

УДК 355/359

doi: 10.53816/20753608_2025_1_55

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХСТОРОННИХ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ МНОГОЧИСЛЕННЫХ ГРУППИРОВОК ПРИ ЗАДЕРЖКЕ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ БОЕВЫХ ЕДИНИЦ ПРОТИВНИКА

A MATHEMATICAL MODEL OF TWO-WAY COMBAT OPERATIONS OF NUMEROUS GROUPS WITH A DELAY IN INFORMATION ABOUT THE STATE OF ENEMY COMBAT UNITS

В.Ю. Чуев¹, чл.-корр. РАН Е.Б. Маркелов², Ю.А. Медведева¹

¹МГТУ им. Н.Э. Баумана, ²Преображенский научный центр РАН

V.Yu. Chuev, E.B. Markelov, Yu.A. Medvedeva

С использованием метода динамики средних разработана модель двухсторонних боевых действий, позволяющая учесть задержку информации о состоянии боевых единиц противника (уничтожены или нет) при одновременном открытии огня противоборствующими сторонами и при упреждающем ударе одной из них. Установлено, что упреждающий удар одной из сторон, а также задержка информации о состоянии единиц противника оказывают существенное влияние на исход и основные показатели боя близких по силам группировок.

Ключевые слова: модель двухсторонних боевых действий, боевая единица, эффективная скорострельность, упреждающий удар, параметр соотношения сил.

Using the method of dynamics of average values, a model of bilateral military operations was developed, that allows for the delay in information about the state of enemy combat units (destroyed or not) when simultaneously opening fire by the opposing sides and when one of them preemptively strikes. Was established that a preemptive strike by one of the sides, as well as the delay in information about the state of enemy combat units, have a significant impact on the outcome and the main indicators of the battle of groups close in strength.

Keywords: two-way combat model, combat unit, effective rate of fire, preemptive strike, force ratio parameter.

Введение

На ранних стадиях проектирования новой технической системы требуется разработка математической модели ее функционирования для определения качества ее работы [1]. Основой оценки действия создаваемых образцов вооружения и военной техники являются показатели их боевой эффективности, так как именно они определяют

степень пригодности данного образца к решению поставленных боевых задач [2–4]. Основой такой оценки должна быть модель двухсторонних боевых действий, так как она позволяет более детально и достоверно учесть большее число факторов, влияющих на эффективность в реальных боевых действиях, чем модели без учета ответного огня.

Одним из возможных способов описания процесса двухсторонних боевых действий

многочисленных группировок является метод динамики средних (уравнения Ланчестера 1-го и 2-го рода) [5–7]. Построение моделей этого типа основано на следующем допущении. Согласно закону больших чисел в каждый момент времени боя количества участвующих в бою единиц сторон достаточно близки к своим средним численностям (математическим ожиданиям). Это позволяет не исследовать подробности, связанные со случайным состоянием каждой участвующей в бою единицы и рассматривать бой как детерминированный процесс [8]. При этом допущении все показатели боя не будут случайными величинами и заменятся своими математическими ожиданиями.

Последовательность выстрелов, производимых каждой участвующей в бою единицей, представляется в виде пуассоновского потока событий [9]. Осуществляется переход к потоку успешных выстрелов, который также считается пуассоновским. Выстрел назовем «успешным», если он поражает боевую единицу противника [8].

Описание процесса боевых действий

Рассмотрим бой двух группировок X и Y . Сторона X имеет в начале боя x_0 однотипных боевых единиц. Сторона Y имеет в начале боя y_0 также однотипных боевых единиц, необязательно однородных с единицами стороны X . Покажем, что каждая боевая единица стороны X может стрелять по любой единице противника и наоборот, и что одним выстрелом нельзя уничтожить более одной боевой единицы противника. Считаем, что боевая мощь каждой стороны в каждый момент боя пропорциональна среднему значению ее сохранившихся основных единиц (математическому ожиданию).

Введем обозначения:

p_x, p_y — вероятности поражения боевой единицы противника одним выстрелом единицы сторон X и Y соответственно;

λ_x, λ_y — практические скорострельности боевых единиц сторон X и Y соответственно;

величины $v = p_x \lambda_x$ и $u = p_y \lambda_y$ назовем эффективными скорострельностями боевых единиц сторон, будем считать их в течение всего боя постоянными.

В литературе подробно описан «высокоорганизованный» бой (модель 1), то есть когда

боевые единицы обеих сторон имеют полную и незапаздывающую информацию о состоянии боевых единиц противника (уничтожены или нет) и ведут огонь только по уцелевшим единицам противника, а также «плохоорганизованный» бой (модель 2), то есть когда обе противоборствующие стороны такой информации не имеют и ведут равномерный огонь как по сохранившимся, так и по уничтоженным единицам противника [2, 3, 8, 9].

Во многих боевых ситуациях информация о состоянии боевых единиц противника поступает с опозданием, поэтому обе противоборствующие стороны вынуждены производить часть выстрелов по уже пораженным единицам противника. Тогда при одновременном открытии огня обеими сторонами [10] протекание боя опишется системой уравнений

$$\begin{cases} x' = -(1 - \kappa_2)uy - \kappa_2 \frac{uxy}{x_0}; \\ y' = -(1 - \kappa_1)vx - \kappa_1 \frac{vxy}{y_0}, \end{cases} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} x(0) = x_0; \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2)$$

где x, y — математические ожидания численностей сторон X и Y в момент времени t ;

x', y' — их производные по времени;

κ_1, κ_2 — коэффициенты, показывающие относительные количества выстрелов, произведенных по уже уничтоженным единицам противника сторонами X и Y соответственно ($0 \leq \kappa_1 \leq 1, 0 \leq \kappa_2 \leq 1$).

Рассмотрим ситуацию, когда хорошая маскировка боевых единиц X позволяет ей в течение времени t_c вести огонь по противнику, не испытывая ответного противодействия, то есть она наносит по противнику упреждающий удар. Тогда в течение времени t_c протекание боя опишется системой уравнений

$$\begin{cases} x' = 0; \\ y' = vx_0 \left(-1 + \kappa_1 \left(1 - \frac{y}{y_0} \right) \right), \end{cases}$$

с начальными условиями (2).

В момент времени t_c открытия стороной Y ответного огня при $\kappa_1 \neq 0$, имеем

$$\begin{cases} x(t_c) = 0; \\ y(t_c) = \frac{y_0}{\kappa_1} \left(e^{-\frac{\kappa_1 v x_0 t_c}{y_0}} + \kappa_1 - 1 \right) = \frac{y_0}{\kappa_1} \left(e^{-\frac{\kappa_1 \bar{t}_c}{\kappa}} + \kappa_1 - 1 \right), \end{cases} \quad (3)$$

где $\kappa = \frac{y_0}{x_0} \sqrt{\frac{u}{v}}$ — параметр начального соотношения сил [11];

$\bar{t}_c = \sqrt{uv} t_c$ — приведенное время нанесения стороной выражение (3), упреждающего удара.

При $\kappa_1 = 0$ получаем:

$$\begin{cases} x(t_c) = 0; \\ y(t_c) = y_0 \left(1 - \frac{\bar{t}_c}{\kappa} \right). \end{cases} \quad (4)$$

Дальнейшее протекание боя опишется системой уравнений (1) и начальными условиями (3) или (4).

Аналогично опишется протекание боя при упреждающем ударе стороны Y .

Анализ результатов расчетов

Разработан численный алгоритм, позволяющий исследовать ход протекания боя и вычислить его основные показатели. К ним в первую очередь относятся математические ожидания относительных количеств сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя m_x и m_y ,

$$m_x = \frac{x_k}{x_0}, \quad m_y = \frac{y_k}{y_0},$$

где x_k, y_k — математические ожидания сохранившихся к окончанию боя единиц сторон X и Y соответственно.

Считаем, что бой ведется до полного уничтожения хотя бы одной из противоборствующих сторон.

На рис. 1–3 представлены значения m_x и m_y для различных значений параметра κ при упреждающем ударе стороны X для $\bar{t}_c = 0,5$, что соответствует проведению каждой единицей стороны X по одному-двум выстрелам, после чего она будет обнаружена и по ней будет открыт ответный огонь.

На рис. 1 показаны значения величин m_x и m_y для моделей 1 и 2, а также для представленной в настоящей статье модели (модели 3) при $\kappa_1 = \kappa_2 = 0,25$. Верхние линии для m_x соответствуют модели 1, средние линии — модели 3 и нижние линии — модели 2. Верхние линии для значений m_y соответствуют модели 3, средние линии — модели 1 и нижние линии — модели 2.

Отметим, что при одновременном открытии огня обеими сторонами значение $\kappa = 1$ является условием равенства сил для моделей 1 и 2 [11], а также для модели 3 при $\kappa_1 = \kappa_2$, т.е. к окончанию боя обе противоборствующие стороны будут полностью уничтожены. При $\kappa < 1$ победу одержит сторона X , при $\kappa > 1$ — сторона Y . При этом наибольшее преимущество

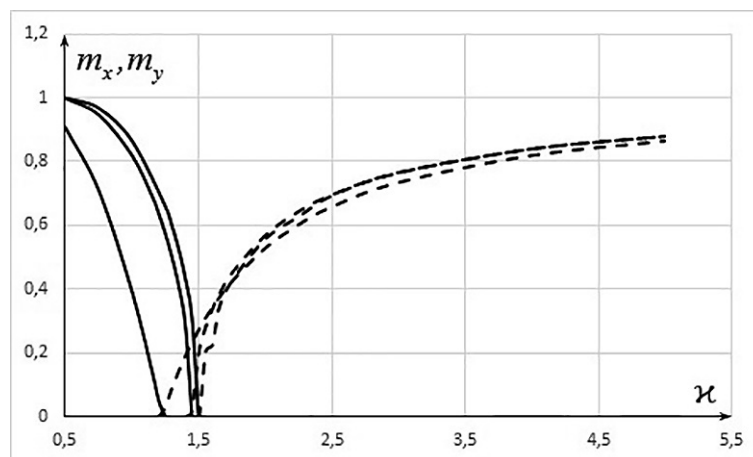


Рис. 1. Относительные количества сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя при использовании различных моделей боя при упреждающем ударе стороны X

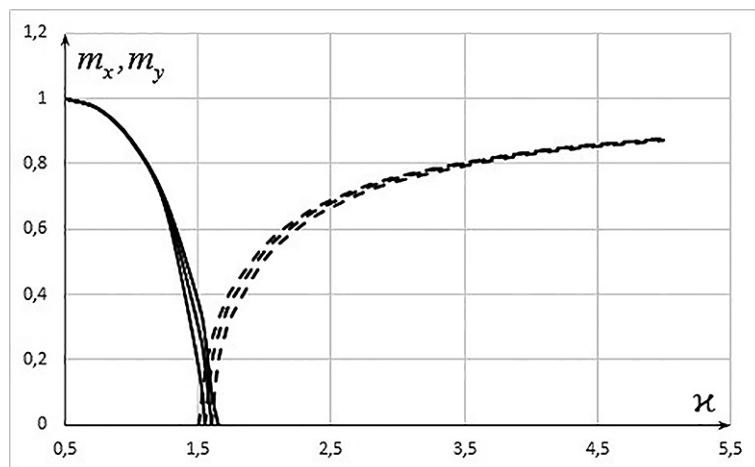


Рис. 2. Относительные количества сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя при $\kappa_1 = 0$ и различных значениях κ_2 при упреждающем ударе стороны X

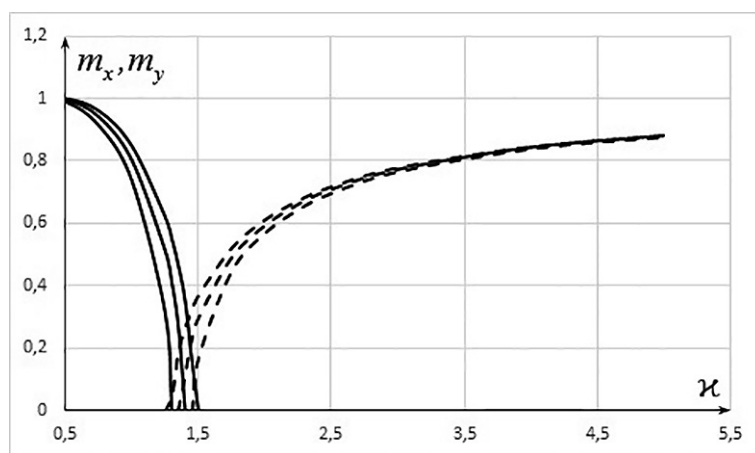


Рис. 3. Относительные количества сохранившихся боевых единиц сторон к концу боя при $\kappa_2 = 0$ и различных значениях κ_1 при упреждающем ударе стороны X

имеет победившая сторона для модели 1, наименьшее — для модели 2.

На рис. 2 и 3 показано влияние коэффициентов κ_1 и κ_2 на исход боевой операции. Рис. 2 соответствует значению $\kappa_1 = 0$ (т.е. сторона X ведет огонь только по уцелевшим единицам противника), а значения κ_2 варьируются от 0,1 до 0,5. При этом верхние линии для m_x соответствуют значению $\kappa_2 = 0,5$, средние — значению $\kappa_2 = 0,3$ и нижние — значению $\kappa_2 = 0,1$. Для m_y верхние линии соответствуют значению $\kappa_2 = 0,1$, средние — значению $\kappa_2 = 0,3$ и нижние — значению $\kappa_2 = 0,5$.

Рис. 3 соответствует значению $\kappa_2 = 0$ (то есть сторона Y ведет огонь только по непопавшим единицам противника) и значения κ_1 варьируются от 0,1 до 0,5. При этом верхние

линии для m_x соответствуют значению $\kappa_1 = 0,1$, средние — значению $\kappa_1 = 0,3$ и нижние — значению $\kappa_1 = 0,5$. Для m_y соответствуют значению $\kappa_1 = 0,5$, средние — значению $\kappa_1 = 0,3$ и нижние — значению $\kappa_1 = 0,1$.

Упреждающий удар одной из противоборствующих сторон может оказать существенное влияние на исход боевой операции, причем его влияние наиболее значительно для модели 1, наименее значительно для модели 2. Так, при $\kappa = 1,25$ при одновременном открытии огня обеими сторонами для модели 1 имеем: $m_x = 0$, $m_y = 0,600$; для модели 2 $m_x = 0$, $m_y = 0,600$; для модели 3 при $\kappa_1 = \kappa_2 = 0,25$, $m_x = 0,575$, $m_y = 0$. А при упреждающем ударе стороны X ($\bar{t}_c = 0,2$) для модели 1 $m_x = 0,661$, $m_y = 0$; для модели 2 $m_x = 0$, $m_y = 0,030$; а для модели 3 при $\kappa_1 = \kappa_2 = 0,25$,

$m_x = 0,575$, $m_y = 0$. При значительном преимуществе одной из сторон ($\kappa < 0,3$ или $\kappa > 3$) его влияние заметно только на потерях победившей стороны.

Задержка информации о состоянии боевых единиц противника также может значительно повлиять на ход протекания боя и его исход. Так, при упреждающем ударе стороны X для $\kappa = 1,5$ и $\bar{t}_c = 0,5$ при $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 0,3$ получаем $m_x = 0,300$ и $m_y = 0$, а при $\kappa_1 = 0,3$, $\kappa_2 = 0$ имеем $m_x = 0$ и $m_y = 0,295$. При большом преимуществе одной из противоборствующих сторон ее влияние на окончательный результат боя несущественно.

При упреждающем ударе стороны Y получаем аналогичную картину.

Выводы

На основе метода динамики средних разработана модель динамики средних при одновременном открытии огня обеими противоборствующими сторонами и при упреждающем ударе одной из них, учитывающая запаздывание информации о состоянии боевых единиц противника (уничтожен или нет). Построен численный алгоритм, позволяющий вычислить основные показатели боя.

Установлено, что более сильная группировка имеет более значительное преимущество при «высокоорганизованном» бое, а наименьшее преимущество при «плохоорганизованном» бое.

Показано, что упреждающий удар одной из противоборствующих сторон оказывает существенное влияние на ход протекания и исход боя близких по силам группировок, причем его влияние более значительно для модели «высокоорганизованного» боя. При значительном преимуществе одной из противоборствующих сторон упреждающий удар оказывает заметное влияние на потери победившей стороны.

Установлено, что более своевременная информация о состоянии боевых единиц противника существенно влияет на ход протекания и

исход боя близких по силам группировок. При значительном преимуществе одной из противоборствующих сторон ее влияние незначительно.

Список источников

1. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Особенности математического моделирования технических устройств // Математическое моделирование и численные методы. 2014. № 1. С. 5–17.
2. Hiller F.S., Lieberman G.J. Introduction to Operations Research. New York: McGraw Hill, 2005. 998 p.
3. Ткаченко П.Н. Математические модели боевых действий. М.: Сов. радио, 1969. 240 с.
4. Taylor J.G. Force-on-force attrition modeling. Military Application section of Operations Research Society of America, 1980. 320 p.
5. Lanchester F. Aircraft in Warfare: the Dawn of the Fourth Arm. London.: Constable and Co, 1916. 243 p.
6. Taylor J.G. Dependence of the Parity-condition Parameter on the Combat-intensity Parameter for Lanchester-type Equations of Modern Warfare. Operations-Research-Spectrum, 1980. Vol. 1(3). Pp. 199–205.
7. Xiangyong Chen, Yuanwei Jing, Chunji Li, Mingwei Li. Warfare Command Stratagem Analysis for Winning Based on Lanchester Attrition Models. Journal of Science and Systems Engineering. 2012. Vol. 21 (1). Pp. 94–105.
8. Чуев Ю.В. Исследование операций в военном деле. М.: Воениздат, 1970. 270 с.
9. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы и методология. М.: УРСС, 2007. 208 с.
10. Дубограй И.В., Маркелов Е.Б., Чуев В.Ю. Исследование влияния систем наблюдения за боевыми единицами противника на исход боевой операции // Вооружение и экономика. 2024. № 1 (67). С. 29–32.
11. Чуев В.Ю., Дубограй И.В. Модели динамики средних двусторонних боевых действий многочисленных группировок. LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. 72 с.