

УДК: 519.2

Стохастические переходы от порядка к хаосу в метапопуляционной модели с миграцией

А. В. Беляев

Уральский федеральный университет,
Россия, 620000, г. Екатеринбург, ул. Ленина, д. 51

E-mail: belyaev.alexander1337@yandex.ru

Получено 25.03.2024, после доработки — 23.06.2024.

Принято к публикации 24.06.2024.

Данная работа посвящена исследованию проблемы моделирования и анализа динамических режимов, как регулярных, так и хаотических, в системах связанных популяций в присутствии случайных возмущений. В качестве исходной детерминированной популяционной модели рассматривается дискретная модель Рикера. В работе исследуется динамика двух популяций, связанных миграцией. Миграция пропорциональна разнице между плотностями двух популяций с коэффициентом связи, который отвечает за силу миграционного потока. Изолированные популяционные подсистемы, не учитывающие миграцию и моделируемые отображением Рикера, демонстрируют различные динамические режимы: равновесный, периодический и хаотический. В данной работе в качестве бифуркационного параметра используется коэффициент связи, а также фиксируются параметры естественного прироста популяций, при которых одна из подсистем находится в равновесном режиме, а во второй преобладает хаотический режим. Связывание двух популяций посредством миграции порождает новые динамические режимы, не наблюдавшиеся в изолированной модели. Целью данной статьи является анализ динамических режимов корпоративной динамики при вариации интенсивности перетоков между популяционными подсистемами. В статье представлен бифуркационный анализ аттракторов детерминированной модели двух связанных популяций, выявлены зоны моно- и бистабильности, даны примеры регулярных и хаотических аттракторов. Основной акцент данной работы сделан на сравнении устойчивости динамических режимов к случайным возмущениям в коэффициенте интенсивности миграции. Методами прямого численного моделирования выявлены и описаны индуцированные шумом переходы с периодического аттрактора на хаотический. В статье представлены результаты анализа стохастических явлений с помощью показателя Ляпунова. Показано, что в рассматриваемой модели существует зона изменения бифуркационного параметра, при котором даже с увеличением интенсивности случайных возмущений не происходит переход от порядка к хаосу. Для аналитического исследования вызванных шумом переходов применены техника функции стохастической чувствительности и метод доверительных областей. В работе показано, как с помощью этого математического аппарата можно предсказать критическую интенсивность шума, вызывающую трансформацию периодического режима в хаотический.

Ключевые слова: метапопуляция, связанные системы, случайные возмущения, стохастическая чувствительность, переход «порядок – хаос», модель Рикера

Работа выполнена при поддержке Уральского математического центра (соглашение 075-02-2024-1428).

UDC: 519.2

Stochastic transitions from order to chaos in a metapopulation model with migration

A. V. Belyaev

Ural Federal University,
51 Lenina st., Ekaterinburg, 620000, Russia

E-mail: belyaev.alexander1337@yandex.ru

Received 25.03.2024, after completion — 23.06.2024.

Accepted for publication 24.06.2024.

This paper focuses on the problem of modeling and analyzing dynamic regimes, both regular and chaotic, in systems of coupled populations in the presence of random disturbances. The discrete Ricker model is used as the initial deterministic population model. The paper examines the dynamics of two populations coupled by migration. Migration is proportional to the difference between the densities of two populations with a coupling coefficient responsible for the strength of the migration flow. Isolated population subsystems, modeled by the Ricker map, exhibit various dynamic modes, including equilibrium, periodic, and chaotic ones. In this study, the coupling coefficient is treated as a bifurcation parameter and the parameters of natural population growth rate remain fixed. Under these conditions, one subsystem is in the equilibrium mode, while the other exhibits chaotic behavior. The coupling of two populations through migration creates new dynamic regimes, which were not observed in the isolated model. This article aims to analyze the dynamics of corporate systems with variations in the flow intensity between population subsystems. The article presents a bifurcation analysis of the attractors in a deterministic model of two coupled populations, identifies zones of monostability and bistability, and gives examples of regular and chaotic attractors. The main focus of the work is in comparing the stability of dynamic regimes against random disturbances in the migration intensity. Noise-induced transitions from a periodic attractor to a chaotic attractor are identified and described using direct numerical simulation methods. The Lyapunov exponents are used to analyze stochastic phenomena. It has been shown that in this model, there is a region of change in the bifurcation parameter in which, even with an increase in the intensity of random perturbations, there is no transition from order to chaos. For the analytical study of noise-induced transitions, the stochastic sensitivity function technique and the confidence domain method are used. The paper demonstrates how this mathematical tool can be employed to predict the critical noise intensity that causes a periodic regime to transform into a chaotic one.

Keywords: metapopulation, coupled systems, random disturbances, stochastic sensitivity, chaos – order transition, Ricker model

Citation: *Computer Research and Modeling*, 2024, vol. 16, no. 4, pp. 959–973 (Russian).

This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project 075-02-2024-1428) for the development of the regional scientific and educational mathematical center “Ural Mathematical Center”.

Введение

В настоящее время исследовательский интерес в области математического моделирования направлен на изучение сложных явлений, наблюдаемых в связанных системах. Большое количество работ посвящено таким явлениям, как синхронизация [Pikovski, Rosenblum, Kurths, 2001; Boccaletti et al., 2018] и самоорганизация [Nicolis, Prigogine, 1977; Cross, Greenside, 2009]. В последнее время активно исследуются динамические режимы химер в связанных системах (см., например, [Kuramoto, Battogtokh, 2002; Panaggio, Abrams, 2015; Zakharova, 2020]). Наряду с моделями связанных механических, электронных и нейронных систем, которые рассматривались уже давно, начали изучаться модели метапопуляций [Базыкин, 2003]. Ключевое в этом термине — наличие на некотором ареале достаточно изолированных местообитаний с проживающими в них локальными популяциями (субпопуляциями), особи которых совершают постоянные или сезонные миграции из одного местообитания в другое [Фрисман и др., 2019]. Например, местообитания популяций могут быть сформированы неоднородно, и, предположив, что для развития популяции значимыми процессами являются размножение и зимовка, миграция может быть только один раз за сезон, а именно либо до периода размножения, либо после него [Кулаков, Фрисман, 2010].

Предложенная Робертом Мэйем исследовательская парадигма «простая модель – сложная динамика» [May, 1976] является важной отправной точкой во многих различных исследованиях. Простые модели метапопуляций, описывающие сложные сценарии совместной динамики двух популяций логистического типа, рассматривались во многих работах (см., например, [Sakaguchi, Tomita, 1987; Maistrenko et al., 1998; Tanaka, Sanjuán, Aihara, 2005; Bashkirtseva, Ryashko, 2021a]). В этих моделях были обнаружены различные нелинейные динамические режимы, такие как мультистабильность, трансверсальная неустойчивость и фрактальные бассейны [Maistrenko et al., 1998], двухпериодические хаотические аттракторы [Sakaguchi, Tomita, 1987], вызванная кризисом перемежаемость [Tanaka, Sanjuán, Aihara, 2005], двумерные торы [Жусубалиев, Яночкина, 2009] и т. д. В качестве основного инструмента для анализа этих режимов и их трансформаций используется современная теория бифуркаций.

Следует принять во внимание тот факт, что в популяционных системах неопределенность окружающей среды является важным фактором. Случайные колебания среды могут кардинально изменить динамическое поведение системы, порождая режимы, не имеющие аналогов в исходной детерминированной модели (см., например, [Lande, Engen, Saether, 2003; Greenman, Benton, 2005]). Шум в нелинейных системах играет конструктивную роль [Horsthemke, Lefever, 1984; Anishchenko et al., 2007]. В настоящее время для моделей связанных систем активно изучаются индуцированные шумом изменения режимов динамики, синхронизация и переходы «порядок – хаос» (см., например, [Kraut, Feudel, 2002; Lin, Chen, 2006; Sun, Zhao, 2012; Zhang et al., 2020; Bashkirtseva, Ryashko, Pisarchik, 2021; Rybalova et al., 2022; Ryashko, Belyaev, Bashkirtseva, 2023]).

В анализе стохастических явлений, наряду с традиционными методами прямого численного моделирования, активно разрабатывается подход, который основан на аналитических аппроксимациях вероятностных распределений. Для описания разброса случайных состояний вокруг аттракторов используются доверительные области, построенные с помощью метода функции стохастической чувствительности (ФСЧ) [Башкирцева, Ряшко, Цветков, 2009; Bashkirtseva, Ryashko, Tsvetkov, 2010; Bashkirtseva, Ryashko, 2021b]. Эффективность этого подхода при анализе стохастических моделей из различных областей естествознания была показана в работах [Беляев, Перевалова, 2020; Bashkirtseva, Ryashko, 2017; Ryashko, 2018; Bashkirtseva, Ryashko, Pisarchik, 2021; Alexandrov et al., 2021].

Наряду с классическим логистическим отображением, в математическом моделировании динамики популяций широко используется дискретная модель, предложенная Рикером [Ricker,

1954; Quinn, Deriso, 1999; Bjorkstedt, 2012; Bashkirtseva, Ryashko, 2018]. Например, в статье [Кулаков, Фрисман, 2010] исследуются бифуркационные механизмы синфазной и противофазной синхронизации мультистабильных режимов систем связанных отображений, построенных на основе модели Рикера и описывающих динамику популяций с миграцией. В настоящей работе рассматривается система, состоящая из двух связанных подсистем, каждая из которых моделируется дискретным отображением Рикера. Изолированные подсистемы могут демонстрировать различные динамические режимы: равновесный, периодический и хаотический. Анализ стохастических эффектов в метапопуляциях с миграцией проводился в работах [Belyaev, Bashkirtseva, Ryashko, 2022; Ryashko, Belyaev, Bashkirtseva, 2023]. Целью данной статьи является анализ динамических режимов корпоративной динамики при вариации интенсивности перетоков между популяционными подсистемами, одна из которых изначально находится в равновесном режиме, а другая — в хаотическом. В работе сделан акцент на сравнении устойчивости режимов к случайным воздействиям. Показано наличие параметрических зон, в которых даже при малых шумах происходит хаотизация динамического режима, и зон, в которых сохраняется режим порядка и при больших интенсивностях шума.

Режимы динамики детерминированной модели

Исходная детерминированная модель Рикера имеет вид

$$N_{t+1} = N_t \exp\left(\mu\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)\right), \quad (1)$$

где N_t — численность популяции в момент времени t , μ — параметр естественного прироста, а K — емкость экологической ниши. Биологический смысл параметра K можно прояснить следующим образом: если $N_t > K$, то $1 - \frac{N_t}{K} < 0$, и тогда $N_{t+1} < N_t$, что означает уменьшение численности популяции. Таким образом, K играет роль порогового значения.

Введение новой биофизической переменной $x_t = \frac{N_t}{K}$, характеризующей демографическое давление, создаваемое популяцией размера N_t в экологической нише размером K , позволяет исключить из уравнения (1) параметр K и исследовать зависимость режимов поведения только от параметра μ :

$$x_{t+1} = x_t \exp(\mu(1 - x_t)).$$

При этом величина K играет роль простого масштабирующего множителя: $N_t = Kx_t$.

Тогда динамика изолированной популяции моделируется следующим образом:

$$x_{t+1} = f(\mu, x_t), \quad f(\mu, x) = x \exp(\mu(1 - x)), \quad (2)$$

где μ — параметр естественного прироста. На рис. 1 изображена бифуркационная диаграмма модели (2) при изменении параметра μ . При $0 \leq \mu < 2$ система имеет в качестве аттрактора устойчивое равновесие. С увеличением параметра μ оно теряет устойчивость, и наблюдается каскад бифуркаций удвоения периода с последующим чередованием параметрических зон порядка и хаоса.

В статье изучается двумерная метапопуляционная модель, состоящая из двух подсистем, связанных взаимной миграцией:

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t \exp\left(\mu_1\left(1 - \frac{N_t}{K_1}\right)\right) + \eta_t, \\ M_{t+1} = M_t \exp\left(\mu_2\left(1 - \frac{M_t}{K_2}\right)\right) - \eta_t, \end{cases} \quad (3)$$

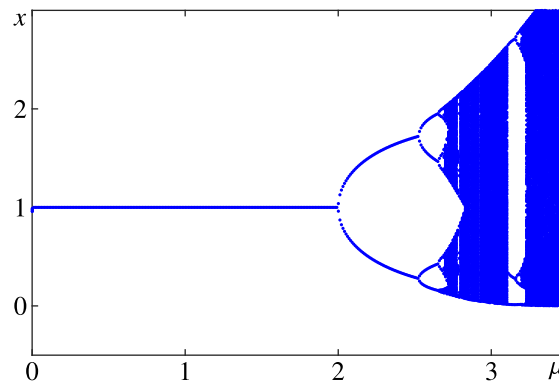


Рис. 1. Бифуркационная диаграмма изолированной системы Рикера (2)

где N_t и M_t — численности популяций. Каждая из популяций имеет свой коэффициент естественного прироста и свой размер экологической ниши. Предполагается, что взаимная миграция η_t определяется разностью соответствующих демографических давлений $\frac{N_t}{K_1}$ и $\frac{M_t}{K_2}$:

$$\eta_t = \sigma \left(\frac{M_t}{K_2} - \frac{N_t}{K_1} \right) \quad (4)$$

с коэффициентом пропорциональности σ . Переходя к переменным

$$x_t = \frac{N_t}{K_1}, \quad y_t = \frac{M_t}{K_2},$$

запишем замкнутую систему (3), (4) в виде

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(\mu_1, x_t) + \sigma(y_t - x_t), \\ y_{t+1} = f(\mu_2, y_t) - \sigma(y_t - x_t). \end{cases} \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следует отметить, что в литературе рассматриваются две базовые модели связанных популяций: 1) связь по переменным (см., например, работы [Sakaguchi, Tomita, 1987; Lloyd, 1995; Жусубалиев, Яночкина, 2009]); 2) функциональная связь (см., например, работы [Hastings, 1993; Кулаков, Фрисман, 2010]). Схематично эти модели можно представить так. Пусть динамика изолированных популяций задается следующим образом:

$$x_{t+1} = f(x_t), \quad y_{t+1} = g(y_t).$$

Тогда связь по переменным описывается так:

$$x_{t+1} = f(x_t) + \sigma(y_t - x_t), \quad y_{t+1} = g(y_t) - \sigma(y_t - x_t),$$

а функциональная связь заключается в следующем:

$$x_{t+1} = f(x_t) + \sigma(g(y_t) - f(x_t)), \quad y_{t+1} = g(y_t) - \sigma(g(y_t) - f(x_t)).$$

В текущей работе (см. (5)) используется первый вариант связи (связь по переменным). Таким образом, миграция между популяциями пропорциональна разнице между y_t и x_t с коэффициентом связи $\sigma > 0$: $\eta_t = \sigma(y_t - x_t)$. Параметр σ регулирует силу миграционного потока. Чтобы обеспечить неотрицательность y_t и x_t в системе (5), используется соответствующее усечение.

В работе изучается поведение системы в зависимости от σ в случае, когда первая изолированная подсистема находится в равновесном состоянии с $\mu_1 = 1$, а вторая изолированная подсистема — в хаотическом с $\mu_2 = 2,8$. С биологической точки зрения значительная разница

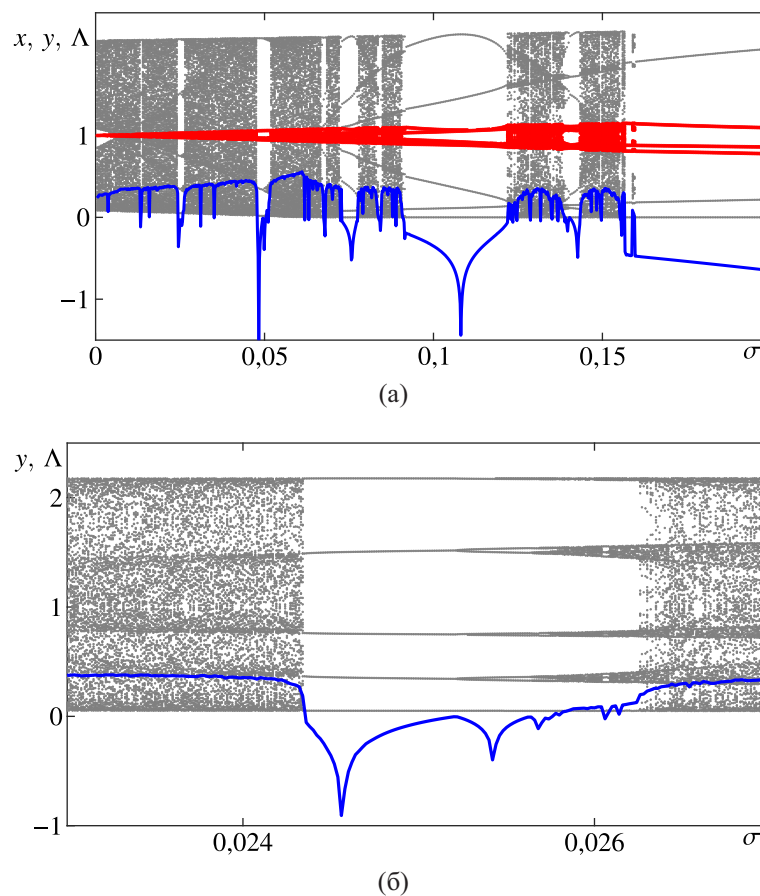


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма для системы (5) при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2,8$: а) $\sigma \in [0; 0,2]$; б) увеличенный фрагмент для $\sigma \in [0,023; 0,027]$

в репродуктивных потенциалах может быть обоснована по-разному. Например, в одинаковых экологических условиях, близких к идеальным, у обеих популяций $\mu = 2,8$. Однако у первой популяции на ее территории обитания условия выживания потомства крайне тяжелые, и в результате эффективное значение параметра роста оказывается существенно меньше, например $\mu = 1$. Ситуация, когда обе популяции имеют низкий результирующий репродуктивный потенциал, была изучена в работе [Belyaev, Bashkirtseva, Ryashko, 2021]. Основной интерес текущей работы заключается в том, чтобы исследовать случай, когда обе популяции имеют существенно отличный репродуктивный потенциал. Изменения динамических режимов в метапопуляционной модели (5) при изменении параметра σ представлены на рис. 2, а, где красным цветом изображены x -координаты аттракторов, а серым — y -координаты. Как видно, здесь наблюдается чередование периодических и хаотических режимов: существует большое окно порядка посередине, а затем в зоне $\sigma > 0,16$ устанавливается порядок в форме устойчивого 3-цикла. Зоны порядка и хаоса хорошо различаются по знаку старшего показателя Ляпунова, изображенного на рис. 2 синим цветом.

На рис. 2, б представлен увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы для $0,023 \leq \sigma \leq 0,027$. Здесь можно видеть, как в результате бифуркации кризиса появляется устойчивый 5-цикл, который после каскада бифуркаций удвоения периода вновь трансформируется в хаос.

На рис. 3 изображены примеры осцилляционных аттракторов системы (5) и соответствующих временных рядов для различных значений параметра σ : а), б) 5-цикл для $\sigma = 0,0246$; в), г) хаос для $\sigma = 0,027$; д), е) 3-цикл для $\sigma = 0,17$.

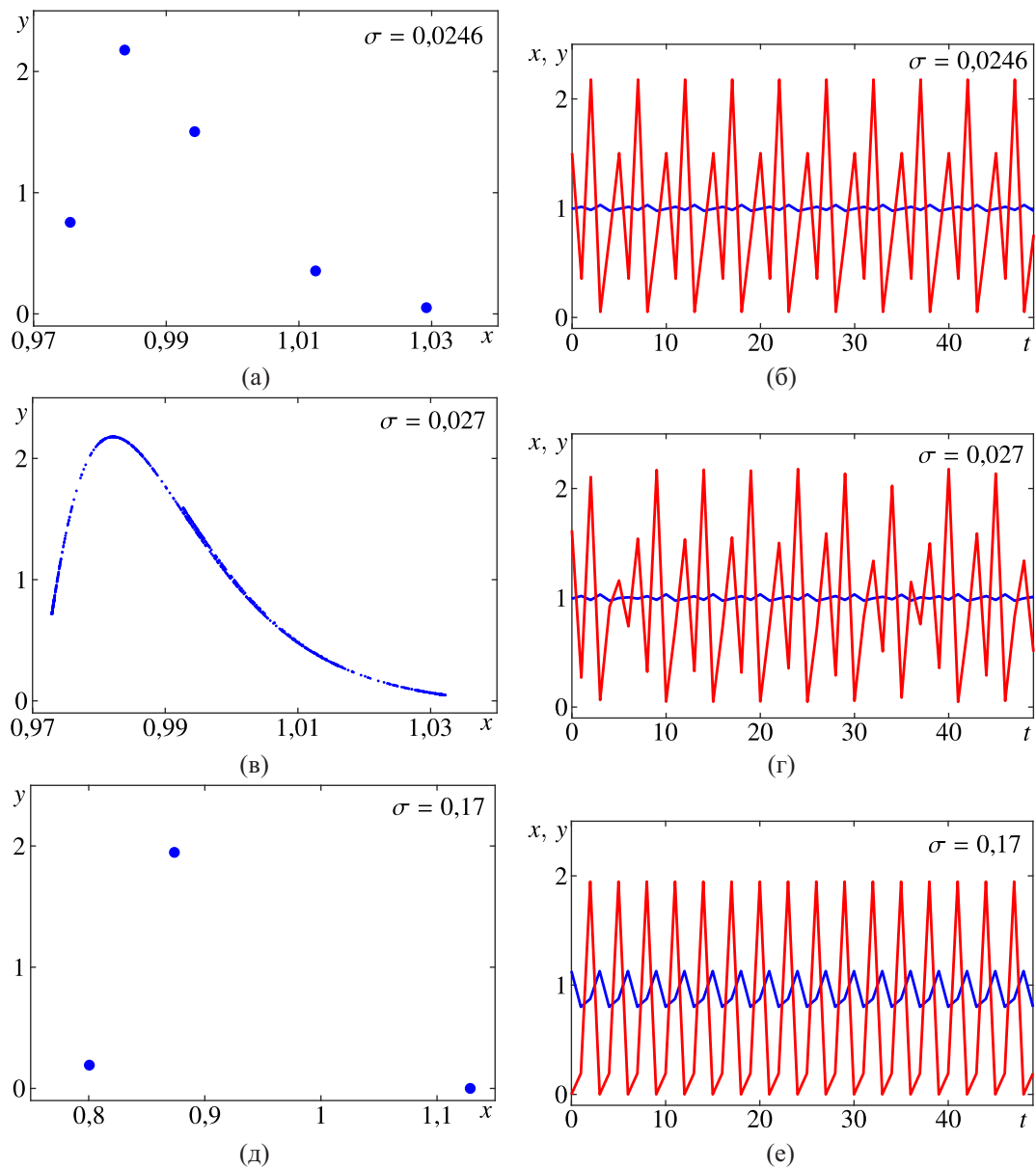


Рис. 3. Аттракторы и временные ряды решений системы (5) при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2,8$: а), б) 5-цикл для $\sigma = 0,0246$; в), г) хаос для $\sigma = 0,027$; д), е) 3-цикл для $\sigma = 0,17$

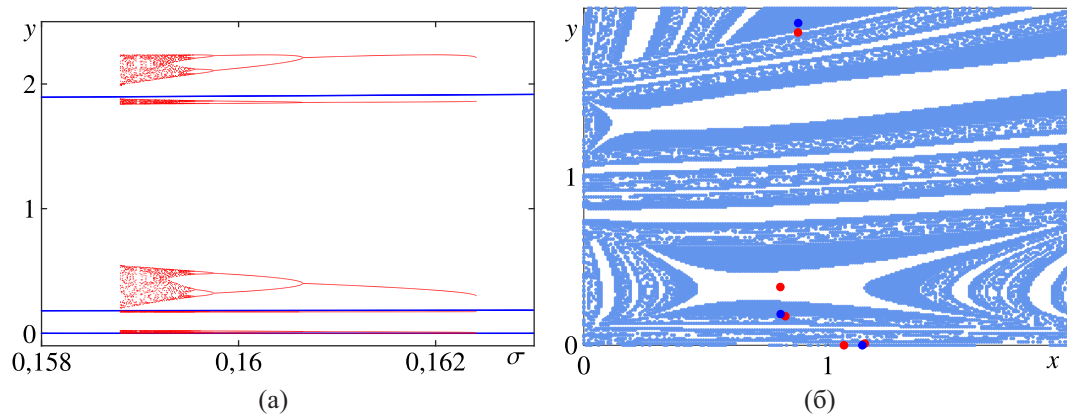


Рис. 4. Зоны бистабильности системы (5) при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2,8$: а) бифуркационная диаграмма; б) бассейны притяжения для $\sigma = 0,162$

Отметим, что изолированная система (2) всегда моностабильна. Однако метапопуляционная система может быть и бистабильна. На рис. 4, *а* показан увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы, изображенной на рис. 2, который иллюстрирует бистабильный режим: синим изображен 3-цикл, а красным — сосуществующий аттрактор, имеющий разную форму. Эта бистабильность для $\sigma = 0,162$ представлена на рис. 4, *б* двумя бассейнами притяжения. Синими точками показан 3-цикл со своей областью притяжения (голубой), а красным цветом изображен 6-цикл с бассейном притяжения (белый).

Стохастическая динамика

В качестве стохастической модели рассматривается система (5), в которой миграции имеют вид $\eta_t = (\sigma + \varepsilon \xi_t)(y_t - x_t)$. Здесь исследуется случай, когда случайным возмущениям подвержен коэффициент связи σ , ξ_t — независимые гауссовские шумы интенсивности ε . Рассмотрим, как этот случайный шум в коэффициенте связи изменяет динамику системы.

На рис. 5 изображена бифуркационная диаграмма с показателями Ляпунова для $0,023 \leq \sigma \leq 0,027$ и разной интенсивности шума: $\varepsilon = 0$ (синий), $\varepsilon = 0,0002$ (красный), $\varepsilon = 0,0005$ (зеленый). Можно заметить, что с увеличением интенсивности шума зона порядка сужается и впоследствии исчезает, что подтверждается показателями Ляпунова. Так, например, при $\varepsilon = 0,0005$ стохастическая система на всем интервале $0,023 \leq \sigma \leq 0,027$ является хаотической.

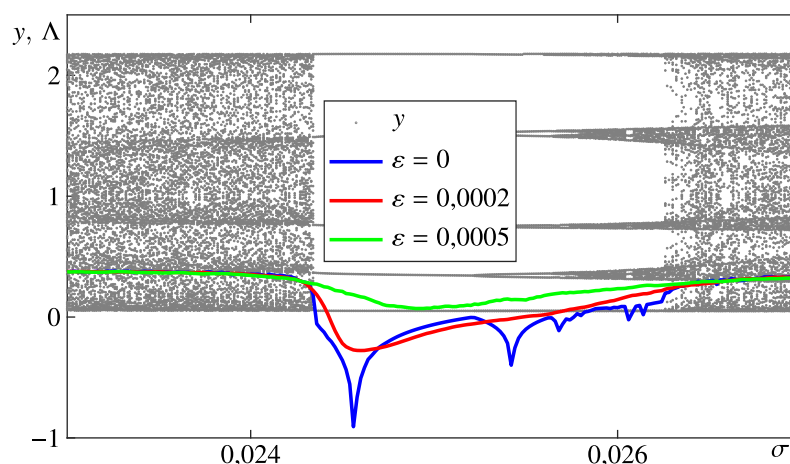


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма для детерминированной системы (5) при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2,8$ и показатели Ляпунова для различных значений интенсивности шума

Рассмотрим подробнее вызванную шумом стохастическую трансформацию 5-цикла в хаотический аттрактор. На рис. 6 для $\sigma = 0,0246$ представлена зависимость распределения точек аттрактора от интенсивности шума. Отчетливо видно, что при малых шумах случайные состояния концентрируются вблизи точек цикла. Однако когда интенсивность шума превосходит некоторое критическое значение, форма распределения случайных состояний резко меняется — начинаются переходы между состояниями цикла. Изменение формы распределения сопровождается переходом к хаосу, что подтверждается положительными значениями показателя Ляпунова, изображенного красным цветом на рис. 6, *б*.

Реакция детерминированного цикла на случайные возмущения может быть описана с помощью метода функции стохастической чувствительности [Bashkirtseva, Chen, Ryashko, 2010; Tsvetkov, Bashkirtseva, Ryashko, 2021]. В случае 5-цикла (например, для $\sigma = 0,0246$) эта функция представляет собой набор из пяти матриц W_i ($i = 1, \dots, 5$). Каждая матрица характеризует

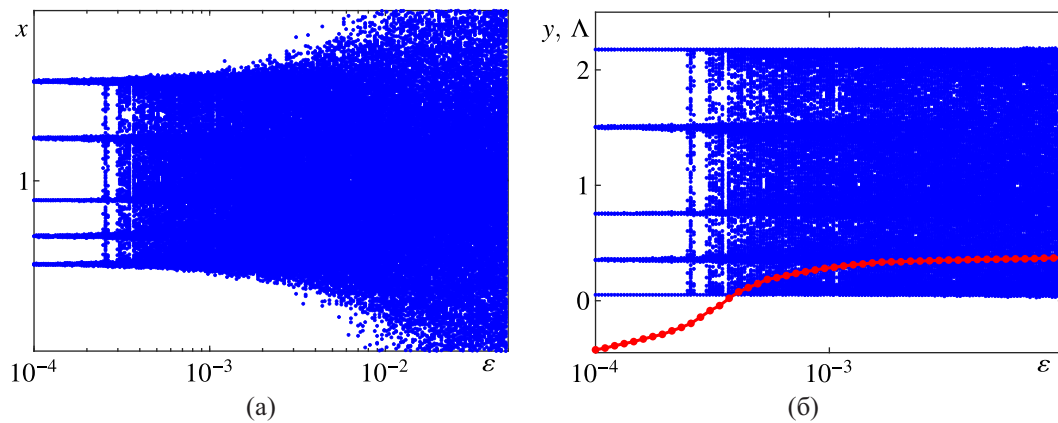


Рис. 6. Координаты состояний стохастической системы (5) при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2,8$ для $\sigma = 0.0246$ (5-цикл) в зависимости от интенсивности шума. Старший показатель Ляпунова изображен красным цветом

чувствительность определенной точки 5-цикла к шуму. Алгоритм построения этих матриц представлен в [Bashkirtseva, Ryashko, Tsvetkov, 2010].

Для каждой матрицы W_i ($i = 1, \dots, 5$) можно найти собственные значения $m_{i,1}$, $m_{i,2}$ и соответствующие ортонормированные собственные векторы $u_{i,1}$, $u_{i,2}$. Эти собственные значения и векторы позволяют аппроксимировать дисперсию случайных состояний вокруг i -й точки детерминированного цикла в виде доверительного эллипса E_i :

$$\frac{z_1^2}{m_{i,1}} + \frac{z_2^2}{m_{i,2}} = -2\varepsilon^2 \ln(1 - \text{Pr}), \quad i = 1, \dots, 5. \quad (6)$$

Здесь z_1, z_2 — координаты эллипса E_i в базисе собственных векторов $u_{i,1}, u_{i,2}$ ($i = 1, \dots, 5$), а Pr — доверительная вероятность.

На рис. 7, а показаны фазовые траектории решений, стартующих с детерминированного 5-цикла. При малом значении интенсивности шума ($\varepsilon = 0,0001$) случайные состояния (красный цвет) локализируются вокруг точек 5-цикла. С увеличением интенсивности шума ($\varepsilon = 0,0004$) распределение случайных состояний (синий цвет) принимает качественно иную пространственную форму. Стоит отметить, что это стохастическое распределение очень похоже на детерминированный хаос (см. рис. 3, в), что объясняется особенностью данной модели. Что касается переходного процесса в детерминированной системе, здесь в зависимости от начальной точки возможны два сценария: решение имеет короткий переходный процесс к циклу либо достаточно долгий хаотический переходный процесс, достаточно далекий от точек цикла. Начальные состояния, отвечающие коротким переходным процессам, изображены на рис. 7, б синим цветом, а длинным переходным процессам — белым цветом. Видно, что синие точки вблизи состояния цикла формируют некоторую сплошную полосу (бассейн А). Вне этой полосы (бассейн Б) синие точки в любой сколь угодно малой окрестности соседствуют с белыми.

Действительно, при слабом шуме случайные состояния локализованы вблизи детерминированного цикла и не выходят из бассейна А. При увеличении шума дисперсия растет, и случайные решения попадают в бассейн Б, где с высокой вероятностью генерируются хаотические переходные процессы. Такой переход может быть аналитически описан с помощью метода доверительных эллипсов (6). На рис. 7, б изображены эллипсы для $\varepsilon = 0,0001$ (красный пунктир) и $\varepsilon = 0,0004$ (синий пунктир). Как видим, переход эллипса из бассейна А в бассейн Б может быть использован для оценки критического значения интенсивности шума, отвечающего переходу от порядка к хаосу.

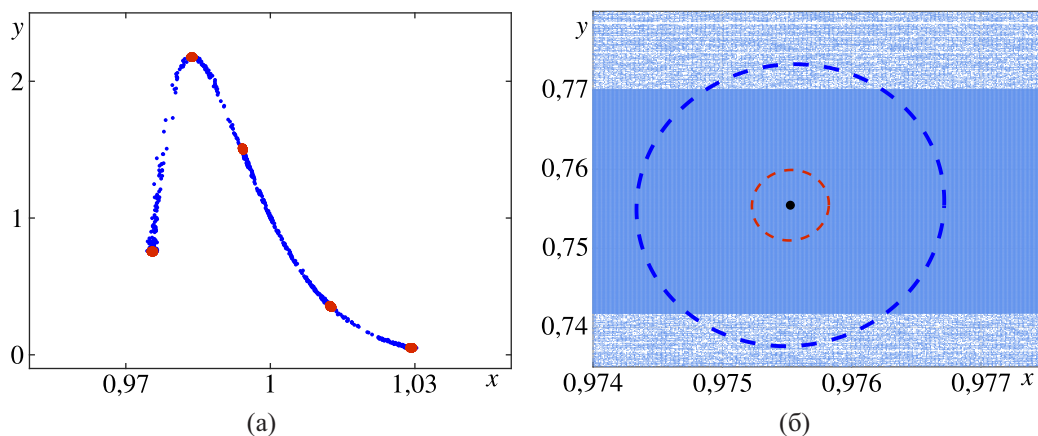


Рис. 7. Стохастические трансформации в системе (5) при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2,8$ для $\sigma = 0,0246$: а) фазовые траектории решений для 5-цикла при $\varepsilon = 0,0001$ (красный) и $\varepsilon = 0,0004$ (синий); б) доверительные эллипсы при $\varepsilon = 0,0001$ (красный пунктир) и $\varepsilon = 0,0004$ (синий пунктир) для точки 5-цикла

Рассмотрим теперь влияние шума на поведение метапопуляционной системы в зоне $0,046 \leq \sigma \leq 0,054$. В этой зоне наблюдается окно порядка с устойчивым 3-циклом. Для этой зоны на рис. 8 показаны детали бифуркационной диаграммы с показателями Ляпунова для разной интенсивности шума: $\varepsilon = 0$ (синий цвет), $\varepsilon = 0,0002$ (красный цвет), $\varepsilon = 0,001$ (зеленый цвет). Здесь, аналогично случаю, рассмотренному на рис. 5, можно видеть, что с увеличением интенсивности шума зона порядка сужается и затем исчезает. В системе происходит переход от порядка к хаосу, что подтверждается показателем Ляпунова, например, для $\varepsilon = 0,001$. Как видим, здесь 3-цикл трансформируется в хаотический аттрактор при гораздо большем шуме, чем рассмотренный выше 5-цикл.

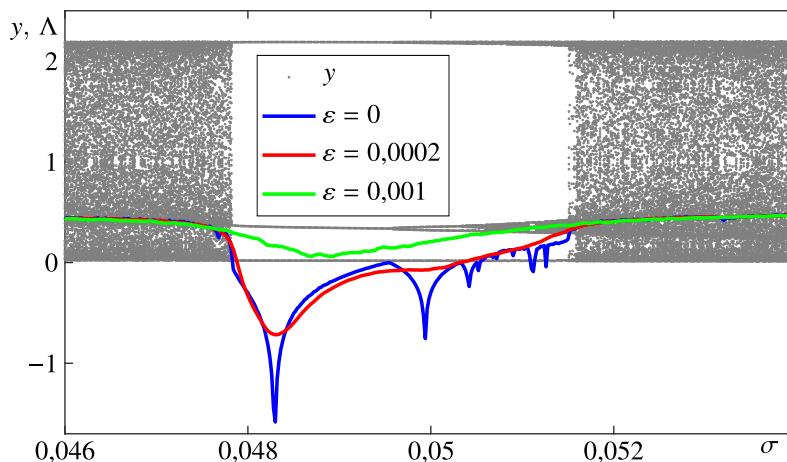


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма для системы (5) при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2,8$ с показателями Ляпунова

Проанализируем детали стохастической трансформации 3-цикла для $\sigma = 0,0483$ из окна порядка (рис. 8). На рис. 9 представлена зависимость распределения точек аттрактора от интенсивности шума. В данном случае также хорошо заметно, что с увеличением интенсивности шума происходит переход от 3-цикла к хаотическому аттрактору, что подтверждается показателем Ляпунова на рис. 9, б.

Теперь рассмотрим достаточно большую параметрическую зону $0,15 \leq \sigma \leq 0,51$, где регулярным аттрактором системы тоже является 3-цикл. На рис. 10 изображена бифуркационная

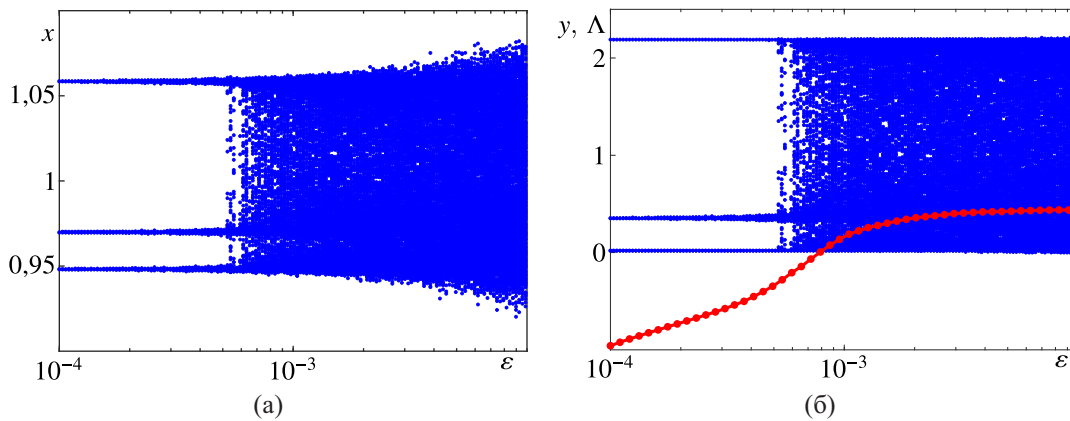


Рис. 9. Координаты случайных состояний системы (5) при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2,8$ для $\sigma = 0.0483$ (3-цикл) в зависимости от интенсивности шума с показателем Ляпунова (красный)

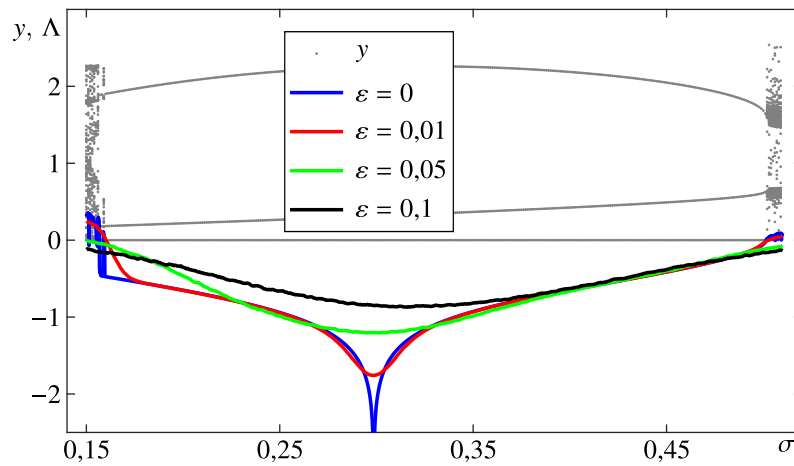


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма для системы (5) при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2.8$ с показателями Ляпунова

диаграмма с показателями Ляпунова для разной интенсивности шума: $\varepsilon = 0$ (синий цвет), $\varepsilon = 0,01$ (красный цвет), $\varepsilon = 0,05$ (зеленый цвет), $\varepsilon = 0,1$ (черный цвет). В отличие от случаев выше, эта зона 3-цикла устойчива к шуму и сохраняет режим порядка, что подтверждается показателями Ляпунова.

Исследуем влияние случайного шума на 3-циклы из зоны $0,15 \leq \sigma \leq 0,51$, а именно для $\sigma = 0,17$ (рис. 11, а, б) и для $\sigma = 0,45$ (рис. 11, в, г). На рис. 11 представлена зависимость распределения точек аттрактора от интенсивности шума. Отчетливо видно, что при увеличении интенсивности шума случайные состояния 3-цикла размываются и формируют случайное распределение. Как видим, здесь, в отличие от рассмотренных выше случаев, показатель Ляпунова при увеличении интенсивности шума остается отрицательным, то есть перехода к хаосу не происходит.

В качестве заключительного этапа исследования сравним поведение показателей Ляпунова (рис. 12) в зависимости от интенсивности шума для некоторых значений параметра σ , представляющих все три рассмотренные выше параметрические зоны порядка. Как видно на рис. 12, а, регулярные аттракторы из первой (рис. 5) и второй (рис. 8) параметрических зон чувствительны к внешнему воздействию и наблюдается переход от порядка к хаосу. В третьей же зоне (рис. 10), наоборот, при увеличении интенсивности шума порядок сохраняется (рис. 12, б). При этом показатель Ляпунова для 3-цикла при $\sigma = 0,17$ более чувствителен к изменению шума, чем при $\sigma = 0,45$.

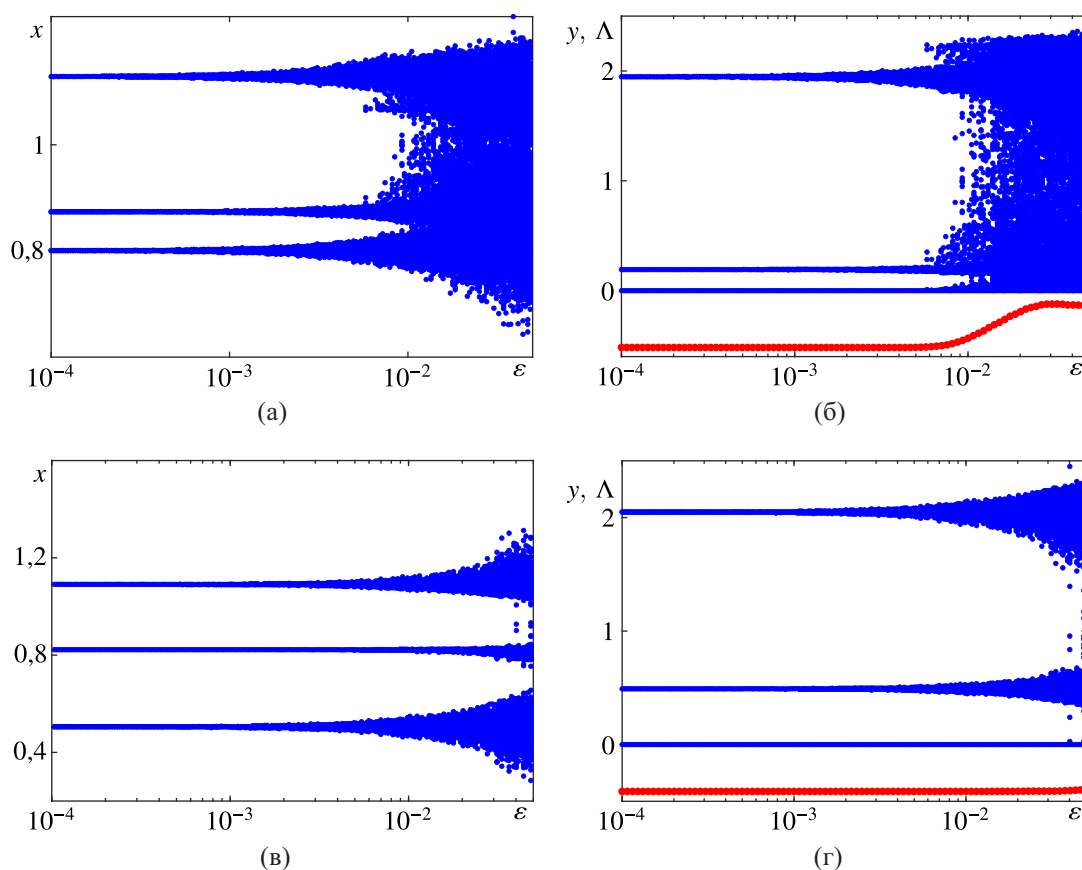


Рис. 11. Координаты случайных состояний системы (5) при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2,8$ для 3-цикла с показателем Ляпунова (красный): а), б) $\sigma = 0,17$; в), г) $\sigma = 0,45$

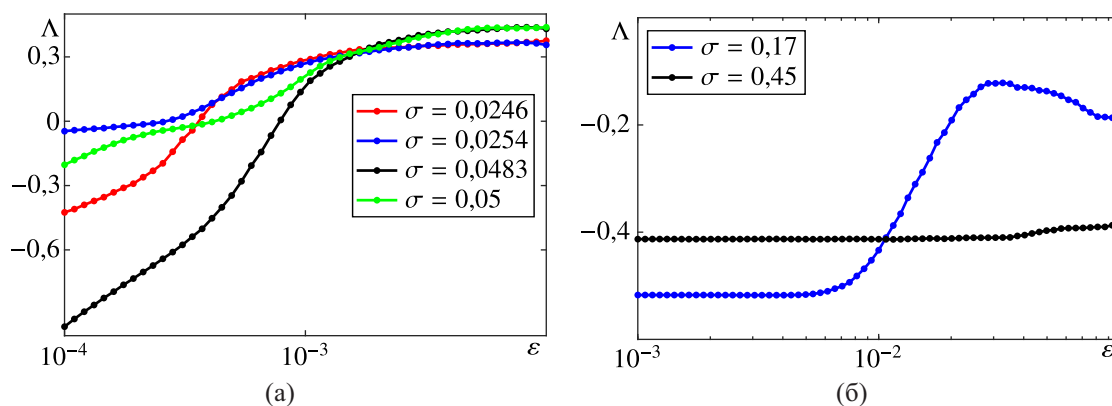


Рис. 12. Показатели Ляпунова системы (5) при $\mu_1 = 1$ и $\mu_2 = 2,8$ для разных значений параметра связи σ в зависимости от интенсивности шума

Заключение

В данной работе исследованы стохастические эффекты в двумерной метапопуляционной модели с миграцией. Каждая из подсистем моделируется отображением Рикера, при этом рассматривается случай, когда в условиях изоляции первая подсистема находится в равновесном режиме, а вторая — в хаотическом. Для детерминированной модели проведен бифуркационный

анализ и локализованы параметрические зоны периодических и хаотических режимов. Методами прямого численного моделирования с использованием показателей Ляпунова исследованы стохастические переходы от порядка к хаосу. В исследовании индуцированных шумом переходов продемонстрированы возможности аналитического подхода, основанного на технике функции стохастической чувствительности и методе доверительных областей. Проведен сравнительный анализ воздействия случайных возмущений на циклы для трех зон порядка. Выявлены условия, при которых происходит переход от периодического режима в хаотический. Показано, что для достаточно больших значений коэффициента связи 3-цикл, описывающий установившийся режим динамики метапопуляции, является устойчивым к шуму, сохраняя свойство порядка. С биологической точки зрения это может быть обосновано неоднородными условиями среды, когда две популяции имеют разный параметр естественного прироста, а также внутренним свойством системы.

Список литературы (References)

- Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
Bazykin A. D. Nelineynaya dinamika vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy [Nonlinear dynamics of interacting populations] // Moscow–Izhevsk: Institut kompyuternykh issledovaniy, 2003 (in Russian).
- Баширцева И. А., Ряшко Л. Б., Цветков И. Н. Стохастическая чувствительность равновесий и циклов одномерных дискретных отображений // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2009. — Т. 17, № 6. — С. 74–85. — <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2009-17-6-74-85>
Bashkirtseva I. A., Ryashko L. B., Tsvetkov I. N. Nelineynaya dinamika vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy [Stochastic sensitivity of equilibrium and cycles for 1D discrete maps] // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. — 2009. — Vol. 17, No. 6. — P. 74–85 (in Russian).
- Беляев А. В., Перевалова Т. В. Стохастическая чувствительность квазипериодических и хаотических аттракторов дискретной модели Лотки–Вольтерры // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. — 2020. — Т. 55. — С. 19–32. — <https://doi.org/10.35634/2226-3594-2020-55-02>
Belyaev A. V., Perevalova T. V. Stokhasticheskaya chuvstvitel'nost' kvaziperiodicheskikh i khaoticheskikh attraktorov diskretnoi modeli Lotki–Vol'terry [Stochastic sensitivity of quasiperiodic and chaotic attractors of the discrete Lotka–Volterra model] // *Izvestiya Instituta matematiki i informatiki Udmurtskogo gosudarstvennogo universiteta*. — 2020. — Vol. 55. — P. 19–32 (in Russian).
- Жусубалиев Ж. Т., Яночкина О. О. Бифуркации двумерного тора в кусочно-гладких динамических системах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2009. — Т. 17, № 6. — С. 86–98. — <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2009-17-6-86-98>
Zhusubaliev Z. T., Yanochkina O. O. Bifurkatsii dvumernogo tora v kusochno-gladkikh dinamicheskikh sistemakh [Bifurcations of a two-dimensional torus in piecewise-smooth dynamical systems] // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. — 2009. — Vol. 17, No 6. — P. 86–98 (in Russian).
- Кулаков М. П., Фрисман Е. Я. Синхронизация 2-циклов в системе симметрично связанных популяций, запас–пополнение в которых описывается функцией Рикера // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 2010. — Т. 18, № 6. — С. 25–41. — <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2010-18-6-25-41>
Kulakov M. P., Frisman E. Ya. Sinkhronizatsiya 2-tsiklov v sisteme simmetrichno svyazannykh populyatsii, zapas–popolnenie v kotorykh opisyyaetsya funktsiei Rikera [Synchronizing the period-2 cycle in the system of symmetrical coupled populations with stock–recruitment based on the Ricker population model] // *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*. — 2010. — Vol. 18, No 6. — P. 25–41 (in Russian).
- Фрисман Е. Я., Кулаков М. П., Ревуцкая О. Л., Жданова О. Л., Неверова Г. П. Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций // Компьютерные исследования и моделирование. — 2019. — Т. 11, № 1. — С. 119–151. — <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151>
Frisman E. Ya., Kulakov M. P., Revutskaya O. L., Zhdanova O. L., Neverova G. P. Osnovnye napravleniya i obzor sovremennogo sostoyaniya issledovaniy dinamiki strukturirovannykh i vzaimodeystvuyushchikh populyatsii [The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations] // *Computer Research and Modeling*. — 2019. — Vol. 11, No 1. — P. 119–151 (in Russian).

- Alexandrov D. V., Bashkirtseva I. A., Crucifix M., Ryashko L. B.* Nonlinear climate dynamics: From deterministic behaviour to stochastic excitability and chaos // *Physics Reports*. — 2021. — Vol. 902. — P. 1–60. — <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2020.11.002>
- Anishchenko V. S., Astakhov V. V., Neiman A. B., Vadivasova T. E., Schimansky-Geier L.* Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems. Tutorial and modern development. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007. — <https://doi.org/10.1007/978-3-540-38168-6>
- Bashkirtseva I., Chen G., Ryashko L.* Analysis of stochastic cycles in the Chen system // *Int. J. Bifurcation and Chaos*. — 2010. — Vol. 20, No. 5. — P. 1439–1450. — <https://doi.org/10.1142/S0218127410026587>
- Bashkirtseva I., Ryashko L.* Chaotic transients, riddled basins, and stochastic transitions in coupled periodic logistic maps // *Chaos*. — 2021a. — Vol. 31. — P. 053101. — <https://doi.org/10.1063/5.0050613>
- Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic sensitivity analysis of noise-induced extinction in the Ricker model with delay and Allee effect // *Bulletin of Mathematical Biology*. — 2018. — Vol. 80, No. 6. — P. 1596–1614. — <https://doi.org/10.1007/s11538-018-0422-6>
- Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic sensitivity analysis of noise-induced phenomena in discrete systems // *Recent Trends in Chaotic, Nonlinear and Complex Dynamics*. — World Scientific Series on Nonlinear Science Series B. — 2021b. — Chap. 8. — P. 173–192.
- Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic sensitivity of regular and multi-band chaotic attractors in discrete systems with parametric noise // *Physics Letters A*. — 2017. — Vol. 381, No. 37. — P. 3203–3210. — <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2017.08.017>
- Bashkirtseva I., Ryashko L., Pisarchik A. N.* Stochastic transitions between in-phase and anti-phase synchronization in coupled map-based neural oscillators // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2021. — Vol. 95. — P. 105611. — <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105611>
- Bashkirtseva I., Ryashko L., Tsvetkov I.* Sensitivity analysis of stochastic equilibria and cycles for the discrete dynamic systems // *Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A: Math. Anal.* — 2010. — Vol. 17. — P. 501–515.
- Belyaev A., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Noise-induced transformations in a system of two coupled equilibrium and chaotic subpopulations // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2022. — Vol. 32, No. 14. — P. 2250220. — <https://doi.org/10.1142/S0218127422502200>
- Belyaev A., Bashkirtseva I., Ryashko L.* Stochastic variability of regular and chaotic dynamics in 2D metapopulation model // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2021. — Vol. 151. — P. 111270. — <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111270>
- Bjorkstedt E. P.* Ricker model // *Encyclopedia of theoretical ecology*. — Berkeley: University of California Press, 2012. — P. 632–636.
- Boccaletti S., Pisarchik A. N., del Genio C. I., Amann A.* Synchronization: from coupled systems to complex networks. — Cambridge: Cambridge University Press, 2018. — <https://doi.org/10.1017/9781107297111>
- Cross M., Greenside H.* Pattern formation and dynamics in nonequilibrium systems. — Cambridge: Cambridge University Press, 2009. — <https://doi.org/10.1017/CBO9780511627200>
- Greenman J. V., Benton T. G.* The impact of environmental fluctuations on structured discrete time population models: Resonance, synchrony and threshold behaviour // *Theoretical Population Biology*. — 2005. — Vol. 68, No. 4. — P. 217–235. — <https://doi.org/10.1016/j.tpb.2005.06.007>
- Hastings A.* Complex interactions between dispersal and dynamics: lessons from coupled logistic equations // *Ecology*. — 1993. — Vol. 74, No. 5. — P. 1362–1372. — <https://doi.org/10.2307/1940066>
- Horsthemke W., Lefever R.* Noise-induced transitions. — Berlin: Springer, 1984. — https://doi.org/10.1007/978-3-642-70196-2_23

- Kraut S., Feudel U. Multistability, noise, and attractor hopping: The crucial role of chaotic saddles // *Phys. Rev. E.* — 2002. — Vol. 66. — P. 015207. — <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.66.015207>
- Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* — 2002. — Vol. 5. — P. 380–385.
- Lande R., Engen S., Saether B.-E. Stochastic population dynamics in ecology and conservation. — Oxford: Oxford University Press, 2003. — <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198525257.001.0001>
- Lin W., Chen G. Using white noise to enhance synchronization of coupled chaotic systems // *Chaos.* — 2006. — Vol. 16. — P. 013134. — <https://doi.org/10.1063/1.2183734>
- Lloyd A.L. The coupled logistic map: a simple model for the effects of spatial heterogeneity on population dynamics // *Journal of Theoretical Biology.* — 1995. — Vol. 173, No. 3. — P. 217–230. — <https://doi.org/10.1006/jtbi.1995.0058>
- Maistrenko Yu. L., Maistrenko V. L., Popovich A., Mosekilde E. Transverse instability and riddled basins in a system of two coupled logistic maps // *Phys. Rev. E.* — 1998. — Vol. 57. — P. 2713–2724. — <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.57.2713>
- May R. Simple mathematical models with very complicated dynamics // *Nature.* — 1976. — Vol. 261. — P. 459–467. — <https://doi.org/10.1038/261459a0>
- Nicolis G., Prigogine I. Self-organization in nonequilibrium systems. — New York: Wiley, 1977.
- Panaggio M.J., Abrams D.M. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // *Nonlinearity.* — 2015. — Vol. 28, No. 3. — P. R67–R87. — <https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/3/R67>
- Pikovski A., Rosenblum M., Kurths J. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. — Cambridge: Cambridge University Press, 2001. — <https://doi.org/10.1017/CBO9780511755743>
- Quinn T.J., Deriso R.B. Quantitative fish dynamics. — Oxford: Oxford University Press, 1999.
- Ricker W.E. Stock and recruitment // *J. Fish. Res. Board. Can.* — 1954. — Vol. 11. — P. 559–623. — <https://doi.org/10.1139/f54-039>
- Ryashko L. Sensitivity analysis of the noise-induced oscillatory multistability in Higgins model of glycolysis // *Chaos.* — 2018. — Vol. 28, No. 3. — P. 033602. — <https://doi.org/10.1063/1.4989982>
- Ryashko L., Belyaev A., Bashkirtseva I. Noise-induced switching in dynamics of oscillating populations coupled by migration // *Chaos.* — 2023. — Vol. 33, No. 6. — P. 063143. — <https://doi.org/10.1063/5.0153675>
- Rybalova E.V., Vadivasova T.E., Strelkova G.E., Zakharova A. Multiplexing noise induces synchronization in multilayer networks // *Chaos, Solitons & Fractals.* — 2022. — Vol. 163. — P. 112521. — <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2022.112521>
- Sakaguchi H., Tomita K. Bifurcations of the coupled logistic map // *Progress of Theoretical Physics.* — 1987. — Vol. 78, No. 2. — P. 305–315. — <https://doi.org/10.1143/PTP.78.305>
- Sun Y., Zhao D. Effects of noise on the outer synchronization of two unidirectionally coupled complex dynamical networks // *Chaos.* — 2012. — Vol. 22. — P. 023131. — <https://doi.org/10.1063/1.4721997>
- Tanaka G., Sanjuán M.A.F., Aihara K. Crisis-induced intermittency in two coupled chaotic maps: Towards understanding chaotic itinerancy // *Phys. Rev. E.* — 2005. — Vol. 71. — P. 016219. — <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.016219>
- Tsvetkov I., Bashkirtseva I., Ryashko L. Stochastic transformations of multi-rhythmic dynamics and order–chaos transitions in a discrete 2D model // *Chaos.* — 2021. — Vol. 31, No. 6. — P. 063121. — <https://doi.org/10.1063/5.0054679>
- Zakharova A. Chimera patterns in complex networks. — Berlin: Springer, 2020. — <https://doi.org/10.1007/978-3-030-21714-3>
- Zhang Y., Nicolaou Z.G., Hart J.D., Roy R., Motter A.E. Critical switching in globally attractive chimeras // *Phys. Rev. X.* — 2020. — Vol. 10. — P. 011044. — <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.10.011044>