Синтез управлений нелинейным динамическим объектом с ограниченными возмущениями и использованием SDC-метода*

Ладжал Брахим

Московский институт электрики и математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», г. Москва, Россия

Аннотация. Проблема оптимального управления при действии ограниченных возмущений формулируется для класса динамических систем, нелинейные объекты которых представимы в виде объектов с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния. Введенный квадратический функционал позволяет рассматривать поставленную задачу с привлечением методов дифференциальных игр с нулевой суммой. Линейность структуры преобразованной нелинейной системы и квадратичный функционал качества позволяют при синтезе оптимальных управлений, т.е. параметров регуляторов, перейти от необходимости поиска решений уравнения Беллмана-Айзекса к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Синтезированные управления обеспечивают SDC-модели свойство асимптотической устойчивости и позволяют определить соотношение наложенных на управления ограничений, при котором обеспечивается условие существования дифференциальной игры с нулевой суммой. Основная проблема реализации оптимального управления связана с проблемой поиска решения уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния, в темпе функционирования объекта. Для решения этого уравнения в работе предложен метод субоптимальных управлений с квазистационарными значениями параметров. Дана оценка расхождения оптимального и субоптимального решений. В качестве иллюстрации полученных результатов приведено моделирование поведения нелинейной системы с двумя игроками с открытым горизонтом управления.

Ключевые слова: *метод расширенной линеаризации, уравнение Беллмана-Айзекса, уравнение Риккати с параметрами, зависящими от состояния.*

DOI: 10.14357/20790279230209

Введение

Теория дифференциальных игр, как направление математической теории управления тесно связана с математической теорией оптимальных процессов, теорией игр, вариационным исчислением и теорией дифференциальных уравнений. Становление теории дифференциальных игр связано с именами Р. Айзекса [1], Л.С.Понтрягина [2, 3], Е.Ф. Мищенко [4], Б.Н. Пшеничного [5], Красовский Н.Н. [6] и многих других зарубежных и советских ученых. Начиная с работ А. Брайсона [7] дифференциальные игры с ненулевой суммой стали рассматриваться как задачи теории оптимального управления. В задачах дифференциальной игры с заданным интервалом управления с нулевой суммой и квадратичным функционалом качества синтез оптимальных управлений приводит при их реализации к необходимости решать в темпе функционирования объектаскалярное дифференциальное уравнение в частных производных Беллмана-Айзекса [8–10] с коэффициентами, зависящими от состояния объекта.

В настоящей статье задача дифференциальной игры с ограниченными возмущениями и возможностью представления исходной динамической системы с помощью SDC–метода [9,11] (*StateDependentCoefficient,* SDC) рассматривается для двух случаев: с заданным интервалом управления и с отрытым интервалом управления. Квадратический функционал и использование SDC-модели исходной системы позволяют перейти от необходимости поиска решений скалярного дифференциально-

* Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований (Проект 19-8-00535).

го уравнения в частных производных (уравнение Беллмана-Айзекса) к матричному уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Решение этого уравнения в темпе функционирования системы в общем случае является сложной задачей. В ряде случаев для решения такого уравнения можно использовать пакеты прикладных символьных исчислений (*Mathematica, Piton*). Для получения реализуемых решений в виде квазиоптимальных управлений в статье предложен метод, основанный на поиске параметров субоптимального регулятора для каждого (заданного) временного шага интервала управления (метод замороженных параметров уравнения). Этот метод можно отнести к методам, изложенным в [12] (*FrozenRiccatiEquation, FRE*).

Материал статьи представлен следующим образом. В первом разделе осуществлена постановка задачи дифференциальной игры с квадратическим функционалом качества. Обосновывается условие представления исходной динамической системы управления ее SDC-моделью.

Во втором разделе отдельно рассматриваются задачи с заданным и открытым интервалах управления. Производится синтез управлений, доказывается их оптимальность. Определяются условия существования решения дифференциальной игры с нулевой суммой.

Для получения реализуемых решений в виде квазиоптимальных управлений в третьем разделе статьи предложен метод, основанный на поиске параметров субоптимального регулятора для каждого (заданного) временного шага интервала управления. Дана оценка расхождения оптимального и субоптимального решений.

В четвертом разделе в качестве иллюстрации полученных результатов приведено моделирование поведения нелинейной системы с двумя игроками с открытым горизонтом управления.

1. Задача управления и SDC-модель системы

1.1. Формулировка задачи управления в общем виде

Уточним постановку задачи, рассмотрев динамическую детерминированную нелинейную систему:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) + g_1(x(t))w(t) +$$

$$+ g_2(x(t))u(t), x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t). \qquad (1.1)$$

Здесь $x(t) \in \Omega_x \subset R^n$ – состояние системы; $X_0 \in \Omega_x$ − множество возможных начальных условий системы; $y(t) \subset R^m, m \leq n$ − выход системы; $u(t) \in U \subset R^r$ – управление; $w(t) \in W \subset R^k$ − возмущение; $f(x(t)), g_1(x(t)), g_2(x(t))$ − непрерывные матрицы-функции. Предполагается, что для всех x система (1.1) управляема и наблюдаема, $t \in R^+$. Кроме того, будем полагать, что функции $f(x(t)), g_1(x(t)), g_2(x(t))$ достаточно гладкие (C_∞) такие, что их любых $(t_0, x_0) \in R_+ \times \Omega_x$ проходило бы одно и только одно решение уравнения (1.1) $x(t, t_0, x_0)$ и был бы единственным соответствующий выход системы $y(t) = Cx(t, x_0)$.

Предполагается, что неконтролируемое возмущение $w(t)$, которое может быть как детерминированным, так и стохастическим, характеризуется следующим отношением:

$$|w(t)| \leq \sigma(x(t)), \forall t \geq 0, \qquad (1.2)$$

где $|w_i(t)| \leq \sigma_i(x(t)), i = \overline{1,k}, t \geq 0$, $\sigma_i(x(t)) \geq 0$ для всех $x(t) \in \Omega_x$. Запишем (1.1) в виде $w(t) \in W$.

Рассматривая возмущение $w(t)$, как действие некоторого игрока противодействующему успешному выполнению задачи управления, сформулируем задачу управления в ключе дифференциальной игры двух игроков G_u и G_w. Организация управлений $u(t) \in U$ и $w(t) \in W$ будет осуществляться с использованием принципа обратной связи по состоянию.

Введем функционал качества дифференциальной игры:

$$J(x, u, w) = \frac{1}{2} y^{\mathrm{T}}(t_f) F y(t_f) +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{y^{\mathrm{T}}(t) Q y(t) + u^{\mathrm{T}}(t) R u(t) -$$

$$w^{\mathrm{T}}(t) P w(t)\}\, dt. \qquad (1.3)$$

Здесь симметрические матрицы Q и F, по крайней мере, положительно полуопределенные. Ограничения на управляющие воздействия будем учитывать при назначении положительно определенных матриц P и R. Дополнительные требования к значениям параметров матриц R и P будут определены ниже.

Задача заключается в построении оптимальной стратегии с обратной связью для игроков G_u и G_w. Другими словами, задача заключается в нахождении управляющего воздействия $u(t)$ для объекта (1.1), минимизирующего функционал вида (1.3) при соответствующем противодействии «управления» $w(t)$.

1.2. SDC-модель системы

Представим систему (1.1) в несколько ином, эквивалентном виде. Для этого используем метод «расширенной линеаризации» или SDC-параметризации (StateDependentCoefficient, [10]).

Предположение 1.1. Вектор-функция $f(t, x)$ — непрерывная дифференцируемая по $x \in \Omega_x$, т.е. $f(\cdot) \in C^1(\Omega_x)$ и $g_1(\cdot), g_2(\cdot) \in C^0(\Omega_x)$.

Предположение 1.2. Без потери общности положим, что условие $x = 0 \in \Omega_x$ есть точка равновесия системы при $u = 0, w = 0$ так, что $f(0) = 0$ и $g_1(x(t)) \neq 0, g_2(x(t)) \neq 0, \forall x \in \Omega_x$.

При выполнении сделанных предположений можно записать:

$$f(x(t)) = A(x(t))x(t). \qquad (1.4)$$

Естественно, такое представление $f(x(t))$ при $n > 1$, в виде (1.4) не является единственным [10].

Определение 1.1. Представление системы (1.1) в виде модели

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x(t))x(t) + g_1(x(t))w(t) + g_2(x(t))u(t), x(0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t) \qquad (1.5)$$

является эквивалентным если матрицы $\langle A(x(t)), g_1(x(t))\rangle$ и $\langle A(x(t)), g_2(x(t))\rangle$ образуют управляемые пары, а матрицы $\langle A(x(t)), \mathrm{C}\rangle$ образуют наблюдаемую пару при всех возможных $(t, x) \in T \times \Omega_x$.

Определение 1.2. Будем называть представление нелинейной управляемой системы (1.1) в виде модели (1.5) SDC-представлением.

Предположение 1.3. $A(\cdot), B(\cdot), g_1(\cdot), g_2(\cdot)$ – матрицы $C^1(R^n)$ действительных переменных.

Предположение 1.4. SDC-представление нелинейной системы (1.1) в виде модели (1.5) является стабилизируемым (управляемым) в области $T \times \Omega_x$, если пары $\langle A(x(t)), g_1(x(t))\rangle$, $\langle A(x(t)), g_2(x(t))\rangle$ стабилизируемы (управляемы) в линейном смысле для $(t, x) \in T \times \Omega_x$, т.е.

$$rank[g_1(x(t))A(x(t))g_1(x(t))A^2(x(t))g_1(x(t))\ldots A^{n-1}(x(t))g_1(x(t))] = n,$$

$$rank[g_2(x(t))A(x(t))g_2(x(t))A^2(x(t))g_2(x(t))\ldots A^{n-1}(x(t))g_2(x(t))] = n.$$

2. Синтез оптимальных и субоптимальных управлений

2.1. Задача с заданным временем переходного процесса

Решение задачи (1.1)-(1.3) существует на множестве Ω_x, если существует непрерывная положительно определенная функция $V: \Omega_x \to R^+$:

$$V(t, x) \triangleq \underset{u}{min}\underset{w}{max} J(x, u, w) \qquad (2.1)$$

для всех $x \in \Omega_x$ и допустимых управлений $u(t) \in U$ и $w(t) \in W$ [9, 10].

В общем случае значение назначаемой функции V есть решение задачи динамического программирования, связанное с дифференциальным уравнением первого порядка в частных производных Гамильтона-Якоби-Айзекса:

$$\frac{\partial V(t,x)}{\partial t} + \underset{u}{min}\underset{w}{max} H\left\{x, u, w, \frac{\partial V(t,x)}{\partial x(t)}\right\} = 0, V(T, x(T)) = \frac{1}{2}x^T(T)C^{\mathrm{T}}FCx(T), \qquad (2.2)$$

где $H -$ гамильтониан

$$H = \left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x(t)}[[f(x) + g_1(x)w(t) + g_2(x)u(t)] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}[x^T(t)C^TQCx(t) + u^T(t)Ru(t) - w^T(t)Pw(t)] \right\}. \qquad (2.3)$$

Оптимальное решение определяется выражением двухточечной краевой задачи [8,9]:

$$\frac{d}{dt}x(t) = [\partial H(x, u, w, \lambda)/\partial\lambda(t)]^T, x(t_0) = x_0,$$

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -[\partial H(x, u, w, \lambda)/\partial x(t)]^T, \lambda(t_f) = \lambda_T,$$

$$\partial H(x, u, w, \lambda)/\partial u(t) = 0, \partial H(x, u, w, \lambda)/\partial w(t) = 0. \qquad (2.4)$$

Оптимальные управления определяются соотношениями:

$$\left\{\frac{\partial H}{\partial w(t)}\right\}^{\mathrm{T}} = -Pw(t) + g_1^{\mathrm{T}}(x(t))\lambda(t) = 0,$$

$$\left\{\frac{\partial H}{\partial u(t)}\right\}^{\mathrm{T}} = Ru(t) + g_2^{\mathrm{T}}(x(t))\lambda(t) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial w^2(t)} = -P < 0, \ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2(t)} = R > 0.$$

Откуда

$$w(t) = P^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x(t))\lambda(t), \ u(t) = -R^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x(t))\lambda(t). \qquad (2.5)$$

Управления (2.5) описывают стратегию с обратной связью для игроков G_u и G_w как функции текущего состояния.

Модель (1.5) системы (1.1) с управлениями (2.5) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x(t))x(t) - \Pi(x(t))\lambda(t), x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t), \qquad (2.6)$$

где

$$\Pi(x(t)) = g_2(x(t))R^{-1}g_2^T(x(t)) - g_1(x)P^{-1}g_1^T(x(t)). \qquad (2.7)$$

Предположение 2.1. Симметрическая матрица (2.7) при всех $x \in \Omega_x$, по крайней мере, положительно полуопределенная.

Справедливость Предположения 2.1 обеспечивается соответствующим назначением матриц R и P. Действительно, так как в силу задачи на систему действуют ограниченные возмущения $|w(t)| \leq \sigma(x(t)), \forall t \geq 0$, то матрицу штрафа P в функционале (1.3) для игрока G_w разумно назначить в виде: $P = 1/\sigma(x(t))$. Тогда матрицу R следует назначать так, чтобы выполнялось Предположение 2.1.

Вспомогательная переменная $\lambda(t)$ и ее краевое значение $\lambda(T)$ будут определяться соотношениями:

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = \frac{d}{dt}\left\{\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} = -\left\{\frac{\partial H}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} =$$

$$= -\left\{\frac{\partial A(x(t))x(t)}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}}\lambda(t) - C^{\mathrm{T}}QCx(t) - \left[\frac{\partial \Pi(x(t))}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}\lambda(t), \quad (2.8)$$

Здесь

$$\frac{\partial(A(x(t))x(t))}{\partial x} = A(x(t)) + \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{1*}(x(t))}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial A_{1*}(x(t))}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial A_{n*}(x(t))}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial A_{n*}(x(t))}{\partial x_n} \end{bmatrix} \otimes x(t) =$$

$$= A(x(t)) + [\tilde{A}(x(t))] \otimes x(t),$$

где $A_{i*}(x(t))$, $i = \overline{1,n}$ − i-строка матрицы $A(x(t))$ и $\otimes$ − символ кронекеровского произведения,

$$\left[\frac{\partial \Pi(x(t))}{\partial x}\right]^{\mathrm{T}}\lambda(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \pi_{1*}(x(t))}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \pi_{1*}(x(t))}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \pi_{n*}(x(t))}{\partial x_1} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \pi_{n*}(x(t))}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \lambda(t) =$$

$$= [\tilde{\Pi}(x(t))]\lambda(t),$$

где $\pi_{i*}(x(t))$, $i = \overline{1,n}$ − i-строка матрицы $\Pi(x(t))$ и $\otimes$ − символ кронекеровского произведения.

Перепишем уравнение (2.8) с учетом вышеприведенных обозначений:

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = -A^{\mathrm{T}}(x(t))\lambda(t) - C^{\mathrm{T}}QCx(t) - \{[\tilde{A}(x(t)) \otimes x(t)] - [\tilde{\Pi}(x(t))]\lambda(t)\}. \quad (2.8)$$

Краевое условие для уравнения (2.8) определяется соотношением:

$$\lambda(t_f) = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial(y^T(T)Fy(T))}{\partial x}\right\}^{\mathrm{T}} = C^{\mathrm{T}}FCx(T). \quad (2.10)$$

Будем искать $\lambda(t)$ в виде:

$$\lambda(t) = S(x(t))x(t). \quad (2.11)$$

Установим свойства матрицы $S(x(t))$. Для этого продифференцируем выражение (2.11):

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = \left\{\frac{d}{dt}S(x(t))\right\}x(t) + S(x(t))\frac{d}{dt}x(t). \quad (2.12)$$

Подставляя в (2.12) выражение для $dx(t)/dt$ (2.6), получим:

$$\frac{d}{dt}\lambda(t) = \left[\frac{d}{dt}S(x(t)) + S(x(t))A(x(t)) - \right.$$

$$\left. - S(x(t))\Pi(x(t))S(x(t))\right]x(t). \quad (2.13)$$

Сравнивая (2.9) и (2.13), будем иметь:

$$\frac{d}{dt}S(x(t))x(t) + \tilde{A}(x(t)) \otimes x(t) - \tilde{\Pi}(x(t))S(x(t))x(t) +$$

$$+\{S(x(t))A(x(t)) + A^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)) - S(x(t))\Pi(x(t))S(x(t)) + C^{\mathrm{T}}QC\}x(t) = 0.$$

Если предположить, что $S(x(t))$ матрица отыскивается решением матричного уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния (*StateDependentRiccatiEquation,* SDRE)

$$S(x(t))A(x(t)) + A^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t)) -$$

$$- S(x(t))\Pi(x(t))S(x(t)) +$$

$$C^{\mathrm{T}}QC = 0, \quad (2.14)$$

то следующее уравнение должно отвечать условию оптимальности:

$$\frac{d}{dt}S(x(t))x(t) + \tilde{A}(x(t)) \otimes x(t) -$$

$$- \tilde{\Pi}(x(t))S(x(t))x(t) = 0. \quad (2.15)$$

Краевое условие для дифференциального уравнения (2.15) получаем путем сравнения выражений (2.10) и (2.11) в момент $t = t_f$:

$$S(x(T)) = C^{\mathrm{T}}FC. \quad (2.16)$$

Следуя [12] назовем условие (2.15)-(2.16) критерием оптимальности. Запишем субоптимальные управления для системы (1.1):

$$w(t) = P^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t), u(t) =$$

$$= -R^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x(t))S(x(t))x(t). \quad (2.17)$$

Здесь матрица $S(x(t))$ является решением алгебраического уравнения Риккати (2.14) с параметрами, зависящими от состояния.

Запишем систему (2.6) с управлениями (2.17):

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x(t))x(t) - \Pi(x(t))S(x(t))x(t), x(t_0) = x_0,$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (2.18)$$

Утверждение 2.2. Матрица $[\tilde{A}(x(t)) \otimes I_n - \tilde{\Pi}(x(t))S(x(t))]$ неотрицательно определенная. (здесь I_n – единичная матрица).

Доказательство. Введем функцию Ляпунова $V_L(x(t))$ в виде

$$V_L(x(t)) = x^T(t)S(x(t))x(t), dV_L(x(t))/dt \le -\omega_3\{|x|\}, \forall x,$$

где $\omega_3\{|x|\} >, \omega_3(0) = 0$ – скалярная неубывающая функция.

Как следует из второй теоремы Ляпунова, что если выполняется следующее условие

$$\frac{dV_L(x)}{dt} = \frac{\partial V_L(x)}{\partial x}\frac{dx(t)}{dt} \le -\omega_3\{|x|\}, \quad (2.19)$$

то система устойчива. Принимая во внимание (2.17), перепишем условие (2.18):

$$x^T(t)\left\{\frac{d}{dt}S(x(t)) + S(x(t))A(x(t)) + A^T(x(t))S(x(t)) \right.$$

$$\left. - S(x(t))\Pi(x(t))S(x(t))\right\}x(t)$$

$$-x^T(t)S(x(t))\Pi(x(t))S(x(t))x(t) \le -\omega_3\{|x|\}. \quad (2.20)$$

Назначим $\omega_3\{|x|\}$ в виде $\omega_3\{|x|\} = x^T(t)[C^TQC + S(x)\Pi(x)S(x)]x(t)$. После ряда трансформаций неравенство (2.19), с учетом (2.14), будем иметь вид:

$$\frac{d}{dt}V_L(x(t)) =$$

$$= -x^T(t)\left[\tilde{A}(x(t)) \otimes I_n - \widetilde{\Pi}(x(t))S(x(t))\right]x(t)\ . \quad (2.21)$$

Таким образом, условие устойчивости выполняется, если матрица $\left[\tilde{A}(x(t)) \otimes I_n - \widetilde{\Pi}(x(t))S(x(t))\right]$ является неотрицательной. ■

Теорема 2.1. Пусть нелинейная система (1.1) представима динамической моделью (1.5) с линейной структурой и параметрами, зависящими от состояния, и задан функционал (1.3). Пусть также положительно определенная матрица $S\ (x(t))$ есть решение уравнения (2.14). Тогда субоптимальные управления вида (2.17) существуют, и минимальная стоимость в заданный момент окончания управляемого процесса определяется выражением

$$J(x,u,w)_{t_f} = J^*(x(t_f),t_f) =$$

$$= \frac{1}{2}x^T(t_0)S(x(t_0))x(t_0) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{x^{\mathrm{T}}(t)[\tilde{A}(x(t)) \otimes I_n - \widetilde{\Pi}(x(t))S(x(t))]x(t)\}\,dt. \quad (2.22)$$

Доказательство. Для отыскания значения функционала качества при оптимальных управлениях (2.17) подставим в подинтегральную часть функционала (1.3) выражение $d\{x^T(t)S(x(t))x(t)\}/dt$, компенсировав вне интегральной части функционала следующими значениями:

$$x^T(t_0)S(x(t_0))x(t_0) - x^T(t_f)S(x(t_f))x(t_f).$$

Учитывая, что $S(x(t_f)) = C^{\mathrm{T}}FC$, подинтегральное выражение функционала после небольших вычислений принимает вид:

$$L(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)\left[\tilde{A}(x(t)) \otimes I_n - \widetilde{\Pi}(x(t))S(x(t))\right]x(t).$$

Таким образом, справедливость теоремы 2.1 установлена. ■

Отметим [10, 11], что в случае линейной системы управленияс параметрами $A = A(t)$, $g_i = g_i(t)$, $i = 1,2$, матрица $\left[\tilde{A}(x(t)) \otimes I_n - \tilde{\Pi}(x(t))S(x(t))\right]$ равна нулю, так как матрицы $\tilde{A}, \tilde{\Pi}, S$ в явном виде не зависят от $x(t)$, и значение функционала с соответствующими оптимальными управлениями определяется значением $J(x,u,w)_{t_f} == \frac{1}{2}x^T(t_0)S(t_0)x(t_0)$.

2.2. Задача с открытым горизонтом управления

Рассмотрим задачу слежения для нелинейных инвариантных во времени систем. В этом случае время окончания переходного процесса неограниченно возрастает, матрицы Q, R, P постоянны и положительно определены. Все результаты будут приближенными и справедливыми лишь для очень больших значений времени окончания переходного процесса t_f.

SDC-модель исходной системы (1.1) имеет вид:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x(t))x(t) + g_1(x)w(t) + g_2(x)u(t), x(t_0) = x_0,$$
$$y(t) = Cx(t). \quad (2.23)$$

Запишем функционал качества:

$$J(x,u,w) = \lim_{t_f\to\infty}\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{y^{\mathrm{T}}(t)Qy(t) + u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t) - w^{\mathrm{T}}(t)Pw(t)\}\,dt. \quad (2.24)$$

Оптимальные управления в рассматриваемом случае имеет вид:

$$w(t) = P^{-1}g_1^{\mathrm{T}}(x)\hat{S}(x(t))x(t), u(t) =$$
$$= -R^{-1}g_2^{\mathrm{T}}(x)\hat{S}(x(t))x(t), \quad (2.25)$$

где матрица $\hat{S}(x(t))$ является решением алгебраического матричного уравнения:

$$\hat{S}(x(t))A(x(t)) + A^T(x(t))\hat{S}(x(t)) -$$
$$- \hat{S}(x(t))\Pi(x(t))\hat{S}(x(t)) +$$
$$C^TQC = 0. \quad (2.26)$$

Запишем уравнение системы (1.1) с управлениями (2.25):

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t)) - \Pi(x(t))\hat{S}(x(t))x(t), x(t_0) = x_0,$$
$$y(t) = Cx(t). \quad (2.27)$$

Отметим, что, как было показано в Разделе 2.1, управления (2.25), синтезированные с использованием SDRE-метода, реализуют локально асимптотическое устойчивое решение задачи дифференциальной игры в замкнутой форме для системы, представленной моделью (2.23). Однако асимптотическая стабилизация может не иметь место в исходной нелинейной системе (2.27) с синтезированными SDRE-методом управления и произвольным начальным состоянием x_0 (глобальная асимптотическая стабилизация).

3. Метод построения регулятора с квазипостоянными параметрами

Основная проблема реализации управлений вида (2.25) заключается в сложности нахождения матрицы $S\ (x(t))$, как решения уравнения (2.26) в темпе функционирования объекта.Для получения реализуемого решения задачи управления нелинейным объектом вида (1.1) будет применен метод замороженных коэффициентов [12]. Интервал управления $T = t_f - t_0$ разобьем на N отдельных подынтервалов $[t_0,t_1], [t_1,t_2], \ldots, [t_{n-1},t_f]$.

Значения матриц $A(x_0), A(x_1), A(x_2), \ldots, A(x_{n-1})$, ,$g_i(x_0), g_i(x_1), g_i(x_2), \ldots, g_i(x_{n-1})$ $\Pi(x_0), \Pi(x_1), \Pi(x_2)$, $\ldots, \Pi(x_{n-1})$ определенных в точках $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}$, используются при вычислении положительно определенной матрицы с постоянными параметрами $S_i, i = 0,1,2,\ldots,t_{N-1}$:

$$A^T(x_i)S_i + S_iA(x_i) - S_ig(x_i)R^{-1}g^T(x_i)S_i + Q = = 0, i = 0,1,2,\ldots,t_{N-1}. \quad (3.1)$$

Таким образом, управления в каждом подынтервале будут иметь вид:

$$w_i(t) = P^{-1}g_{12}^T(\tilde{x})S_i\tilde{x}(t), u_i(t) = = -R^{-1}g_2^T(\tilde{x})S_i\tilde{x}(t), i = 0,1,2,\ldots,t_{N-1}. \quad (3.2)$$

Система с (1.1) с управлениями (3.2) в каждом из подинтервалов $[t_i, t_{i+1}], i = 0,1,2,\ldots,N-1$ описывается уравнением:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(\tilde{x}(t)) - \Pi(\tilde{x}(t))S_i\tilde{x}(t), \tilde{x}(t_i) = = \tilde{x}_i, t \in [t_i, t_{i+1}]. \quad (3.3)$$

Отметим, что количество подинтервалов N, которое определяет длительность по времени интервала $[t_i, t_{i+1}]$, зависит как от самого существа задачи управления, так и от возможности устройства по реализации вычислений матрицы S_i по формуле (3.1).

Утверждение 3.1. При увеличении количества подинтервалов разбиения, т.е. при уменьшении самих подинтералов $\tau = t_{i+1} - t_i$, следует следующее: $\lim_{\tau\to 0} S(x(t_i)) \to S(x(t_{i+1})), i = 0,1,N-1$ и

$$\lim_{\tau\to 0}[x(t)) - \tilde{x}(t)] \to 0. \quad (3.4)$$

Доказательство. Запишем рассогласование $\varepsilon(t_{i+1}) = x(t_{i+1}) - \tilde{x}(t_{i+1}), i = 0,1,N-1$ решений уравнений

$$\frac{d}{dt}x(t) = [A(x(t)) - \Pi(x(t))S(x(t))x(t)]x(t), x(t_0) = x_0,$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = [A(\tilde{x}(t)) - \Pi(\tilde{x}(t))S_i]\tilde{x}(t), \tilde{x}(t_0) = x_0.$$

в интервале управления $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Пусть

$$A(x(t)) = A + a(x(t)), A(\tilde{x}(t)) = A + a(\tilde{x}(t)), \Pi(x(t)) = \Pi + n(x(t)),$$

$$S(x(t)) = S + s(x(t)), S_i = S + s_i, A = A(x(t_0)),$$

$$\Pi = \Pi(x(t_0)),$$

где матрицы A и П с постоянными элементами образуют управляемую пару, а положительно определенная матрица S есть решение алгебраического матричного уравнения Риккати:

$$SA + A^TS - SgR^{-1}g^TS + Q = 0.$$

Определим ошибку рассогласования траекторий $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$:

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = [A - \Pi S]\varepsilon(t) + a(x(t))x(t) - -a(\tilde{x}(t))\tilde{x}(t) - \Pi[s(x(t)) - s_i]x(t) - -[\Pi(x(t))n^T(x(t)) + n(x(t))\Pi^T(x(t)) + +n(x(t))n^T(x(t))] [S + s(x)]x(t) + +[\Pi(\tilde{x}(t))n^T(\tilde{x}(t)) + n(\tilde{x}(t))\Pi^T(\tilde{x}(t)) + n(\tilde{x}(t))n^T(\tilde{x}(t))] [S + s_i]\tilde{x}(t), \varepsilon(t_0) = x(t_0) - \tilde{x}(t_0) = 0$$

или, отмечая что $\Pi(\cdot)$ и $n(\cdot)$ симметрические матрицы,

$$\frac{d}{dt}\varepsilon(t) = [A - \Pi S]\varepsilon(t) + \varphi(x(t), \tilde{x}(t)) \quad \varepsilon(t_0) = 0, \quad (3.5)$$

где

$$\varphi(x(t), \tilde{x}(t)) = a(x(t))x(t) - a(\tilde{x}(t))\tilde{x}(t) - -[\Pi(x(t))R^{-1}n(x(t)) + n(x(t))\Pi(x(t)) + n(x(t))n(x)] [S + s(x(t))]x(t) + +[\Pi(\tilde{x}(t))n(\tilde{x}) + n(\tilde{x})\Pi(\tilde{x}(t)) + n(\tilde{x}(t))n(\tilde{x}(t))] [S + s_i]\tilde{x}(t).$$

Запишем решение уравнения (3.5) в интервале $[t_i, t_{i+1}]$ с учетом того, что матрица $[A - \Pi S]$ – действительная с постоянными элементами:

$$\varepsilon(t_{i+1}) = = \varepsilon(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}}\{\exp[A - \Pi S](t_{i+1} - \gamma)\}\varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma))d\gamma.$$

Накопленное значение ошибки рассогласования в момент $t_N = t_f$ определяется формулой

$$\varepsilon(t_N) = \sum_{i=0}^{N-1}\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}}\{\exp[A - \Pi S](t_{i+1} - \gamma)\}\varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma))d\gamma\right\} \quad (3.6)$$

так как $\varepsilon(t_0) = 0$.

Перепишем равенство (3.6) в виде

$$\|\varepsilon(t_N)\| = \left\|\sum_{i=0}^{N-1}\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}}\{\exp[A - \Pi S](t_{i+1} - \gamma)\}\varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma))d\gamma\right\}\right\|,$$

откуда

$$\|\varepsilon(t_N)\| \le \sum_{i=0}^{N-1}\left\{\int_{t_i}^{t_{i+1}}\|\{\exp[A - \Pi S](t_{i+1} - \gamma)\}\| \, \|\varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma))\|d\gamma\right\}. \quad (3.7)$$

Учитывая, что действительные корни характеристической матрицы $[A - \Pi S]$ являются отрицательными, можно назначить такие положительные постоянные (T.H. Gronwall) G и β что

$$\|exp[A - \Pi S]\,(t_{i+1} - \gamma)\| \le Ge^{-\beta(t_{i+1} - \gamma)}. \quad (3.8)$$

Очевидно, что значение $\|\varphi(x(\gamma), \tilde{x}(\gamma))\|_{\gamma = t_{i+1}}$ зависит как от величины подынтервала $\tau = T/N$, так и от значений матрицы $S_i = S + s_i$ в каждом из подинтервалов. Учитывая (3.4), отметим, что $\lim\limits_{\tau\to 0}\|\varphi(x(\gamma),\tilde{x}(\gamma))\| \to 0$. Следовательно, можно найти такое число $K_{i+1} > 0$, что

$$\|\varphi(x(\gamma),\tilde{x}(\gamma))\|_{\gamma=t_{i+1}} \le K_{i+1}\tau = K_{i+1}(T/N),$$
$$i = 0,1,2,\dots,N-1. \qquad (3.9)$$

Таким образом, выражение (3.7) с учетом (3.8) и (3.9), имеет вид:

$$\|\varepsilon(t_N)\| \le G\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\beta(t_{i+1}-\gamma)} \sum_{i=0}^{N-1}\|\varphi(x(\gamma),\tilde{x}(\gamma))\|\,d\gamma \le G\tau\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\beta(t_{i+1}-\gamma)}K_{i+1}\,d\gamma$$

Пусть $K^* = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}K_{i+1}$, тогда

$$\|\varepsilon(t_N)\| \le GK^*\tau\sum_{i=0}^{N-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\beta(t_{i+1}-\gamma)}\,d\gamma$$

или, учитывая, что в рассматриваемом случае $t_0 = 0$,

$$\|\varepsilon(t_f)\| \le GK^*\tau\int_0^{t_f} e^{-\beta(t_f-\gamma)}\,d\gamma. \qquad (3.10)$$

Таким образом, норма рассогласования $\|\varepsilon(t_f)\|$ траекторий $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ в заданном интервале времени управления $T = t_f - t_0$ с N подинтервалами поиска матрицы $S_i, i = 0,1,2,\dots N-1$ отвечает условию:

$$\|\varepsilon(t_f)\| \le \frac{K^*TG}{N}\left[1 - e^{-\beta t_f}\right].$$

Как видно, $\|\varepsilon(t_f)\|$ в конце интервала управления зависит от количества подынтервалов N или, что то же самое, от длинны подынтервала τ.

Таким образом, справедливость Утверждения 1 установлена. ■

Отметим, что значение функционала качества (3.24) при управлении нелинейным объектом (1.1) с использованием его математической модели (2.23) и управлениями (3.2), имеющим квазипостоянные параметры, вычисляется по формуле [10]:

$$J(\tilde{x}(\cdot))_N = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}x^T(t_i)S_i x(t_i), i = 0,1,\dots,N-1.$$

4. Пример

Не вдаваясь в физический смысл, рассмотрим пример из [13], существенно усложнив его за счет постановки задачи вывода и сопровождения по заданной траектории при условии действия возмущений. Исследуемый нелинейный объект описывается дифференциальным уравнением:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a_1(t)}{3}x_2(t)x_3(t)\\ -a_2(t)x_1(t)x_3(t)\\ a_3(t)x_1(t)x_2(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b_1(t)u_1(t)\\ b_2(t)u_2(t)\\ b_3(t)u_3(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}d_1(t)\\ d_2(t)\\ d_3(t)\end{pmatrix}w(t),$$

$$y(t) = Cx(t) = x_1(t), x_1(0) = 40,$$
$$x_2(0) = 10, x_3(0) = 20. \qquad (4.1)$$

Параметры объекта имеют следующие номинальные значения: $a_1, a_2 a_3 = 1, b_1 = 10, b_2 = 5$, $b_3 = 10$.

Уровень возмущений $w(t)$ по отношению к начальным условиям составляет порядка 20% по каждой координате. Таким образом, при единичной дисперсии случайного процесса $w(t)$ параметры матрицы D имеют следующие значения: $d_1 = 8, d_2 = 2, d_3 = 4$.

Модель объекта (4.1) с параметрами, зависящими от состояния, имеет вид:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x(t))x(t) + +g_1 w(t) + g_2 u(t), x(t_0) = x_0. \qquad (4.2)$$

Здесь

$$A(x) = \begin{pmatrix}0 & x_3(t)/3 & 0\\ 0 & 0 & -x_1(t)\\ x_2(t) & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix}8\\ 2\\ 4\end{pmatrix}. \qquad (4.3)$$

Введем функционал качества

$$J(x,u,w) = \frac{1}{2}\int_0^5\{x^T(t)Qx(t) +$$
$$+ u^T(t)Ru(t) - w^T(t)Pw(t)\}\,dt, \qquad (4.4)$$

где положительно определенный параметр Q содержит информацию о начальном условии системы (4.1).

Учитывая тот факт, что матрица $\Pi = g_2R^{-1}g_2^T - g_1P^{-1}g_1^T$ должна быть, по крайней мере, положительно полуопределенной, и принимая во внимание значения дисперсии возмущения и параметров матриц g_1 и g_2, назначим в (4.4) $P = I_3$ и $R = I_3$ (здесь I_3 единичная матрица). Таким образом, матрица Π имеет вид:

$$\Pi = K^TK = \begin{pmatrix}36 & -16 & -32\\ -16 & 21 & -8\\ -32 & -8 & 84\end{pmatrix}.$$

Для получения реализуемого решения задачи управления нелинейным объектом вида (4.1) интервал управления $T = t_f - t_0 = 5$ разобьем на 5 отдельных подинтервалов $[t_0, t_1], \dots, [t_4, t_5]$, т.е. τ = 1.

Таким образом, следует находить значение матрицы S_i в 5 точках переходного процесса:

$$x(0), x(1), x(2), x(3), x(4).$$

$$A^T(x_i)S_i + S_iA(x_i) - S_i\Pi S_i + Q = 0,$$
$$i = 0,1,2,\dots,t_{N-1}. \qquad (4.5)$$

Переходные процессы определяются решением уравнения

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = [A(\tilde{x}(t)) - \Pi S_i]\tilde{x}(t), x(t_0) = x_0.$$

На рис. 1 и 2 представлены графики управлений $u^{\mathrm{T}}(t) = (u_1(t)u_2(t)u_3(t))$ и $w(t)$ соответственно.Изменение параметров регуляторов происходит в моменты $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$.

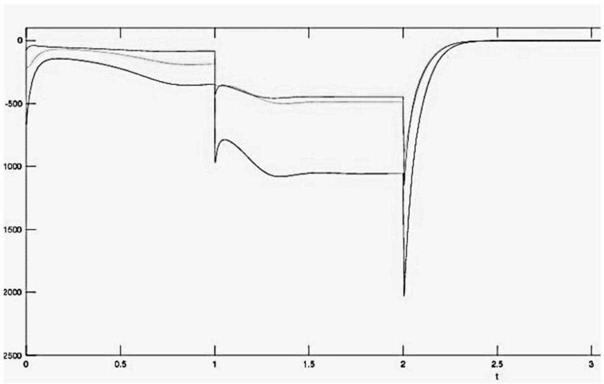

Рис. 1. Управление $u^{\mathrm{T}}(t) = (u_1(t)u_2(t)u_3(t))$

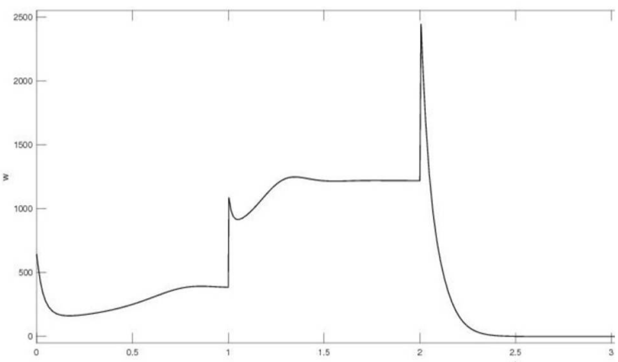

Рис. 2. Управление w(t)

На рис. 3–5 представлены графики переходных процессов $\tilde{x}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t)$ и $\tilde{x}_3(t)$.

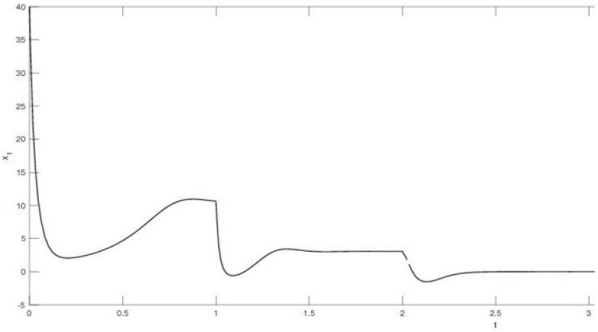

Рис. 3. Переходный процесс $\tilde{x}_1(t)$

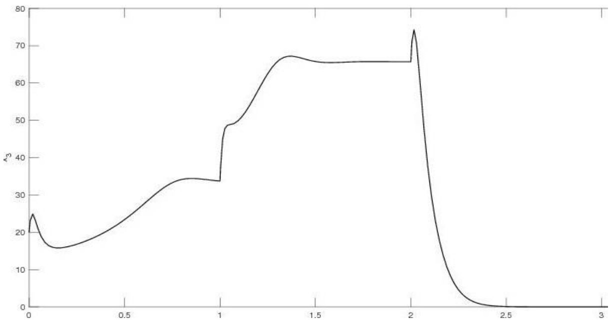

Рис. 4. Переходный процесс $\tilde{x}_2(t)$

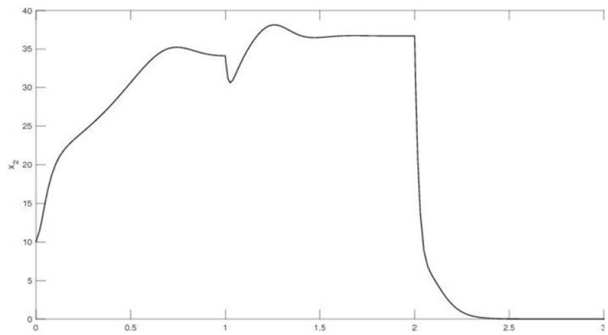

Рис. 5. Переходный процесс $\tilde{x}_3(t)$

Как следует из представленных графиков система (4.1) стабилизируется управлением $u(t)$ при противодействии $w(t)$.

Заключение

В отличие от известных работ в настоящей статье рассматривается задача синтеза оптимальных управлений для нелинейного объекта в постановке дифференциальной игры с нулевой суммой. Линейность структуры преобразованной нелинейной системы и квадратичный функционал качества позволяют при синтезе оптимальных управлений, т.е. параметров регуляторов, перейти от необходимости поиска решений уравнения Беллмана-Айзекса к уравнению типа Риккати с параметрами, зависящими от состояния. Синтезированные управления обеспечивают SDC-модели свойство асимптотической устойчивости и позволяют определить соотношение наложенных на управления ограничений, при котором обеспечивается условие существования дифференциальной игры с нулевой суммой. Основная проблема реализации оптимального управления связана с проблемой поиска решения уравнения Риккати с параметрами, зависящими от состояния, в темпе функционирования объекта. Для решения этого уравнения в работе предложен метод субоптимальных управлений с квазистационарными значениями параметров (метод замороженных коэффициентов). Дана оценка расхождения оптимального и субоптимального решений. В качестве иллюстрации полученных результатов приведено моделирование поведения нелинейной системы с двумя игроками с открытым горизонтом управления.

Литература

1. *Айзекс Р*. Дифференциальныеигры. М.: Мир. 1967. 480 с. [Isaacs, R. Differential Games. – N.-Y.: John Wiley and Sons, 1965.]
2. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. 1 // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 174. № 6. С. 1278–1280.
3. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх. 2 // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 175. № 4. С. 764–766.
4. *Мищенко Е.Ф.* О некоторых игровых задачах преследования и уклонения от встречи // Автоматика и телемеханика. 1972. № 9. С. 24–30.
5. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1969. 150 с.
6. *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 455 с.
7. *А. Брайсон, Хо Ю-Ши* Прикладная теория оптимального управления. М.: Изд. Мир, 1972. 544 с.
8. *Беллман Р., Энджел Э.* Динамическое программирование и уравнения в частных производных. М.: Изд-во Мир, 1974. 207 с.
9. *Афанасьев В.Н.* Математическая теория управления нелинейными непрерывными динамическими системами. М.: КРАСНАНД. 2020. 480 с.
10. *Атанс М., Фалб П.Л.* Оптимальное управление. М.: Машиностроение. 1968. 764 с.
11. *J.R. Cloutier, C.N. D'Souza and C.P. Mracek.* Nonlinear regulation and nonlinear H_{inf} control via the state-dependent Riccati equation technique. Part 1 theory. In Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, Daytona Beach, Florida. 1996
12. *Doyle J., Huang Y., Prims J., Freeman R., Murray R. and Krstic M.* Nonlinear Control: Comparisons and case studies.In Notes from the Nonlinear Control Workshop conducted at the American Control Conference, Albuquerque, New Mexico. 1998.
13. *Федоренко Р.П*. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука. 1978. 487 с.

Ладжал Брахим. Московский Институт электроники и математики Национального исследовательского университета «Высшая Школа Экономики». г. Москва, Россия. Аспирант. Область научных интересов: методы и алгоритмы системного анализа, управления, обработки информации в технических системах. E-mail: thehay89@gmail.com

Synthesis Control of a Nonlinear Dynamic Object with Limited Perturbations and Using the SDC-Method

Ladjal Brahim
Moscow Institute of Electricians and Mathematics National Research University
Higher School of Economics, Moscow, Russia

Abstract. The optimal control problem in the differential game problem with restrictions on the control. The problem of optimal control under the action of bounded perturbations is formulated for a class of dynamical systems whose nonlinear objects are representable as objects with a linear structure and state-dependent parameters. The introduced quadratic functional allows us to consider the problem with the use of methods of differential games with zero sum. The linearity of the structure of the transformed nonlinear system and the quadratic quality functional allow for the synthesis of optimal controls, i.e. parameters of regulators, go from the need to search for solutions to the Bellman-Isaacs equation to an equation of the Riccati type with state-dependent parameters. The synthesized controls provide the SDC-model with the property of asymptotic stability and make it possible to determine the ratio of the constraints imposed on the controls, under which the condition for the existence of a differential game with zero sum is ensured. The main problem of implementing optimal control is related to the problem of finding a solution to the Riccati equation with state-dependent parameters at the rate of operation of the object. To solve this equation, a suboptimal control method with quasi-stationary values of the parameters is proposed. An estimate of the discrepancy between optimal and suboptimal solutions is given. Example will be provided to illustrate the effectiveness and of FRE technique for design of nonlinear systems based feedback controllers.

Keywords: *extended linearization method, Bellman-Isaacs equation, Riccati equation with state-dependent parameters*.
DOI: 10.14357/20790279230209

References

1. *Isaacs R.* Differential Games. – M.: Mir, 1967. – 480 p. [Isaacs, R. Differential Games. – N.Y.: John Wiley and Sons, 1965.]
2. *Pontryagin L.S.* On linear differential games. 1 // Reports of the Academy of Sciences of the USSR. – 1967. – Vol. 174. – No. 6. – pp. 1278-1280.
3. *Pontryagin L.S.* On linear differential games. 2 // Reports of the USSR Academy of Sciences. - 1967. – Vol. 175. – No. 4. – pp. 764-766.
4. *Mishchenko E.F.* About some game tasks of pursuit and evasion from a meeting // Automation and telemechanic. – 1972. – No. 9. – pp. 24-30.
5. *Pshenichny B.N.* Necessary conditions of extremum. – M.: Nauka, 1969. – 150 p.
6. *Krasovsky N.N., Subbotin A.I.* Positional differential games. M.: Nauka, 1974. – 455 p.
7. *A. Bryson, Ho Yu-Shi.* Applied Theory of optimal Control. Moscow: Mir Publishing House, 1972. 544 p.
8. *Bellman R., Angel E.* Dynamic programming, and partial differential equations. – Moscow: Mir Publishing House, 1974. - 207 p.
9. *Afanasyev V.N.* Mathematical theory of control of nonlinear continuous dynamic systems. Moscow: KRASAND. 2020. . – 480 p.
10. *Atans M. Falb P.L.* Optimal control. M.: Mechanical Engineering. 1968. 764 p.
11. *J.R. Cloutier, K.N. D'Souza and K.P. Mrachek.* Nonlinear regulation and nonlinear control of Hinf using the state-dependent Riccati equation method. Part 1 theory. In Proceedings of the First International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace, Daytona Beach, Florida, 1996
12. *Doyle J., Kuan Y., Prima J., Freeman R., Murray R. and Krstic M.* Nonlinear Control: Comparisons and Case studies. In notes from a seminar on nonlinear control held at the American Control Conference, Albuquerque, New Mexico, 1998
13. *Fedorenko R.P.* Approximate solution of optimal control problems. M.: Nauka, 1978. 487 p.

Ladjal Brahim. Moscow Institute of Electronics and Mathematics of the National Research University Higher School of Economics. Moscow, Russian. Graduate student. Research interests: Methods and algorithms of system analysis, management, information processing in technical systems . E-mail: thehay89@gmail.com