УДК 517.968.4
doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-7

Об одном численном алгоритме восстановления порядка дробной производной в обобщенном волновом уравнении

В. А. Рязанцев

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
ryazantsevv@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Целью работы является разработка численного алгоритма приближенного восстановления порядка производной в одном уравнении в частных производных дробного порядка, известном как обобщенное волновое уравнение. Актуальность работы обусловлена как значительной практической потребностью в совершенствовании математического аппарата решения обратных и некорректных задач, так и возрастающим числом приложений уравнений в частных производных дробного порядка к математическому моделированию в различных областях физики и техники. *Материалы и методы*. Для решения поставленной задачи применяется подход, основанный на сведении ее к интегральному уравнению, нелинейному относительно искомого параметра, и решению этого уравнения при помощи непрерывного операторного метода решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах. *Результаты*. Применение непрерывного операторного метода позволило построить численный алгоритм восстановления порядка дробной производной в обобщенном волновом уравнении в дополнительном предположении о знании значения решения уравнения в одной произвольной точке. *Выводы*. Описанный подход является достаточно эффективным при решении обратных задач для уравнений в частных производных дробного порядка. Представляет значительный интерес распространение этого подхода на более широкие классы обратных и некорректных задач для уравнений с дробными производными.

Ключевые слова: обобщенное волновое уравнение, дробные производные Римана – Лиувилля, обратные задачи, непрерывный операторный метод, логарифмическая норма, теория устойчивости

Для цитирования: Рязанцев В. А. Об одном численном алгоритме восстановления порядка дробной производной в обобщенном волновом уравнении // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 2. С. 92–103. doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-7

On a numerical method for recovery of fractional derivative order in the generalized wave equation

V.A. Ryazantsev

Penza State University, Penza, Russia
ryazantsevv@mail.ru

Abstract. *Background*. The purpose of the paper is the development of a computational algorithm for approximate recovery of derivative order in the generalized wave equation. Urgency of the stated problem is dictated not only by significant need for improvement of mathematical apparatus for solution of inverse and ill-posed problems but also by the growing number of applications of equations with partial derivatives of fractional order to mathematical modelling in different fields of physical and technical sciences. *Materials and methods*. The approach for solution of the stated problem is based on its reduction to a nonlinear in the unknown parameter integral equation and subsequent solution of this integral equation with the help of continuous operator method for solution of nonlinear equations in Banach spaces. *Results.* Application of the continuous operator equation made it possible to develop the numerical algorithm for recovery of fractional derivative order in the generalized wave equation on the extra assumption of that the solution of this equation is additionally known at one arbitrary point. *Conclusions*. The approach described in this paper appears to be quite efficient for solution of inverse problems for partial differential equations with fractional order derivatives. Extending of the used approach to a wider range of inverse and ill-posed problems for equations with fractional order derivatives is of considerable interest.

Keywords: generalized wave equation, fractional order Riemann-Liouville derivatives, inverse problems, continuous operator method, logarithmic norm, stability theory

For citation: Ryazantsev V.A. On a numerical method for recovery of fractional derivative order in the generalized wave equation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(2):92–103. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-7

Введение

Теория и практика решения обратных задач является молодым и активно развивающимся разделом современной математической науки, что связано в первую очередь с большим числом приложений таких задач в различных областях физики и техники. С другой стороны, интерес исследователей к обратным задачам во многом обусловлен тем, что к ним принадлежит значительное число весьма сложных задач из самых разных разделов математики (интегральных уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений математической физики и т.д.). Значительные трудности, возникающие при исследовании и решении обратных задач, связаны как с возможной неединственностью, так и с возможной неустойчивостью их решений, что вызывает к жизни необходимость в разработке специальных методов регуляризации.

Обратная задача, состоящая в определении порядка дробной производной в различных дифференциальных уравнениях, является относительно новой задачей, которая в последние годы вызывает большой интерес исследователей: при использовании уравнений с дробными производными в математическом моделировании различных физических процессов порядок таких производных зачастую является неизвестным, в то время как его непосредственное измерение может быть сильно затруднено или даже невозможно [1]. Свойства обратной задачи по определению порядка дробной производной в волновом уравнении исследовались, например, в работах [1–6]. Стоит упомянуть также ряд работ, посвященных численному определению порядка дробных производных в дифференциальных уравнениях; например, в работе [7] задача определения порядка дробной производной сводится к задаче одномерной оптимизации, решаемой с помощью итерационного метода Левенберга – Марквардта, а в работе [8] для решения построенного конечно-разностного аналога задачи идентификации порядка дробной производной в модели аномальной диффузии применяется итерационный метод секущих.

Данная работа продолжает цикл исследований, посвященных разработке вычислительных алгоритмов решения различных обратных и некорректных задач математической физики, в число которых входят, например, коэффициентные обратные задачи [9–12], задача восстановления начальных условий [13] и задача восстановления граничных условий [14, 15]. Теоретической основой алгоритмов, построенных в указанных работах, послужил непрерывный операторный метод, ранее предложенный И. В. Бойковым [16] и позволяющий находить решение нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах при помощи их сведения к задачам Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, которые затем могут быть решены произвольным численным методом решения таких задач. Сходимость непрерывного операторного метода обосновывается в терминах теории устойчивости.

В настоящей статье описывается применение подхода на основе непрерывного операторного метода к построению численного алгоритма решения обратной задачи для одного уравнения в частных производных дробного порядка, известного как обобщенное волновое уравнение. Дробно-дифференциальное исчисление, являясь относительно новым разделом современной математики, в настоящее время активно развивается благодаря возрастающему числу приложений дробно-дифференциальных уравнений в математическом моделировании различных физических процессов и явлений (см., например, [17–19]).

Рассмотрим задачу Коши для обобщенного волнового уравнения:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + {}_0\mathrm{D}_s^{\alpha} u(t,x) = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{2}$$

где $0 < \alpha < 1$, ${}_0\mathrm{D}_x^{\alpha} u(t,x)$ – производная Римана – Лиувилля дробного порядка α по неотрицательной переменной x функции $u(t,x)$, определяемая при $0 < \alpha < 1$ формулой [17]:

$${}_0\mathrm{D}_x^{\alpha} u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_0^x \frac{u(t,\xi)}{(x-\xi)^{\alpha}} \mathrm{d}\xi.$$

Требуется восстановить значение неизвестного порядка α дробной производной Римана – Лиувилля ${}_0\mathrm{D}_x^{\alpha} u(t,x)$ в задаче (1)–(2), если дополнительно известным является значение решения $u(t,x)$ этой задачи в некоторой фиксированной точке $\left(t^*, x^*\right)$.

1. О непрерывном операторном методе

Приведем краткое описание непрерывного операторного метода, следуя работе [16].

Пусть имеется в общем случае нелинейное операторное уравнение

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{X}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{A}: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ – оператор, отображающий банахово пространство $\mathbb{X}$ в себя.

В рамках непрерывного операторного метода уравнению (3) ставится в соответствие следующая задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathbf{x}}(t)}{\mathrm{d}t} = \mathbf{A}\left(\overline{\mathbf{x}}(t)\right) - \mathbf{f}, \tag{4}$$

$$\overline{\mathbf{x}}(0) = \boldsymbol{\chi}, \tag{5}$$

где $\overline{\mathbf{x}}(t)$ – вспомогательная функция; $\boldsymbol{\chi}$ фиксируется произвольным образом.

Условия применимости непрерывного операторного метода устанавливаются следующей теоремой, находящей применение в приложениях.

Теорема 1. Пусть уравнение (3) имеет решение $\mathbf{x}^*$ и на любой дифференцируемой кривой $\varphi(t)$, расположенной в шаре $\mathrm{R}(\mathbf{x}^*, r)$, имеют место следующие условия:

1) при всяком t $(t > 0)$ выполняется неравенство

$$\int_0^t \Lambda\left(\mathbf{A}'\left(\varphi(s)\right)\right)\mathrm{d}s \leqslant 0;$$

2) справедливо неравенство

$$\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\int_0^t \Lambda\left(\mathbf{A}'\left(\varphi(s)\right)\right)\mathrm{d}s\right] \leqslant -\gamma, \quad \gamma > 0.$$

Тогда решение задачи Коши (4)–(5) сходится к $\mathbf{x}^*$, так что

$$\lim_{t\to\infty} \overline{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}^*.$$

Здесь под $\Lambda\left(A'\right)$ следует понимать логарифмическую норму производной в смысле Фреше A' оператора A, которая определяется выражением

$$\Lambda\left(A'\right) = \lim_{h\downarrow 0}\frac{\left\|I + hA'\right\| - 1}{h},$$

где $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

2. Описание алгоритма решения задачи

Пусть функция $u(t, x)$ такова, что при всяком фиксированном $t \geq 0$ для нее выполняется условие

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x \frac{u(t,\eta)}{(x-\eta)^{\alpha}}\mathrm{d}\eta = 0.$$

Следуя [19], применим к задаче (1)–(2) преобразование Лапласа $\mathfrak{L}_x[\ ]$ по переменной x, определяемое (вместе с обратным к нему преобразованием $\mathcal{L}_p^{-1}[\ ]$) формулами:

$$F(p) = \mathfrak{L}_x\left[f(x)\right](p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt,$$

$$f(x) = \mathfrak{L}_p^{-1}\left[F(p)\right](x) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\omega\to\infty}\int\limits_{\mu^*-i\omega}^{\mu^*+i\omega} e^{px}F(p)dp, \tag{6}$$

где μ^* – некоторое действительное число.

В результате, имея в виду [11]:

$$\mathfrak{L}_x\left[{}_0\mathrm{D}_x^{\alpha}u(t,x)\right](p) = p^{\alpha}U(t,p), \quad U(t,p) = \mathfrak{L}_x[u(t,x)](p),$$

приходим к следующей задаче:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + p^{\alpha}U(t,p) = 0, \tag{7}$$

$$U(0,p) = U_0(p), \tag{8}$$

где $U_0(p) = \mathcal{L}_x\left[u_0(x)\right](p)$.

Нетрудно убедиться, что задача (7)–(8), представляющая собой задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, имеет следующее решение:

$$u(t,p) = U_0(p)\cdot\exp\left(-p^{\alpha}t\right).$$

Применяя к этому решению обратное преобразование Лапласа по переменной p и используя теорему о свертке, получаем:

$$u(t,x) = t^{-1/\alpha}\int\limits_0^x u_0(x-\eta)g_+\left(t^{-1/\alpha}\eta;\alpha\right)\mathrm{d}\eta, \tag{9}$$

где функция $g_+(x;\alpha)$, называемая [11] односторонней устойчивой плотностью, определяется формулой

$$g_+(x;\alpha) = \mathfrak{L}_p^{-1}\left[\exp\left(-p^{\alpha}\right)\right](x). \tag{10}$$

Заметим, что функция $g_+(x;\alpha)$ может быть выражена аналитически только для некоторых значений параметра α, в частности:

$$g_+\left(x;\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\exp\left(-\frac{1}{4x}\right)}{x^{3/2}}, \quad g_+\left(x;\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3\pi}\cdot\frac{K_{1/3}\left(\frac{4}{27}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x^{3/2}},$$

где $K_{\nu}(\ )$ – модифицированная функция Бесселя второго рода порядка ν. В общем случае функция $g_{+}(x;\alpha)$ определяется приближенно в результате аппроксимации обратного преобразования Лапласа в формуле (10).

Интегральное уравнение (9) лежит в основе предлагаемого в настоящей работе численного метода восстановления неизвестного параметра α.

Зафиксировав в уравнении (9) и $t = t^{*}$ и $x = x^{*}$, перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\left(t^{*}\right)^{-1/\alpha}\int_{0}^{x^{*}} u_0\left(x^{*}-\eta\right)g_{+}\left((t^{*})^{-1/\alpha}\eta;\alpha\right)d\eta = u\left(t^{*},x^{*}\right). \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что левая часть уравнения (11) представляет собой нелинейный оператор, отображающий значение α в $u\left(t^{*},x^{*}\right)$.

Применим к нелинейному уравнению (11) непрерывный операторный метод для нахождения неизвестного порядка α. Пусть $\overline{\alpha}(\sigma)$ $(\sigma \geqslant 0)$ – вспомогательная функция такая, что $\lim\limits_{\sigma\to\infty} \overline{\alpha}(\sigma) = \alpha$.

Вспомогательная функция $\overline{\alpha}(\sigma)$ является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{d\overline{\alpha}}{d\sigma} = \gamma\left\{\left(t^{*}\right)^{-1/\overline{\alpha}(\sigma)}\int_{0}^{x^{*}} u_0(x^{*}-\eta)g_{+}\left((t^{*})^{-1/\overline{\alpha}(\sigma)}\eta;\overline{\alpha}(\sigma)\right)d\eta - u\left(t^{*},x^{*}\right)\right\}, \tag{12}$$

$$\overline{\alpha}(0) = \chi, \tag{13}$$

где значение $\gamma = \pm 1$ фиксируется таким образом, чтобы обеспечить сходимость метода, а начальное значение $\chi \in (0,1)$ может быть зафиксировано произвольным образом.

Для приближенного решения задачи (12)–(13) можно воспользоваться любым численным методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Воспользуемся методом Эйлера как одним из самых простых и в то же время достаточно эффективных. Пусть θ – шаг метода Эйлера, а L – число итераций метода Эйлера. Тогда приближенное решение задачи (12)–(13) реализуется следующей вычислительной схемой:

$$\overline{\alpha}_{r+1} = \overline{\alpha}_r + \theta\gamma\left\{\left(t^{*}\right)^{-1/\overline{\alpha}_r}\int_{0}^{x^{*}} u_0(x^{*}-\eta)g_{+}\left((t^{*})^{-1/\overline{\alpha}_r}\eta;\ \overline{\alpha}_r\right)d\eta - u\left(t^{*},x^{*}\right)\right\}, \tag{14}$$

где

$$\overline{\alpha}_r = \overline{\alpha}\left(\sigma_r\right),\ \ \sigma_r = r\theta \ \text{ и } \ r = \overline{0,L-1}.$$

Приближенное решение исходной задачи восстановления α фиксируется формулой $\alpha \approx \overline{\alpha}_L$.

3. Решение модельного примера

Поставим задачу о восстановлении порядка α дробной производной в задаче (1)–(2) при $u_0(x)=1$ в предположении о том, что дополнительно известным является значение $u\left(t^*,x^*\right)=0,617$, где $t^*=1$ и $x^*=2$.

Отметим, что точное значение α в рассматриваемом примере равняется $1/2$ при соответствующем точном решении задачи (1)–(2), определяемом формулой

$$u(t,x)=\operatorname{erfc}\left(\frac{t}{2\sqrt{x}}\right),$$

где $\operatorname{erfc}(\ )=1-\operatorname{erf}(\ )$ – дополнительная функция ошибок.

Для приближения обратного преобразования Лапласа функции (10) могут быть применены различные способы (см., например, [20]). Один из наиболее простых способов аппроксимации интеграла (6) заключается в следующем.

Пусть A – достаточно большое вещественное положительное число. Тогда интеграл (6), где $F(p)=\exp\left(-p^{\alpha}\right)$, будем аппроксимировать следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mu^*-i\infty}^{\mu^*+i\infty} e^{px-p^{\alpha}}\,\mathrm{d}p \approx \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mu^*-iA}^{\mu^*+iA} e^{px-p^{\alpha}}\,\mathrm{d}p \approx \frac{h}{2\pi i}\sum_{k=1}^{N} e^{p_k x-p_k^{\alpha}}, \tag{15}$$

где $p_k=\mu^*+i\left[-A+k\left(h-\frac{1}{2}\right)\right]$, $h=2A/N$, N – достаточно большое целое положительное число.

При расчетах было зафиксировано значение $\mu^*=0$. Шаг θ метода Эйлера при вычислении по итерационной формуле (14) был взят равным 10^{-1}.

Следует отметить, что – как было обнаружено в ходе численных экспериментов – уменьшение значения шага $\theta=10^{-1}$ при численном решении поставленной задачи не приводит к увеличению точности восстановления значения α, а вызывает лишь увеличение объема вычислений. По этой причине результаты расчетов при $\theta<10^{-1}$ далее не приводятся.

Вычисление интеграла в формуле (14) проводилось по составной формуле средних прямоугольников с шагом сетки, равным $\tau=10^{-2}$. Вычисление значений функции $g_+\left(x;\overline{\alpha}_r\right)$ выполнялось по формуле (15), где было зафиксировано $A=50$ и $h=10^{-2}$.

В табл. 1–4 приведены результаты численных расчетов, выполненных в процессе приближенного решения модельного примера предлагаемым численным алгоритмом. В этих таблицах приведены значения L числа итераций алгоритма вместе с соответствующими им приближенными решениями $\overline{\alpha}_L$ и погрешностями решения задачи, определяемыми как величины модуля разности точного и приближенного значений α.

Таблица 1

Восстановление α при $\left(t^*, x^*\right) = (1,2)$ и $\chi = 0,9$

L	Решение	Погрешность	L	Решение	Погрешность
10	0,700884	0,200884	60	0,509898	0,009898
20	0,607053	0,107053	70	0,505356	0,005356
30	0,558447	0,058447	80	0,502783	0,002783
40	0,532339	0,032339	90	0,501321	0,001321
50	0,517950	0,017950	100	0,500490	0,000490

Таблица 2

Восстановление α при $\left(t^*, x^*\right) = (1,2)$ и $\chi = 0,1$

L	Решение	Погрешность	L	Решение	Погрешность
10	0,303615	0,196385	60	0,487500	0,012500
20	0,390252	0,109748	70	0,492597	0,007403
30	0,436667	0,063333	80	0,495515	0,004485
40	0,463246	0,036754	90	0,497182	0,002818
50	0,478626	0,021374	100	0,498133	0,001867

Таблица 3

Восстановление α при $\left(t^*, x^*\right) = \left(5/2, 3/2\right)$ и $\chi = 0,9$

L	Решение	Погрешность	L	Решение	Погрешность
200	0,578938	0,078938	1200	0,526008	0,026008
400	0,552500	0,052500	1400	0,523650	0,023650
600	0,540626	0,040626	1600	0,521844	0,021844
800	0,533724	0,033724	1800	0,520426	0,020426
1000	0,529198	0,029198	2000	0,519289	0,019289

Таблица 4

Восстановление α при $\left(t^*, x^*\right) = \left(5/2, 3/2\right)$ и $\chi = 0,1$

L	Решение	Погрешность	L	Решение	Погрешность
200	0,427807	0,072193	1200	0,483292	0,016708
400	0,456162	0,043838	1400	0,485614	0,014386
600	0,468556	0,031444	1600	0,487381	0,012619
800	0,475590	0,024410	1800	0,488763	0,011237
1000	0,480129	0,019871	2000	0,489868	0,010132

В табл. 1 начальное приближение $\overline{\alpha}(0) = \overline{\alpha}_0$ было зафиксировано значением $\chi = 0,9$.

При получении результатов, представленных в табл. 2, значение $\overline{\alpha}(0) = \overline{\alpha}_0$ было взято равным 0,1.

Наконец, приведем также результаты решения рассматриваемого модельного примера при тех же значениях параметров θ, τ, A и h в случае, если дополнительно известным является значение $u\left(t^*, x^*\right) = 0,149$, где $t^* = 5/2$ и

$x^* = 3/2$. Таблица 3 соответствует случаю $\overline{\alpha}(0) = \overline{\alpha}_0 = 0{,}9$, в то время как табл. 4, как и ранее, отвечает случаю $\overline{\alpha}(0) = \overline{\alpha}_0 = 0{,}1$.

Представленные в табл. 1–4 результаты восстановления порядка α в задаче (1)–(2) свидетельствуют о достаточно высокой точности определения α предложенным численным методом как при различных значениях начального приближения χ, так и при различных дополнительно известных значениях $u\left(t^*, x^*\right)$ решения задачи (1)–(2).

Заключение

Построен численный алгоритм решения обратной задачи восстановления порядка дробной производной Римана – Лиувилля в задаче Коши для обобщенного волнового уравнения при дополнительно известном значении решения задачи Коши в одной произвольной точке. В основе алгоритма лежит непрерывный операторный метод решения нелинейных уравнений в банаховых пространствах. Достоинствами предложенного алгоритма являются его простота, а также его применимость к весьма широкому классу задач. Решение модельного примера продемонстрировало высокую эффективность алгоритма. Представляет значительный теоретический и практический интерес распространение идей, лежащих в основе предложенного алгоритма, на другие обратные задачи для уравнений в частных производных дробных порядков.

Список литературы

1. Ашуров Р. Р., Файзиев Ю. Э. Обратная задача по определению порядка дробной производной в волновом уравнении // Математические заметки. 2021. Т. 110, № 6. С. 824–836. doi: 10.4213/mzm13090
2. Ashurov R., Sitnik S. Identification of the order of the fractional derivative for the fractional wave equation // Fractal and fractional. 2023. Vol. 7, № 1. P. 67. doi: 10.3390/fractalfract7010067
3. Li Z., Yamamoto M. Inverse problems of determining coefficients of the fractional partial differential equations // Handbook of fractional calculus with applications. 2019. Vol. 2. P. 443–464. doi: 10.48550/arXiv.1904.05505
4. Tatar S., Ulusoy S. A uniqueness result for an inverse problem in a space-time fractional diffusion equation // Electronic Journal of Differential Equations. 2013. Vol. 257. P. 1–9.
5. Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M., Yamazaki T. Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation // Inverse Problems. 2009. Vol. 25, № 11. id. 115002. doi: 10.1088/0266-5611/25/11/115002
6. Zheng X., Cheng J., Wang H. Uniqueness of determining the variable fractional order in variable-order time-fractional diffusion equations // Inverse Problems. 2019. Vol. 35, № 12. id. 125002. doi: 10.1088/1361-6420/ab3aa3
7. Твердый Д. А., Паровик Р. И. Решение обратной задачи по идентификации порядка дробной производной в математической модели динамики солнечной активности на стадии подъема // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2023. Т. 45, № 4. С. 36–51. doi: 10.26117/2079-6641-2023-45-4-36-51
8. Васильев В. И., Кардашевский А. М. Численная идентификация порядка дробной производной по времени модели субдиффузии // Математические заметки СВФУ. 2020. Т. 27, № 4. С. 60–71. doi: 10.25587/SVFU.2020.98.14.005
9. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Об одном приближенном методе определения коэффициента теплопроводности // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 2. С. 149–163. doi: 10.15507/2079-6900.21.201902.149-163

10. Бойков И. В., Рязанцев В. А. О численном решении коэффициентной обратной задачи для гиперболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2019. № 3. С. 47–62. doi: 10.21685/2072-3040-2019-3-4
11. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Об одном приближенном методе решения обратной коэффициентной задачи для уравнения теплопроводности // Сибирский журнал индустриальной математики. 2021. Т. 24, № 2 (86). С. 5–22. doi: 10.33048/SIBJIM.2021.24.201
12. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Об одном итерационном методе решения прямых и обратных задач для параболических уравнений // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2023. Т. 23, № 3. С. 286–310. doi: 10.18500/1816-9791-2023-23-3-286-310
13. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Численное восстановление начального условия в задачах Коши для линейных параболических и гиперболических уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 3. С. 68–84. doi: 10.21685/2072-3040-2020-3-6
14. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Об одном методе восстановления граничного условия для линейных уравнений параболического типа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2020. № 4. С. 42–56. doi: 10.21685/2072-3040-2020-4-4
15. Boykov I. V., Ryazantsev V. A. On the problem of recovering boundary conditions in the third value problem for parabolic equation // University Proceedings. Volga region. Physical and Mathematical Sciences. 2021. № 2 (58). P. 3–13. doi: 10.21685/2072-3040-2021-2-1
16. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308–1314.
17. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск : Наука и техника, 1987. 688 с.
18. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М. : Физматлит, 2003. 272 с.
19. Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск : Артишок, 2008. 512 с.
20. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближенного преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа. М. : Наука, 1974. 224 с.

References

1. Ashurov R.R., Fayziev Yu.E. Inverse problem of determining the order of the fractional derivative in the wave equation. *Matematicheskie zametki = Mathematical notes.* 2021;110(6):824–836. (In Russ.). doi: 10.4213/mzm13090
2. Ashurov R., Sitnik S. Identification of the order of the fractional derivative for the fractional wave equation. *Fractal and fractional*. 2023;7(1):67. doi: 10.3390/fractalfract7010067
3. Li Z., Yamamoto M. Inverse problems of determining coefficients of the fractional partial differential equations. *Handbook of fractional calculus with applications*. 2019;2:443–464. doi: 10.48550/arXiv.1904.05505
4. Tatar S., Ulusoy S. A uniqueness result for an inverse problem in a space-time fractional diffusion equation. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2013;257:1–9.
5. Cheng J., Nakagawa J., Yamamoto M., Yamazaki T. Uniqueness in an inverse problem for a one-dimensional fractional diffusion equation. *Inverse Problems*. 2009;25(11). id. 115002. doi: 10.1088/0266-5611/25/11/115002
6. Zheng X., Cheng J., Wang H. Uniqueness of determining the variable fractional order in variable-order time-fractional diffusion equations. *Inverse Problems*. 2019;35(12). id. 125002. doi: 10.1088/1361-6420/ab3aa3

7. Tverdyy D.A., Parovik R.I. Solution of the inverse problem of identifying the order of fractional derivative in a mathematical model of solar activity dynamics at the rise stage. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki = Bulletin KRASEC. Physical and mathematical sciences.* 2023;45(4):36–51. (In Russ.). doi: 10.26117/2079-6641-2023-45-4-36-51
8. Vasil'ev V.I., Kardashevskiy A.M. Numerical identification of the order of fractional time derivative of the subdiffusion model. *Matematicheskie zametki SVFU = Proceedings of the North-Eastern Federal University.* 2020;27(4):60–71. (In Russ.). doi: 10.25587/SVFU.2020.98.14.005
9. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. On one approximate method for determining the thermal conductivity coefficient. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva = Journal of the Middle Volga Mathematical Society.* 2019;21(2):149–163. (In Russ.). doi: 10.15507/2079-6900.21.201902.149-163
10. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. On the numerical solution of the coefficient inverse problem for hyperbolic equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2019;(3):47–62. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2019-3-4
11. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. On an approximate method for solving the inverse coefficient problem for the heat conduction equation. *Sibirskiy zhurnal industrial'noy matematiki = Siberian Journal of Industrial Mathematics*. 2021;24(2):5–22. (In Russ.). doi: 10.33048/SIBJIM.2021.24.201
12. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. On an iterative method for solving direct and inverse problems for parabolic equations. *Izvestiya Saratovskogo uni-versiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika = Proceedings of Saratov University. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Computer sciences*. 2023;23(3):286–310. (In Russ.). doi: 10.18500/1816-9791-2023-23-3-286-310
13. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. Numerical reconstruction of the initial condition in Cauchy problems for linear parabolic and hyperbolic equations. *Izve-stiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2020;(3):68–84. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2020-3-6
14. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. On a method of reconstructing the boundary condition for linear equations of parabolic type. *Izvestiya vysshikh uchebnykh za-vedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2020;(4):42–56. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2020-4-4
15. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. On the problem of recovering boundary conditions in the third value problem for parabolic equation. *University Proceedings. Volga region. Physical and Mathematical Sciences*. 2021;(2):3–13. doi: 10.21685/2072-3040-2021-2-1
16. Boykov I.V. On a continuous method for solving nonlinear operator equations. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2012;48(9):1308–1314. (In Russ.)
17. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya = Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications*. Minsk: Nauka i tekhnika, 1987:688. (In Russ.)
18. Nakhushev A.M. *Drobnoe ischislenie i ego primenenie = Fractional calculus and its applications*. Moscow: Fizmatlit, 2003:272. (In Russ.)
19. Uchaykin V.V. *Metod drobnykh proizvodnykh = Fractional derivative method*. Ul'yanovsk: Artishok, 2008:512. (In Russ.)
20. Krylov V.I., Skoblya N.S. *Metody priblizhennogo preobrazovaniya Fur'e i obrashcheniya preobrazovaniya Laplasa = Approximate Fourier transform and Laplace transform inversion methods*. Moscow: Nauka, 1974:224. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Владимир Андреевич Рязанцев
кандидат технических наук, доцент кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: ryazantsevv@mail.ru

Vladimir A. Ryazantsev
Candidate of engineering sciences, associate professor of the sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 22.05.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 16.06.2025

Принята к публикации / Accepted 06.07.2025