

УДК 004.896

doi: 10.53816/20753608_2025_2_43

**РОЕВЫЕ СИСТЕМЫ БЕСПИЛОТНЫХ ОБЪЕКТОВ:
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ
ГРУППЫ МОБИЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ**

**SWARM SYSTEMS OF UNMANNED OBJECTS:
MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE BEHAVIOR
OF A GROUP OF MOBILE OBJECTS**

Чл.-корр. РАРАН А.Э. Соловьев, О.А. Кравченко, А.Н. Ивутин, М.Ю. Шишлов

Тульский государственный университет

A.E. Soloviev, O.A. Kravchenko, A.N. Ivutin, M.Yu. Shishlov

Данная статья продолжает цикл работ, посвященных исследованиям в области обеспечения предсказуемого и энергорационального описания поведения группы мобильных объектов (роя беспилотных аппаратов/роботов), основанного на принципах классической физики. Рассмотрена математическая модель описания поведения группы мобильных объектов, основанная на принципах классической физики. Приведены математические зависимости и результаты моделирования для пространственной задачи.

Ключевые слова: групповое взаимодействие, динамические процессы, слабосвязанные объединения, физические законы, биомиметика, роевые системы.

This article continues the series of papers dedicated to research into providing a predictable and energy-rational description of the behavior of groups of mobile objects (swarm of drones/robots), based on classical physical principles. A mathematical model for describing the behavior of such a group of objects is presented. Mathematical dependencies and simulation results for a spatial problem are provided.

Keywords: group interaction, dynamic processes, loose coupling, physical principles, biomimetics, swarm systems.

Роевые системы (рои) беспилотных аппаратов представляют собой совокупность однотипных объектов (членов роя — агентов), взаимодействующих друг с другом, окружающей средой и внешними объектами/факторами. Некоторые основы физического подхода к описанию взаимодействий показаны в [1]. При этом следует отметить, что для ряда работ, развивающих физические подходы к описанию взаимодействия [2, 13, 14] свойственно существен-

ное усложнение процесса описания взаимодействия, где используются уравнения, схожие с уравнениями Навье — Стокса для простой сжимаемой жидкости, либо, как в работах [3, 4], существенное влияние уделяется хаотическим и случайным факторам когерентных движений. В работе [5] предлагается простая модель, соответствующая частицам, движущимся в противоположных направлениях и взаимодействующим посредством потенциала отталкивания.

Рассматриваемые зависимости и подходы либо тяготеют к излишней теоретизированности, либо рассматривают частные случаи взаимодействия. Мы в своем исследовании ставим целью разработать описание взаимодействия, способное с допустимой долей допущений описывать групповое взаимодействие большого количества материальных объектов с использованием принципов классической физики.

При рассмотрении агентов как материальных точек, движение каждого из них (в общем случае) рассматривается с учетом следующих факторов:

- инерционности, которая характеризуется массой m_i i -го агента роя;
- рассеивания энергии при движении агента, которое характеризуется функцией h_i , зависящей от скорости i -го агента роя;
- взаимодействия агентов, которое зависит от расстояния между соседними агентами и позволяет им стремиться сохранять определенные расстояния между собой. Характеризуется функциями вида r_{ij} от расстояния между i -м и j -м членом роя;
- внешних факторов F_a , действующих на окружающих их членов роя — например, статические факторы (препятствия).

Рассмотрим простейшую модель взаимодействия, описывающую одномерную задачу. В данной ситуации считается, что каждый агент может двигаться только вдоль одной оси X . Схематическое описание данной модели взаимодействия приведено на рис. 1.

В данном случае все N_x членов роя (то есть $i = 1, \dots, N_x$) расположены вдоль упомянутой оси. Начальное положение каждого члена роя определяется координатой $x_i(0)$, а изменение этого положения определяется величиной x_i . Тогда, текущее положение i -го члена роя определяется выражением $x_i(t) = x_i(0) + x_i$.

Связи r_{ij}^x можно представить в виде абстрактных пружин, которые характеризуются коэффициентом упругости k_{ij}^x вдоль оси X . Если считать, что при $t = 0$ рой находится в равновесном состоянии (то есть $|x_i(0) - x_{i-1}(0)| = |x_i(0) - x_{i+1}(0)|$), то при изменении этого состояния взаимодействие i -го члена роя с его соседями r_i^x будет определяться некими функциями от перемещений соседствующих членов роя:

$$r_i^x(t) = r_{i(i-1)}^x + r_{i(i+1)}^x = f(x_i - x_{i-1}) + f(x_i - x_{i+1}),$$

причем $r_{i(i-1)}^x = -r_{(i-1)i}^x$ и $r_{i(i+1)}^x = -r_{(i+1)i}^x$. Кроме того, следует учесть граничные условия:

$$r_{i(i-1)}^x = 0 \text{ при } i = 1 \text{ и } r_{N_x(N_x+1)}^x = 0 \text{ при } i = N_x.$$

На рой, по оси X может действовать ряд внешних факторов F_a^x ($a = 1, \dots, A$). Место начала действия каждого из них определяется координатой $x_{Fa}(0)$, а текущее положение этого фактора относительно роя определяется его координатой $x_{Fa}(t)$. В соответствии с координатой этого фактора определяется его позиция ai относительно агентов роя. Влияние этого фактора на соседних с ним членов роя с номерами $ai - 1$ и $ai + 1$ (для простоты будем считать, что на остальных членов роя этот фактор непосредственного действия не оказывает) определяется через силы:

$$F_{(ai-1)Fa}^x = F^x[x_{ai-1}(t) - x_{Fa}(t)],$$

$$F_{(ai+1)Fa}^x = F^x[x_{ai+1}(t) - x_{Fa}(t)].$$

Причем в процессе движения члены роя, соседствующие с фактором F_a^x ($a = 1, \dots, A$), могут меняться, то есть будут меняться номера $ai - 1$ и $ai + 1$.

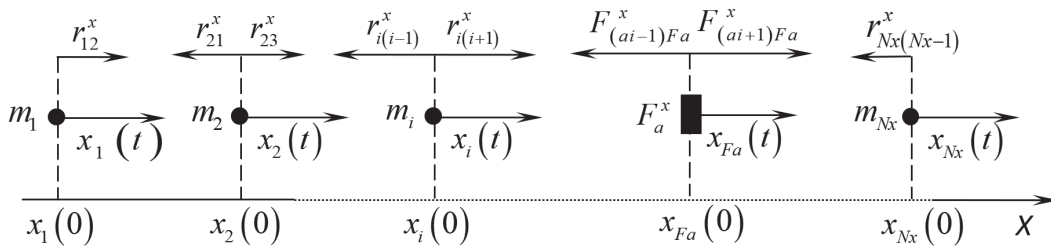


Рис. 1. Взаимодействие агентов роя при одномерной модели

Тогда уравнение движения i -го члена роя относительно его исходного положения $x_i(0)$ определяется выражением:

$$m_i \ddot{x}_i + h_i \dot{x}_i + r_i^x(t) = \sum_{a=1}^{A_i} F_a^x [x_i(t) - x_{Fa}(t)],$$

где A_i — количество внешних факторов, непосредственно влияющих на i -й агент роя.

В зависимости от знака функций $F_a^x [x_i(t) - x_{Fa}(t)]$, члены роя будут либо избегать внешнего фактора (тогда его можно интерпретировать как помеху), либо стремиться к нему (тогда его можно интерпретировать как цель).

Если рой двумерный, то каждый его некрайний член взаимодействует с восемью другими членами роя, причем каждое это взаимодействие имеет две составляющие: по осям X и Y (рис. 2).

Тогда для m_{ij} члена роя можно записать:

$$r_{ij}^x = \sum_{e=-1,1} r_{[ij][(i+e)j]}^{x0} + \sum_{e=-1,1} r_{[ij][i(j+e)]}^{xc} + \sum_{e2=-1,1} \left(\sum_{e1=-1,1} r_{[ij][(i+e1)(j+e2)]}^{xd} \right);$$

$$r_{ij}^y = \sum_{e=-1,1} r_{[ij][i(j+e)]}^{y0} + \sum_{e=-1,1} r_{[ij][(i+e)j]}^{yc} + \sum_{e2=-1,1} \left(\sum_{e1=-1,1} r_{[ij][(i+e1)(j+e2)]}^{yd} \right).$$

Необходимо отметить, что составляющие

$r_{[ij][i(j+e)]}^{xc}$ и $r_{[ij][(i+e)j]}^{yc}$ ($e = -1, 1$) обуславливают взаимодействие между рядами роя. При их отсутствии движение членов j -го ряда относительно оси X не будет оказывать влияние на движение членов $(j-1)$ и $(j+1)$ рядов, аналогично и для членов i -го ряда при движении относительно оси Y .

Взаимодействие между членами роя, которые расположены на одной диагонали, может быть учтено двумя способами:

- опосредовано, то есть по катетам, когда m_{ij} член роя сначала взаимодействует с членами соседних рядов $m_{[ij][i(j+e)]}$ и $m_{[ij][(i+e)j]}$, а уже они передают это взаимодействие членам $m_{[ij][(i+e1)(j+e2)]}$ ($e1 = -1, 1$ и $e2 = -1, 1$);
- непосредственно, что учитывается составляющими $r_{[ij][(i+e1)(j+e2)]}^{xd}$ и $r_{[ij][(i+e1)(j+e2)]}^{yd}$ ($e1 = -1, 1$

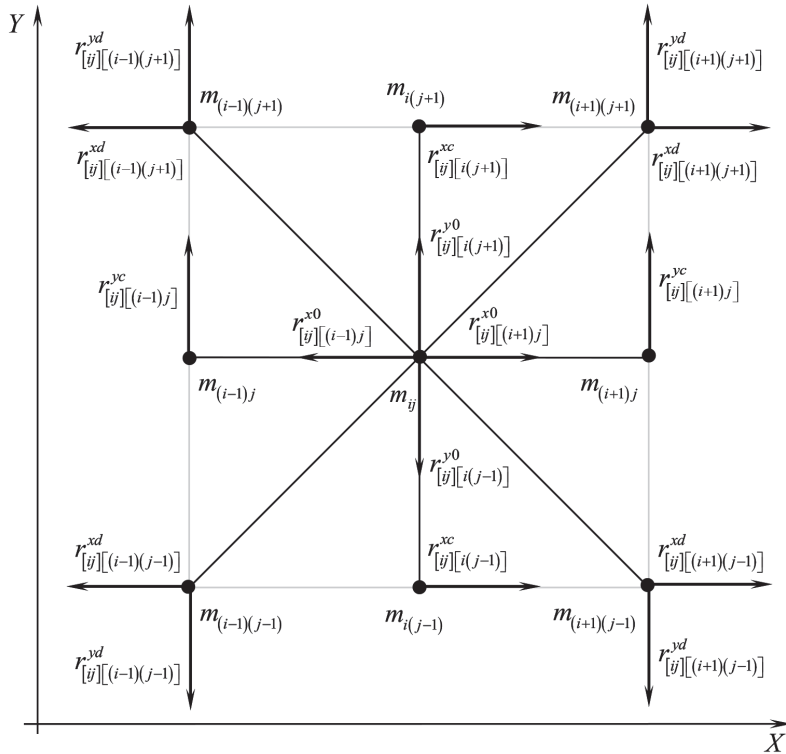


Рис. 2. Взаимодействие между членами плоского роя

и $e_2 = -1, 1$), причем в данном случае опосредованное взаимодействие сохраняется.

В качестве граничных условий для двухмерного роя необходимо учесть нулевое взаимодействие при одном из следующих условий: $i = 0$, $i = N_x$, $j = 0$, $j = N_y$.

Влияние внешних факторов будет также иметь две составляющие, действующих по соответствующим осям: $F^x[x_i(t) - x_{Fa}(t)]$ и $F^y[y_j(t) - y_{Fa}(t)]$.

Если порядок членов роя не меняется, то такой рой будем называть упорядоченным. Очевидно, что только линейный рой будет всегда упорядоченным. Уже для двухмерного роя возможно изменение порядка его членов, то есть член m_{ij} не всегда может находиться между членами $m_{(i-1)j}$ и $m_{(i+1)j}$ по оси X или между $m_{i(j-1)}$ и $m_{i(j+1)}$ по оси Y (рис. 3).

Для многомерного случая остаются справедливыми все правила одномерного роя с учетом того, что положение агентов роя и внешних факторов, а также их взаимодействия описываются векторами соответствующей размерности. Так, для трехмерного роя движение каждого агента можно описать следующим образом:

$$m_{ijk} \ddot{q}_g + h \dot{q}_g + r_{ijk}^q = \sum_{a=1}^{A_g} F_a^q [q_g(t) - q_{Fa}(t)] - F_s^q [q_g(t) - q_{Fs}(t)],$$

где

$$q = x, y, z; \quad g = \begin{cases} i & \text{при } q = x \\ j & \text{при } q = y \\ k & \text{при } q = z \end{cases};$$

$$r_{ijk}^q = \sum_{e_3=-1,0,1} \left[\sum_{e_2=-1,0,1} \left(\sum_{e_1=-1,0,1} r_{[ijk][(i+e_1)(j+e_2)(k+e_3)]}^{qb} \right) \right] - r_{[ijk][ijk]}^{qb};$$

$$r_{[ijk][(i+e_1)(j+e_2)(k+e_3)]}^{qb} = r^{qb} \left[\sum_{e=-1,1} (q_g - q_{g+e}) \right];$$

$$b = \begin{cases} 0 & \text{при } e_1 \neq 0, e_2 = 0, e_3 = 0; \\ c & \text{при } e_1 = 0, \begin{cases} e_2 \neq 0, e_3 = 0 \\ e_2 = 0, e_3 \neq 0 \end{cases}; \\ d & \text{при остальных значениях} \end{cases}.$$

Для трехмерного роя условия изменения его структуры могут быть записаны в виде (при допущении, что линейные размеры члена роя всегда меньше расстояния между членами роя, что вполне корректно при условии пренебрежения угловыми движениями членов роя):

$$e \left[q_{ijk} - q_{(i+e_1)(j+e_2)(k+e_3)} \right] > 0; \\ g_{ijk} \neq g_{(i+e_1)(j+e_2)(k+e_3)},$$

где

$$\begin{pmatrix} q = x, y, z \\ g = x, y, z \\ q \neq g \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = -1, 0, 1;$$

$$e = \begin{cases} e_1, e_2 = e_3 = 0 & \text{при } q = x \\ e_2, e_1 = e_3 = 0 & \text{при } q = y \\ e_3, e_1 = e_2 = 0 & \text{при } q = z \end{cases}.$$

Кроме того, необходимо учесть, что при смене порядка членов роя меняется и направление сил взаимодействия между ними, тогда

$$r_{[ijk][(i+e_1)(j+e_2)(k+e_3)]}^{qb} = r^{qb} \left[\sum_{e=-1,1} \left\{ \text{sign}(q_g - q_{g+e}) \right\} (q_g - q_{g+e}) \right].$$

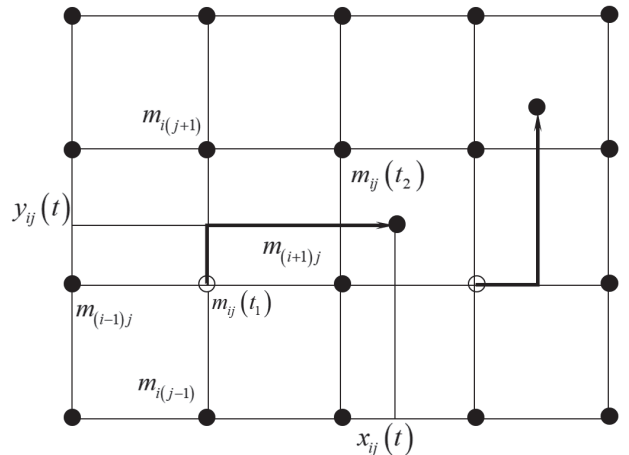


Рис. 3. Нарушение упорядоченности роя

Отметим, что в ряде случаев, взаимодействие между агентами роя, а также взаимодействие аген-

тов роя с целью и препятствиями (препятствиями), удобно представлять в виде упругих связей. Тогда:

$$r_{[ijk][(i+e1)(j+e2)(k+e3)]}^{qb} = k^r \times \begin{cases} (G_{\min}^{qb} - G_{\text{opt}}) \text{ при } \Delta G_{[ijk][(i+e1)(j+e2)(k+e3)]}^{qb} \leq G_{\min}^{qb}; \\ (\Delta G_{[ijk][(i+e1)(j+e2)(k+e3)]}^{qb} - G_{\text{opt}}) \text{ при } G_{\min}^{qb} < \Delta G_{[ijk][(i+e1)(j+e2)(k+e3)]}^{qb} < G_{\max}^{qb}; \\ 0 \text{ при } \Delta G_{[ijk][(i+e1)(j+e2)(k+e3)]}^{qb} \geq G_{\max}^{qb}, \end{cases}$$

где $\Delta G_{[ijk][(i+e1)(j+e2)(k+e3)]}^{qb}$ — расстояние между

соседними агентами роя; $G_{\min}^{qb}$ — расстояние между агентами роя, дальнейшее уменьшение которого не приводит к увеличению силы взаимодействия; $G_{\max}^{qb}$ — расстояние между агентами роя, дальнейшее увеличение которого приводит к потере взаимодействия; G_{opt} — оптимальное расстояние между агентами роя, которое они стремятся сохранять при своем движении; k^r — коэффициент взаимодействия между агентами роя.

Как правило, для одного роя целесообразно одновременно задавать одну цель. Отметим, что скорость движения цели, при условии что эта скорость существенно меньше скорости движения агентов роя, не оказывает существенного влияния на их движение. Тогда функцию взаимодействия агентов роя с целью можно представить в виде:

$$F_s^q [q_g(t) - q_{Fs}(t)] = \begin{cases} k^s (G_{\max}^s - \Delta G_{[ijk]}^{qb-s}) \text{ при } \Delta G_{[ijk]}^{qb-s} \leq G_{\max}^s; \\ 0 \text{ при } \Delta G_{[ijk]}^{qb-s} > G_{\max}^s, \end{cases}$$

где $\Delta G_{[ijk]}^{qb-s}$ — текущее расстояние между агентом роя и целью; $G_{\max}^s$ — расстояние между агентом роя и целью, дальнейшее увеличение которого приводит к потере этого взаимодействия; k^s — коэффициент взаимодействия между агентом роя и целью.

В общем случае, на пути движения роя находится A препятствий, количество взаимодействий которых с агентом роя m_{ijk} по соответствующей оси определяется числом A_g . Эти препятствия могут быть трех типов:

- точечные (если размер препятствия не превышает размеры агента роя) неподвижные;
- точечные подвижные;

– протяженные,

но в любом случае взаимодействие агента роя с препятствием будет определяться кратчайшим (по соответствующей оси) расстоянием до него.

Тогда:

$$F_a^q [q_g(t) - q_{Fa}(t)] = \begin{cases} k^a (G_{\max}^a - \Delta G_{[ijk]}^{qb-a}) \text{ при } \Delta G_{[ijk]}^{qb-a} \leq G_{\max}^a; \\ 0 \text{ при } \Delta G_{[ijk]}^{qb-a} > G_{\max}^a, \end{cases}$$

где $\Delta G_{[ijk]}^{qb-a}$ — текущее расстояние между агентом роя и препятствием; $G_{\max}^a$ — расстояние между агентом роя и препятствием, дальнейшее увеличение которого приводит к потере этого взаимодействия; k^a — коэффициент взаимодействия между агентом роя и препятствием.

Используя разработанные средства моделирования поведения многоагентных систем [6, 7, 11, 12], было смоделировано поведение системы роя в соответствии с разработанной моделью. На рис. 4 (отметим, что масштабы рисунков одинаковы) показан процесс перехода трехмерного роя из неупорядоченного состояния (рис. 4, а) в упорядоченное, заданное положением цели (рис. 4, б).

При моделировании движения роя существенным является количество связей между его агентами. Количество этих связей определяется текущей конфигурацией роя и величиной $G_{\max}^{qb}$. В общем случае количество таких связей определяется выражением:

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{p_i} n_i c_i,$$

где C — общее количество связей между членами роя; n_i — количество членов роя с числом связей c_i ; p_i — количество групп в рое, обладающих уникальным числом связей (рис. 5).

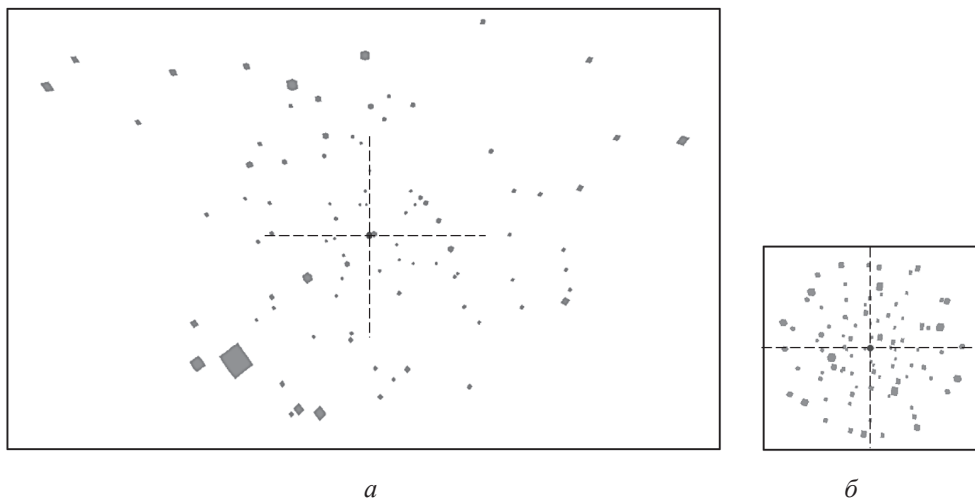


Рис. 4. Перехода трехмерного роя из неупорядоченного состояния в упорядоченное:
а — неупорядоченное состояние; б — упорядоченное состояние

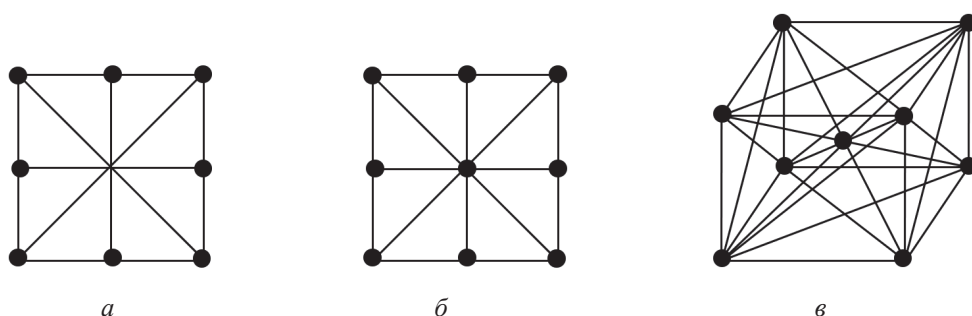


Рис. 5. Связи между членами роя:
а) $p_i = 1$, $n_i = 8$, $c_i = 3$, $C = 12$; б) $p_i = 2$, $n_i = 8$, $c_i = 3$, $n_2 = 1$, $c_2 = 8$, $C = 16$;
в) $p_i = 2$, $n_i = 8$, $c_i = 7$, $n_2 = 1$, $c_2 = 8$, $C = 32$

Если расстояния между всеми агентами роя не превышает величины $G_{\max}^{qb}$, то такой рой можно представить как полносвязный граф, размер связности в котором находится в интервале от 1 до $N - 2$, где N — число агентов в рое. Пример подобной структуры приведен на рис. 6.

Такое представление роя позволяет применить математический аппарат теории графов для анализа взаимодействий (преимущественно информационных) в образовавшихся коалициях [8], визуально оценивать наличие или отсутствие связей между элементами роя, что особенно полезно при отладке схем взаимодействия. Кроме того, при организации реальных взаимодействий внутри роя с использованием современных протоколов связи, такие представления, как правило, являются основными при решении задач многопутевой маршрутизации [9, 10, 15].

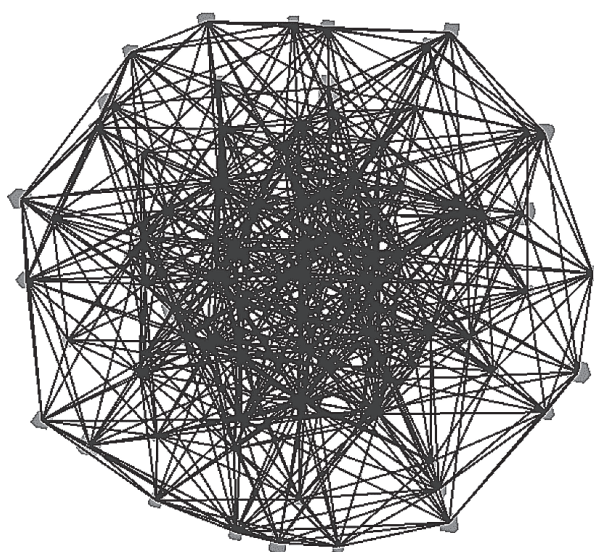


Рис. 6. Рой в представлении графа

Список источников

1. Helbing D., Farkas I., Vicsek T. Simulating dynamical features of escape panic // *Nature*. 2000. V. 407. No 6803. Pp. 487–490.
2. Toner J., Tu Y. Flocks, herds, and schools: A quantitative theory of flocking // *Physical review E*. 1998. V. 58. No 4. P. 4828.
3. Vicsek T. et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles // *Physical review letters*. 1995. V. 75. No 6. Pp. 1226.
4. Czirók A., Vicsek M., Vicsek T. Collective motion of organisms in three dimensions // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1999. No 1–2 (264). Pp. 299–304.
5. Helbing D., Farkas I.J., Vicsek T. Freezing by heating in a driven mesoscopic system // *Physical review letters*. 2000. V. 84. No 6. Pp. 1240.
6. Модуль обработки запросов симуляции многоагентных сред: свидет. о гос. рег. прогн. для ЭВМ 2023664525 Рос. Федерация. № 2023663447; заявл. 28.06.2023; опубл. 05.07.2023, Бюл. № 7.
7. Компонент управления для интерактивной многоагентной визуализации: свидет. о гос. рег. прогн. для ЭВМ 2023664526 Рос. Федерация. № 2023663447; заявл. 28.06.2023; опубл. 05.07.2023, Бюл. № 7.
8. Карпов Д.В. Теория графов. СПб.: Санкт-Петербургское отделение Мат. института им. В.А. Стеклова РАН, 2017. 482 с.
9. Ивутин А.Н., Новиков А.С., Пестин М.С., Волошко А.Г. Децентрализованный протокол организации устойчивого взаимодействия абонентов в сетях с высокой динамикой изменения топологии // *Информатика и автоматизация*. 2024. № 3 (23). С. 727–765.
10. Новиков А.С., Ивутин А.Н., Пестин М.С. Алгоритм маршрутизации для обеспечения быстрого восстановления связи при обрывах маршрутов в сетях MANET // *Системы управления, связи и безопасности*. 2024. № 2. С. 14–42.
11. Чжу Ю. Формирование управления полетом группы беспилотных летательных аппаратов на основе алгоритма многоагентной модели роев // *Информатика, телекоммуникации и управление*. 2022. Том 15, № 4. С. 22–36.
12. Леонов А.В., Чаплышкин В.А. Роевой интеллект для управления БПЛА в FANET // *Молодой ученый*. 2016. № 12 (116). С. 314–317. URL: <https://moluch.ru/archive/116/31615/> (дата обращения: 06.06.2025).
13. Нистюк А.И., Абилов А.В., Хворенков В.В., Алексеев В.А. Разработка роевой технологии для мобильных самоорганизующихся сетей. Идентификация динамических моделей // *Вестник ИЖГТУ им. М.Т. Калашникова*. 2018. Том 21, № 4. С. 136–140.
14. Нгуа Ндонг Авеле Ж.Б. Разработка программно-алгоритмического обеспечения для управления роев беспилотных летательных аппаратов // *Известия СПбГЭТУ «ЛЭТИ»*. 2023. Том 16, № 1. С. 66–76.
15. Гришко А.К., Лысенко А.В., Кочегаров И.И. Логико-математические принципы мультиагентного управления интеллектуальными мобильными объектами и системами в динамической среде // *Надежность и качество сложных систем*. 2017. № 4 (20). С. 35–40.