УДК 517.96
doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-1


## О фредгольмовости гиперсингулярных интегральных операторов в специальных классах функций


**Ю. Г. Смирнов**

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

mmm@pnzgu.ru



**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Рассматриваются гиперсингулярные интегральные уравнения на отрезке, возникающие во многих задачах математической физики. *Материалы и методы.* Гиперсингулярные уравнения изучаются в специальных классах функций, которые представляются рядами Фурье по многочленам Чебышева 2-го рода. *Результаты и выводы.* Доказываются критерии компактности операторов в специальных классах функций. Основным результатом является доказательство фредгольмовости гиперсингулярного оператора в специальных классах функций, которое важно при формулировке и реализации численного метода решения гиперсингулярных уравнений.



**Ключевые слова**: гиперсингулярное уравнение, фредгольмов оператор, многочлены Чебышева

**Финансирование**: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации по гранту Государственного задания (Рег. № 124020200015-7).

**Для цитирования**: Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости гиперсингулярных интегральных операторов в специальных классах функций // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 2. С. 3–14. doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-1


## On Fredholm property of hypersingular integral operators in special classes of functions


**Yu.G. Smirnov**

Penza State University, Penza, Russia

mmm@pnzgu.ru



**Abstract.** *Background.* Hypersingular integral equations on a segment that arise in many issues of mathematical physics are considered. *Materials and methods.* Hypersingular equations are studied in special classes of functions, which are represented by Fourier series of Chebyshev polynomials of the 2nd kind. *Results and conclusions.* The criteria of compactness of operators in special classes of functions are proved. The main result is the proof of the Fredholm property of hypersingular operator in special classes of functions, which is important in the formulation and implementation of a numerical method for solving hypersingular equations.

**Keywords**: hypersingular equation, Fredholm operator, Chebyshev polynomials

**Financing**: the research was financed by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the grant of the State Assignment (Reg. No. 124020200015-7).

**For citation**: Smirnov Yu.G. On Fredholm property of hypersingular integral operators in special classes of functions. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(2):3–14. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-1

## Введение

К гиперсингулярным уравнениям сводятся многие краевые задачи математической физики (см., например, [1–4]). Гиперсингулярные операторы изучены достаточно полно [1–4]. Обычно гиперсингулярные операторы понимаются в смысле Адамара [3, 4], но их можно рассматривать как интегро-дифференциальные или псевдодифференциальные [1].

Другой подход к рассмотрению гиперсингулярных операторов используется в [2]. Оператор определяется своим действием на функции, разложенные в ряд Фурье по многочленам Чебышева. При этом используется известная формула действия гиперсингулярного оператора на многочлены Чебышева 2-го рода. Именно так рассматриваются операторы в данной статье. Такой подход особенно полезен при формулировке и реализации численных методов решения гиперсингулярных уравнений, поскольку позволяет явно (аналитически) учесть гиперсингулярную особенность ядра интегрального уравнения и произвести тем самым его регуляризацию.

Центральным при анализе свойств гиперсингулярного уравнения является вопрос о его разрешимости в некоторых функциональных классах. Чаще всего эта задача решается на основе доказательства фредгольмовости оператора и доказательства единственности решения уравнения, откуда следует непрерывная обратимость оператора и однозначная разрешимость уравнения. Доказательство единственности решения уравнения, как правило, основано на единственности решения исходной краевой задачи и в настоящей статье не рассматривается.

Основным результатом настоящей статьи является доказательство фредгольмовости гиперсингулярного оператора в специальных классах функций, которые «подбираются» таким образом, чтобы легко изучить действие в них гиперсингулярного оператора. Такой подход был реализован при изучении логарифмических интегральных операторов в [2, 5].

## 1. Классы $\Psi_p$. Гиперсингулярные интегральные операторы в классах $\Psi_p$

Далее будут изучены свойства гиперсингулярных интегральных операторов в некоторых специальных классах $\Psi_p$ (*на шкале пространств*), естественно связанных с многочленами Чебышева 2-го рода.

Пусть $h_p$ – пространство последовательностей комплексных чисел $\xi_k$ таких, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 (k+1)^p < \infty; \; p \geq 0. \tag{1}$$

Пространства $h_p$, наделенные скалярным произведением

$$(\xi,\eta)_p = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k (k+1)^p \tag{2}$$

и нормой

$$\|\xi\|_p^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 (k+1)^p , \tag{3}$$

являются сепарабельными гильбертовыми пространствами.

Рассмотрим классы функций, заданных на отрезке [–1, 1]:

$$\Psi_p = \left\{ \varphi : \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x),\ \xi \in h_p \right\}, \tag{4}$$

где

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \ -$$

многочлены Чебышева 2-го рода [6]. Эти пространства также становятся гильбертовыми, если определить скалярные произведения по формуле

$$(\varphi,\psi)_p = (\xi,\eta)_p = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \overline{\eta}_k (k+1)^p , \tag{5}$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x),\ \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k U_k(x). \tag{6}$$

Из (1)–(6) ясно, что $\Psi_p$ унитарно изометрично $h_p$.

Введем пространства квадратично-суммируемых функций на отрезке $[-1,1]$ с весами $1/\sqrt{1-x^2}$ и $\sqrt{1-x^2}$ :

$$L_2^{(1)} = L_2\left([-1,\ 1]\ ;\ 1/\sqrt{1-x^2}\right),\ L_2^{(2)} = L_2\left([-1,\ 1]\ ;\ \sqrt{1-x^2}\right).$$

Хорошо известно, что [6] $\Psi_0 = L_2^{(2)}$.

**Утверждение 1.** Пусть $\varphi \in \Psi_2$. Тогда функция $\varphi(x)$ непрерывна на интервале $(-1,1)$, для функции $\varphi^*(x) := \varphi(x)\sqrt{1-x^2}$ имеем $\varphi^*(-1) = \varphi^*(1) = 0$.

**Доказательство.** Из $\varphi \in \Psi_2$ следует, что $\varphi \in \Psi_0$, тогда

$$|\varphi(x)| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \frac{\sin((k+1)\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k| |\sin((k+1)\arccos x)| \le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k (k+1)| \frac{1}{k+1} \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 (k+1)^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left( \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 (k+1)^2 \right)^{1/2} \le \frac{C}{\sqrt{1-x^2}},$$

где константа $C$ не зависит от $x$.

Отсюда следует, что функция $\varphi(x)$ непрерывна на интервале $(-1,1)$, так как ряд из непрерывных функций равномерно сходится на любом отрезке $[a,b] \subset (-1,1)$. Кроме того, функция $\varphi^*(x) = \varphi(x)\sqrt{1-x^2}$ ограничена на $[-1,1]$ и верны оценки $|\varphi(x)| \le \dfrac{C}{\sqrt{1-x^2}}$ и $|\varphi^*(x)| \le C$.

В формуле

$$\varphi(x)\sqrt{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \sin((k+1)\arccos x)$$

можно перейти к пределу при $x \to \pm 1$, поскольку этот ряд сходится равномерно на $[-1,1]$. Имеем $\varphi^*(-1) = \varphi^*(1) = 0$, так как все слагаемые ряда в пределе равны 0.

**Утверждение 2.** Функции $\varphi^*(x) = \varphi(x)\sqrt{1-x^2}$, где $\varphi \in \Psi_2$, удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\mu$, $\mu \le \dfrac{1}{4}$.

**Доказательство.** Докажем, что для некоторой константы $C = C(\varphi^*)$

$$\left|\varphi^*(x) - \varphi^*(y)\right| \le C|x-y|^{\frac{1}{4}}, \ -1 \le x, y \le 1, \ \forall \varphi \in \Psi_2.$$

Отсюда следует справедливость условия Гельдера при всех $0 < \mu \le \dfrac{1}{4}$.

Пусть $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x)$. Тогда, обозначая $x = \cos\theta$, $y = \cos\tau$, для $\varphi^*(x) = \varphi(x)\sqrt{1-x^2}$ имеем

$$\left|\varphi^*(x) - \varphi^*(y)\right| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \left( \sin(n+1)\theta - \sin(n+1)\tau \right) \right| \le 2 \sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n| \left| \sin \frac{(n+1)(\theta - \tau)}{2} \right| \le$$

$$\le 2\|\xi\|_2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^2(n+1)\frac{\theta-\tau}{2}}{(n+1)^2}\right)^{1/2}=2\|\xi\|_2\left(|\theta-\tau|\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{8}|\theta-\tau|\right)\right)^{1/2}\le$$

$$\le\sqrt{\pi}\|\xi\|_2|\theta-\tau|^{1/2}\le\frac{\pi}{\sqrt[4]{2}}\|\xi\|_2|\cos\theta-\cos\tau|^{1/4}=C|x-y|^{1/4}.$$

Утверждение доказано.

**Следствие 1.** Для функций $\varphi^*(x)=\varphi(x)\sqrt{1-x^2}$ , где $\varphi\in\Psi_2$ , верна оценка

$$\left|\varphi^*(x)\right|\le C(1-x)^{\frac{1}{4}}(1+x)^{\frac{1}{4}}. \tag{7}$$

Введем гильбертово пространство [2]:

$$\hat{W}_2^1:=\left\{\varphi:\varphi\in L_2^{(2)};\varphi^*(x):=\varphi(x)\sqrt{1-x^2},\left(\varphi^*\right)'\in L_2^{(2)},\varphi^*(-1)=\varphi^*(1)=0\right\} \tag{8}$$

со скалярным произведением и нормой:

$$(\varphi,\psi)_w:=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\overline{\psi(x)}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}\left(\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\right)'\left(\overline{\psi(x)}\sqrt{1-x^2}\right)'\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

$$\|\varphi\|_w^2:=\int_{-1}^{1}|\varphi(x)|^2\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-1}^{1}\left|\left(\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\right)'\right|^2\sqrt{1-x^2}\,dx. \tag{9}$$

**Утверждение 3.** $\Psi_2=\hat{W}_2^1$.

**Доказательство.** Пусть $\varphi\in\Psi_2$ . Тогда $\varphi\in\Psi_0=L_2^{(2)}$ и

$$\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k U_k(x),\ \xi_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}U_k(x)\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\,dx,$$

а последовательность $\xi_k$ такова, что $\sum_{k=0}^{\infty}|\xi_k|^2(k+1)^2<\infty$ .

Применяя утверждение 1 (или оценку (7)) при интегрировании по частям, имеем

$$(k+1)\xi_k=(k+1)\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}U_k(x)\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\,dx=$$

$$=(k+1)\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin\left((k+1)\arccos x\right)\varphi(x)\,dx=$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos'((k+1)\arccos x)\varphi^*(x)\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}T_{k+1}(x)\left(\varphi^*(x)\right)'dx =$$

$$= -\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}T_{k+1}(x)\sqrt{1-x^2}\left(\varphi^*(x)\right)'\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad (10)$$

поэтому $-(k+1)\xi_k$ являются коэффициентами Фурье функции $\sqrt{1-x^2}\left(\varphi^*(x)\right)'$ при разложении в ряд Фурье – Чебышева по многочленам Чебышева 1-го рода $T_k(x)$. Тогда в силу условия $\sum_{k=0}^{\infty}|\xi_k|^2(k+1)^2<\infty$ получаем, что $\sqrt{1-x^2}\left(\varphi^*(x)\right)'\in L_2^{(1)}$. Следовательно, $\left(\varphi^*(x)\right)'\in L_2^{(2)}$ и $\varphi\in\hat{W}_2^1$.

Пусть теперь $\varphi\in\hat{W}_2^1$, где пространство определяется (8) и (9). Тогда $\left(\varphi^*(x)\right)'\in L_2^{(2)}$ и $\sqrt{1-x^2}\left(\varphi^*(x)\right)'\in L_2^{(1)}$.

Выполним преобразования (10) в обратном порядке, учитывая условие $\varphi^*(-1)=\varphi^*(1)=0$ при применении формулы интегрирования по частям, получим, что $\sum_{k=0}^{\infty}|\xi_k|^2(k+1)^2<\infty$ в силу неравенства Бесселя для коэффициентов Фурье функции $\sqrt{1-x^2}\left(\varphi^*(x)\right)'$ при разложении в ряд Фурье по многочленам Чебышева 1-го рода. Эта оценка доказывает, что $\varphi\in\Psi_2$, поскольку

$$\xi_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}U_k(x)\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

**Утверждение 4.** Вложение $\Psi_p\subset\Psi_q$ компактно при $p>q\ge 0$.

**Доказательство.** Введем пространства Соболева $W_2^s(0,2\pi)$, $s\ge 0$, и опишем их с помощью рядов Фурье [7, с. 32]:

$$W_2^s(0,2\pi):=\left\{\varphi:\varphi=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n e^{inx},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}|\varphi_n|^2(1+|n|)^{2s};x\in(0,2\pi)\right\}.$$

Тогда вложение $W_2^s(0,2\pi)\subset W_2^t(0,2\pi)$ компактно при $s>t\ge 0$ [7, с. 32]. Далее нетрудно установить унитарную изометрию пространств $W_2^s(0,2\pi)$ и $h_{2s}$. Теперь компактность вложения $\Psi_p\subset\Psi_q$ следует из компактности вложения $h_p\subset h_q$ при $p>q\ge 0$ и унитарной изометрии пространств $\Psi_p$ и $h_p$.

**Следствие 2.** Вложение $\hat{W}_2^1 \subset L_2^{(2)}$ компактно.

Будем рассматривать гиперсингулярный интегральный оператор, определяемый формулой

$$H\varphi := \frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-y}\varphi(y)\sqrt{1-y^2}\,dy\,,\ \varphi\in\Psi_p\,. \tag{11}$$

Свойства этого оператора в классах $\Psi_p$ определяются следующей леммой.

**Лемма 1.** Полиномы Чебышева 2-го рода $U_n$ являются собственными функциями оператора $H$, и справедливы следующие выражения:

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{1}\frac{1}{x-y}U_n(y)\sqrt{1-y^2}\,dy = \pi(n+1)U_n(x),\ n\ge 0.$$

**Доказательство** имеется в [8].

Из леммы 1 сразу следует

**Теорема 1.** Оператор $H:\Psi_{p+2}\to\Psi_p$, $p\ge 0$, непрерывно обратим.

**Доказательство.** Действительно, в силу леммы 1 для

$$\varphi\in\Psi_p\,,\ \varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k U_k(x),\ H\varphi = f\,,$$

имеем

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k U_k(t),\ \eta_k=\pi(k+1)\xi_k\,,\ \xi_k=\frac{\eta_k}{\pi(k+1)}, \tag{12}$$

откуда непосредственно получаем утверждение теоремы 1.

**Утверждение 5.** Формула (12) задает обратный оператор:

$$H^{-1}:\Psi_p\to\Psi_{p+2},\ p\ge 0;\ H^{-1}f=\varphi,$$

где $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_k U_k(t)$, $\varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k U_k(x)$.

## 2. Компактные и фредгольмовы операторы в пространствах $\Psi_p$

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор, определяемый формулой

$$S\varphi := \int_{-1}^{1}\frac{1}{x-y}\varphi(y)\sqrt{1-y^2}\,dy\,,\ \varphi\in\Psi_p\,. \tag{13}$$

Свойства оператора (13) в классах $\Psi_p$ определяются следующей леммой [8].

**Лемма 2.** Справедливы следующие выражения:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x-y} U_n(y)\sqrt{1-y^2}\,dy = \pi T_{n+1}(x),\ n \ge 0.$$

Известно также [8], что $T_n(x) = \frac{1}{2}U_n(x) - \frac{1}{2}U_{n-2}(x)$, $n \ge 2$.

**Утверждение 6.** Оператор $S:\Psi_p \to \Psi_p$, $p \ge 0$, является ограниченным.

**Доказательство.** Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k U_k(x),\ \xi_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} U_k(x)\varphi(x)\sqrt{1-x^2}\,dx,\ \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 (k+1)^p < \infty,$$

тогда

$$S\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k SU_k = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k T_{k+1} = \frac{\pi}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \xi_k (U_{k+1} - U_{k-1}) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\xi_1 U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_{k-1} - \xi_{k+1}) U_k\right)\ (U_{-1} \equiv 0).$$

Далее получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{k-1} - \xi_{k+1}|^2 (k+1)^p \le 2\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{k-1}|^2 (k+1)^p + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{k+1}|^2 (k+1)^p \le$$

$$\le 2^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{k-1}|^2 k^p + 2\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{k+1}|^2 (k+2)^p \le (2^{p+1}+2)\sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 (k+1)^p < \infty,$$

поэтому $S\varphi \in \Psi_2$. Утверждение доказано.

**Утверждение 7.** Оператор $S:\Psi_p \to \Psi_q$, $p > q \ge 0$, является компактным.

**Доказательство.** По утверждению 6, $S:\Psi_p \to \Psi_p$ является ограниченным оператором. Тогда из компактности вложения $\Psi_p \subset \Psi_q$ при $p > q \ge 0$ получаем требуемое утверждение.

**Следствие 3.** Оператор $S:\hat{W}_2^1 \to L_2^{(2)}$ является компактным.

Пусть оператор $K$ задан формулой

$$K\varphi \equiv \int_{-1}^{1} K(x,y)\varphi(y)\sqrt{1-y^2}\,dy. \tag{14}$$

**Теорема 2.** Пусть $K(x,y) = \dfrac{\partial K_1(x,y)}{\partial y}$, функция $K_1(x,y)$ ограничена на квадрате $[-1,1]\times[-1,1]$ и выполнено условие $K_1(x,y) \in L_2^{(2)} \times L_2^{(1)}$, т.е.

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1}\left|K_1(x,y)\right|^2\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}dx<\infty . \qquad (15)$$

Тогда формула (14) определяет компактный оператор $K:\hat{W}_2^1\to L_2^{(2)}$.

**Доказательство.** Имеем

$$\left|K\varphi\right|=\left|\int_{-1}^{1}K(x,y)\varphi(y)\sqrt{1-y^2}dy\right|=\left|\int_{-1}^{1}\frac{\partial K_1}{\partial y}\varphi(y)\sqrt{1-y^2}dy\right|=$$

$$=\left|\int_{-1}^{1}K_1(x,y)\left(\varphi^*(y)\right)'dy\right|=\left|\int_{-1}^{1}\frac{K_1(x,y)}{\sqrt{1-y^2}}\left(\varphi^*(y)\right)'\sqrt{1-y^2}dy\right|\le$$

$$\le\left\|\varphi\right\|_W\int_{-1}^{1}\frac{\left|K_1(x,y)\right|^2}{\sqrt{1-y^2}}dy ,$$

поэтому

$$\left\|K\varphi\right\|_{L_2^{(2)}}^2\le\left\|\varphi\right\|_W^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\int_{-1}^{1}\frac{\left|K_1(x,y)\right|^2}{\sqrt{1-y^2}}dydx ,$$

что доказывает ограниченность оператора $K:\hat{W}_2^1\to L_2^{(2)}$.

Обозначим через $P_N$ и $Q_N$ проекторы, действующие по формулам:

$$P_N\varphi=\sum_{k=0}^{N-1}\xi_kU_k ,\ P_N:\Psi_2\to\Psi_2,\ \varphi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\xi_kU_k(x),$$

$$Q_N\psi=\sum_{k=0}^{N-1}\eta_kU_k ,\ Q_N:\Psi_0\to\Psi_0,\ \psi(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\eta_kU_k(x),$$

и рассмотрим конечномерные операторы $K_N=Q_NKP_N$, $N=1, 2, \ldots$ Если $K\varphi=\psi$, то

$$\eta_n=\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}\xi_k ,\ n\ge 0,$$

$$a_{nk}=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}K(x,y)U_n(x)U_k(y)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}dxdy . \qquad (16)$$

Аналогично, для $K_N$ имеем

$$K_N\varphi=\psi ,\ \eta_k=\sum_{k=0}^{N-1}a_{nk}\xi_k ,\ 0\le n\le N-1;\ \eta_k=0,\ n>N . \qquad (17)$$

Предположим, что для коэффициентов $a_{nk}$ выполнено условие

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{-2}|a_{nk}|^2 \le C^2 < \infty . \qquad (18)$$

Тогда по неравенству Коши – Буняковского получим

$$\|K\varphi\|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty}|\eta_n|^2 \le \|\xi\|_2^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk}|^2(k+1)^{-2}\right) \le \|\xi\|_2^2 C^2 = \|\varphi\|_W^2 C^2,$$

следовательно, $K:\Phi_2 \to \Phi_0$ и $\|K\| \le C$. Далее,

$$\|(K-K_N)\varphi\|_0^2 = \sum_{n=0}^{N-1}\left|\sum_{k=N}^{\infty}a_{nk}\xi_k\right|^2 + \sum_{n=N}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{\infty}a_{nk}\xi_k\right|^2 \le$$

$$\le \|\varphi\|_2^2\left(\sum_{k=N}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k+1)^{-2}|a_{nk}|^2 + \sum_{n=N}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^{-2}|a_{nk}|^2\right) \to 0$$

в силу (17) и (18), поэтому $K$ есть предел по норме последовательности конечномерных операторов $\|K-K_N\| \to 0$, $N \to \infty$, и компактность будет доказана. Таким образом, достаточно установить справедливость (18).

С учетом (16) и ограниченности функции $K_1(x,y)$ на квадрате $[-1,1]\times[-1,1]$ имеем

$$\frac{1}{k+1}a_{nk} = \frac{2}{\pi(k+1)}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}K(x,y)U_n(x)U_k(y)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\,dxdy =$$

$$= \frac{2}{\pi(k+1)}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}U_n(x)\int_{-1}^{1}\frac{\partial K_1(x,y)}{\partial y}\sin((k+1)\arccos x)\,dydx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}U_n(x)\int_{-1}^{1}K_1(x,y)T_{k+1}(y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\,dx .$$

Последнее выражение совпадает (с точностью до константы) с коэффициентами Фурье функции $K_1(x,y) \in L_2^{(2)} \times L_2^{(1)}$, разложенной в ряд Фурье – Чебышева по многочленам $U_n(x)T_k(y)$ на квадрате $[-1,1]\times[-1,1]$. В силу $K_1(x,y) \in L_2^{(2)} \times L_2^{(1)}$ (оценка (15)) для этих коэффициентов выполнено неравенство Бесселя, которое совпадает с неравенством (18). Теорема 2 доказана.

Оператор $K$ будет компактным и при менее сильных ограничениях на ядро.

**Утверждение 8.** Интегральный оператор с логарифмической особенностью ядра вида

$$L\varphi \equiv \int_{-1}^{1} \ln \frac{1}{|x-y|} \varphi(y)\sqrt{1-y^2}\,dy \tag{19}$$

является компактным оператором $L:\hat{W}_2^1 \to L_2^{(2)}$.

**Доказательство.** Поскольку

$$\ln|x-y| = \frac{\partial}{\partial y}\big((y-x)\ln|x-y| - (y-x)\big)$$

и функция $(y-x)\ln|x-y| - (y-x)$ ограничена на квадрате $[-1,1]\times[-1,1]$, то из теоремы 2 получаем требуемое утверждение.

**Теорема 3.** Пусть для функции $K(x,y)$ выполнены условия теоремы 2, а $\alpha$ и $\beta$ – произвольные числа. Тогда оператор

$$H + \alpha S + \beta L + K : \hat{W}_2^1 \to L_2^{(2)} \tag{20}$$

является фредгольмовым (с нулевым индексом).

**Доказательство** следует из формул (20), (19), (14), (13) (11), теорем 1, 2, следствия 3, утверждений 5, 8 и известных результатов о фредгольмовости суммы непрерывно обратимого и компактного операторов [9].

## Заключение

Рассмотрены гиперсингулярные операторы на отрезке в специальных классах функций $\Psi_p$. Это классы функций, которые представляются рядами Фурье по многочленам Чебышева 2-го рода с некоторым ограничением на скорость убывания коэффициентов Фурье. Основным результатом настоящей статьи является доказательство фредгольмовости гиперсингулярного оператора в этих классах функций. Кроме того, сформулированы и доказаны критерии компактности операторов в классах $\Psi_p$. Эти результаты являются важными при формулировке и реализации численных методов решения гиперсингулярных уравнений.

## Список литературы


1. Ilyinsky A. S., Smirnov Y. G. Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1998. 114 p.
2. Shestopalov Y. V., Smirnov Y. G., Chernokozhin E. V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics. VSP, Utrecht, the Netherlands, 2000. 117 p.
3. Lifanov I. K., Poltavskii L. N., Vainikko M. M. Hypersingular Integral Equations and Their Applications. 1st ed. CRC Press, 2003. 396 p.
4. Сетуха А. В. Метод интегральных уравнений в математической физике : учеб. пособие. М. : Изд-во Моск. ун-та, 2023. 316 с.
5. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза : Инф.-изд. центр ПензГУ, 2009. 268 с.
6. Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. М. : Наука, 1979. 416 с.
7. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. М. : Мир, 1985. 472 с.
8. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. М. : Мир, 1980. 608 с.
9. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1980. 440 с.

## References


1. Ilyinsky A.S., Smirnov Y.G. *Electromagnetic Wave Diffraction by Conducting Screens*. VSP, Utrecht, the Netherlands, 1998:114.
2. Shestopalov Y.V., Smirnov Y.G., Chernokozhin E.V. *Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics*. VSP, Utrecht, the Netherlands, 2000:117.
3. Lifanov I.K., Poltavskii L.N., Vainikko M.M. *Hypersingular Integral Equations and Their Applications. 1st ed*. CRC Press, 2003:396.
4. Setukha A.V. *Metod integral'nykh uravneniy v matematicheskoy fizike: ucheb. posobie*. = The method of integral equations in mathematical physics: textbook. Moscow: Izd-vo Mosk. un-ta, 2023:316. (In Russ.)
5. Smirnov Yu.G. *Matematicheskie metody issledovaniya zadach elektrodinamiki* = *Mathematical methods for studying problems of electrodynamics*. Penza: Inf.-izd. tsentr PenzGU, 2009:268. (In Russ.)
6. Suetin P.K. *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny = Classical orthogonal polynomials*. Moscow: Nauka, 1979:416. (In Russ.)
7. Teylor M. *Psevdodifferentsial'nye operatory = Pseudodifferential operators*. Moscow: Mir, 1985:472. (In Russ.)
8. Lyuk Yu. *Spetsial'nye matematicheskie funktsii i ikh approksimatsii = Special mathematical functions and their approximations*. Moscow: Mir, 1980:608. (In Russ.)
9. Trenogin V.A. *Funktsional'nyy analiz = Functional analysis*. Moscow: Nauka, 1980:440. (In Russ.)


**Информация об авторах / Information about the authors**


***Юрий Геннадьевич Смирнов***
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

***Yuriy G. Smirnov***
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: mmm@pnzgu.ru



**Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests**.

**Поступила в редакцию / Received** 20.03.2025

**Поступила после рецензирования и доработки / Revised** 17.04.2025

**Принята к публикации / Accepted** 28.05.2025