

УДК: 532.5.013.4

Хаотизация течения под действием объемной силы

А. Н. Долуденко^а, Ю. М. Куликов^б, А. С. Савельев^с

Объединенный институт высоких температур Российской академии наук,
Россия, 125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13, корп. 2

E-mail: ^а adoludenko@gmail.com, ^б kulikov-yurii@yandex.ru, ^с fisteh@mail.ru

Получено 10.10.2023, после доработки — 30.11.2023.

Принято к публикации 01.12.2023.

В предлагаемой статье приводятся результаты аналитического и компьютерного исследования хаотической эволюции регулярного поля скорости, возникающего под действием крупномасштабной гармонической вынуждающей силы. Авторами получено аналитическое решение для функции тока течения и ее производных величин (скорости, завихренности, кинетической энергии, энтропии и палинстрофии). Проведено численное моделирование эволюции течения с помощью пакета программ OpenFOAM (на основе модели несжимаемой среды), а также двух собственных реализаций, использующих приближение слабой сжимаемости (схемы КАБАРЕ и схемы МакКормака). Расчеты проводились на последовательности вложенных сеток с 64^2 , 128^2 , 256^2 , 512^2 , 1024^2 ячейками для двух характерных (асимптотических) чисел Рейнольдса Re_a , характеризующих ламинарную и турбулентную эволюцию течения соответственно. Моделирование показало, что разрушение аналитического решения происходит в обоих случаях. Энергетические характеристики течения обсуждаются на основе кривых энергии, а также скоростей диссипации. Для самой подробной сетки эта величина оказывается на несколько порядков меньше своего гидродинамического (вязкого) аналога. Разрушение регулярной структуры течения наблюдается для любого из численных методов, в том числе на поздних стадиях ламинарной эволюции, когда полученные распределения близки к аналитическим значениям. Можно предположить, что предпосылкой к развитию неустойчивости выступает ошибка, накапливаемая в процессе счета. Эта ошибка приводит к неравномерностям в распределении завихренности и, как следствие, к появлению вихрей различной интенсивности, взаимодействие которых приводит к хаотизации течения. Для исследования процессов производства завихренности мы использовали две интегральные величины, определяемые на ее основе, — интегральные энтропию (ζ) и палинстрофию (P). Постановка задачи с периодическими граничными условиями позволяет установить простую связь между этими величинами. Кроме того, ζ может выступать в качестве меры вихреразрешающей способности численного метода, а палинстрофия определяет степень производства мелкомасштабной завихренности.

Ключевые слова: турбулентность, завихренность, энтропия, палинстрофия, скорость диссипации, схема КАБАРЕ, схема МакКормака, пакет OpenFOAM

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-79-30062).

UDC: 532.5.013.4

Chaotic flow evolution arising in a body force field

A. N. Doludenko^a, Yu. M. Kulikov^b, A. S. Saveliev^c

Joint Institute for High Temperatures of Russian Academy of Sciences,
13/2 Izhorskaya st., Moscow, 125412, Russia

E-mail: ^a adoludenko@gmail.com, ^b kulikov-yurii@yandex.ru, ^c fisteh@mail.ru

Received 10.10.2023, after completion — 30.11.2023.

Accepted for publication 01.12.2023.

This article presents the results of an analytical and computer study of the chaotic evolution of a regular velocity field generated by a large-scale harmonic forcing. The authors obtained an analytical solution for the flow stream function and its derivative quantities (velocity, vorticity, kinetic energy, enstrophy and palinstrophy). Numerical modeling of the flow evolution was carried out using the OpenFOAM software package based on incompressible model, as well as two in-house implementations of CABARET and McCormack methods employing nearly incompressible formulation. Calculations were carried out on a sequence of nested meshes with 64^2 , 128^2 , 256^2 , 512^2 , 1024^2 cells for two characteristic (asymptotic) Reynolds numbers characterizing laminar and turbulent evolution of the flow, respectively. Simulations show that blow-up of the analytical solution takes place in both cases. The energy characteristics of the flow are discussed relying upon the energy curves as well as the dissipation rates. For the fine mesh, this quantity turns out to be several orders of magnitude less than its hydrodynamic (viscous) counterpart. Destruction of the regular flow structure is observed for any of the numerical methods, including at the late stages of laminar evolution, when numerically obtained distributions are close to analytics. It can be assumed that the prerequisite for the development of instability is the error accumulated during the calculation process. This error leads to unevenness in the distribution of vorticity and, as a consequence, to the variance vortex intensity and finally leads to chaotization of the flow. To study the processes of vorticity production, we used two integral vorticity-based quantities — integral enstrophy (ζ) and palinstrophy (P). The formulation of the problem with periodic boundary conditions allows us to establish a simple connection between these quantities. In addition, ζ can act as a measure of the eddy resolution of the numerical method, and palinstrophy determines the degree of production of small-scale vorticity.

Keywords: turbulence, vorticity, enstrophy, palinstrophy, dissipation rate, CABARET scheme, McCormack scheme, OpenFOAM

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 4, pp. 883–912 (Russian).

The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 21-79-30062).

Введение

Турбулентное движение является настолько широко распространенным в природе и инженерных приложениях, что это состояние, по сути, можно считать нормальным для течений жидкости и газа. Отсутствие до настоящего времени общепринятого определения турбулентности свидетельствует о ее сложности и многообразности. Однако ее можно охарактеризовать совокупностью признаков. Турбулентное течение далеко от равновесия и сильно хаотично, в нем происходят интенсивные вращательные движения, что обуславливает эффективность смешения жидких частиц, перенос массы, энергии и импульса. Одной из ключевых особенностей турбулентности является то, что ее эволюция может быть представлена в виде совокупности движений вихрей различной формы, которые охватывают широкий диапазон пространственных и временных масштабов. Размер таких структур варьируется от гигантских атмосферных вихрей (циклонов или антициклонов), простирающихся на сотни километров, до крошечных вихрей диаметром порядка нескольких миллиметров. Ширина этого диапазона связана с числом Рейнольдса Re , которое представляет собой отношение инерционных сил к вязким. При больших числах Рейнольдса силы инерции преобладают над силами трения в течении на несколько порядков, что приводит к появлению вихрей различных масштабов и турбулизации течения. Однако существование вязкости является одним из необходимых условий поддержания турбулентности [McDonough, 2014].

Отметим, что вихри могут существовать и в ламинарном движении, при этом их поведение является более или менее независимым, что допускает относительно простое описание такого течения. Нелинейности в уравнениях Навье–Стокса, которые определяют характер течения жидкости, подразумевают сильные связи между масштабами, такие, что вихри разных размеров постоянно обмениваются между собой энергией и импульсом. Как следствие, без понимания динамики на мелких масштабах невозможно предсказать крупномасштабную динамику всего потока (поля средней скорости), и наоборот.

Одной из ключевых идей теории турбулентности является представление о существовании каскада энергии от больших вихрей к малым, которое было предложено Л. Ричардсоном [Richardson, Lynch, 2007]: большие вихри порождают вихри меньшего размера, которые в свою очередь распадаются на меньшие до тех масштабов, на которых основную роль начинает играть вязкость, преобразовывающая турбулентную кинетическую энергию в тепло. Эта идея доминирует в современном понимании турбулентности, она нашла свое отражение в разработанной А. Н. Колмогоровым теории изотропной турбулентности [Колмогоров, 1941a; Колмогоров, 1941b].

Двумерная турбулентность представляет собой специфическую разновидность хаотических движений жидкости, поэтому вполне естественным шагом стало обобщение идей Колмогорова на случай плоских турбулентных течений, что отражено в ряде фундаментальных работ Крейчнана [Kraichnan, 1967], Лейта [Leith, 1968] и Бэтчелора [Batchelor, 1969]. Однако двумерная турбулентность представляет не только теоретический интерес, ее свойства могут проявляться в природных явлениях и специально поставленных лабораторных экспериментах. Свойства двумерной турбулентности наблюдаются в атмосферном слое Земли, толщина которого намного меньше его поперечной протяженности [Charney, 1971; Rhines, 1979; Bouchet, Venaille, 2012; Gage, 1979; Gage, Nastrom, 1986; Lilly, 1989; Tulloch, Smith, 2006], в крупномасштабных зональных течениях в океанах или в атмосфере планет Солнечной системы [Read, 2001; Galperin et al., 2004; Read, 2001; Galperin et al., 2004; Scott, Arbic, 2007; Scott, Polvani, 2007], а также в задачах астрофизики (например, аккреционные диски) [Balbus, Hawley, 1998; Mukhopadhyay, Afshordi, Narayan, 2005; Brandenburg, Nordlund, 2011].

Моделирование двумерной турбулентности является более доступным с точки зрения требуемых компьютерных ресурсов по сравнению со своим трехмерным аналогом. Достижения

в области компьютерной техники и численных методов позволяют проводить прямое численное моделирование (DNS) с постоянно возрастающим разрешением и продолжительностью таких течений [Lilly, 1969; Lilly, 1972; Siggia, Aref, 1981; Basdevant et al., 1981; Hossain, Matthaeus, Montgomery, 1983; Frisch, Sulem, 1984; Smith, Yakhot, 1993; Smith, Yakhot, 1994; Farge, Schneider, Kevlahan, 1999; Tran, Bowman, 2004; Chertkov et al., 2007; Boffetta, 2007; Perlekar, Pandit, 2009; Boffetta, Musacchio, 2010].

Важным достоинством двумерной турбулентности является относительно простая реализация в лабораторных экспериментах, в частности в течениях мыльных пленок и слоях электролитов. Особо примечательной является работа [Sommeria, 1986], в которой было получено несколько важных результатов. Во-первых, была четко определена неустойчивость квадратной периодической решетки вихрей из-за их слияния. Этот результат является демонстрацией того, что двумерная турбулентность может создаваться гидродинамической неустойчивостью без каких-либо случайных воздействий. Во-вторых, впервые получено экспериментальное измерение обратного энергетического каскада. В-третьих, было экспериментально установлено, что в случае малого трения происходит конденсация энергии в крупномасштабных гармониках, которая может быть описана с помощью статистической термодинамики. Авторы [Couder, Chomaz, Rabaud, 1989] впервые показали, что пленку можно рассматривать как двумерную жидкость с локальной плотностью, пропорциональной ее толщине. Пленка ведет себя как несжимаемая жидкость, если движения происходят со скоростями, меньшими по сравнению со скоростью распространения упругих волн. В работе [Gharib, Derango, 1989] представлен новый экспериментальный подход к созданию двумерных потоков. В данном методе мыльная пленка приводится в движение в длинной рамке с использованием плоской струи воды в качестве тянущего механизма. Данный подход позволил создавать различные сдвиговые потоки для количественных исследований с помощью лазерного доплеровского измерителя скорости: обтекание круглого цилиндра с малым числом Рейнольдса ($Re = 38$), след за круговым цилиндром ($Re = 110$), течение в плоской каверне, обтекание обратного уступа, турбулентность за решеткой.

В работе [Paret et al., 1997] впервые экспериментально показано существование стационарного двумерного обратного энергетического каскада в слое электролита. Авторы [Paret, Tabeling, 1997] обсуждают релаксацию трехмерных возмущений в потоках, генерируемых в тонких стратифицированных по плотности слоях короткими импульсами тока длительностью 1–2 с. Время релаксации таких возмущений оказывается мало по сравнению с другими характерными временами системы. Эти результаты дают основу для оценки двумерности свободно затухающей турбулентности, наблюдаемой в опытах. В экспериментах [Rutgers, 1998] проводилось комбинированное экспериментальное исследование вынужденной и затухающей двумерной турбулентности, которая возбуждалась за решеткой цилиндров в текущих мыльных пленках. В работе [Rivera, Vorobieff, Ecke, 1998] впервые было экспериментально получено значение числа Рейнольдса, основанное на тейлоровском микромасштабе $Re_\lambda \approx 100$. Показано, что эффекты сжимаемости, возникающие из-за изменений толщины пленки, не оказывают влияния на корреляции скорости, завихренности и потока энтропии, которые согласуются с теоретическими предсказаниями для двумерной турбулентности.

Обширное экспериментальное исследование [Paret, Tabeling, 1998] двумерного обратного энергетического каскада, возникающего в тонких устойчиво стратифицированных слоях жидкости под воздействием электромагнитного поля, показало существование двух различных режимов, реализация которых зависит от трения: когда трение мало, закачиваемая энергия накапливается в самом крупном масштабе, создавая среднее вращение. Данное явление также получило название спектральной конденсации. При больших значениях трения наблюдается обратный каскад энергии, который оказывается стационарным, однородным и изотропным. В работе [Paret, Jullien, Tabeling, 1999] впервые проведены детальные экспериментальные наблюдения двумер-

ного каскада энтропии, а также собрана статистика завихренности высокого порядка, показано, что в энтропийном каскаде не наблюдается сколько-нибудь мелкомасштабной перемежаемости. В экспериментах [Rivera, Wu, 2000] турбулентность в свободно подвешенной мыльной пленке создается электромагнитным воздействием и измеряется путем отслеживания движения частиц.

В работе [Rivera, Wu, Yeung, 2001] исследованы статистические свойства локальной топологии двумерной турбулентности на мыльной пленке, вызванной электромагнитным воздействием. Эксперименты [Rivera, Wu, 2002] показали, что существование инерционного каскада в одномерной турбулентности возможно только при соблюдении ряда соотношений между различными масштабами: внешним масштабом (r_{out}), размером экспериментальной установки (r_{sys}), масштабом действия объемной силы (r_{inj}), а также интегральным масштабом (r_{int}). В работе [Rivera et al., 2003] представлены экспериментальные данные о прямом каскаде энтропии в затухающей двумерной турбулентности. Экспериментальные измерения проводились в проточном канале из мыльной пленки, квазидвумерной системе, для которой можно легко генерировать затухающую турбулентность с низким или умеренным числом Рейнольдса ($10^2 \leq Re \leq 10^4$).

Авторы [Xia, Shats, Falkovich, 2009] экспериментально изучали свойства ограниченной турбулентности в тонких слоях жидкости. В такой постановке особенно важными оказываются эффекты придонного трения и спектральной конденсации энергии. Обратный каскад энергии в ограниченном турбулентном квазидвумерном потоке приводит к образованию большого когерентного вихревого конденсата, подпитываемого турбулентностью. Этот вихрь, в зависимости от своей силы, может существенно влиять на статистику турбулентности даже на небольших масштабах.

Волны Фарадея могут использоваться для генерации каскада двумерной турбулентности [Francois et al., 2013]. Хотя движение частиц в волнах Фарадея является трехмерным, колебания скорости в горизонтальном направлении обнаруживают неожиданное сходство с двумерной турбулентностью. Обратный каскад обнаружен путем измерения частотных спектров лагранжевой скорости и подтвержден расчетом третьего момента горизонтальных колебаний скорости.

Постановка задачи, описываемой в данной статье, мотивирована экспериментами, изложенными в [Orlov, Brazhnikova, Levchenko, 2018], где изучалась двумерная турбулентность в тонком слое электролита, возбуждаемая системой цилиндрических магнитов (10×10), расположенных в шахматном порядке. При пропускании постоянного тока через электролит жидкость начала двигаться под действием силы Лоренца. В результате этого воздействия возникала система вихрей 8×10 , эволюция которых воспроизводила основные особенности двумерной турбулентности (обратный каскад энергии, спектральная конденсация, образование когерентного вихря).

В предлагаемом исследовании сила Лоренца заменяется на объемную гармоническую силу общего вида, действие которой приводит к хаотизации двумерного течения. В последующих разделах описываются постановка задачи и ее аналитическое решение, обсуждаются основные уравнения переноса вихревых характеристик течения, приводятся сведения об использованных численных методах. Результаты моделирования представлены в виде совокупности интегральных параметров, процесс хаотизации обсуждается на основе поведения энергетических характеристик течения (кинетической энергии, скоростей диссипации) и интегралов завихренности.

Постановка задачи и аналитическое решение

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости под действием вынуждающей силы, которое возникает в прямоугольной расчетной области размером $L_x \times L_y = L^2 = 2\pi \times 2\pi$ и опи-

сывается системой уравнений законов сохранения массы и количества движения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \vec{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho G \cos(ky) + \mu \Delta u, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \vec{V}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho G \cos(kx) + \mu \Delta v, \\ \vec{V} &= (u, v)^T.\end{aligned}\tag{1}$$

В качестве начальных условий для поля скорости задается неподвижная среда

$$u(t=0) = 0, \quad v(t=0) = 0,\tag{2}$$

а на границах устанавливается условие периодичности. В частности, для скорости в направлении X

$$u(x=0) = u(x=2\pi), \quad u(y=0) = u(y=2\pi).\tag{3}$$

Аналогичные условия задаются для скорости v и давления p .

Для поиска аналитического решения введем функцию тока $\psi(x, y)$ течения, определяющую поле скорости $\vec{V} = (u, v)^T$:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},\tag{4}$$

эта подстановка автоматически удовлетворяет уравнению неразрывности и позволяет использовать формулировку «завихренность – функция тока»:

$$\begin{aligned}\Delta \psi &= -\omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \nu \Delta \omega + kG(\sin(kx) + \sin(ky)),\end{aligned}\tag{5}$$

где введены кинематическая вязкость $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ и завихренность,

$$\omega = \nabla \times \vec{V}.\tag{6}$$

Вынуждающая сила действует в каждом из ортогональных направлений, таким образом, следует искать решение для функции тока в виде суперпозиции двух гармонических рядов (2π -периодических функций):

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(t) \sin(mx) + \sum_{l=0}^{\infty} b_l(t) \sin(ly),\tag{7}$$

тогда завихренность будет иметь вид

$$\omega = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 a_m(t) \sin(mx) + \sum_{l=0}^{\infty} l^2 b_l(t) \sin(ly).\tag{8}$$

Если мы подставим частное решение (7), (8) в уравнение завихренности из (5), а затем раскроем произведения рядов, то мы получим слагаемые, содержащие следующие комбинации тригонометрических функций:

$$\sin(mx), \quad \sin(ly), \quad \cos(mx) \cos(ly).\tag{9}$$

Домножая получившееся уравнение на $\sin(px)$ и интегрируя по dx на отрезке $x \in [0, 2\pi]$, получим следующие значения интегралов от (9):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(mx) dx &= \begin{cases} 0, & p \neq m, \\ \pi, & p = m, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(ly) dx &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin(px) \cos(ly) \cos(mx) dx &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(kx) &= \begin{cases} 0, & p \neq k, \\ \pi, & p = k, \end{cases} \\ \int_0^{2\pi} \sin(px) \sin(ky) dx &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогичные результаты получаются и при домножении на $\sin(py)$.

Рассмотрим случай $p \neq k$, тогда решение обыкновенного дифференциального уравнения для коэффициентов с учетом начальных условий дает $a_p = 0$ ($b_p = 0$). Если же номер гармоники в ряду совпадает с возмущением ($p = m$, $p = k$), то

$$k^2 \dot{a}_k(t) = -\nu k^4 a_k(t) + kG, \quad (11)$$

что дает

$$a_k(t) = \frac{G}{\nu k^3} (1 - e^{-\nu k^2 t}). \quad (12)$$

Аналогично для $b(t)$:

$$b_k(t) = \frac{G}{\nu k^3} (1 - e^{-\nu k^2 t}). \quad (13)$$

Тогда частное решение для функции тока будет иметь вид

$$\psi(t) = \frac{G}{\nu k^3} (1 - e^{-\nu k^2 t}) (\sin(kx) + \sin(ky)). \quad (14)$$

Соответствующее поле скорости:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{G}{\nu k^2} (1 - e^{-\nu k^2 t}) \cos(ky), \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{G}{\nu k^2} (1 - e^{-\nu k^2 t}) \cos(kx); \end{aligned} \quad (15)$$

поле завихренности:

$$\omega(t) = \frac{G}{\nu k} (1 - e^{-\nu k^2 t}) (\sin(kx) + \sin(ky)). \quad (16)$$

Получим выражение для аналитического распределения давления. Для этого применим операцию дивергенции к уравнениям Навье – Стокса, что дает уравнение для давления:

$$\Delta p = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (17)$$

Подстановка частного решения для компонент скорости (15) в уравнение (17) приводит уравнение для давления к виду

$$\Delta p = -\frac{2G^2}{\nu k^2} (1 - e^{-\nu k^2 t})^2 \sin(kx) \sin(ky). \quad (18)$$

Будем искать частное решение для давления в виде

$$p = A \sin(ky) \sin(kx), \quad (19)$$

подстановка которого в уравнение (18) позволяет определить конечный вид решения:

$$p = -\frac{G^2}{\nu^2 k^4} (1 - e^{-\nu k^2 t})^2 \sin(kx) \sin(ky). \quad (20)$$

Введем значение характерной скорости:

$$U_a = \frac{G}{\nu k^2},$$

определим асимптотическое число Рейнольдса Re_a по характерному размеру расчетной области $L = 2\pi$:

$$Re_a = \frac{2\pi U_a \rho}{\mu} = \frac{2\pi G \rho^2}{\mu^2 k^2}.$$

Также можно ввести характерное время развития основного (невозмущенного) течения:

$$T_a = \frac{1}{\nu k^2} = \frac{\rho}{\mu k^2}.$$

Здесь следует обратить внимание на квадратичную зависимость этой величины от номера гармоники возмущающей силы k ; таким образом, задание высокочастотных пространственных гармоник позволяет существенно сократить время «накачки». При $t \rightarrow \infty$ поле скорости достигает своих асимптотических значений:

$$u = U_a \cos(ky), \quad v = U_a \cos(kx). \quad (21)$$

Для проверки результатов аналитической теории авторами выполнено моделирование эволюции течения на основе трех подходов: пакета программ OpenFOAM с использованием модели несжимаемой среды, а также собственных реализаций метода МакКормака и метода КАБАРЕ на основе приближения слабой сжимаемости. Для исследования сеточной сходимости расчеты выполнялись на последовательности равномерных расчетных сеток с 64^2 , 128^2 , 256^2 , 512^2 , 1024^2 ячейками.

Пространственная частота вынуждающей силы составляет $k = 9$, характерная плотность жидкости — $\rho_0 = 1000$. Исходя из особенностей аналитического решения, нами было выбрано два режима, наиболее подходящих для моделирования: (1) $G = 0,48$, $\nu = 6 \cdot 10^{-3}$, $U_a = 0,987$, $T_a = 2,057$, $Re_a = 1034$; (2) $G = 0,05$, $\nu = 10^{-4}$, $U_a = 6,17$, $T_a = 123,45$, $Re_a = 387\,850$. Первый режим соответствует ламинарной эволюции течения, второй приводит к развитию двумерной турбулентности.

Уравнения переноса характеристик турбулентности в вихревом течении

Переход к двумерной турбулентности сохраняет представление об энергетическом каскаде: энергия вводится в одном масштабе и рассеивается в другом, при этом передача между масштабами происходит практически без потерь. Наиболее яркой отличительной чертой двумерной турбулентности является то, что в возбуждаемой (forced), статистически стационарной, однородной изотропной турбулентности наблюдается обратный каскад энергии от малых масштабов к большим, что приводит к образованию крупных вихрей (в отсутствие трения), размер которых сопоставим с размером системы. Причина появления обратного каскада кроется в специфической эволюции завихренности, которая выступает в качестве меры вращательного движения жидкости. Квадрат завихренности, называемый энстрофией, измеряет локальную интенсивность вращения. В трехмерном течении полная энстрофия в потоке (то есть объемный интеграл энстрофии) может меняться двумя способами. Как и энергия, она может рассеиваться за счет вязких эффектов. Но даже при отсутствии вязкости энстрофия может измениться посредством процесса, называемого растяжением вихря. Если вихрь сильно растянут, то скорость его вращения и, следовательно, энстрофия возрастают. Однако при плоском движении растяжение вихря произойти не может, в этом случае нет оси, перпендикулярной вихрю, в направлении которой могло бы происходить растяжение. В результате полная энстрофия, как и энергия, сохраняется в двумерных потоках без вязкости.

Аргументы в пользу каскада энергии в трехмерной турбулентности в равной степени применимы и к энстрофии в двумерном случае. Из результатов теории для трехмерной турбулентности можно заключить, что скорость диссипации энергии определяется произведением вязкости и энстрофии. В то же время диссипация энергии не зависит от вязкости даже в пределе малых значений, ее уменьшение будет уравниваться увеличением энстрофии из-за усиления растяжения вихрей. При совершении предельного перехода к идеальной жидкости скорость диссипации будет стремиться к нулю наряду с вязкостью, так как в двумерном течении механизм растяжения вихрей оказывается заблокированным. Таким образом, в развитой двумерной турбулентности при больших числах Рейнольдса вязкость почти не рассеивает энергию, однако, если эта энергия передается мелким вихрям в каскадном процессе, она будет поглощена вязкой диссипацией.

Формирование обратного каскада сильно отличает двумерную турбулентность от ее более распространенного трехмерного аналога. Обычный трехмерный турбулентный поток очень хаотичен, а физические величины, описывающие движение, демонстрируют частые и сильные колебания. Перекачка энергии осуществляется в небольшие вихри, что приводит к большим градиентам поля скорости. Напротив, в двумерной турбулентности каскад направляет энергию в пространственно гладкие большие вихри, тем самым улучшая пространственную когерентность за счет сглаживания мелкомасштабных неоднородностей. Таким образом, в то время как турбулентные потоки в трехмерном пространстве в основном некогерентны, в двумерной геометрии они имеют сильную тенденцию к самоорганизации и формированию долгоживущих крупномасштабных структур.

Как уже упоминалось во введении, хаотичное движение сплошной среды можно представить в виде множества вихрей, активно взаимодействующих между собой. Наиболее простой способ количественного описания этого множества связан с введением завихренности (6). Применение операции $\nabla \times$ к уравнениям Навье – Стокса позволяет получить уравнение для завихренности:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla)\vec{V} + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (22)$$

Домножая уравнение (22) скалярно на $\vec{\omega}$, можно получить уравнение переноса энтропии $\frac{\vec{\omega}^2}{2}$:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}^2}{2} \right) = \omega_i \omega_j S_{ij} - \nu (\nabla \times \omega) + \nu \nabla \cdot [\vec{\omega} \times (\nabla \times \vec{\omega})], \quad (23)$$

$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$ — субстанциональная производная, S_{ij} — компонент тензора скоростей деформации. В двумерном случае вектор завихренности $\vec{\omega}$ имеет лишь одну отличную от нуля (вертикальную) компоненту ω и оказывается перпендикулярным плоскости движения; таким образом, уравнения (22), (23) преобразуются к виду

$$\frac{D\omega}{Dt} = \nu \nabla^2 \omega, \quad (24)$$

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{\omega^2}{2} \right] = -\nu [(\nabla \omega)^2 - \nabla \cdot (\omega \nabla \omega)]. \quad (25)$$

Первое слагаемое справа в уравнении (25) представляет собой еще одну величину, характеризующую скорость производства энтропии (завихренности), называемую палинстрофией, которая в двумерных движениях определяется как $\frac{(\nabla \omega)^2}{2}$.

Уравнение переноса палинстрофии может быть получено из уравнения (22) для трехмерного случая путем применения операции $\nabla \times$ и домножением на $\nabla \times \vec{\omega}$. Полученное уравнение для трехмерной палинстрофии затем редуцируется к плоскому случаю:

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{1}{2} (\nabla \omega)^2 \right] = -S_{ij} (\nabla \omega)_i (\nabla \omega)_j - \nu \left[(\nabla^2 \omega)^2 - \nabla \cdot ((\nabla^2 \omega) \nabla \omega) \right], \quad (26)$$

где $S_{ij} (\nabla \omega)_i (\nabla \omega)_j$ — свертка тензора скоростей деформации $\overset{\leftrightarrow}{S}$ с тензорной диадой $(\nabla \omega)_i (\nabla \omega)_j$.

При эволюции свободной турбулентности в бесконечной периодически продолженной области интегралы кинетической энергии

$$E = \iint \frac{\rho(u^2 + v^2)}{2} dx dy, \quad (27)$$

энтропии

$$\zeta = \iint \frac{\omega^2}{2} dx dy \quad (28)$$

и палинстрофии

$$\widehat{P} = \iint \frac{(\nabla \omega)^2}{2} dx dy, \quad (29)$$

позволяющие судить об эволюции завихренности и качестве воспроизведения численным методом вихревых образований, оказываются связанными простыми соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E &= -\nu \zeta, \\ \frac{d}{dt} \zeta &= -\nu \widehat{P}. \end{aligned} \quad (30)$$

В дальнейшем при обсуждении результатов мы будем рассматривать различные слагаемые диссипации кинетической энергии, в том числе обусловленные вязкой диссипацией и использованием приближения слабой сжимаемости.

Численные методы

Описание численного метода КАБАРЕ, использующего приближение слабой сжимаемости

Для численного моделирования течений несжимаемой жидкости можно использовать явные разностные схемы, предназначенные для моделей сжимаемой жидкости. В этом случае уравнение состояния для газа заменяется на более простое, зависящее только от плотности жидкости. В этом разделе мы опишем основные особенности схемы КАБАРЕ [Головизнин, Самарский, 1998а; Головизнин, Самарский, 1998b] для двумерного течения слабосжимаемой вязкой жидкости. Запишем однородные дифференциальные уравнения (ДУ) в частных производных (ЧП), которые описывают сохранение массы и импульса в консервативной форме для идеальной жидкости:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho G \cos(ky), \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho G \cos(ky), \\ p &= c^2(\rho - \rho_0), \end{aligned} \quad (31)$$

где ρ, ρ_0 — переменная и характерная плотности сплошной среды; u, v — компоненты скорости; p — давление; c — скорость звука; t — время; x, y — пространственные координаты.

Перепишем (31) в виде гиперболической системы уравнений относительно вектора-столбца примитивных переменных $\vec{q}^T = (\rho, u, v)$:

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + A_x \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} + A_y \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} = 0. \quad (32)$$

Эти однородные ДУ в ЧП можно рассматривать как неоднородную систему уравнений переноса вдоль направления X :

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + A_x \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} = F_x, \quad F_x = -A_y \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial y}, \quad (33)$$

а также вдоль направления Y :

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + A_y \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} = F_y, \quad F_y = -A_x \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial x}, \quad (34)$$

где введены матрицы

$$A_x = \begin{pmatrix} u & c^2 \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad A_y = \begin{pmatrix} v & 0 & c^2 \rho \\ 0 & v & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & v \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Для матрицы A_x можно получить следующие собственные значения и собственные векторы:

$$\lambda_1^x = u + c, \quad \lambda_2^x = u + c, \quad \lambda_3^x = u, \quad (36)$$

$$\omega_1^x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho c} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2^x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho c} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3^x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (37)$$

аналогично для A_y :

$$\lambda_1^y = v + c, \quad \lambda_2^y = v + c, \quad \lambda_3^y = v, \quad (38)$$

$$\omega_1^y = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho c} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_2^y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho c} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3^y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

На основе собственных векторов строятся матрицы

$$\Omega_x = \begin{pmatrix} (\omega_1^x)^T \\ (\omega_2^x)^T \\ (\omega_3^x)^T \end{pmatrix}, \quad \Omega_y = \begin{pmatrix} (\omega_1^y)^T \\ (\omega_2^y)^T \\ (\omega_3^y)^T \end{pmatrix},$$

а также диагональные матрицы Λ_x, Λ_y , составленные из собственных значений, на которые затем попарно умножаются уравнения (33), (34):

$$\Omega_x \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \Lambda_x \cdot \Omega_x \frac{\partial \vec{q}}{\partial x} = \vec{G}_x, \quad \vec{G}_x = \Omega_x \cdot F_x, \quad (40)$$

$$\Omega_y \cdot \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \Lambda_y \cdot \Omega_y \frac{\partial \vec{q}}{\partial y} = \vec{G}_y, \quad \vec{G}_y = \Omega_y \cdot F_y, \quad (41)$$

что дает систему уравнений для переноса для инвариантов Римана:

$$\frac{\partial I_k^x}{\partial t} + \lambda_k^x \frac{\partial I_k^x}{\partial x} = G_k^x, \quad \frac{\partial I_k^y}{\partial t} + \lambda_k^y \frac{\partial I_k^y}{\partial y} = G_k^y, \quad k = 1, 2, 3, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} I_1^x &= c \ln(p + c^2 \rho_0) + u, & I_2^x &= -c \ln(p + c^2 \rho_0) + u, & I_3^x &= v, \\ I_1^y &= c \ln(p + c^2 \rho_0) + v, & I_2^y &= -c \ln(p + c^2 \rho_0) + v, & I_3^y &= u. \end{aligned} \quad (43)$$

В большинстве случаев для жидкостей справедливо $p \ll c^2 \rho_0$, что позволяет привести акустические инварианты Римана I_1^x и I_2^x к более простому виду, используя разложение в ряд Тейлора $\left(I_1^x = u + \frac{p}{c \rho_0}\right)$. Однако к этому преобразованию следует относиться с осторожностью, так как для произвольного набора исходных данных требование $p \ll c^2 \rho_0$ может не выполняться, а также теряются ограничения на область определения логарифмической функции. Таким образом, сохранение логарифма представляет собой неявную проверку согласования начальных и граничных условий.

Запишем неоднородные уравнения количества движения вязкого течения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} &= F_u^{\text{visc}} + G \rho \cos(ky), \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= F_v^{\text{visc}} - G \rho \cos(kx), \end{aligned} \quad (44)$$

а также, используя обозначения

$$f_x^u = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad f_y^u = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad f_x^v = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad f_y^v = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (45)$$

выражение для тензора вязких напряжений $\sigma = \frac{\mu}{2} [\nabla v + (\nabla v)^T]$:

$$\sigma = \frac{\mu}{2} \begin{pmatrix} 0 & f_y^u + f_x^v \\ f_y^u + f_x^v & 0 \end{pmatrix}. \quad (46)$$

На этом этапе мы пренебрегаем влиянием сжимаемости и записываем выражения для правых частей неоднородных уравнений переноса в дивергентной форме:

$$\begin{aligned} F_u^{\text{visc}} &= \mu \left(\frac{\partial f_x^u}{\partial x} + \frac{\partial f_y^u}{\partial y} \right), \\ F_v^{\text{visc}} &= \mu \left(\frac{\partial f_x^v}{\partial x} + \frac{\partial f_y^v}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (47)$$

В схеме КАБАРЕ используются две системы уравнений в консервативной и характеристической формах. Переменные этих систем определены в разных точках расчетной области. Переменные консервативной формы (P, U, V) связаны с центрами ячеек, а переменные характеристической формы (ρ, u, v) локализованы в центрах граней и в дальнейшем будут называться потоковыми переменными.

Таким образом, для двумерного случая необходимо ввести множества узлов расчетной сетки для консервативных $(\mathbb{M}_C = \{i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\})$ и потоковых $(\mathbb{M}_X = \{i, j + \frac{1}{2}\})$ (в направлении X), $\mathbb{M}_Y = \{i + \frac{1}{2}, j\}$ (в направлении Y) переменных. Здесь и далее индекс $i = 1, \dots, n_X$ нумерует точки в продольном направлении (X), $j = 1, \dots, n_Y$ — в поперечном направлении (Y), n обозначает номер временного шага, а $n + \frac{1}{2}$ относится только к консервативным переменным на промежуточном слое.

Более детально особенности текущей реализации схемы КАБАРЕ, а также ее применение к задаче об эволюции двойного сдвигового слоя описаны в работах [Kulikov, Son, 2016; Kulikov, Son, 2017].

Описание настроек пакета программ OpenFOAM

В пакете OpenFOAM уравнения неразрывности и Навье–Стокса решаются методом конечных объемов (FVM, Finite Volume Method) [Nilsson, 2013]. Расчетная область разбивается на одинаковые ячейки квадратной формы. Для решения применяется стандартный солвер pisoFoam, использующий итерационный алгоритм нахождения поля давления методом PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators). Данный солвер предназначен для моделирования нестационарных турбулентных несжимаемых течений жидкостей, в том числе неньютоновских. Этот солвер дает возможность дополнить уравнение импульса объемной силой. Для линейаризации решаемых уравнений применяются следующие схемы дискретизации (по времени и пространству) [Guertero, 2020]: по времени — неявная первого порядка точности, для вычисления градиента, дивергенции, лапласиана — второго порядка точности. Для решения системы линейаризованных дифференциальных уравнений применяется решатель GAMG (Generalized Geometric-Algebraic MultiGrid [Moukalled, Mangani, Darwish, 2016]), для которого установлены следующие условия окончания итераций: невязка менее 10^{-6} или относительная невязка 0,05 (0 для грубых сеток).

Замечание об использовании схемы МакКормака в приближении слабой сжимаемости

Численное решение уравнений Навье–Стокса основано на методе искусственной сжимаемости [Anderson, Tannehill, Pletcher, 2016]. При этом гиперболическая часть уравнений решается явным методом МакКормака [MacCormack, 2001], а параболическая часть — стандартным методом конечных разностей. Схема МакКормака имеет второй порядок точности по пространству и времени. Каждый этап расчета на каждом временном слое разделен на 4 шага: разности вперед и разности назад у предиктора вдоль направления X , а также разности вперед и назад у предиктора по направлению Y . На этапе корректора аналогично, за исключением того, что шаг «вперед»

меняется на «назад» и наоборот. Эти шаги циклически сменяют друг друга с каждым временным слоем. Метод МакКормака хорошо зарекомендовал себя при решении гиперболических уравнений газо- и гидродинамики. Для замыкания системы уравнений используется уравнение состояния вида

$$dp = c^2 \rho_0 \frac{d\rho}{\rho}, \quad (48)$$

где c — скорость звука (скорость распространения возмущений), определяемая как

$$c = \sqrt{\frac{1}{\rho\beta}}, \quad (49)$$

ρ — плотность жидкости, β — коэффициент сжимаемости. При использовании метода искусственной сжимаемости степень сжимаемости β может варьироваться, что непосредственно влияет на скорость распространения возмущений. Эта скорость должна быть больше возможных максимальных скоростей течения, возникающих при моделировании.

Обсуждение результатов

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия определяется как величина, нормированная на площадь расчетной области. Определим аналитическое значение интеграла (27) для конечных чисел Рейнольдса:

$$\widehat{E} = 2\pi^2 U^2 (1 - e^{-\nu k^2 t}), \quad (50)$$

обезразмерим полученный интеграл на площадь расчетной области:

$$E = \frac{U_a^2}{2} (1 - e^{-\nu k^2 t})^2 = \frac{1}{2} \frac{G^2}{\nu^2 k^4} (1 - e^{-\nu k^2 t})^2. \quad (51)$$

При расчете по схеме КАБАРЕ поведение кривых кинетической энергии носит регулярный характер как в случае большой, так и малой вязкости. При малых Re_a на грубых сетках аналитические значения E превосходят численные, однако, начиная с $t = 2$ (здесь и далее размерность времени в секундах опускается), относительное положение кривых меняется. Начиная с этого момента до развития неустойчивости энергия течения по результатам моделирования существенно превосходит аналитическую зависимость. Таким образом, при измельчении сетки кривые кинетической энергии приближаются к асимптотической кривой сверху. Разрушение регулярной вихревой структуры приводит к более чем двукратному падению кинетической энергии. В дальнейшем происходит эволюция поля завихренности под воздействием вынуждающей силы. Последующая балансировка подводимой мощности приводит к тому, что E колеблется относительно некоторого равновесного значения. На достаточно подробных сетках кривые кинетической энергии совпадают с аналитическим решением до момента разрушения устойчивого состояния.

При малых значениях вязкости (рис. 1, а) аналитическая кривая всегда превосходит численный результат. Здесь измельчение сетки также приводит к увеличению времени устойчивого состояния системы. Малая вязкость способствует конвективному переносу с меньшей диссипацией; таким образом, наблюдается их более равномерная «подкачка» со стороны действующей гармонической силы.

В случае больших чисел Рейнольдса (рис. 1, б) можно выполнить разложение экспоненты в (51) по νk^2 , что определяет квадратичную аналитическую зависимость $E = \frac{G^2 t^2}{2}$ на ламинарном

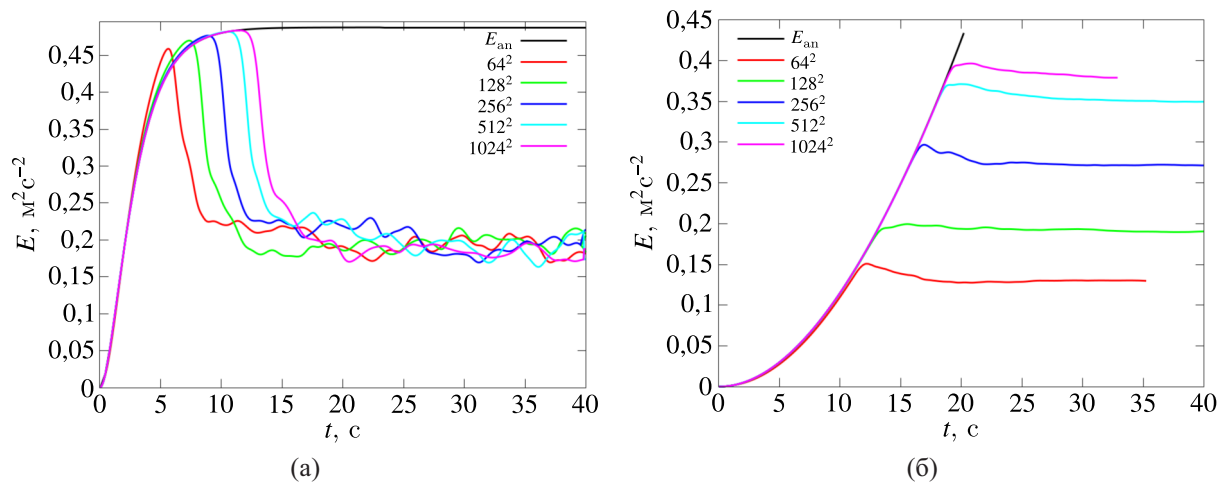


Рис. 1. Зависимость интеграла кинетической энергии E от времени, рассчитанная по схеме КАБАРЕ на последовательности сеток для расчета 1, $Re_a = 1034$ (а), расчета 2, $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

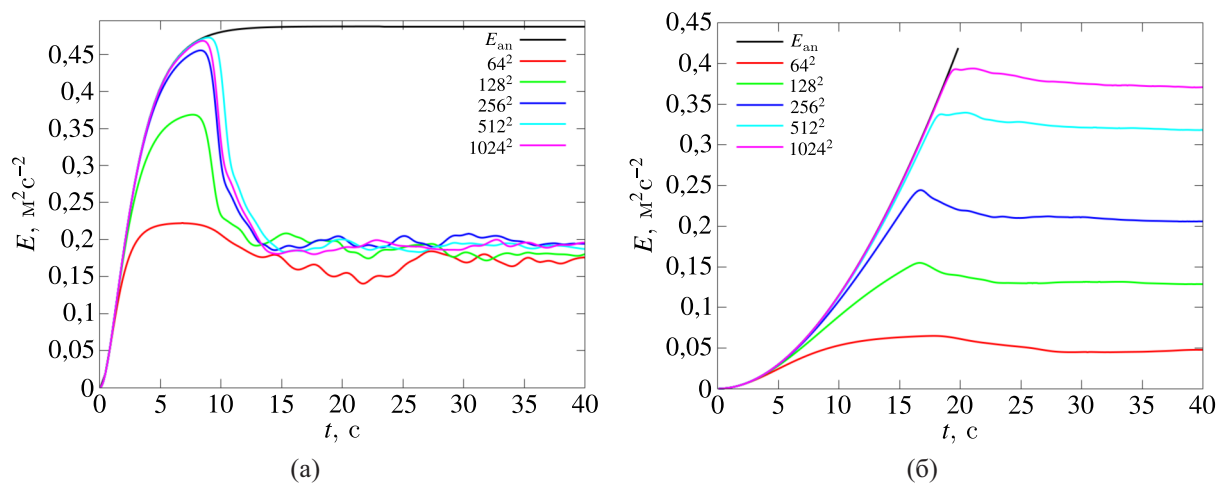


Рис. 2. Зависимость интеграла кинетической энергии E от времени, полученная с помощью OpenFOAM на последовательности сеток для $Re_a = 1034$ (а) и $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

(начальном) этапе эволюции. Более высокое число Рейнольдса, очевидно, приводит к большому диапазону пространственных масштабов, что затрудняет (замедляет) процесс сеточной сходимости. В дальнейшем этот факт можно продемонстрировать на примере интеграла палиндромии. Результаты OpenFOAM при низких числах Рейнольдса (рис. 2, а), наоборот, всегда приближают к низу кривую кинетической энергии к точным значениям.

Процесс измельчения сетки показывает немонотонную сходимость для выбранных настроек солвера. Говоря о качественном описании результатов моделирования, мы будем предполагать, что наилучшие результаты дает тот численный метод, для которого потеря устойчивости решения происходит позже всего.

С этой точки зрения сетку 512^2 для OpenFOAM можно считать наилучшей. В сравнении со схемой КАБАРЕ для всего набора сеток, здесь разрушение происходит приблизительно на $t = 2$ раньше. На более поздних временах эволюции течения средние значения E для КАБАРЕ

и OpenFOAM колеблются в одном диапазоне. Однако независимо от сетки схема КАБАРЕ дает более резкие пульсации E (закачка энергии происходит более интенсивно).

Для расчета при больших Re_a OpenFOAM демонстрирует существенное отклонение от аналитической кривой (рис. 2, б). Удовлетворительные результаты можно получить на сетке 512^2 . Так как развитие неустойчивости происходит в различные моменты времени, это определяет общую величину кинетической энергии в потоке. По мере измельчения сетки она увеличивается в семь раз (для схемы КАБАРЕ — в три раза).

На рис. 3, а показана зависимость кинетической энергии по результатам расчета методом МакКормака для $Re_a = 1034$, а также дополнительно показано сравнение с аналитической кривой и результатами схемы КАБАРЕ на сетке 64^2 . Обращает на себя внимание, что регулярное распределение разрушается существенно позже, чем в случае двух других численных методов. Измельчение сетки приводит к уменьшению времени существования регулярной системы. Наилучшее приближение к аналитической кривой дает сетка 512^2 .

При высоком Re_a (рис. 3, б) расчеты на грубых сетках (64^2 , 128^2) приводят к развалу течения и остановке солвера. При дальнейшем измельчении сетки устойчивость солвера сохраняется на всем времени расчета, однако и в этом случае дробление приводит к небольшому уменьшению кинетической энергии течения вследствие более раннего развития неустойчивости.

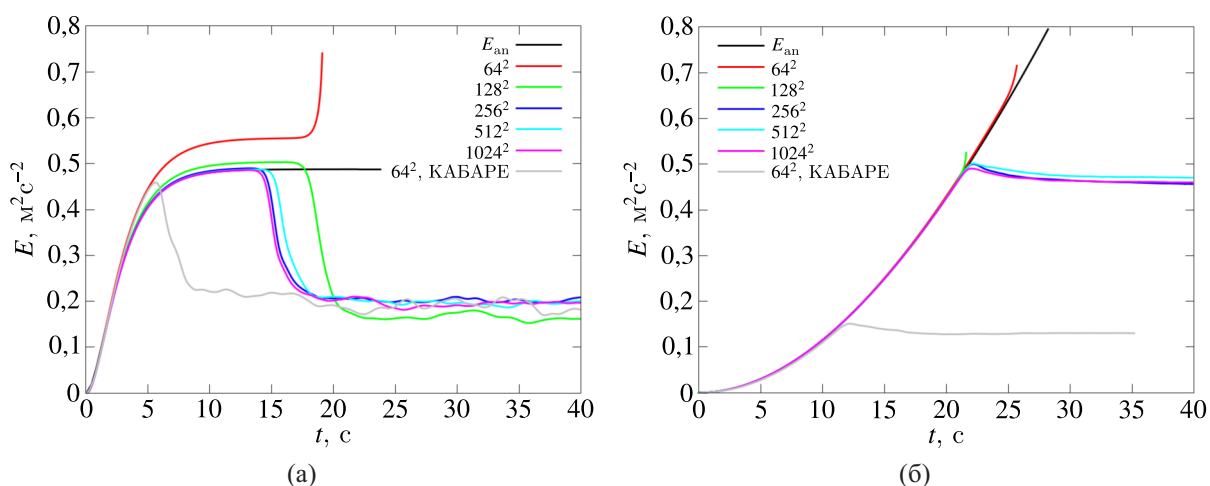


Рис. 3. Зависимость интеграла кинетической энергии E от времени, полученная с помощью метода МакКормака на последовательности сеток для случая $Re_a = 1034$ (а) и расчета с $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

Можно определить характерное число Рейнольдса и по максимальному значению кинетической энергии как $Re_E = \frac{\sqrt{E}L}{\nu}$. Тогда $Re_E \sim 500$ ($Re_a = 1034$) и $Re_E \sim 40000$ ($Re_a = 387850$). Откуда, в частности, можно оценить соотношения масштабов в каскаде двумерной турбулентности для течения с большим числом Рейнольдса $\frac{l}{\eta} \sim 200$ ($\mu = 0,01$), где l, η — интегральный и колмогоровский масштабы соответственно. Таким образом, минимально допустимая сетка должна иметь около 1024^2 ячеек (существование мелкомасштабных долгоживущих образований, т. е. когерентных структур, не учитывается). Заметим также, что подобное определение числа Рейнольдса не является показательным, так как не учитывает структуру течения.

Скорость диссипации кинетической энергии

В данном разделе скорость диссипации $\varepsilon = \frac{dE}{dt}$ обсуждается на основе результатов схемы КАБАРЕ и пакета OpenFOAM. В случае развитой турбулентности в несжимаемой среде эта

величина пропорциональна интегральной энтропии, однако в данной задаче это равенство не соблюдается вследствие постоянной подкачки энергии с помощью вынуждающей силы. Графики ε обнаруживают существенное различие в развитии хаотизации регулярного распределения вихрей при $Re_a = 1034$, в OpenFOAM это происходит в окрестности $t = 10$. Для схемы КАБАРЕ момент $\min\{\varepsilon\}$, соответствующий минимальной диссипации, смещается в сторону большего t при измельчении сетки.

Дифференцирование аналитического выражения для кинетической энергии дает

$$\varepsilon = \frac{G^2}{\nu k^2} (1 - e^{-\nu k^2 t}) e^{-\nu k^2 t}. \quad (52)$$

Кривые ε (рис. 4) для схемы КАБАРЕ не обнаруживают осцилляций вследствие влияния малой сжимаемости. Кривые, полученные по результатам моделирования в OpenFOAM, представлены на рис. 5.

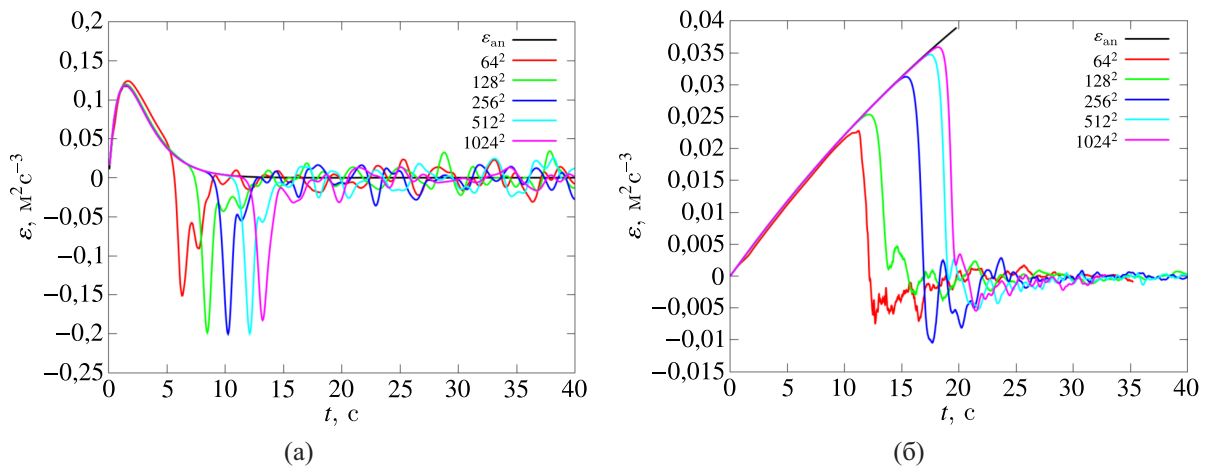


Рис. 4. Скорость диссипации кинетической энергии ε , получаемая непосредственным дифференцированием результатов схемы КАБАРЕ на последовательности сеток для расчета 1 — $Re_a = 1034$ (а), расчета 2 — $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

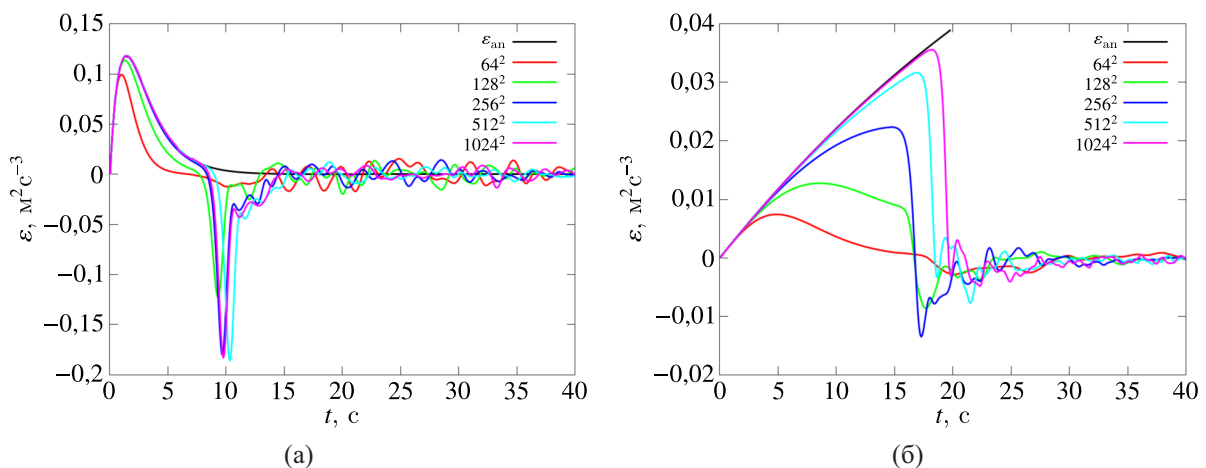


Рис. 5. Скорость диссипации кинетической энергии ε , получаемая непосредственным дифференцированием результатов OpenFOAM на последовательности сеток для $Re_a = 1034$ (а) и $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

Скорость диссипации вследствие сдвиговой вязкости

Вклад сдвиговой вязкости в общий процесс диссипации можно рассчитать с помощью соотношений

$$\varepsilon_2 = \frac{2\mu t_0}{\rho_0 U_0 L^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{ij} S_{ij} dx dy, \quad (53)$$

где

$$S_{ij} S_{ij} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2. \quad (54)$$

Пусть характерная скорость $U_0 = 1$, тогда $t_0 = 2\pi$ и

$$\varepsilon_2 = 2\pi\nu \left(\frac{G}{\nu k} \right)^2 \left(1 - e^{-\nu k^2 t} \right)^2. \quad (55)$$

Выражение для скорости диссипации можно переписать и в размерном виде:

$$\widehat{\varepsilon}_2 = \frac{G^2}{\nu k^2} \left(1 - e^{-\nu k^2 t} \right)^2. \quad (56)$$

Результаты, полученные по схеме КАБАРЕ (рис. 6) и OpenFOAM (рис. 7), оказываются в значительной степени подобными как для малого, так и для большого Re_a . Для схемы КАБАРЕ локальный максимум ε_2 лежит ближе к аналитической кривой и является более резким.

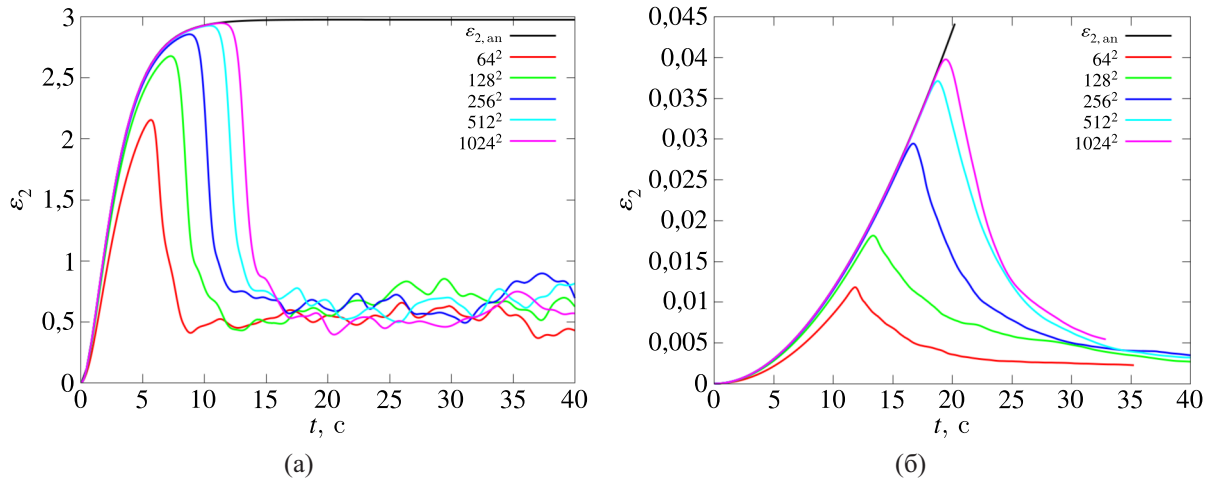


Рис. 6. Зависимость скорости вязкой диссипации ε_2 от времени, полученная по схеме КАБАРЕ на последовательности сеток для малого Re_a (а) и большого Re_a (б). Для случая меньшего числа Рейнольдса можно говорить о достижении сходимости по этой величине. Поведение кривых для двух случаев оказывается похожим. Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

Дилатационная диссипация

В случае использования приближения слабой сжимаемости, как в данной реализации схемы КАБАРЕ, необходимо оценить вклад дилатационной компоненты в общий процесс диссипации:

$$\varepsilon_3 = -\frac{1}{4\pi^2 \rho_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} p \nabla \cdot \vec{V} dx dy. \quad (57)$$

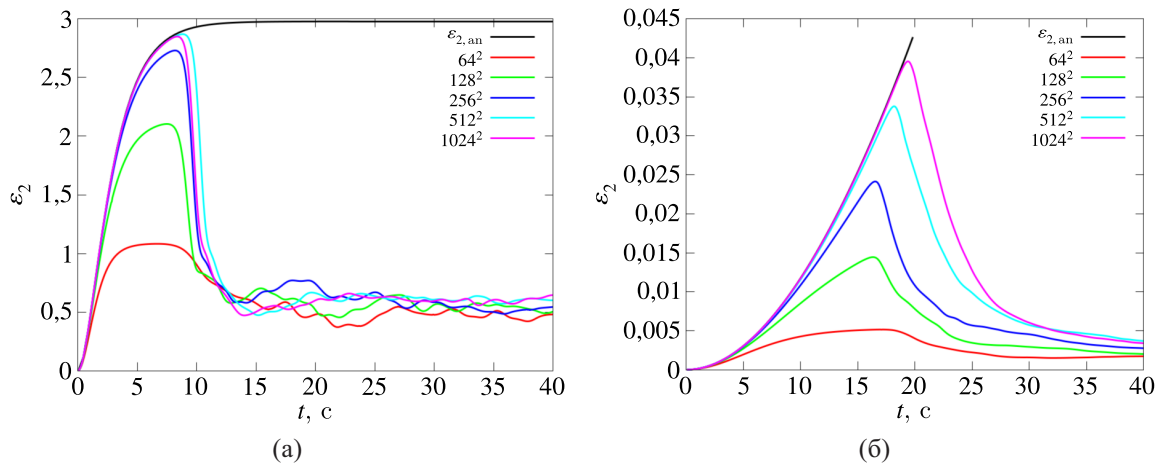


Рис. 7. Зависимость скорости вязкой диссипации ε_2 от времени по результатам моделирования OpenFOAM для расчета с $Re_a = 1034$ (а), а также с $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

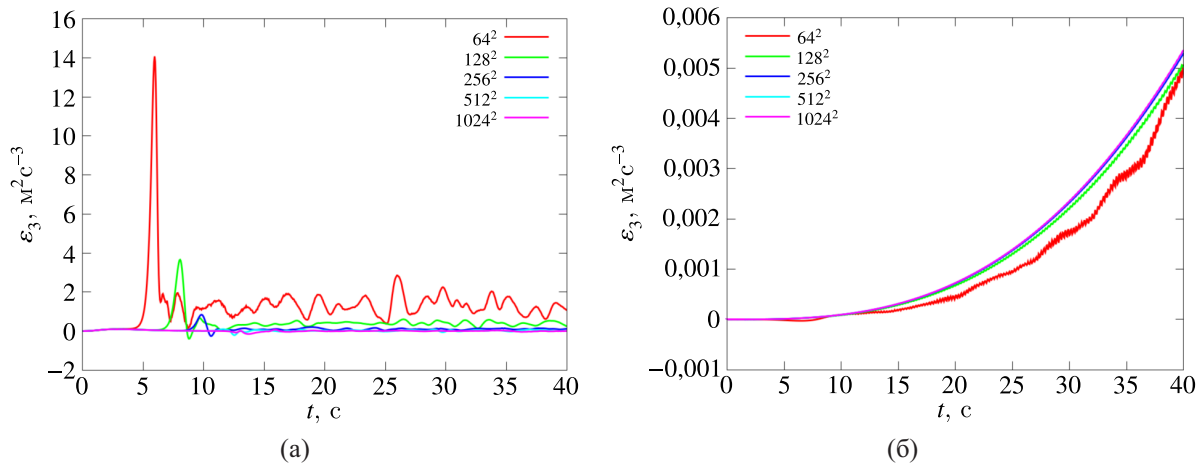


Рис. 8. Зависимость скорости дилатационной диссипации ε_3 от времени, полученная на последовательности сеток для расчета с $Re_a = 1034$ (а), расчета с $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек)

Для малого числа $Re_a = 1034$ (рис. 8, б) хаотизация приводит к резкому пику дилатационной диссипации $\varepsilon_3 \sim 10$, после которого ε_3 осциллирует около $\varepsilon_3 \sim 1$. Измельчение сетки приводит к падению пиковых и средних значений в 5–7 раз при переходе от сетки к сетке. На сетке 1024^2 наблюдаются мелкомасштабные осцилляции $|\varepsilon_3| \sim 5 \cdot 10^{-2}$. Амплитуда этих колебаний постоянно меняется, характерный период оказывается достаточно большим: $T = 2$. Таким образом, сгущение сетки приводит к уменьшению дилатационной диссипации.

Для большого $Re_a = 387850$ (рис. 8, а) величина ε_3 постоянно растет с увеличением t . Начиная с сетки 256^3 , основная зависимость ($\varepsilon_3 \sim t^3$) оказывается практически неизменной. На эту зависимость накладываются мелкомасштабные осцилляции, амплитуда которых уменьшается при сгущении сетки, а их период не зависит от пространственного разрешения ($T = 0,25$).

Невязка скорости диссипации кинетической энергии, обусловленная численной ошибкой

На примере результатов расчетов по схеме КАБАРЕ и в пакете OpenFOAM рассмотрим связь различных энергетических характеристик течения, таких как: ε — скорость диссипации

кинетической энергии, вычисляемая ее непосредственным дифференцированием по времени, W — мощность, вкладываемая в течение, ε_2 — гидродинамическая диссипация, ε_3 — дилатационная диссипация (если используется модель слабой сжимаемости), ε_{res} — невязка численной диссипации, обусловленная численной ошибкой, которые связаны соотношением

$$\varepsilon = -\varepsilon_2 - \varepsilon_3 + \varepsilon_{\text{res}} + W. \quad (58)$$

В исходной постановке выражение выше включает только три слагаемых (W , ε , ε_2) и является справедливым в том числе и для аналитических выражений:

$$\begin{aligned} W &= \frac{G^2}{\nu k^2} (1 - e^{-\nu k^2 t}), \\ \widehat{\varepsilon} &= \frac{G^2}{\nu k^2} (e^{-\nu k^2 t} - e^{-2\nu k^2 t}), \\ \widehat{\varepsilon}_2 &= \frac{G^2}{\nu k^2} (1 - e^{-\nu k^2 t})^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Таким образом, основываясь на результатах расчетов, мы можем в явном виде выделить вклад численной диссипации ε_{res} . Заметим также, что в данном случае мы оперируем размерными величинами.

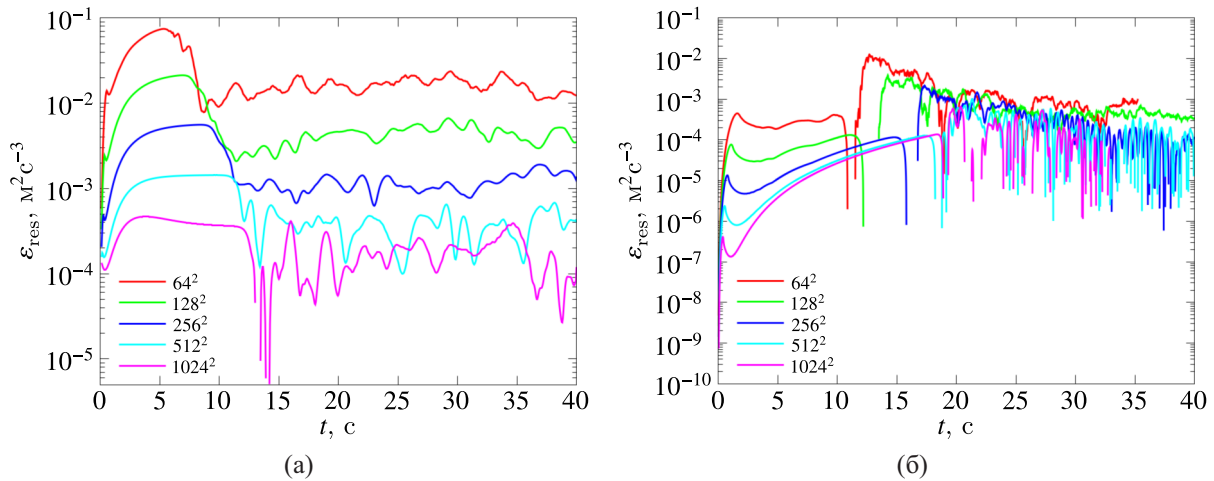


Рис. 9. Невязка скорости диссипации кинетической энергии ε_{res} , полученная на основе результатов схемы КАБАРЕ для расчета 1 (а), расчета 2 (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек)

При $Re_a = 1034$ для схемы КАБАРЕ (рис. 9, а) можно наблюдать немонотонность, связанную с появлением локального экстремума ($t \approx 0,25$, $\varepsilon_{\text{res}} \sim 5 \cdot 10^{-7}$ — для сетки 1024^2). После короткого спада ε_{res} опять нарастает, увеличиваясь на порядок за время $\Delta t = 3 \dots 3,5$, а затем остается постоянной до момента начала резкой диссипации энергии (хаотизации течения). После чего происходит резкое уменьшение, для группы сеток (256^2 , 512^2 , 1024^2) достигая значения $\varepsilon_{\text{res}} \sim 10^{-4}$. После хаотизации течения ε_{res} имеет резкие осцилляции в пределах $|\varepsilon_{\text{res}}| \sim 2,5 \cdot 10^{-4}$. Таким образом, можно сказать, что в ε_{res} учитывается и вклад дилатационной компоненты. Осцилляции являются гармоническими с периодом $T = 0,5$. В тоже время кривые ε_3 имеют осцилляции с периодом $T = 0,25$, не зависящим от сетки. Оказывается, что на мелких сетках основной вклад в невязку ε_{res} дает дилатационная диссипация, однако ее вклад в энергетический баланс в среднем за период достаточно мал. На этапе хаотического течения невязка колеблется в пределах $|\varepsilon_{\text{res}}| \lesssim 3 \cdot 10^{-4}$.

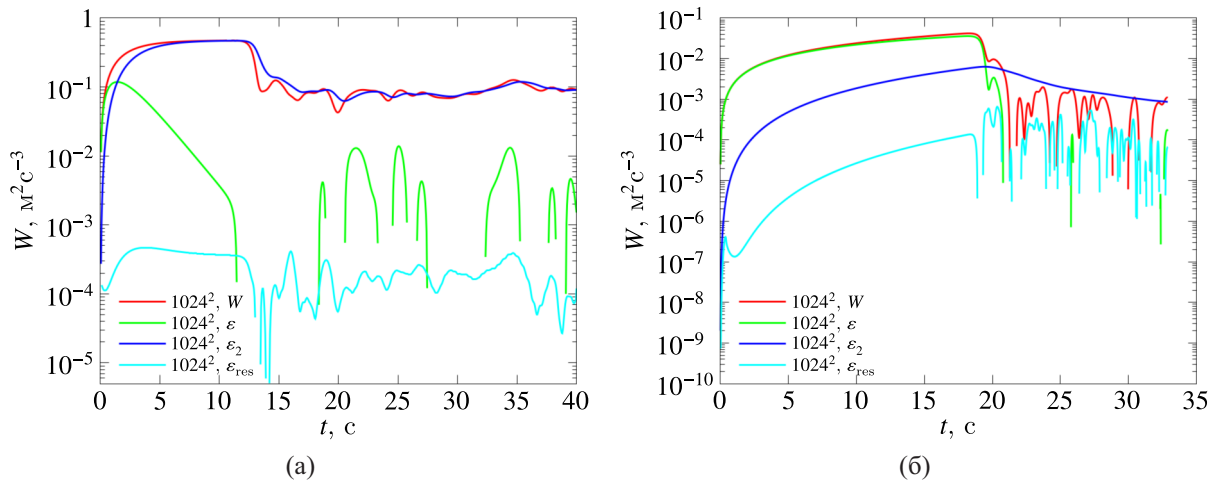


Рис. 10. Сравнение интегральных кривых мощности W , скорости диссипации кинетической энергии ε , гидродинамической диссипации ε_2 и численной диссипации ε_{res} , полученных на основе результатов схемы КАБАРЕ для случая $\text{Re}_a = 1034$ (а) и для $\text{Re}_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек)

На рис. 10, а, б для сравнения приведен вклад в энергетический баланс всех слагаемых уравнения (59) (сетка 1024^2). Видно, что кривая W является суммой ε , ε_2 , ε_{res} . Вклад ε_{res} оказывается приблизительно в 5000 и 50 раз меньше для ε_1 для $\text{Re}_a = 1034$ и $\text{Re}_a = 387850$ соответственно.

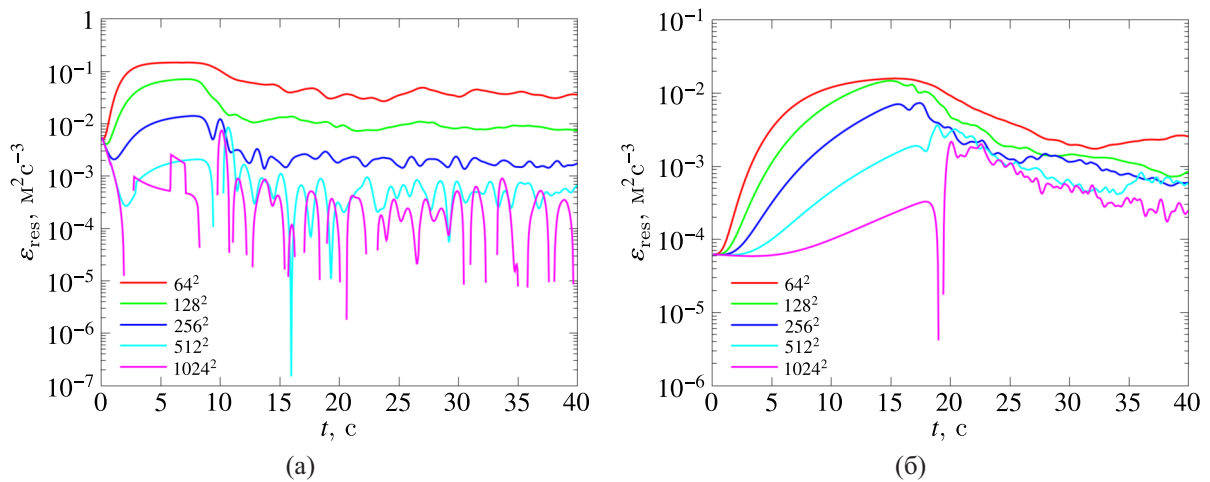


Рис. 11. Невязка скорости диссипации кинетической энергии ε_{res} , полученная на основе результатов OpenFOAM для расчета 1, $\text{Re}_a = 1034$ (а), расчета 2, $\text{Re}_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек)

Полезно сравнить результаты схемы КАБАРЕ и OpenFOAM (рис. 11). Последний использует модель несжимаемой жидкости, и в ε_{res} отсутствует вклад ε_3 . В случае малого Re_a измельчение сетки от 64^2 до 256^2 приводит к уменьшению среднего ε_{res} в 5–7 раз. На мелких сетках (512^2 , 1024^2) появляются мелкомасштабные осцилляции ε_{res} с амплитудой 10^{-5} – 10^{-4} , сопровождаемые переходом ε_{res} через ноль.

Для $\text{Re}_a = 387850$ ε_{res} возрастает на участке регулярной эволюции течения, а после хаотизации медленно спадает. На этот общий тренд накладываются мелкомасштабные осцилляции.

На участке хаотической эволюции измельчение сетки дает уменьшение ε_{res} от $5 \cdot 10^{-2}$ до $5 \cdot 10^{-4}$. Отметим, что переход от 512^2 к 1024^2 не приводит к существенному уменьшению ε_{res} , что, возможно, является следствием других настроек солвера (допуска tolerance и т. д.). Осцилляции ε_{res} становятся более заметными при измельчении сетки, что, скорее всего, связано с общим уменьшением среднего ε_{res} .

Интегральная энтропия

Интеграл энтропии можно рассматривать как меру вихреразрешающей способности численного метода, он находится по известному распределению завихренности:

$$\omega = \frac{G}{\nu k} (\sin(ky) + \sin(kx)) \times (1 - e^{-\nu k^2 t}), \quad (60)$$

что дает

$$\widehat{\zeta} = \frac{1}{2} \frac{G^2}{\nu^2 k^2} \cdot 4\pi^2 \cdot (1 - e^{-\nu k^2 t})^2. \quad (61)$$

Нормируя интеграл на площадь расчетной области, получим

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{G^2}{\nu^2 k^2} (1 - e^{-\nu k^2 t})^2, \quad (62)$$

в случае больших чисел Рейнольдса теоретическая зависимость имеет вид

$$\zeta = \frac{(Gkt)^2}{2}.$$

Интегральная энтропия строится на основе сеточного ротора со вторым порядком точности, а также последующим интегрированием методом центральных прямоугольников.

Данная величина является мерой качества разрешения вихревых структур: чем больше точек расчетной сетки, тем более мелкомасштабные вихревые структуры могут быть реализованы в расчете. Здесь стоит отметить, что энтропия в двумерном случае по физическому смыслу выступает в качестве аналога кинетической энергии турбулентности в трехмерном случае.

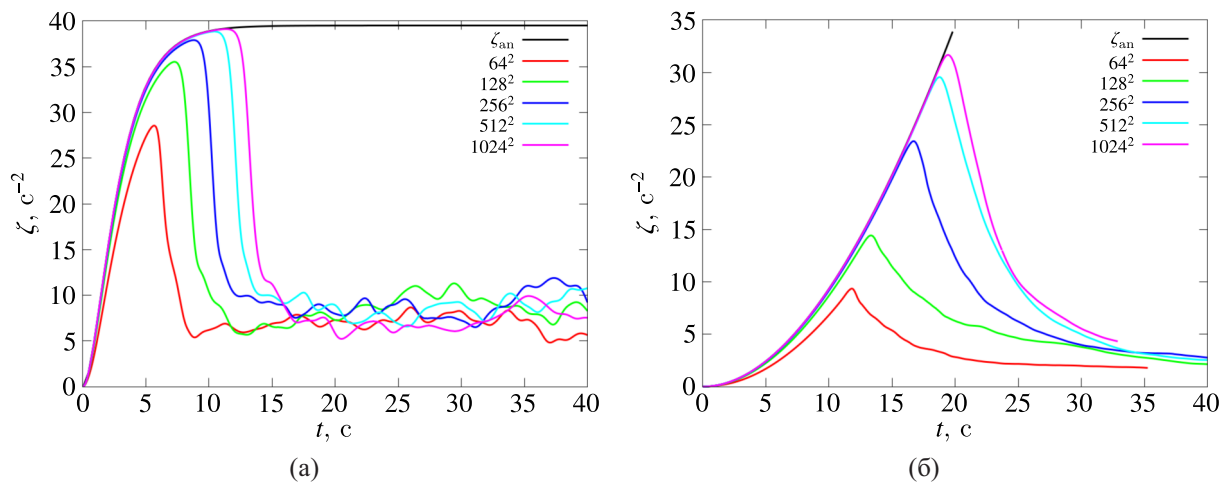


Рис. 12. Зависимость интеграла энтропии ζ от времени, рассчитанная на основе результатов схемы КА-БАРЕ, полученных на последовательности сеток при начальных условиях расчета 1, $\text{Re}_a = 1034$ (а), расчета 2, $\text{Re}_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

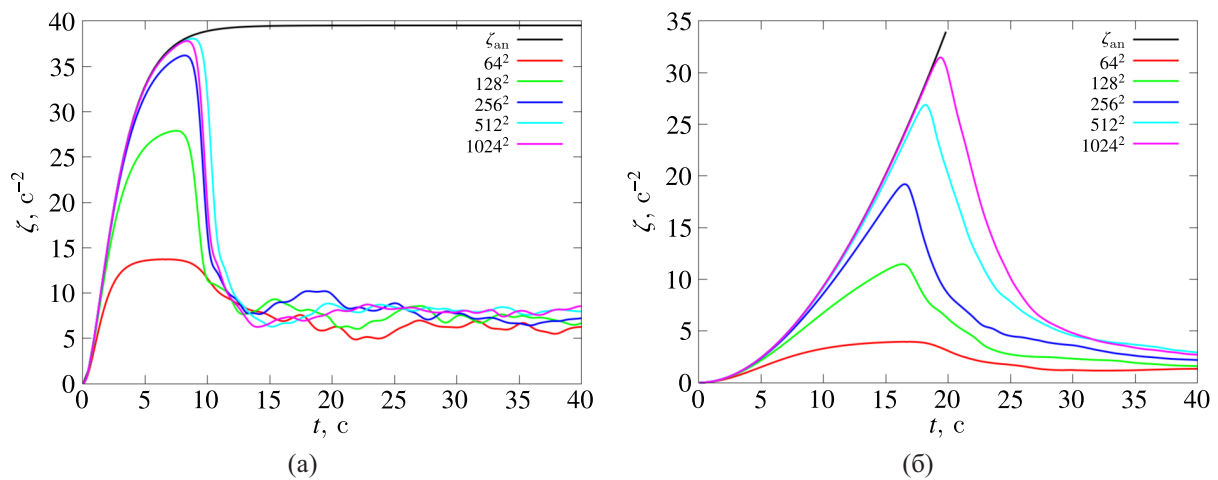


Рис. 13. Интегральная энтропия, полученная с помощью OpenFOAM на последовательности сеток для расчета 1, $Re_a = 1034$ (а), расчета 2, $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

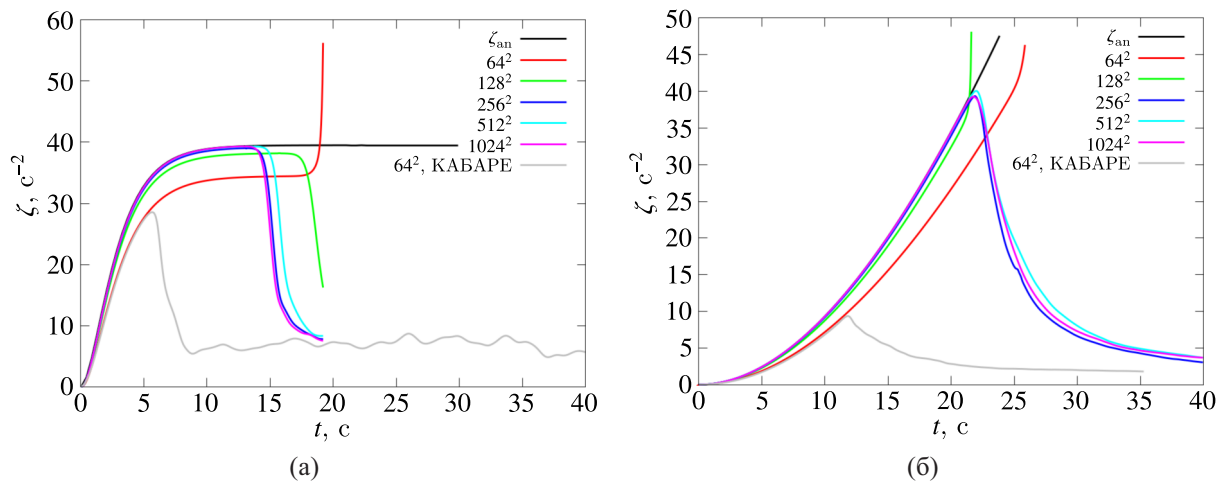


Рис. 14. Интегральная энтропия, полученная с помощью метода МакКормака на последовательности сеток для расчета 1, $Re_a = 1034$ (а), расчета 2, $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

Для схемы КАБАРЕ в обоих случаях кривые ζ оказываются ниже аналитических значений (рис. 12). Отметим также, что разброс значений ζ на поздних временах эволюции для различных сеток оказывается существенно меньше, чем для кинетической энергии.

Результаты OpenFOAM для обоих режимов оказываются полностью подобными поведению E (рис. 13). Заметим также хорошее совпадение максимумов ζ на сетке 1024^2 для OpenFOAM и схемы КАБАРЕ.

Расчеты по схеме МакКормака также имеют сходство с кривыми кинетической энергии: измельчение сетки приводит к уменьшению интегральной энтропии. Аналогичная ситуация наблюдается и при большем Re_a , здесь наилучшее приближение получается на сетке 512^2 (рис. 14).

Палинстрофия

При исследовании двумерной турбулентности целесообразным является расчет интеграла палинстрофии, который является количественной мерой филаментации, т. е. произведения гради-

ента завихренности. По известному распределению ω найдем значение градиента завихренности, что дает итоговое выражение для P :

$$\widehat{P} = 2\pi^2 \frac{G^2}{\nu^2} \times (1 - e^{-\nu k^2 t})^2. \quad (63)$$

Нормируя на площадь расчетной области, получим выражение для P :

$$P = \frac{1}{2} \frac{G^2}{\nu^2} (1 - e^{-\nu k^2 t})^2. \quad (64)$$

Эволюция этой величины представлена на рис. 15. Отметим, что асимптотическое значение P не зависит от номера гармоники k .

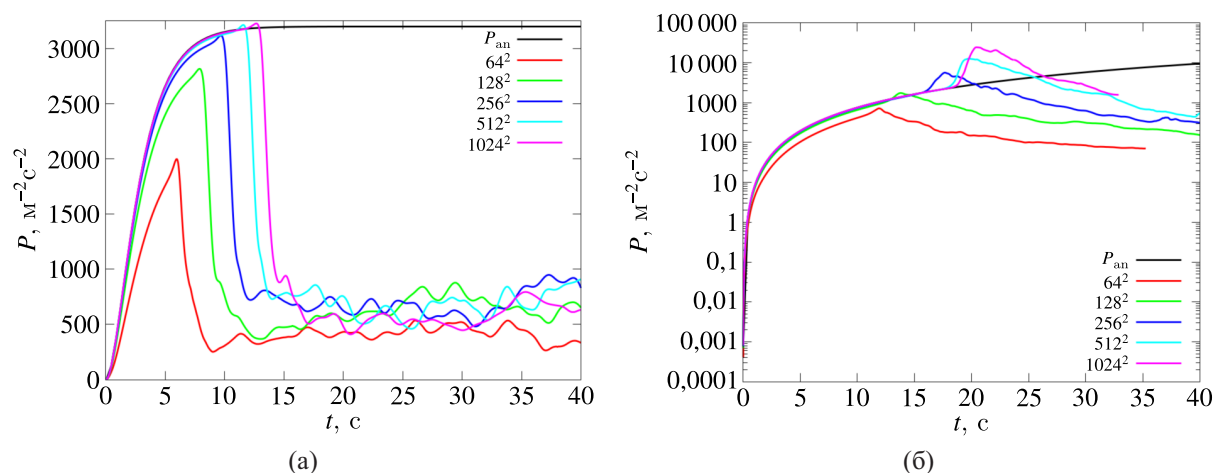


Рис. 15. Зависимость интеграла палинстрофии P от времени, полученная на основе результатов схемы КАБАРЕ, рассчитанных на последовательности сеток для расчета 1, $Re_a = 1034$ (а), расчета 2, $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

Аналитические кривые описываются зависимостью, схожей с кинетической энергией, это определяет подобие кривых P для малого числа Рейнольдса $Re_a = 1034$ (рис. 15, а) и E (рис. 1, а). Измельчение сетки приближает решение для P к аналитической кривой. Однако можно заметить, что при любом числе точек имеется характерное обострение P , то есть происходит дополнительное увеличение градиентов завихренности, за которым следует резкий спад, связанный с хаотизацией течения. При $Re_a = 387850$ (рис. 15, б) разрушение регулярной системы вихрей приводит к «взрывному» росту интегральной палинстрофии. В частности, на самой мелкой сетке (1024^2) максимальное P по результатам моделирования превышает аналитическое решение приблизительно в 8,5 раз. Результаты, полученные в OpenFOAM на различных сетках (рис. 16), демонстрируют подобие величинам, рассмотренным ранее. Для малого Re_a наилучшей сеткой является 512^2 и 1024^2 . Для большого Re_a наблюдается монотонное поведение P в зависимости от количества ячеек расчетной сетки. Максимальные значения соответствуют сетке с 1024^2 ячейками ($P = 18000$). Хаотизация приводит к увеличению P приблизительно в 6,2 раза.

Для схемы МакКормака при малых числах Рейнольдса Re_a измельчение сетки приводит к тому, что P следует аналитической кривой до момента хаотизации течения, при этом ее значения не превышают точное решение. Для сравнения на рис. 17, а приведены результаты схемы КАБАРЕ для самой грубой сетки 64^2 , которая показывает дополнительное обострение P . После хаотизации течения в схеме МакКормака значения P слабо зависят от сетки (256^2 , 512^2 , 1024^2).

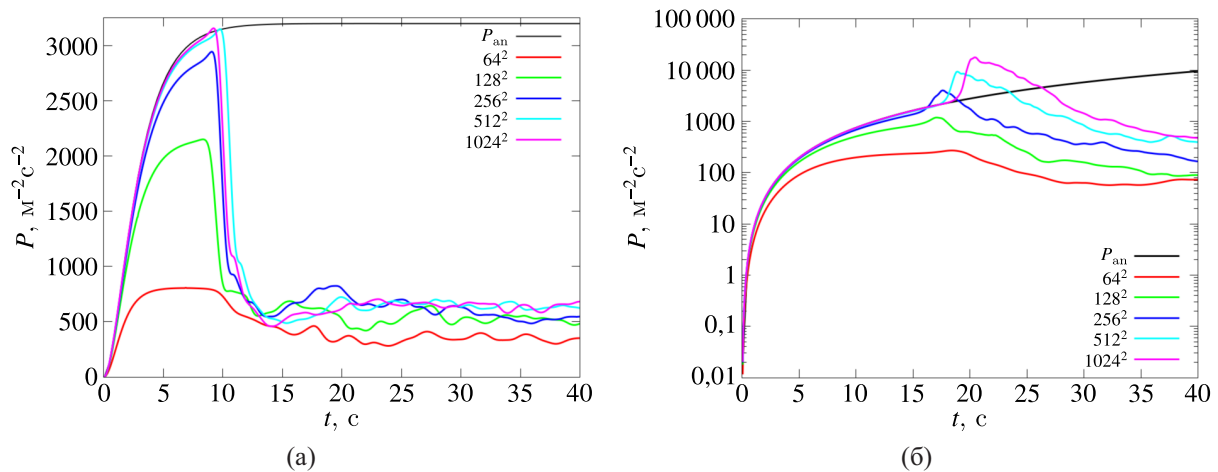


Рис. 16. Зависимость палинстрофии, полученная на основе результатов OpenFOAM на последовательности сеток для расчета 1, $Re_a = 1034$ (а), расчета 2, $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек). Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

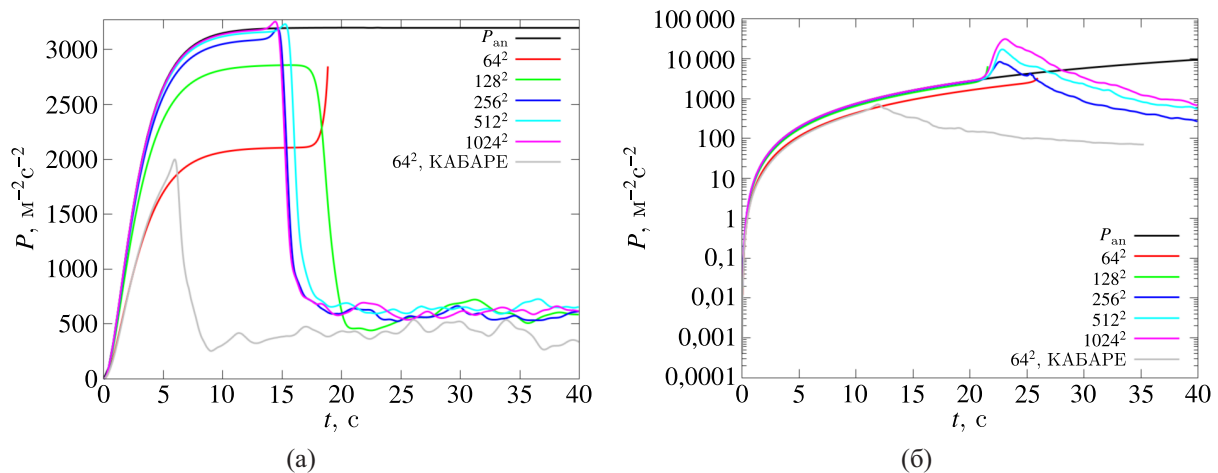


Рис. 17. Зависимость палинстрофии, полученная с помощью метода МакКормака на последовательности сеток для расчета 1, $Re_a = 1034$ (а), расчета 2, $Re_a = 387850$ (б). Цифры в легенде указывают количество точек равномерной сетки (ячеек) в одном направлении. Черная кривая отмечает поведение аналитического решения

Для большого числа Рейнольдса Re_a (рис. 17, б) расчеты не на всех сетках являются успешными (64^2 , 128^2). Дальнейшее измельчение приводит к нормальному выполнению и регулярному поведению кривых P . Значения P в максимуме ($P = 32\,000$) превышают аналогичные, полученные другими методами.

Заключение

Исследование воздействия вынуждающей объемной гармонической силы на жидкость показало существование аналитического решения для распределения скорости, давления и их производных, полученные распределения представляют «паркет» из вихрей противоположного вращения, расположенных в шахматном порядке вдоль координатных направлений. В случае постоянно действующей силы поле скорости стремится к своим асимптотическим значениям

как $(1 - \exp(-vk^2t))$. Асимптотический режим определяется следующими характерными параметрами: скоростью $U_a = \frac{G}{vk^2}$, числом Рейнольдса $Re_a = \frac{2\pi G}{v^2k^2}$, а также временем выхода на режим $T_a = \frac{1}{vk^2}$. Проведение численного моделирования с помощью свободно распространяемого ПО OpenFOAM (модель несжимаемой среды), численных схем КАБАРЕ и МакКормака (использующих приближение слабой сжимаемости) показало существенное отличие в сравнении с аналитическими результатами, которое заключается в разрушении регулярного течения, приводящего к возникновению хаотического поля завихренности.

Начальный момент, скорость развития неустойчивости зависят от численного метода, а также количества ячеек расчетной сетки. Примечательно, что хаотизация поля течения наблюдается как при малых, так и при больших Re_a , что является существенным отличием решаемой задачи от плоского вихря Тейлора – Грина. Для последнего могут наблюдаться два варианта распада (ламинарный или турбулентный) в зависимости от числа Рейнольдса.

Особенности эволюции течения исследовались на основе интегральных характеристик: кинетической энергии E , энтропии ζ и палистрофии P . Общим свойством этих кривых является существование трех участков. Первый участок связан с регулярной эволюцией течения, при которой происходит усиление интенсивности вихрей. Расчетные кривые следуют за аналитическим результатом, а измельчение сетки приводит к улучшению их совпадения. На втором участке происходит медленное отклонение кривых от аналитических значений, которое завершается участком с большой производной по времени (резкий спад или рост). Примечательно, что отклонение интегралов, вычисленных по расчетной области, происходит монотонно, а анализ двумерных распределений не показывает появления возмущающих гармоник, приводящих к развитию неустойчивости. На этом же переходном участке начинают наблюдаться сеточные немонотонности: для OpenFOAM и схемы МакКормака наиболее позднее разрушение течения происходит не на самой мелкой сетке (1024^2), а на более грубых. Третий участок связан с хаотической эволюцией течения и зависит от длительности интервала ламинарной эволюции. Обратим внимание на существенные отличия этого интервала для различных Re_a . В частности, для кинетической энергии E значения осциллируют в окрестности $E \sim 0,2$ для всех численных методов. Таким образом, при малом Re_a зависимость от момента начала хаотизации оказывается несущественной.

Отметим, что асимптотическое поведение при малых значениях кинематической вязкости допускает разложение экспоненциальной зависимости от времени, что дает линейный рост некоторых величин. Для большого числа Рейнольдса момент начала хаотизации определяет количество энергии, переданной в течение объемной силой. В продолжение анализа энергетического баланса течения мы рассмотрели набор величин, которые позволяют судить и о диссипативных характеристиках численных методов. Процесс закачки энергии связан с мощностью W вынуждающей силы, в то время как диссипация представлена суммой слагаемых, связанных с непосредственным увеличением кинетической энергии (ε), вязкой диссипацией (ε_2), дилатационной диссипацией (ε_3 — для методов со слабой сжимаемостью), а также численной диссипации (ε_{res}). Для результатов, полученных по схеме КАБАРЕ и ПО OpenFOAM, на основе балансовых соотношений установлено, что последовательное измельчение сетки приводит к уменьшению ε_{res} в 5–7 раз при переходе от сетки к сетке. Для самой подробной из них (1024^2) численная диссипация оказывается на несколько порядков меньше своего гидродинамического аналога. Можно заключить, что диссипативные характеристики обоих методов не оказывают существенного влияния на процесс эволюции завихренности. Как следует из представленных результатов, процесс хаотизации наблюдается для любого из численных методов, при этом она может происходить и на поздних временах регулярной эволюции течения, когда локальные аналитические значения временных производных уменьшаются. Для исследования процессов производства завихренности мы использовали две интегральные величины, определяемые на ее основе, — интегральные

энстрофию (ζ) и палинстрофию (P). Постановка задачи с периодическими граничными условиями позволяет установить простую связь между ними. Кроме того, ζ может выступать в качестве меры вихреразрешающей способности численного метода, а палинстрофия определяет степень производства мелкомасштабной завихренности. Хаотизация при малых числах Рейнольдса приводит к интенсивному уменьшению энстрофии и быстрому исчезновению мелкомасштабных структур.

При больших числах Рейнольдса уменьшение энстрофии происходит довольно медленно. Однако спад кривых показывает, что вынуждающая сила с большим пространственным периодом не способна поддерживать мелкомасштабное распределение вихрей, и в силу существования каскада в течении сохраняются в основном только крупномасштабные образования.

Данный вывод хорошо подтверждается кривыми палинстрофии, которые показывают активную филаментацию в двумерном хаотическом течении. На относительно небольшом интервале $\Delta t = 10$ (сетка 1024^2) палинстрофия P принимает то же самое значение, что и до хаотизации. Интервал интенсивного производства завихренности занимает около $\Delta t \approx 2$, то есть является весьма кратковременным. Спад после хаотизации характеризуется степенной функцией.

Список литературы (References)

- Головизнин В. М., Самарский А. А. Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математическое моделирование. — 1998a. — Т. 10, № 1. — С. 86–100.
- Goloviznin V. M., Samarskiy A. A. Raznostnaya approximationsiya konvektivnogo perenosa s prostranstvennym rasshchepleniyem vremennoy proizvodnoy [Difference approximation of convective transport with spatial splitting of the time derivative] // Matematicheskoye modelirovaniye. — 1998a. — Vol. 10, No. 1. — P. 86–100 (in Russian).
- Головизнин В. М., Самарский А. А. Некоторые свойства разностной схемы «КАБАРЕ» // Математическое моделирование. — 1998b. — Т. 10, № 1. — С. 101–166.
- Goloviznin V. M., Samarskiy A. A. Some properties of the difference scheme “CABARET” [Some properties of the difference scheme “CABARET”] // Matematicheskoye modelirovaniye. — 1998b. — Vol. 10, No. 1. — P. 101–166 (in Russian).
- Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости // ДАН СССР. — 1941a. — Т. 30. — С. 209–303.
- Kolmogorov A. N. Lokal'naya struktura turbulentnosti v neszhimayemoy vyazkoy zhidkosti [Local structure of turbulence in an incompressible viscous fluid] // DAN SSSR. — 1941a. — Vol. 30. — P. 209–303 (in Russian).
- Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // ДАН СССР. — 1941b. — Т. 30, № 1 — С. 19–21.
- Kolmogorov A. N. Rasseyaniye energii pri lokal'no izotropnoy turbulentnosti [Energy dissipation under locally isotropic turbulence] // DAN SSSR. — 1941b. — Vol. 30, No. 1. — P. 19–21 (in Russian).
- Anderson D., Tannehill J. C., Pletcher R. H. Computational fluid mechanics and heat transfer. — Third ed. — Taylor and Francis, 2016.
- Balbus S. A., Hawley J. F. Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks // Reviews of Modern Physics. — 1998. — Vol. 70, No. 1. — P. 1–53.
- Basdevant C., Legras B., Sadourny R., Bèland M. A study of barotropic model flows: intermittency, waves and predictability // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1981. — Vol. 38, No. 11. — P. 2305–2326.
- Batchelor G. K. Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence // The Physics of Fluids. — 1969. — Vol. 12, No. 12. — P. 233–239.
- Boffetta G. Energy and enstrophy fluxes in the double cascade of two-dimensional turbulence // Journal of Fluid Mechanics. — 2007. — Vol. 589. — P. 253–260.
- Boffetta G., Musacchio S. Evidence for the double cascade scenario in two-dimensional turbulence // Physical Review E. — 2010. — Vol. 82, No. 1. — P. 016307.
- Bouchet F., Venaille A. Statistical mechanics of two-dimensional and geophysical flows // Physics Reports. — 2012. — Vol. 515, No. 5. — P. 227–295.

- Brandenburg A., Nordlund A.* Astrophysical turbulence modeling // Reports on Progress in Physics. — 2011. — Vol. 74, No. 4. — P. 046901.
- Charney J. G.* Geostrophic turbulence // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1971. — Vol. 28, No. 6. — P. 1087–1095.
- Chertkov M., Connaughton C., Kolokolov I., Lebedev V.* Dynamics of energy condensation in two-dimensional turbulence // Physical Review Letters. — 2007. — Vol. 99, No. 8. — P. 084501.
- Couder Y., Chomaz J., Rabaud M.* On the hydrodynamics of soap films // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1989. — Vol. 37, No. 1–3. — P. 384–405.
- Farge M., Schneider K., Kevlahan N.* Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis // Physics of Fluids. — 1999. — Vol. 11, No. 8. — P. 2187–2201.
- Francois N., Xia H., Punzmann H., Shats M.* Inverse energy cascade and emergence of large coherent vortices in turbulence driven by faraday waves // Physical Review Letters. — 2013. — Vol. 110, No. 19. — P. 194501.
- Frisch U., Sulem P.-L.* Numerical simulation of the inverse cascade in two-dimensional turbulence // The Physics of Fluids. — 1984. — Vol. 27, No. 8. — P. 1921–1923.
- Gage K. S.* Evidence for $k^{-5/3}$ law inertial range in mesoscale two-dimensional turbulence // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1979. — Vol. 36, No. 10. — P. 1950–1954.
- Gage K. S., Nastrom G. D.* Theoretical interpretation of atmospheric wavenumber spectra of wind and temperature observed by commercial aircraft during GASP // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1986. — Vol. 43, No. 7. — P. 729–740.
- Galperin B., Nakano H., Huang H.-P., Sukoriansky S.* The ubiquitous zonal jets in the atmospheres of giant planets and Earth's oceans // Geophysical Research Letters. — 2004. — Vol. 31, No. 13. — P. 13303.
- Gharib M., Derango P.* A liquid film (soap film) tunnel to study two-dimensional laminar and turbulent shear flows // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1989. — Vol. 37, No. 1–3. — P. 406–416.
- Guerrero J.* A crash introduction to the finite volume method and discretization schemes in OpenFOAM // OpenFOAM Beginner training session presented at the 15th OpenFOAM workshop. June 22–26, 2020. — Arlington, VA, USA, 2020.
- Hossain M., Matthaeus W. H., Montgomery D.* Long-time states of inverse cascades in the presence of a maximum length scale // Journal of Plasma Physics. — 1983. — Vol. 30, No. 3. — P. 479–493.
- Kraichnan R. H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence // The Physics of Fluids. — 1967. — Vol. 10, No. 7. — P. 1417–1423.
- Leith C. E.* Diffusion approximation for two-dimensional turbulence // The Physics of Fluids. — 1968. — Vol. 11, No. 3. — P. 671–672.
- Kulikov Yu. M., Son E. E.* CABARET scheme implementation for free shear layer modeling // Computer Research and Modeling. — 2017. — Vol. 9, No. 6. — P. 881–903.
- Kulikov Yu. M., Son E. E.* The CABARET method for a weakly compressible fluid flows in one- and two-dimensional implementations // Journal of Physics: Conference Series. — 2016. — Vol. 774. — P. 012094.
- Lilly D. K.* Numerical simulation of two-dimensional turbulence // The Physics of Fluids. — 1969. — Vol. 12, No. 12. — P. II-240–II-249.
- Lilly D. K.* Numerical simulation studies of two-dimensional turbulence. I. Models of statistically steady turbulence // Geophysical Fluid Dynamics. — 1972. — Vol. 3, No. 4. — P. 289–319.
- Lilly D. K.* Two-dimensional turbulence generated by energy sources at two scales // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1989. — Vol. 46, No. 13. — P. 2026–2030.
- MacCormack R. W.* The effect of viscosity in hypervelocity impact cratering // Frontiers of Computational Fluid Dynamics. — 2001. — P. 27–43.

- McDonough J.M.* Introductory lectures on turbulence. — CreateSpace Independent Publishing Platform, 2014.
- Moukalled F., Mangani L., Darwish M.* The finite volume method in computational fluid dynamics. An advanced introduction with OpenFOAM and Matlab. — Springer International, 2016.
- Mukhopadhyay B., Afshordi N., Narayan R.* Bypass to turbulence in hydrodynamic accretion disks: an eigenvalue approach // *The Astrophysical Journal*. — 2005. — Vol. 629, No. 1. — P. 383–396.
- Nilsson H.* A look inside icoFoam (and pisoFoam) // MSc/PhD course in CFD with OpenSource software. — Chalmers University of Technology, 2013.
- Orlov A.V., Brazhnikova M.Yu., Levchenko A.A.* Large-scale coherent vortex formation in two-dimensional turbulence // *JETP Letters*. — 2018. — Vol. 107, No. 3. — P. 157–162.
- Paret J., Jullien M.-C., Tabeling P.* Vorticity statistics in the two-dimensional enstrophy cascade // *Physical Review Letters*. — 1999. — Vol. 83, No. 17. — P. 3418–3421.
- Paret J., Marteau D., Paireau O., Tabeling P.* Are flows electromagnetically forced in thin stratified layers two dimensional? // *Physics of Fluids*. — 1997. — Vol. 9, No. 10. — P. 3102–3104.
- Paret J., Tabeling P.* Experimental observation of the two-dimensional inverse energy cascade // *Physical Review Letters*. — 1997. — Vol. 79, No. 21. — P. 4162–4165.
- Paret J., Tabeling P.* Intermittency in the two-dimensional inverse cascade of energy: experimental observations // *Physics of Fluids*. — 1998. — Vol. 10, No. 12. — P. 3126–3136.
- Perlekar P., Pandit R.* Statistically steady turbulence in thin films: direct numerical simulations with Ekman friction // *New Journal of Physics*. — 2009. — Vol. 11, No. 7. — P. 073003.
- Read P.L.* Transition to geostrophic turbulence in the laboratory, and as a paradigm in atmospheres and oceans // *Surveys in Geophysics*. — 2001. — Vol. 22, No. 3. — P. 265–317.
- Rhines P.B.* Geostrophic turbulence // *Annual Review of Fluid Mechanics*. — 1979. — Vol. 11, No. 1. — P. 401–441.
- Richardson L.F., Lynch P.* Weather prediction by numerical process. — Cambridge University Press, 2007.
- Rivera M., Vorobieff P., Ecke R.E.* Turbulence in flowing soap films: velocity, vorticity, and thickness fields // *Physical Review Letters*. — 1998. — Vol. 81, No. 7. — P. 1417–1420.
- Rivera M., Wu X.-L.* External dissipation in driven two-dimensional turbulence // *Physical Review Letters*. — 2000. — Vol. 85, No. 5. — P. 976–979.
- Rivera M., Wu X.-L.* Homogeneity and the inertial range in driven two-dimensional turbulence // *Physics of Fluids*. — 2002. — Vol. 14, No. 9. — P. 3098–3108.
- Rivera M., Wu X.-L., Yeung C.* Universal distribution of centers and saddles in two-dimensional turbulence // *Physical Review Letters*. — 2001. — Vol. 87, No. 4. — P. 044501.
- Rivera M.K., Daniel W.B., Chen S.Y., Ecke R.E.* Energy and enstrophy transfer in decaying two-dimensional turbulence // *Physical Review Letters*. — 2003. — Vol. 90, No. 10. — P. 104502.
- Rutgers M.A.* Forced 2D turbulence: experimental evidence of simultaneous inverse energy and forward enstrophy cascades // *Physical Review Letters*. — 1998. — Vol. 81, No. 11. — P. 2244–2247.
- Scott R.B., Arbic B.K.* Spectral energy fluxes in geostrophic turbulence: implications for ocean energetics // *Journal of Physical Oceanography*. — 2007. — Vol. 37, No. 3. — P. 673–688.
- Scott R.K., Polvani L.M.* Forced-dissipative shallow-water turbulence on the sphere and the atmospheric circulation of the giant planets // *Journal of the Atmospheric Sciences*. — 2007. — Vol. 64, No. 9. — P. 3158–3176.
- Siggia E.D., Aref H.* Point-vortex simulation of the inverse energy cascade in two-dimensional turbulence // *The Physics of Fluids*. — 1981. — Vol. 24, No. 1. — P. 171–173.
- Smith L.M., Yakhot V.* Bose condensation and small-scale structure generation in a random force driven 2D turbulence // *Physical Review Letters*. — 1993. — Vol. 71, No. 3. — P. 352–355.

- Smith L. M., Yakhot V.* Finite-size effects in forced two-dimensional turbulence // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1994. — Vol. 274. — P. 115–138.
- Sommeria J.* Experimental study of the two-dimensional inverse energy cascade in a square box // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1986. — Vol. 170. — P. 139–168.
- Tran C. V., Bowman J. C.* Robustness of the inverse cascade in two-dimensional turbulence // *Physical Review E*. — 2004. — Vol. 69, No. 3. — P. 168–183.
- Tulloch R., Smith K. S.* A theory for the atmospheric energy spectrum: depth-limited temperature anomalies at the tropopause // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2006. — Vol. 103, No. 40. — P. 14690–14694.
- Xia H., Shats M., Falkovich G.* Spectrally condensed turbulence in thin layers // *Physics of Fluids* — 2009. — Vol. 21, No. 12. — P. 125101.