УДК 517.3, 517.6
doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-5

Задача дифракции электромагнитной волны на однородном диэлектрическом шаре, покрытом графеном

Ю. Г. Смирнов[1], О. В. Кондырев[2]

[1,2]Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

[1]mmm@pnzgu.ru

Аннотация. *Актуальность и цели*. Краевые задачи сопряжения для уравнений Максвелла находят широкое применение в различных областях электродинамики благодаря своей способности моделировать сложные физические ситуации, связанные с взаимодействием электромагнитных волн с границами и тонкими слоями материалов. Задачей данной работы является вывод и анализ системы интегральных уравнений для задачи дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом шаре, покрытом графеном, и доказательство существования и единственности решения краевой задачи. *Материалы и методы*. С помощью комбинации формул Стрэттона-Чу получена система векторных интегральных уравнений по поверхности шара. *Результаты.* Получена система скалярных сингулярных интегральных уравнений для поиска четырех неизвестных функций. Доказана теорема о существовании и единственности решения системы уравнений, а также существование и единственность решения краевой задачи дифракции. *Вывод*. Выполнено исследование задачи дифракции электромагнитной волны на диэлектрическом шаре, покрытом графеном, получена система уравнений для численного решения.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, уравнения Максвелла, диэлектрическое тело, графен

Для цитирования: Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. Задача дифракции электромагнитной волны на однородном диэлектрическом шаре, покрытом графеном // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 2. С. 63–76. doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-5

Problem of electromagnetic wave diffraction on homogeneous dielectric ball coated with graphene

Yu.G. Smirnov[1], O.V. Kondyrev[2]

[1,2]Penza State University, Penza, Russia

[1]mmm@pnzgu.ru

Abstract. *Background*. Boundary value problems for Maxwell's equations are widely used in various fields of electrodynamics due to their ability to model complex physical situations associated with the interaction of electromagnetic waves with boundaries and thin layers of materials. The objective of this work is to derive and analyze a system of integral equations for the problem of electromagnetic wave diffraction on a dielectric ball coated with graphene, and to prove the existence and uniqueness of a solution to the boundary value problem. *Materials and methods*. Using a combination of Stratton-Chu formulas, a system of vector integral equations over the surface of a sphere is obtained. *Results.* A system of scalar singular integral equations is obtained for searching for four unknown functions. The theorem on the existence and uniqueness of the solution of the system of equations, as well as the existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem of diffraction is proved. *Conclusions*. The problem of electromagnetic wave diffraction on a dielectric ball coated with graphene has been studied, and a system of equations for numerical solution has been obtained.

Keywords: singular integral equation, Maxwell equations, dielectric body, graphene

For citation: Smirnov Yu.G., Kondyrev O.V. Problem of electromagnetic wave diffraction on homogeneous dielectric ball coated with graphene. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(2):63–76. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-5

Введение

Краевые задачи имеют широкую применимость на практике: анализ дифракции и рассеяния электромагнитных волн, исследование собственных колебаний и резонансов, моделирование взаимодействия с тонкими слоями и наноструктурами, учет нелинейных эффектов.

Стандартные задачи сопряжения в математической физике (и, в частности, в электродинамике) достаточно хорошо изучены [1–5]. В последнее время появился интерес к краевым задачам с особыми условиями сопряжения, которые предполагают наличие тонкого слоя «двумерного» материала на границе раздела сред. Такая постановка приводит к новому классу задач сопряжения [6–13].

Для решения задачи дифракции электромагнитной волны на однородном диэлектрическом шаре, покрытом графеном, выбран метод интегральных уравнений. С помощью этого метода можно свести задачу к системе интегральных уравнений по поверхности тела. Преимущество такого подхода – он позволяет использовать численные методы и эффективные параллельные алгоритмы для решения задачи.

В статье рассмотрена задача дифракции на теле с заданным внешним полем и получена система скалярных уравнений в сферических координатах. Доказана теорема о существовании и единственности решения системы уравнений, а также существование и единственность решения краевой задачи дифракции.

1. Постановка задачи

Рассмотрим ограниченную область $\Omega_1 \in \mathrm{R}^3$ с границей Γ класса гладкости C^2 и значениями диэлектрической и магнитной проницаемости ε_1, μ_1 в области Ω_1 и ε_2, μ_2 в $\Omega_2 := \mathrm{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_1$, причем $\varepsilon_i > 0$ и $\mu_i > 0$.

Электромагнитное поле $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ в области Ω_1 представим как $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$, а в области Ω_2 как $\{\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2\}$. Компоненты $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{H}_2$ выражаются как

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s, \\ \mathbf{H}_2 &= \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_s, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\}$ – падающее поле, удовлетворяющее системе уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = -i\omega\varepsilon_2 \mathbf{E}_0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = i\omega\mu_2 \mathbf{H}_0 \end{cases} \text{в } \mathbf{R}^3, \tag{2}$$

а $\{\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s\}$ – рассеянное поле. Для определения указанных компонент необходимо решить систему уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_1 = -i\omega\varepsilon_1 \mathbf{E}_1 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_1 = i\omega\mu_1 \mathbf{H}_1 \end{cases} \text{в } \Omega_1, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H}_s = -i\omega\varepsilon_2 \mathbf{E}_s \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}_s = i\omega\mu_2 \mathbf{H}_s \end{cases} \text{в } \Omega_2, \tag{4}$$

где ω – круговая частота.

На границе Γ должны выполняться условия сопряжения:

$$\begin{gathered} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_\Gamma = \sigma \mathbf{E}_\tau, \\ [\mathbf{v} \times \mathbf{E}]_\Gamma = 0, \end{gathered} \tag{5}$$

где $[f]_\Gamma = f_2 - f_1$ означает разность следов функции с разных сторон Γ; $\mathbf{v}$ – вектор нормали к границе Γ, направленный в область Ω_2; индекс τ означает взятие касательных компонент; $\times$ – векторное произведение;

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_3 |\mathbf{E}_\tau|^2 - \tag{6}$$

нелинейная проводимость графена [14, 15], выраженная законом Керра.

Также должны выполняться условия на бесконечности:

$$(\mathbf{e}_r \times \mathbf{E}_s) + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} (\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_r \times \mathbf{H}_s)) = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ при } r \to \infty, \tag{7}$$

где $\mathbf{e}_r$ – вектор внешней нормали к единичной сфере, $r := |x|$ и $x = (x_1, x_2, x_3)$.

В статье мы будем считать, что $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_3 = 0$, т.е. рассматривать только линейный случай.

2. Система интегро-дифференциальных уравнений

Выразим поле $\{\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1\}$ в области Ω_1 в виде комбинации электрических и магнитных токов на поверхности с помощью формул Стрэттона-Чу [4, с. 124]:

$$\mathbf{E}_1 = \operatorname{rot}\operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\varepsilon_1} \int_\Gamma \Phi_1(x,y)(\mathbf{v}(y) \times \mathbf{H}_1(y)) ds(y) -$$

$$- \operatorname{rot} \int_\Gamma \Phi_1(x,y)(\mathbf{v}(y) \times \mathbf{E}_1(y)) ds(y),$$

$$\mathbf{H}_1 = -\operatorname{rot}\operatorname{rot} \frac{1}{i\omega\mu_1} \int_\Gamma \Phi_1(x,y)(\mathbf{v}(y) \times \mathbf{E}_1(y)) ds(y) -$$

$$-\operatorname{rot}\int_{\Gamma}\Phi_1(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{H}_1(y))ds(y), \tag{8}$$

где $x\in\Omega_1$. В области Ω_2 имеем представление [4, с. 124]:

$$0=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\varepsilon_2}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{H}_0(y))ds(y)+$$

$$+\operatorname{rot}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{E}_0(y))ds(y),$$

$$0=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\mu_2}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{E}_0(y))ds(y)+$$

$$+\operatorname{rot}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{H}_0(y))ds(y), \tag{9}$$

где $x\in\Omega_2$.

Также можем записать рассеянное поле как [4, с. 124]:

$$\mathbf{E}_s(x)=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\varepsilon_2}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{H}_s(y))ds(y)+$$

$$+\operatorname{rot}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{E}_s(y))ds(y),$$

$$\mathbf{H}_s(x)=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\mu_2}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{E}_s(y))ds(y)+$$

$$+\operatorname{rot}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{H}_s(y))ds(y), \tag{10}$$

где $x\in\Omega_2$.

Сложим (9) и (10) с учетом (1), получим:

$$\mathbf{E}_2(x)-\mathbf{E}_0(x)=-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\varepsilon_2}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{H}_2(y))ds(y)+$$

$$+\operatorname{rot}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{E}_2(y))ds(y),$$

$$\mathbf{H}_2(x)-\mathbf{H}_0(x)=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{1}{i\omega\mu_2}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{E}_2(y))ds(y)+$$

$$+\operatorname{rot}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\mathbf{v}(y)\times\mathbf{H}_2(y))ds(y). \tag{11}$$

Определим

$$\Phi_1(x,y)=\frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|}, k_1^2=\omega^2\varepsilon_1\mu_1,\ \Phi_2(x,y)=\frac{e^{ik_2|x-y|}}{4\pi|x-y|}, k_2^2=\omega^2\varepsilon_2\mu_2.$$

Выполним замену:

$$\begin{gathered}\mathbf{j}_1=\mathbf{v}\times\mathbf{H}_1, \mathbf{m}_1=\mathbf{v}\times\mathbf{E}_1,\\ \mathbf{j}_2=\mathbf{v}\times\mathbf{H}_2, \mathbf{m}_2=\mathbf{v}\times\mathbf{E}_2.\end{gathered}\tag{12}$$

Перепишем условия (5) с учетом замены (13), получим:

$$\begin{gathered}\mathbf{j}_2-\mathbf{j}_1=\sigma\mathbf{E}_\tau,\\ \mathbf{m}_2-\mathbf{m}_1=0.\end{gathered}\tag{13}$$

С помощью (13) неизвестные $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{j}_2$, $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$ выразим через $\mathbf{j}$ и $\mathbf{m}$ следующим образом:

$$\begin{gathered}\mathbf{m}_1=\mathbf{m}_2=\mathbf{m},\\ \mathbf{j}_1=\mathbf{j}, \mathbf{j}_2=\mathbf{j}_1+\sigma(\mathbf{m}\times\mathbf{v})=\mathbf{j}+\sigma(\mathbf{m}\times\mathbf{v}).\end{gathered}\tag{14}$$

В (8)–(11) применим замены (12)–(14), используем условия сопряжения на границе, получим:

$$-\mathbf{v}\times\mathbf{E}_0(x)=-\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_\Gamma\left(\frac{\Phi_1(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\mathbf{j}(y)ds(y)-$$

$$-\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_\Gamma\frac{\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\sigma(\mathbf{m}(y)\times\mathbf{v}(y))\,ds(y)+$$

$$+\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\int_\Gamma(\Phi_1(x,y)+\Phi_2(x,y))\mathbf{m}(y)ds(y),\tag{15}$$

$$-\mathbf{v}\times\mathbf{H}_0(x)=\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\int_\Gamma\left(\frac{\Phi_1(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{\Phi_2(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\mathbf{m}(y)ds(y)+$$

$$+\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\int_\Gamma(\Phi_1(x,y)+\Phi_2(x,y))\mathbf{j}(y)ds(y)+$$

$$+\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\int_\Gamma\Phi_2(x,y)\sigma\mathbf{m}(y)\times\mathbf{v}(y)ds(y)-\sigma\mathbf{m}(x)\times\mathbf{v}(x).\tag{16}$$

Для численного решения требуется понизить порядок сингулярности системы (15)–(16) и перейти к системе скалярных уравнений.

Преобразуем двойной ротор по следующей формуле [16]:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}=\operatorname{grad}\operatorname{div}-\Delta=\operatorname{grad}\operatorname{div}+k^2,\tag{17}$$

перенесем операцию дивергенции на функции токов (см. [17, с. 92–93]) и получим

$$-\operatorname{grad}_{\tau x}\int_{\Gamma}\left(\frac{\Phi_1(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\operatorname{Div}_y \mathbf{j}(y)ds(y)-$$

$$-\int_{\Gamma}\left(\frac{k_1^2\Phi_1(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\mathbf{j}(y)ds(y)-$$

$$-\operatorname{grad}_{\tau x}\int_{\Gamma}\frac{\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\operatorname{Div}_y(\sigma\mathbf{m}(y)\times\mathbf{v}(y))ds(y)-$$

$$-\int_{\Gamma}\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\sigma\mathbf{m}(y)\times\mathbf{v}(y)ds(y)+$$

$$+\operatorname{rot}_{\tau x}\int_{\Gamma}(\Phi_1(x,y)+\Phi_2(x,y))\mathbf{m}(y)ds(y)=-\mathbf{v}\times\mathbf{E}_0(x), \qquad (18)$$

$$\operatorname{grad}_{\tau x}\int_{\Gamma}\left(\frac{\Phi_1(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{\Phi_2(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\operatorname{Div}_y \mathbf{m}(y)ds(y)+$$

$$+\int_{\Gamma}\left(\frac{k_1^2\Phi_1(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\mathbf{m}(y)ds(y)+$$

$$+\operatorname{rot}_{\tau x}\int_{\Gamma}(\Phi_1(x,y)+\Phi_2(x,y))\mathbf{j}(y)ds(y)+$$

$$+\operatorname{rot}_{\tau x}\int_{\Gamma}\Phi_2(x,y)(\sigma\mathbf{m}(y)\times\mathbf{v}(y))ds(y)-\sigma\mathbf{m}(x)\times\mathbf{v}(x)=-\mathbf{v}\times\mathbf{H}_0(x). \qquad (19)$$

Так как рассматривается задача на сфере, то будем использовать формулы перехода:

$$F_x=\hat{F}_\rho\sin\theta\cos\varphi+\hat{F}_\theta\cos\theta\cos\varphi-\hat{F}_\varphi\sin\theta,$$

$$F_y=\hat{F}_\rho\sin\theta\sin\varphi+\hat{F}_\theta\cos\theta\sin\varphi+\hat{F}_\varphi\cos\varphi,$$

$$F_z=\hat{F}_\rho\cos\theta-\hat{F}_\theta\sin\theta.$$

Представим дивергенцию и градиент в сферической системе координат [16], а также введем обозначение:

$$\frac{\partial}{\partial\phi_x}\Phi_k(x,y)=G_{k,\phi_x}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial\theta_x}\Phi_k(x,y)=G_{k,\theta_x}(x,y); \qquad (20)$$

$$-\frac{1}{r_x}\int_{\Gamma}\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(j_\theta(y)\sin\theta_y)+\frac{\partial j_\phi(y)}{\partial\phi}\right)ds(y)\mathbf{I}_\theta(x)-$$

$$-\frac{1}{r_x\sin\theta_x}\int_{\Gamma}\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(j_\theta(y)\sin\theta_y)+\right.$$

$$+\frac{\partial j_\phi(y)}{\partial\phi}\Bigg)ds(y)\mathbf{I}_\phi(x)-\int_\Gamma\left(\frac{k_1^2\mathbf{\Phi}_1(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{k_2^2\mathbf{\Phi}_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\mathbf{j}(y)ds(y)-$$

$$-\frac{1}{r_x}\int_\Gamma\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(\sigma m_\phi(y)\sin\theta_y)-\frac{\partial\sigma m_\theta(y)}{\partial\phi}\right)ds(y)\mathbf{I}_\theta(x)-$$

$$-\frac{1}{r_x\sin\theta_x}\int_\Gamma\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(\sigma m_\phi(y)\sin\theta_y)-\frac{\partial\sigma m_\theta(y)}{\partial\phi}\right)ds(y)\mathbf{I}_\phi(x)-$$

$$-\int_\Gamma\frac{k_2^2\mathbf{\Phi}_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\sigma\mathbf{m}(y)\times\mathbf{v}(y)ds(y)+$$

$$+\int_\Gamma\mathrm{rot}_{\tau x}\left\{(\mathbf{\Phi}_1(x,y)+\mathbf{\Phi}_2(x,y))\mathbf{m}(y)\right\}ds(y)=-\mathbf{v}(x)\times\mathbf{E}_0(x), \tag{21}$$

$$\frac{1}{r_x}\int_\Gamma\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(m_\theta(y)\sin\theta_y)+\frac{\partial m_\phi(y)}{\partial\phi}\right)ds(y)\mathbf{I}_\theta(x)+$$

$$+\frac{1}{r_x\sin\theta_x}\int_\Gamma\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\Bigg(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(m_\theta(y)\sin\theta_y)+$$

$$+\frac{\partial m_\phi(y)}{\partial\phi}\Bigg)ds(y)\mathbf{I}_\phi(x)+\int_\Gamma\left(\frac{k_1^2\mathbf{\Phi}_1(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{k_2^2\mathbf{\Phi}_2(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\mathbf{m}(y)ds(y)+$$

$$+\int_\Gamma\mathrm{rot}_{\tau x}\left\{(\mathbf{\Phi}_1(x,y)+\mathbf{\Phi}_2(x,y))\mathbf{j}(y)\right\}dy+$$

$$+\int_\Gamma\mathrm{rot}_{\tau x}\left\{\mathbf{\Phi}_2(x,y)(\sigma\mathbf{m}(y)\times\mathbf{v}(y))\right\}dy-\frac{1}{2}\sigma\mathbf{m}(x)\times\mathbf{v}(x)=-\mathbf{v}(x)\times\mathbf{H}_0(x). \tag{22}$$

Ротор, который действует на произведение вектора и скаляра, можно представить, как [16, с. 172]:

$$\mathrm{rot}_x(\mathbf{\Phi}(x,y)\mathbf{m}(y))=\mathrm{grad}_x(\mathbf{\Phi}(x,y))\times\mathbf{m}(y). \tag{23}$$

Применим (23) и снова преобразуем градиент:

$$-\frac{1}{r_x}\int_\Gamma\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(j_\theta(y)\sin\theta_y)+\frac{\partial j_\phi(y)}{\partial\phi}\right)ds(y)\mathbf{I}_\theta(x)-$$

$$-\frac{1}{r_x\sin\theta_x}\int_\Gamma\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\Bigg(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(j_\theta(y)\sin\theta_y)+$$

$$+\frac{\partial j_\phi(y)}{\partial\phi}\Bigg)ds(y)\mathbf{I}_\phi(x)-\int_\Gamma\left(\frac{k_1^2\Phi_1(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\mathbf{j}(y)ds(y)-$$

$$-\frac{1}{r_x}\int_\Gamma\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(\sigma m_\phi(y)\sin\theta_y)-\frac{\partial\sigma m_\theta(y)}{\partial\phi}\right)ds(y)\mathbf{I}_\theta(x)-$$

$$-\frac{1}{r_x\sin\theta_x}\int_\Gamma\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(\sigma m_\phi(y)\sin\theta_y)-\frac{\partial\sigma m_\theta(y)}{\partial\phi}\right)ds(y)\mathbf{I}_\phi(x)-$$

$$-\int_\Gamma\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\sigma\mathbf{m}(y)\times\mathbf{v}(y)ds(y)+\int_\Gamma\left\{\frac{1}{r_x}(G_{1,\theta_x}(x,y)+G_{2,\theta_x}(x,y))\mathbf{I}_\theta(x)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r_x\sin\theta_x}(G_{1,\phi_x}(x,y)+G_{2,\phi_x}(x,y))\mathbf{I}_\phi(x)\right\}\times\mathbf{m}(y)ds(y)=-\mathbf{v}(x)\times\mathbf{E}_0(x),\quad(24)$$

$$\frac{1}{r_x}\int_\Gamma\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(m_\theta(y)\sin\theta_y)+\frac{\partial m_\phi(y)}{\partial\phi}\right)ds(y)\mathbf{I}_\theta(x)+$$

$$+\frac{1}{r_x\sin\theta_x}\int_\Gamma\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\Bigg(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(m_\theta(y)\sin\theta_y)+$$

$$+\frac{\partial m_\phi(y)}{\partial\phi}\Bigg)ds(y)\mathbf{I}_\phi(x)+\int_\Gamma\left(\frac{k_1^2\Phi_1(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\mathbf{m}(y)ds(y)+$$

$$+\int_\Gamma\left\{\frac{1}{r_x}(G_{1,\theta_x}(x,y)+G_{2,\theta_x}(x,y))\mathbf{I}_\theta(x)+\frac{1}{r_x\sin\theta_x}(G_{1,\phi_x}(x,y)+G_{2,\phi_x}(x,y))\mathbf{I}_\phi(x)\right\}\times\mathbf{j}(y)ds(y)+$$

$$+\int_\Gamma\left\{\frac{1}{r_x}G_{2,\theta_x}(x,y)\mathbf{I}_\theta(x)+\frac{1}{r_x\sin\theta_x}G_{2,\phi_x}(x,y)\mathbf{I}_\phi(x)\right\}\times(m_\phi(y)\mathbf{I}_\theta(y)-m_\theta(y)\mathbf{I}_\phi(y))\sigma ds(y)-$$

$$-\frac{\sigma}{2}(m_\phi(x)\mathbf{I}_\theta(x)-m_\theta(x)\mathbf{I}_\phi(x))=-\mathbf{v}(x)\times\mathbf{H}_0(x),\quad(25)$$

где единичные векторы $\mathbf{I}_\theta(x)$ и $\mathbf{I}_\phi(x)$ образуют базис на поверхности в точке x.

Для окончательного вида системы уравнений умножим (24) и (25) на $\mathbf{I}_\theta(x)$ и $\mathbf{I}_\phi(x)$. В итоге получаем систему из четырех скалярных уравнений:

$$-\frac{1}{r_x}\int_\Gamma\frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(j_\theta(y)\sin\theta_y)+\frac{\partial j_\phi(y)}{\partial\phi}\right)ds(y)-$$

$$-\int_\Gamma\left(\frac{k_1^2\Phi_1(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\Big(\big\{\cos(\theta_y)\cos(\theta_x)\cos(\phi_y-\phi_x)+$$

$$+\sin(\theta_y)\sin(\theta_x)\big\}\, j_\theta(y)+\cos(\theta_x)\sin(\phi_x-\phi_y)\, j_\phi(y)\Big)\, ds(y)-$$

$$-\frac{1}{r_x}\int_\Gamma \frac{1}{r_y\sin\theta_y}\frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(\sigma m_\phi(y)\sin\theta_y)-\frac{\partial\sigma m_\theta(y)}{\partial\phi}\right) ds(y)-$$

$$-\int_\Gamma \sigma\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\Big(\big\{\cos(\theta_y)\cos(\theta_x)\cos(\phi_y-\phi_x)+\sin(\theta_y)\sin(\theta_x)\big\}\, m_\phi(y)-$$

$$-\cos(\theta_x)\sin(\phi_x-\phi_y)m_\theta(y)\Big)\, ds(y)+\int_\Gamma \frac{1}{r_x\sin\theta_x}\Big(G_{1,\phi_x}(x,y)+$$

$$+G_{2,\phi_x}(x,y)\Big)\Big(\big\{\cos(\theta_y)\sin(\theta_x)\cos(\phi_y-\phi_x)-\sin(\theta_y)\cos(\theta_x)\big\}\, m_\theta(y)+$$

$$+\sin(\theta_x)\sin(\phi_x-\phi_y)m_\phi(y)\Big)\, ds(y)=-\mathbf{v}(x)\times\mathbf{E}_0(x)\cdot\mathbf{I}_\theta(x), \qquad (26)$$

$$-\frac{1}{r_x\sin\theta_x}\int_\Gamma \frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(j_\theta(y)\sin\theta_y)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial j_\phi(y)}{\partial\phi}\right) ds(y)-\int_\Gamma\left(\frac{k_1^2\Phi_1(x,y)}{i\omega\varepsilon_1}+\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\right)\Big(\big\{\cos(\theta_y)\sin(\phi_y-\phi_x)\big\}\, j_\theta(y)+$$

$$+\cos(\phi_y-\phi_x)\, j_\phi(y)\Big)\, ds(y)-\frac{1}{r_x\sin\theta_x}\int_\Gamma \frac{1}{r_y\sin\theta_y}\frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(\sigma m_\phi(y)\sin\theta_y)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\sigma m_\theta(y)}{\partial\phi}\right) ds(y)--\int_\Gamma \sigma\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\varepsilon_2}\Big(\big\{\cos(\theta_y)\sin(\phi_y-\phi_x)\big\}\, m_\phi(y)+$$

$$+\cos(\phi_y-\phi_x)m_\theta(y)\Big)\, ds(y)-\int_\Gamma \frac{1}{r_x}(G_{1,\theta_x}(x,y)+G_{2,\theta_x}(x,y))\Big(\big\{\cos(\theta_y)\sin(\theta_x)\cos(\phi_y-\phi_x)-$$

$$-\sin(\theta_y)\cos(\theta_x)\big\}\, m_\theta(y)+\sin(\theta_x)\sin(\phi_x-\phi_y)m_\phi(y)\Big)\, ds(y)=$$

$$=-\mathbf{v}(x)\times\mathbf{E}_0(x)\cdot\mathbf{I}_\phi(x), \qquad (27)$$

$$\frac{1}{r_x}\int_\Gamma \frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{G_{2,\theta_x}(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta_y}(m_\theta(y)\sin\theta_y)+\frac{\partial m_\phi(y)}{\partial\phi}\right) ds(y)+$$

$$+\int_\Gamma\left(\frac{k_1^2\Phi_1(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\Big(\big\{\cos(\theta_y)\cos(\theta_x)\cos(\phi_y-\phi_x)+\sin(\theta_y)\sin(\theta_x)\big\}\, m_\theta(y)+$$

$$+\cos(\theta_x)\sin(\phi_x-\phi_y)m_\phi(y)\Big)\, ds(y)+\int_\Gamma \frac{1}{r_x\sin\theta_x}\Big(G_{1,\phi_x}(x,y)+$$

$$+G_{2,\phi_x}(x,y)\Big)\Big(\Big\{\cos(\theta_y)\sin(\theta_x)\cos(\phi_y-\phi_x)-\sin(\theta_y)\cos(\theta_x)\Big\}j_\theta(y)+$$

$$+\sin(\theta_x)\sin(\phi_x-\phi_y)j_\phi(y)\Big)ds(y)+$$

$$+\int_\Gamma \frac{1}{r_x\sin\theta_x}G_{2,\phi_x}(x,y)\Big(\Big\{\cos(\theta_y)\sin(\theta_x)\cos(\phi_y-\phi_x)-\sin(\theta_y)\cos(\theta_x)\Big\}m_\phi(y)-$$

$$-\sin(\theta_x)\sin(\phi_x-\phi_y)m_\theta(y)\Big)\sigma ds(y)-\frac{\sigma}{2}m_\phi(x)=-\mathbf{v}(x)\times\mathbf{H}_0(x)\cdot\mathbf{I}_\theta(x), \quad (28)$$

$$\frac{1}{r_x\sin\theta_x}\int_\Gamma \frac{1}{r_y\sin\theta_y}\left(\frac{G_{1,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{G_{2,\phi_x}(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(m_\theta(y)\sin\theta_y)+\frac{\partial m_\phi(y)}{\partial\phi}\right)ds(y)+$$

$$+\int_\Gamma\left(\frac{k_1^2\Phi_1(x,y)}{i\omega\mu_1}+\frac{k_2^2\Phi_2(x,y)}{i\omega\mu_2}\right)\Big(\cos(\theta_y)\sin(\phi_y-\phi_x)m_\theta(y)+$$

$$+\cos(\phi_y-\phi_x)m_\phi(y)\Big)ds(y)-\int_\Gamma\frac{1}{r_x}(G_{1,\theta_x}(x,y)+$$

$$+G_{2,\theta_x}(x,y))\Big(\Big\{\cos(\theta_y)\sin(\theta_x)\cos(\phi_y-\phi_x)-\sin(\theta_y)\cos(\theta_x)\Big\}j_\theta(y)+$$

$$+\sin(\theta_x)\sin(\phi_x-\phi_y)j_\phi(y)\Big)ds(y)-$$

$$-\int_\Gamma\frac{1}{r_x}G_{2,\theta_x}(x,y)\Big(\Big\{\cos(\theta_y)\sin(\theta_x)\cos(\phi_y-\phi_x)-\sin(\theta_y)\cos(\theta_x)\Big\}m_\phi(y)-$$

$$-\sin(\theta_x)\sin(\phi_x-\phi_y)m_\theta(y)\Big)\sigma ds(y)+\frac{\sigma}{2}m_\theta(x)=-\mathbf{v}(x)\times\mathbf{H}_0(x)\cdot\mathbf{I}_\phi(x). \quad (29)$$

Отметим, что система уравнений (26)–(29) остается в силе и в случае графена с учетом нелинейности.

3. Теорема о существовании и единственности решения задачи дифракции

Рассмотрим вопрос о существовании и единственности решения задачи дифракции (2)–(7) и системы интегральных уравнений (26)–(29).

Лемма 1 (о единственности) [18, теорема 1]. Если $\mathrm{Re}\,\sigma\ge 0$ и $\omega>0$, то задача (2)–(7) имеет единственное решение.

Введем оператор:

$$\mathrm{T}_i\,\mathbf{a}=2\int_\Gamma \mathbf{v}(x)\times\mathrm{rot}_x\,\mathrm{rot}_x\,\Phi_i(x,y)\mathbf{a}(y)ds(y),\ \ i=1,2. \quad (30)$$

Будем рассматривать все операторы в пространстве [5, с. 204]:

$$C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma),\ \ 0<\alpha<1,$$

$$C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma):=\left\{\mathbf{a}\in C_t^{0,\alpha}(\Gamma):\mathrm{Div}\,\mathbf{a}\in C^{0,\alpha}(\Gamma)\right\},$$

$$\|\mathbf{a}\|_{C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma)}:=\|\mathbf{a}\|_{\alpha,\Gamma}+\|\mathrm{Div}\,\mathbf{a}\|_{\alpha,\Gamma}.$$

Лемма 2 (о фредгольмовости) [18, теорема 2]. Если выполняются условия

$$\|\mathrm{T}_2\|\cdot|\sigma\omega|+\mu_1^{-1}\|\mathrm{T}_2\|\cdot\|\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_2\|<(\mu_1^{-1}+\mu_2^{-1})|k_2|^2 \tag{31}$$

и

$$\varepsilon_1^{-1}\|\mathrm{T}_2\|\cdot\|\mathrm{T}_1-\mathrm{T}_2\|<(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1})|k_2|^2, \tag{32}$$

то оператор системы (26)–(29) фредгольмов с нулевым индексом.

Теорема 1. Если $\mathrm{Re}\,\sigma\ge 0$, $\omega>0$ и выполнены условия (31) и (32), то система уравнений (26)–(29) имеет единственное решение при всех правых частях из $C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma)$.

Доказательство. Пусть однородная система уравнений (26)–(29) (при нулевых правых частях) имеет нетривиальное решение. Тогда по формулам (8), (10), (12)–(14) имеем решение краевой задачи (2)–(7), которое также будет нетривиальным (для проверки достаточно перейти в формулах (8) и (10) к пределу на границу шара и использовать теоремы о предельных значениях потенциалов в (8) и (10); см. [3, 5]). Но в силу леммы 1 однородная краевая задача (2)–(7) имеет единственное решение, и оно только тривиальное. Противоречие доказывает, что однородная система уравнений (26)–(29) (при нулевых правых частях) имеет только тривиальное решение. Тогда в силу леммы 2 система уравнений (26)–(29) имеет единственное решение при всех правых частях из $C^{0,\alpha}(\mathrm{Div},\Gamma)$. Теорема доказана.

Поскольку при выполнении условий теоремы 1 система уравнений (26)–(29) имеет единственное решение, то по формулам (12)–(14), (8), (10) получаем представление решения, а также существование и единственность решения краевой задачи (2)–(7).

Исследование вопроса о разрешимости системы уравнений в нелинейном случае требует дополнительного изучения.

Заключение

Исследована векторная электромагнитная задача дифракции на диэлектрическом шаре, покрытом графеном. Задано внешнее поле и с использованием формул Стрэттона-Чу получена векторная система интегральных уравнений на поверхности тела. С использованием формул преобразования градиента и дивергенции в сферической системе координат получена система из четырех скалярных уравнений, удобная для численного решения.

Доказана теорема о существовании и единственности решения системы интегральных уравнений, а также существование и единственность решения краевой задачи при выполнении некоторых ограничений на параметры задачи.

Список литературы

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М. : Наука, 1973. 408 с.
2. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М. : Мир, 1984. 472 с.
3. Nedelec J.-Cl. Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems. Springer, 2001. 329 p.
4. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М. : Мир, 1987. 311 с.
5. Colton D., Kress R. Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. Springer, 2013. 418 c.
6. Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. О фредгольмовости и разрешимости системы интегральных уравнений в задаче сопряжения для уравнения Гельмгольца // Дифференциальные уравнения. 2023. Т. 59, № 8. С. 1089–1097. doi: 10.31857/S0374064123080083
7. Смирнов Ю. Г., Тихов С. В. Распространение электромагнитных ТЕ- и ТМ-волн в плоском волноводе, покрытом графеном, с учетом нелинейности // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2023. № 4. С. 70–79. doi: 10.18469/1810-3189.2023.26.4.70-79
8. Смирнов Ю. Г. О фредгольмовости системы интегральных уравнений в задаче о распространении электромагнитных волн в стержне, покрытом графеном // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 3. С. 74–86. doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-6
9. Smirnov Yu. G., Tikhov S. V. On the Ability of TE- and TM-waves Propagation in a Dielectric Layer Covered with Nonlinear Graphene // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, № 11. P. 390–403. doi: 10.1134/S1995080223110380
10. Smirnov Y. G., Smolkin E. Y. On the Existence of an Infinite Spectrum of Damped Leaky TE-Polarized Waves in an Open Inhomogeneous Cylindrical Metal–Dielectric Waveguide Coated with a Graphene Layer // Differential Equations. 2023. Vol. 59, № 9. P. 1193–1198. doi: 10.1134/S0012266123090057
11. Smolkin E. Y., Smirnov Y. G. Numerical Study of the Spectrum of TE-Polarized Electromagnetic Waves of a Goubau Line Coated with Graphene // Photonics. 2023. Vol. 10. P. 1297. doi: 10.3390/photonics10121297
12. Smirnov Yu. G., Smolkin E. G. The Method of Integral Variational Relations in the Problem of Eigenwaves of a Plane Dielectric Layer Coated with Graphene // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, № 9. P. 4070–4078. doi: 10.1134/S1995080223090408
13. Smirnov Yu. G., Tikhov S. V. The Nonlinear Eigenvalue Problem of Electromagnetic Wave Propagation in a Dielectric Layer Covered with Graphene // Photonics. 2023. Vol. 10. P. 523. doi: 10.3390/photonics10050523
14. Mikhailov S. A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene // Phys. Rev. B. 2016. Vol. 93, № 8. P. 085403. doi: 10.1103/PhysRevB.93.085403
15. Hanson G. W. Dyadic Green’s functions and guided surface waves for a surface conductivity model of grapheme // Journal of Applied Physics. 2008. Vol. 103, № 6. P. 064302. doi: 10.1063/1.2891452
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М. : Наука, 1977. 831 с.
17. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М. : ИПРЖР, 1996. 176 с.
18. Смирнов Ю. Г., Кондырев О. В. Интегро-дифференциальные уравнения в задаче рассеяния электромагнитных волн на диэлектрическом теле, покрытом графеном // Дифференциальные уравнения. 2024. Т. 60, № 9. С. 1089–1097. doi: 10.31857/S0374064124090053

References

1. Ladyzhenskaya O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki = Boundary value problems of mathematical physics*. Moscow: Nauka, 1973:408. (In Russ.)
2. Sanches-Palensiya E. *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy = Inhomogeneous media and the theory of oscillations*. Moscow: Mir, 1984:472. (In Russ.)
3. Nedelec J.-Cl. *Acoustic and Electromagnetic Equations. Integral Representations for Harmonic Problems*. Springer, 2001:329.
4. Kolton D., Kress R. *Metody integral'nykh uravneniy v teorii rasseyaniya = Methods of integral equations in scattering theory*. Moscow: Mir, 1987:311. (In Russ.)
5. Colton D., Kress R. *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Springer, 2013:418.
6. Smirnov Yu.G., Kondyrev O.V. On the Fredholm property and solvability of a system of integral equations in the conjugation problem for the Helmholtz equation. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2023;59(8):1089–1097. (In Russ.). doi: 10.31857/S0374064123080083
7. Smirnov Yu.G., Tikhov S.V. Propagation of electromagnetic TE and TM waves in a graphene-coated planar waveguide taking into account nonlinearity. *Fizika volnovykh protsessov i radiotekhnicheskie sistemy = Physics of wave processes and radio engineering systems*. 2023;(4):70–79. (In Russ.). doi: 10.18469/1810-3189.2023.26.4.70-79
8. Smirnov Yu.G. On the Fredholm property of a system of integral equations in the problem of electromagnetic wave propagation in a graphene-coated rod. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(3):74–86. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-3-6
9. Smirnov Yu.G., Tikhov S.V. On the Ability of TE- and TM-waves Propagation in a Dielectric Layer Covered with Nonlinear Graphene. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(11):390–403. doi: 10.1134/S1995080223110380
10. Smirnov Y.G., Smolkin E.Y. On the Existence of an Infinite Spectrum of Damped Leaky TE-Polarized Waves in an Open Inhomogeneous Cylindrical Metal–Dielectric Waveguide Coated with a Graphene Layer. *Differential Equations*. 2023;59(9):1193–1198. doi: 10.1134/S0012266123090057
11. Smolkin E.Y., Smirnov Y.G. Numerical Study of the Spectrum of TE-Polarized Electromagnetic Waves of a Goubau Line Coated with Graphene. *Photonics*. 2023;10:1297. doi: 10.3390/photonics10121297
12. Smirnov Yu.G., Smolkin E.G. The Method of Integral Variational Relations in the Problem of Eigenwaves of a Plane Dielectric Layer Coated with Graphene. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(9):4070–4078. doi: 10.1134/S1995080223090408
13. Smirnov Yu.G., Tikhov S.V. The Nonlinear Eigenvalue Problem of Electromagnetic Wave Propagation in a Dielectric Layer Covered with Graphene. *Photonics*. 2023;10:523. doi: 10.3390/photonics10050523
14. Mikhailov S.A. Quantum theory of the third-order nonlinear electrodynamic effects of graphene. *Phys. Rev. B*. 2016;93(8):085403. doi: 10.1103/PhysRevB.93.085403
15. Hanson G.W. Dyadic Green's functions and guided surface waves for a surface conductivity model of grapheme. *Journal of Applied Physics*. 2008;103(6):064302. doi: 10.1063/1.2891452
16. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov) = Handbook of mathematics (for scientists and engineers)*. Moscow: Nauka, 1977:831. (In Russ.)
17. Il'inskiy A.S., Smirnov Yu.G. *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na provodyashchikh tonkikh ekranakh = Diffraction of electromagnetic waves on conducting thin screens.* Moscow: IPRZhR, 1996:176. (In Russ.)

18. Smirnov Yu.G., Kondyrev O.V. Integro-differential equations in the problem of scattering of electromagnetic waves on a dielectric body covered with graphene. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2024;60(9):1089–1097. (In Russ.). doi: 10.31857/S0374064124090053

Информация об авторах / Information about the authors

Юрий Геннадьевич Смирнов
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математики и суперкомпьютерного моделирования, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Yuriy G. Smirnov
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the sub-department of mathematics and supercomputer modeling, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Олег Владимирович Кондырев
аспирант, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

Oleg V. Kondyrev
Postgraduate student, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 27.05.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 02.06.2025

Принята к публикации / Accepted 27.06.2025