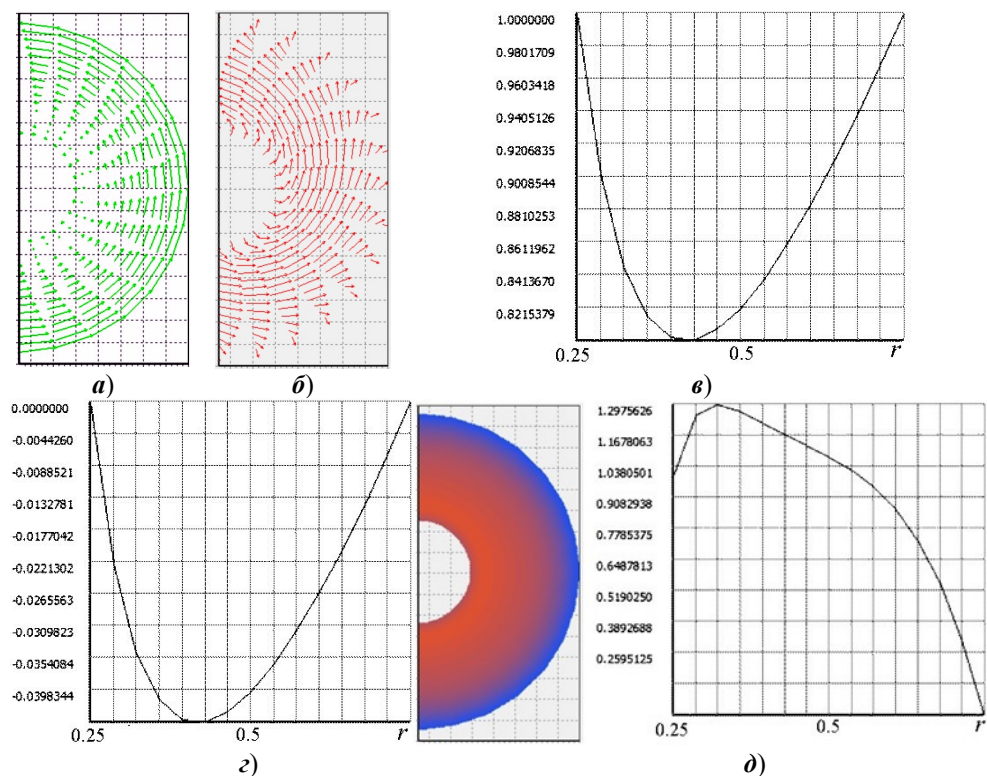


Рис. 9. Поля скорости (а), магнитной индукции (б), радиальной (в) и угловой (г) составляющих магнитной индукции, температуры (д)

Заключение

Предложена математическая модель теплообмена электропроводной жидкости между двумя вращающимися коаксиальными цилиндрами. Проведен вычислительный эксперимент, результаты которого позволяют сделать следующие выводы:

1. Изменение направления вращения цилиндров приводит к изменению типа экстремума (с минимума на максимум) угловой составляющей магнитной индукции. Увеличение скорости вращения цилиндров приводит к росту температуры жидкости. При увеличении толщины цилиндрического слоя максимальная температура жидкости снижается, а положение максимума $\theta_{\max}$ сдвигается в сторону внутреннего цилиндра: при $r_1 = 1/3$, $\theta_{\max} = 2,032$, $r_{\max} \approx 0,48$; при $r_1 = 0,25$, $\theta_{\max} = 1,298$, $r_{\max} \approx 0,32$).

2. При уменьшении магнитного числа Рейнольдса вклад диссипации джоулевой теплоты возрастает, интенсифицируя теплообмен в жидкости. При увеличении магнитного числа Рейнольдса ситуация противоположная. Учет внутренних источников/стоков тепла (без учета диссипации джоулевой теплоты) практически не оказывает влияния на поле магнитной индукции и ее составляющих.

3. Для всех рассмотренных режимов поле радиальной составляющей магнитной индукции B_r качественно сохраняется. Количественные изменения B_r связаны с толщиной цилиндрического слоя. Установлено, что интервал

значений B_r уменьшается с увеличением толщины цилиндрического слоя: $B_r \in [0,943; 1]$ при $r_1 = 0,5$; $B_r \in [0,866; 1]$ при $r_1 = 1/3$; $B_r \in [0,802; 1]$ при $r_1 = 0,25$.

Математическая модель и полученные результаты могут быть применены при исследовании магнитогидродинамических и тепловых процессов на этапе проектирования энергетических и химических установок, сепараторов, аппаратов и приборов, создании новых моделей и расширении знаний о теплообмене электропроводной жидкости.

Список литературы

1. Elkhazen M. I., Hassen W., Gannoun R., Hussein A. K. and Borjini M. N. Numerical study of electroconvection in a dielectric layer between two cofocal elliptical cylinders subjected to unipolar injection // Journal of engineering physics and thermophysics. 2019. Vol. 92, № 5. P. 2358–2370.
2. Кашевский С. Б., Кашевский Б. Э., Худoley А. Л. Экспериментальная модель для исследования динамики магнитных дисперсий в градиентном магнитном поле // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91, № 1. С. 184–194.
3. Ahmed N. Heat and mass transfer in MHD poiseuille flow with porous walls // Journal of engineering physics and thermophysics. 2019. Vol. 92, № 1. P. 128–137.
4. Борисевич В. Д., Потанин Е. П. Магнитная гидродинамика и теплоперенос во вращающихся потоках // Инженерно-физический журнал. 2019. Т. 92, № 1. С. 174–181.
5. Федоров С. В. Усиление магнитного поля в струйных течениях проводящих материалов: соударение двух струй с магнитным полем // Инженерно-физический журнал. 2021. Т. 94, № 3. С. 675–685.
6. Belabid J. Hydromagnetic natural convection from a horizontal porous annulus with heat generation or absorption // Journal of engineering physics and thermophysics 2021. Vol. 94, № 4. P. 960–965.
7. Pavlyukevich N. V., Shnip A. I. Modeling heat transfer in the core of a nuclear power reactor in the presence of perturbations of hydrodynamic and energy parameters // J. Eng. Phys. Thermophys. 2022. Vol. 95, № 1. P. 29–36.
8. Перминов А. В., Никулин И. Л. Математическая модель процессов тепломассопереноса и диффузии магнитного поля в индукционной печи // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89, № 2. С. 388.
9. Volker T., Odenbach S. Thermodiffusion in magnetic fluids // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2005. Vol. 289. P. 289–291.
10. Гринкруг Л. С., Соловьев С. В., Цой Р. И. Моделирование теплообмена электропроводной жидкости в цилиндрическом слое // Вестник Приамурского государственного университета им. Шолом-Алейхема. 2013. № 2 (13). С. 36–42.
11. Аристов С. Н., Пухначёв В. В. Об уравнениях вращательно симметричного движения вязкой несжимаемой жидкости // Доклады Академии наук. 2004. № 394. С. 611–614.
12. Aristov S. N., Gitman I. M. Viscous flow between two moving parallel disk: exact solutions and stability analysis // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 464. P. 209–215.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособ. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. 4-е изд., стереот. М. : Физматлит, 2005. 656 с.
14. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости : пер. с англ. М. : Энергоатомиздат, 1984. 152 с.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика : учеб. пособ. Т. VI. Гидродинамика. 5-е изд., стереот. М. : Физматлит, 2001. 736 с.

References

1. Elkhazen M.I., Hassen W., Gannoun R., Hussein A.K. and Borjini M.N. Numerical study of electroconvection in a dielectric layer between two cofocal elliptical cylinders subjected to unipolar injection. *Journal of engineering physics and thermophysics*. 2019;92(5):2358–2370.
2. Kashevskiy S.B., Kashevskiy B.E., Khudoley A.L. Experimental model for studying the dynamics of magnetic dispersion in a gradient magnetic field. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal = Engineering and physics journal*. 2018;91(1):184–194. (In Russ.)
3. Ahmed N. Heat and mass transfer in MHD poiseuille flow with porous walls. *Journal of engineering physics and thermophysics*. 2019;92(1):128–137.
4. Borisevich V.D., Potanin E.P. Magnetohydrodynamics and heat transfer in rotating flows. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal = Engineering and physics journal*. 2019;92(1):174–181. (In Russ.)
5. Fedorov S.V. Magnetic field enhancement in jet flows of conducting materials: collision of two jets with a magnetic field. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal = Engineering and physics journal*. 2021;94(3):675–685. (In Russ.)
6. Belabid J. Hydromagnetic natural convection from a horizontal porous annulus with heat generation or absorption. *Journal of engineering physics and thermophysics*. 2021;94(4):960–965.
7. Pavlyukevich N.V., Shnip A.I. Modeling heat transfer in the core of a nuclear power reactor in the presence of perturbations of hydrodynamic and energy parameters. *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2022;95(1):29–36.
8. Perminov A.V., Nikulin I.L. Mathematical model of heat and mass transfer processes and magnetic field diffusion in an induction furnace. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal = Engineering and physics journal*. 2016;89(2):388. (In Russ.)
9. Volker T., Odenbach S. Thermodiffusion in magnetic fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2005;289:289–291.
10. Grinkrug L.S., Solov'ev S.V., Tsoy R.I. Modeling heat transfer of an electrically conductive liquid in a cylindrical layer. *Vestnik Priamurskogo gosudarstvennogo universiteta im. Sholom-Aleykhema = Bulletin of Sholem Aleichem Primorsky State University*. 2013;(2):36–42. (In Russ.)
11. Aristov S.N., Pukhnachev V.V. On the equations of rotationally symmetric motion of a viscous incompressible fluid. *Doklady Akademii nauk = Reports of the Academy of Sciences*. 2004;(394):611–614. (In Russ.)
12. Aristov S.N., Gitman I.M. Viscous flow between two moving parallel disk: exact solutions and stability analysis. *J. Fluid Mech.* 2002;464:209–215.
13. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: ucheb. posob. T. VIII. Elektrodinamika sploshnykh sred. 4-e izd., stereot. = Theoretical physics: textbook. Volume 8. Electrodynamics of continuous media. The 4th edition, stereot.* Moscow: Fizmatlit, 2005:656. (In Russ.)
14. Patankar S. *Chislennyye metody resheniya zadach teploobmena i dinamiki zhidkosti: per. s angl. = Numerical methods for solving problems of heat transfer and fluid dynamics: translated from English*. Moscow: Energoatomizdat, 1984:152. (In Russ.)
15. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika: ucheb. posob. T. VI. Gidrodinamika. 5-e izd., stereot. = Theoretical physics: textbook. Volume 6. Hydrodynamics. The 5th edition, stereot.* Moscow: Fizmatlit, 2001:736. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Сергей Викторович Соловьев

доктор физико-математических наук,
профессор, ведущий научный
сотрудник, Вычислительный центр
Дальневосточного отделения
Российской академии наук (Россия,
г. Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65)

E-mail: solovjovsv@rambler.ru

Sergey V. Solov'ev

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, leading researcher,
Computing Center of Far Eastern Branch
of the Russian Academy of Sciences
(65 Kim Yu Chen street, Khabarovsk,
Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 21.01.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 19.03.2025

Принята к публикации / Accepted 07.04.2025