Динамические системы

Численное решение краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто

А.Г. Омарова

Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Россия

Аннотация. Исследуется нелокальная краевая задача для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто с переменными коэффициентами. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка в дифференциальной форме. Построена разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу с первым порядком. Получен аналог априорной оценки в разностной форме. Из полученных априорных оценок следует единственность и устойчивость решения по начальным данным и правой части. Доказана сходимость разностной схемы к решению исходной задачи.

Ключевые слова: *дробная производная Капуто, краевая задача, априорная оценка, разностная схема, метод энергетических неравенств, численные методы.*

DOI: 10.14357/20790279240201 **EDN: CAZNDM**

Введение

Дифференциальные уравнения дробного порядка находят большое количество применений в современных исследованиях механики, теоретической физики и прикладной математики. Являются мощным инструментом для описания систем, которые обладают памятью и нелокальностью, процессов, протекающих во фрактальных средах, задач тепло – и массопереноса и во многих других областях науки. Этим и объясняется столь повышенный интерес к дифференциальным уравнениям дробного порядка [1–4].

Многие процессы в сложных системах обладают нелокальностью и характеризуются долгосрочной памятью. Дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями позволяют описывать некоторые из этих характеристик.

Нелокальными краевыми задачами принято называть такие, в которых вместо задания решения или его производных на фиксированной части границы задается их связь со значениями тех же функций на иных внутренних или граничных многообразиях [5, с. 135]. Работы А.М. Нахушева положили начало исследованию краевых задач с операторами дробного порядка в краевых условиях.

В работе [6] исследована первая краевая задача для нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по времени. Построена разностная схема, устойчивость разностной схемы доказана методом гармоник Фурье. Краевым задачам, содержащих дробные производные с нелокальными условиями, посвящены работы [7–9]. В них методом энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и разностной трактовке. Априорные оценки в дифференциальной форме получены в работах [10,11], используя метод энергетических неравенств. Из полученных оценок следует единственность и непрерывная зависимость решения поставленных задач от начальных данных. Разностные методы решения краевых задач и априорные оценки в разностной форме получены в работах [12,13]. В них построены разностные схемы для рассматриваемых задач, исследована устойчивость разностной схемы с помощью метода энергетических неравенств, из которой следует сходимость разностных схем.

Данная работа посвящена исследованию уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по пространственной переменной и с нелокальными краевыми условиями, в которых также содержится дробный оператор. На основе метода энергетических неравенств получены априорные оценки в дифференциальной и в разностной форме, из которых и следует единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи.

1. Постановка задачи

В области $D=\{(x,t):0\le x\le l, 0\le t\le T\}$ рассмотрим начально краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\partial_{0x}^{\alpha}(k(x,t)\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t))+r(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-q(x,t)u(x,t)+f(x,t),$$
$$0<x<l, 0<t\le T; \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}&k(0,t)\partial_{0x}^{\alpha}u(0,t)=\beta_1(t)u(0,t)-\mu_1(t);\\ &-k(l,t)\partial_{0x}^{\alpha}u(l,t)=\beta_2(t)u(l,t)-\mu_2(t);\\ &u(x,0)=u_0(x),\end{aligned} \qquad (2)$$

где $\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{u'(h,t)}{(x-h)^{\alpha}}dh$ – дробная производная Капуто порядка α, $0<\alpha<1$.

Будем предполагать, что решение $u(x,t)\in C^{1,1}(D)$ задачи (1)-(2) существует, где $C^{m,n}(D)$ – класс функций, непрерывных вместе со своими частными производными порядка *m* по *x* порядка и порядка *n* по *t* на *D*. Также для коэффициентов уравнения (1) выполняются условия:

$$k(x,t),r(x,t)\in C^{1,0}(D), q(x,t),f(x,t)\in C(D),$$
$$c_0\le k(x,t),r(x,t)\le c_1;$$
$$|k(x,t)_x|, |q(x,t)|,|r(x,t)|,|r_x(x,t)|,|\beta_1|,|\beta_2|\le c_2,$$
$$\text{где } c_0,c_1,c_2>0,\ c_2>c_1. \qquad (3)$$

2. Априорная оценка

Лемма 1. Для любой абсолютно непрерывной на [0,T] функции $v(t)$ справедливо неравенство [11]:

$$v(t)\partial_{0x}^{\alpha}v(t)\ge\frac{1}{2}\partial_{0x}^{\alpha}v^2(t),\ 0<\alpha<1.$$

Для того, чтобы получить априорную оценку для решения задачи (1)-(2) умножим скалярно уравнение (1) на $v(x,t)=k(x,t)\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t)$:

$$(u_t,v)=(\partial_{0x}^{\alpha}v,v)+(ru_x,v)-(qu(x_0,t),v)+(f,v), \qquad (4)$$

где $(a,b)=\int_0^l ab dx$, $\|a\|_0^2=(a,a)$.

Будем использовать константы $M_i>0$, $i=0.1.2,...$, которые зависят только от входных данных исследуемой задачи.

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (4), используя ε неравенство Коши-Буняковского, формулу суммирования по частям и Лемму 1:

$$(u_t,v)=\int_0^l u_t v dx\le\frac{1}{2}\|u_t\|_0^2+\frac{1}{2}\|v\|_0^2, \qquad (5)$$

$$(v,\partial_{0x}^{\alpha}v)=\int_0^l v\partial_{0x}^{\alpha}v dx\ge\frac{1}{2}\partial_{0x}^{\alpha}\|v\|_0^2, \qquad (6)$$

$$(ru_x,v)=\int_0^l u_x rv dx\le c_1\int_0^l u_x v dx=c_1(uv|_0^l-\int_0^l v'u dx), \qquad (7)$$

$$-(qu,v)\le-\int_0^l quv dx\le\frac{c_2}{2}\|u\|_0^2+\frac{c_2}{2}\|v\|_0^2, \qquad (8)$$

$$(f,v)=\int_0^l fv dx\le\frac{1}{2}\|f\|_0^2+\frac{1}{2}\|v\|_0^2. \qquad (9)$$

С учетом проведенных преобразований (5)-(9) приходим к неравенству:

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_0^2+c_1\int_0^l v'u dx\le\frac{1}{2}\partial_{0x}^{\alpha}\|v\|_0^2+$$
$$+c_1 uv|_0^l+\frac{c_2}{2}\|u\|_0^2+\frac{c_2}{2}\|v\|_0^2+\frac{1}{2}\|f\|_0^2. \qquad (10)$$

Проведем оценку второго слагаемого правой части (10), используя неравенства:

$$\mu_1(t)u(0,t)\le\frac{1}{2}u^2(0,t)+\frac{1}{2}\mu_1^2(t),$$

$$\mu_2(t)u(l,t)\le\frac{1}{2}u^2(l,t)+\frac{1}{2}\mu_2^2(t).$$

Также имеет место оценка [15]

$$u^2(l,t)\le\varepsilon\|u_x\|_0^2+c(\varepsilon)\|u\|_0^2,$$

где $c(\varepsilon)=\frac{1}{l}+\frac{1}{\varepsilon},\varepsilon>0$, а также:

$$uv\big|_0^l = u(x,t)k(x,t)\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t)\big|_0^l =$$
$$= u(l,t)k(l,t)\partial_{0x}^{\alpha}u(l,t) - u(0,t)k(0,t)\partial_{0x}^{\alpha}u(0,t) =$$
$$-\beta_2(t)u^2(l,t) + \mu_2(t)u(l,t) -$$
$$-\beta_1(t)u^2(0,t) + \mu_1(t)u(0,t) \le$$
$$\le M_0\left(u^2(l,t)+u^2(0,t)\right) + \frac{1}{2}\left(\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)\right) \le$$
$$\le \varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}(\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)).$$

Тогда имеем:

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_0^2 + c_1\int_0^l v'u dx \le$$
$$\le \frac{1}{2}\partial_{0x}^{\alpha}\|v\|_0^2 + c_1\varepsilon\|u_x\|_0^2 + M_2^{\varepsilon}\|u\|_0^2 + \frac{c_2}{2}\|u\|_0^2 +$$
$$+\frac{c_2}{2}\|v\|_0^2 + \frac{c_1}{2}(\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)+\frac{1}{2}\|f\|_0^2). \tag{11}$$

Проведем оценку последнего слагаемого левой части (11):

$$\int_0^l uv'dx \le \frac{1}{2}\|u\|_0^2 + \frac{1}{2}\|v'\|_0^2. \tag{12}$$

Подставляя (12) в (11) и выбирая $\varepsilon = c_2 / 2c_1$, получим:

$$\frac{1}{2}\|u_t\|_0^2 + \frac{c_1}{2}\|v'\|_0^2 \le \frac{1}{2}\partial_{0x}^{\alpha}\|v\|_0^2 + \frac{c_2}{2}\|v\|_0^2 + \frac{c_2}{2}\|u_x\|_0^2 +$$
$$+M_3\|u\|_0^2 + \frac{c_1}{2}(\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)) + \frac{1}{2}\|f\|_0^2).$$

Из тождества (4) с учетом проведенных выше преобразований (5)-(12) и подставляя вместо $v(x,t)$ значение $k(x,t)\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t)$, приходим к неравенству:

$$\|u_t\|_0^2 + \|k(x,t)_x\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t)_x\|_0^2 \le$$
$$\le \partial_{0x}^{\alpha}\|k(x,t)\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t)\|_0^2 + M_3(\|k(x,t)\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t)\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2) +$$
$$+M_2(\mu_1^2(t)+\mu_2^2(t)+\|f\|_0^2). \tag{13}$$

Проинтегрируем (13) по τ от 0 до t

$$\int_0^t\|u_\tau\|d\tau + \int_0^t\|k_x\partial_{0x}^{\alpha}u_x\|_0^2 d\tau \le$$
$$\le \int_0^t\partial_{0x}^{\alpha}\|k\partial_{0x}^{\alpha}u\|_0^2 d\tau + M_3\int_0^t(\|k\partial_{0x}^{\alpha}u\|_0^2 + \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2)d\tau +$$
$$+M_2\int_0^t(\mu_1^2+\mu_2^2+\|f\|_0^2)d\tau,$$

с учетом оценки

$$\int_0^t\partial_{0x}^{\alpha}\|K(x,\tau)\partial_{0x}^{\alpha}u(x,\tau)\|_0^2 d\tau = \int_0^t\frac{d\tau}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x\frac{\left(\|K(x,\tau)\partial_{0x}^{\alpha}u(h,\tau)\|_0^2\right)'}{(x-h)^{\alpha}}dh \le$$
$$\le \int_0^t\frac{c_1^2\left(\|\partial_{0x}^{\alpha}u(h,\tau)\|^2\right)'}{\Gamma(1-\alpha)}d\tau\int_h^t\frac{1}{(x-h)^{\alpha}}dh =$$
$$= \frac{c_1^2(t-x)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}(\|\partial_{0x}^{\alpha}u(h,\tau)\|_0^2 + \|\partial_{0x}^{\alpha}u(h,0)\|_0^2)$$

получим неравенство:

$$\|u\|_0^2 + \int_0^t\|\partial_{0x}^{\alpha}u_x\|_0^2 d\tau \le$$
$$\le M_5(\|\partial_{0x}^{\alpha}u\|_0^2 + \|\partial_{0x}^{\alpha}u(x,0)\|_0^2) + M_3\int_0^t(\|\partial_{0x}^{\alpha}u\|_0^2 + \|u\|_{C(0,l)}^2)d\tau +$$
$$+M_2\int_0^t(\mu_1^2+\mu_2^2+\|f\|_0^2)d\tau, \tag{14}$$

где $\|u\|_{C(0,l)}^2 = \|u_x\|_0^2 + \|u\|_0^2$.

На основании леммы 1.1 [15, с.152] из (14) получим:

$$\|u\|_0^2 + \int_0^t\|\partial_{0x}^{\alpha}u_x\|_0^2 d\tau \le$$
$$\le M\int_0^t(\|\partial_{0x}^{\alpha}u\|_0^2 + \|u\|_{C(0,l)}^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \|f\|_0^2)d\tau + \|u_0\|_0^2, \tag{15}$$

где M – константа, которая зависит только от входных данных.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если выполняются условия (3), то для решения задачи (1), (2) справедлива априорная оценка (15), из которой следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи (1), (2) от входных данных.

3. Разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу

В области $D = \{(x,t): 0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$ введем по переменной x и t равномерную сетку с шагом h по x и τ по t:

$$\omega_{h\tau} = \omega_h \times \omega_\tau\{(x_m,t_n), x_m \in \omega_h, t_n \in \omega_\tau\},$$
$$\omega_h = \{x_m = mh, m = 0,1,2,...M, Mh = L\},$$
$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,2,...N, N\tau = T\}.$$

Точное решение задачи (1), (2) обозначим через $u_m^n = u(x_m,t_n)$ а приближенное решение – через $y_m^n = y(x_m,t_n)$. Тогда для дробной производной $\partial_{0x}^{\alpha}(K(x.t)\partial_{0x}^{\alpha}u(x,t)$ в точках $x = x_m, t = t_n$ имеет место разностная аппроксимация [16]:

$$\partial_{0x_m}^{\alpha}(k(x_m,t_n)\partial_{0x_m}^{\alpha}u(x_m,t_n)) =$$
$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h}\sum_{k=0}^{m}C_{m,k}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h}\left[K(x_{k+1},t_n)\sum_{i=0}^{k+1}C_{k+1,i}\Delta u(x_i,t_n) - K(x_k,t_n)\sum_{i=0}^{k}C_{k,i}\Delta u(x_i,t_n)\right] + O(h),$$

где

$$C_{m,k} = x_{m-k+1}^{1-\alpha} - x_{m-k}^{1-\alpha},$$
$$C_{k,i} = x_{k-i+1}^{1-\alpha} - x_{k-i}^{1-\alpha},\ C_{k+1,i} = x_{k-i+2}^{1-\alpha} - x_{k-i+1}^{1-\alpha}.$$

На равномерной сетке $\omega_{h\tau}$ дифференциальной задаче (1), (2) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h+\tau)$:

$$y_t = \Delta^{\alpha}_{0x_k} U + Ry_x - Qy + \varphi \qquad (16)$$

$$\begin{cases} U_0 = \beta_1 y_0 - \mu_1; \\ -U_N = \beta_2 y_N - \mu_2; \\ y(x,0) = y_0(x_m), \end{cases} \qquad (17)$$

где

$$\Delta^{\alpha}_{0x_k} U = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h} \sum_{k=0}^{m} (x^{1-\alpha}_{m-k+1} - x^{1-\alpha}_{m-k}) \Delta U_k,$$

$$\Delta U_k = U_{k+1} - U_k, \;\; U_k = k(x_k, t_n) \Delta^{\alpha}_{0x_k} y,$$

$$\Delta^{\alpha}_{0x_k} y = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h} \sum_{k=0}^{m} (x^{1-\alpha}_{m-k+1} - x^{1-\alpha}_{m-k}) \Delta y_k,$$

$$y_t = \frac{y^{n+1}_m - y^n_m}{\tau}, \; y_x = \frac{y^n_{m+1} - y^n_m}{h}, \; y = y^n_m,$$

$$y^{n+1}_m = \hat{y}, \;\; \varphi = f(x_m, t_n), \; R = r(x_m, t_n), \; Q = q(x_m, t_n),$$

$$\beta_i = \beta(t_n), \mu_i = \mu(t_n), \; i = 1,2.$$

4. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Исследование на устойчивость разностной схемы (16), (17) будем проводить методом энергетических неравенств [17, с. 341]. Введем скалярное произведение и норму для сеточных функций в виде:

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, \;\; (u,v] = \sum_{i=1}^{N} u_i v_i h,$$

$$(u,u) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i^2 h = \|u\|_0^2,$$

$$(u,u] = \sum_{i=1}^{N} u_i^2 h = \|u]|_0^2.$$

Лемма 2. Для любой функции $y(x,t)$ определенной на сетке $\omega_{h\tau}$, справедливо неравенство [18]:

$$y^k \Delta^{\alpha}_{0x_k} y \ge \frac{1}{2} \Delta^{\alpha}_{0x_k} (y^2).$$

Умножим выражение (16) скалярно на $U_k = k(x_k, t_n) \Delta^{\alpha}_{0x_k} y$:

$$(y_t, U_k) = (\Delta^{\alpha}_{0x_k} U, U_k) + (Ry_x, U_k) - (Qy, U_k) + (\varphi, U_k). \quad (18)$$

Преобразуем слагаемые равенства (18) с учетом Леммы 2, неравенства Коши-Буняковского и разностной формулы интегрирования по частям:

$$(y_t, U_k) \le \frac{1}{2}\|y_t\|_0^2 + \frac{1}{2}\|U_k\|_0^2, \qquad (19)$$

$$(\Delta^{\alpha}_{0x_k} U, U_k) \ge \frac{1}{2} \Delta^{\alpha}_{0x_k} \|U\|_0^2, \qquad (20)$$

$$(Ry_x, U_k) \le c_1 (U_N y_N - U_0 y_1 - (U_{k\bar{x}}, y), \qquad (21)$$

$$-(Qy, U_k) \le \frac{c_2}{2}\|y\|_0^2 + \frac{c_2}{2}\|U_k\|_0^2, \qquad (22)$$

$$(\varphi, U_k) \le \frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2 + \frac{1}{2}\|U_k\|_0^2. \qquad (23)$$

С учетом проведенных выше преобразований (19)–(23) приходим к неравенству:

$$\frac{1}{2}\|y_t\|_0^2 + c_1(U_{k\bar{x}}, y] \le \frac{1}{2}\Delta^{\alpha}_{0x_k}\|U\|_0^2 + c_1(U_N y_N - U_0 y_1) +$$
$$+ \frac{c_2}{2}\|y\|_0^2 + \frac{c_2}{2}\|U_k\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2. \qquad (24)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. Для любой функции $y(x)$, заданной на сетке ω_h, справедливо неравенство [19]:

$$\max_{1 \le m \le M} y_m^2 \le \varepsilon \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l}\right)\|y\|_0^2,$$

где ε – произвольная положительная постоянна, l – длина интервала, на котором введена сетка ω_h.

Второе слагаемого в правой части (24) оценим, используя Лемму 3, а также воспользуемся разложением функции $y_1 = y_0 + h$ в ряд Тейлора по степеням h:

$$y_1 = y_0 + h \approx y_0 + hy'_\zeta,$$

где ζ – некоторая точка, расположенная в интервале $(0, 0+h)$:

$$(U_N y_N - U_0(y_0 + hy'_\zeta) = -\beta_2 y_N^2 + \mu_2 y_N -$$
$$- \beta_1 y_0^2 + \mu_1 y_0 - hy'_\zeta(\beta_1 y_0 + \mu_1) \le$$
$$\le \varepsilon\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\|y\|_0^2 + \frac{\mu_1^2}{2} + \frac{\mu_2^2}{2} - hy'_\xi(\beta_1 y_0 + \mu_1) \le$$
$$\le \varepsilon\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + M_1^{\varepsilon}\|y\|_0^2 + \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2).$$

Подставляя полученное значение в (24), имеем

$$\frac{1}{2}\|y_t\|_0^2 + c_1(U_{k\bar{x}}, y] \le$$
$$\le \frac{1}{2}\Delta^{\alpha}_{0x_k}\|U\|_0^2 + c_1\varepsilon\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + M_2^{\varepsilon}\|y\|_0^2 +$$
$$+ \frac{c_1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \frac{c_2}{2}\|y\|_0^2 + \frac{c_2}{2}\|U_k\|_0^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2. \quad (25)$$

Перейдем к оценке второго слагаемого левой части неравенства (25):

$$(U_{k\bar{x}}, y] = (\frac{U_k - U_{k-1}}{h}, y] = \frac{c_1}{h}(\Delta^{\alpha}_{0x} y_k, y] - \frac{c_1}{h}(\Delta^{\alpha}_{0x} y_{k-1}, y].$$

Применяя Лемму 2 имеем: $(U_{k\bar{x}}, y] \ge \frac{c_1}{2}\Delta^{\alpha}_{0x}\|y_{\bar{x}}]|_0^2$.

Подставляя полученные значения в (25) и выбирая $\varepsilon = {c_2}/{2c_1}$, приходим к неравенству:

$$\|y_t\|_0^2 + \Delta_{0x}^{\alpha}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \le \Delta_{0x_k}^{\alpha}\|U\|_0^2 + \frac{c_2}{2}\|U_k\|_0^2 + $$
$$+\frac{c_2}{2}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 + M_4\|y\|_0^2 + M_3(\mu_1^2+\mu_2^2+\|\varphi\|_0^2). \quad (26)$$

Преобразуем, второе слагаемое в левой части неравенства (26):

$$\|U_k\|_0^2 = \|k(x,t)\Delta_{0x_k}^{\alpha}y\|^2 \le c_1\sum_{s=1}^{N-1}\left(\Delta_{0x_k}^{\alpha}y_s\right)^2 h =$$
$$=\frac{c_1}{(\Gamma(2-\alpha)h)^2}\sum_{s=1}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{k}(x_{k-i+1}^{1-\alpha}-x_{k-i}^{1-\alpha})(y_{i+1}^s-y_i^s)\right)^2 h =$$
$$=\frac{c_1}{(\Gamma(2-\alpha)h)^2}\sum_{i=0}^{k}(x_{k-i+1}^{1-\alpha}-x_{k-i}^{1-\alpha})\sum_{i=0}^{k}(x_{k-i+1}^{1-\alpha}-x_{k-i}^{1-\alpha})\sum_{s=1}^{N-1}(y_{i+1}^s-y_i^s)^2 h =$$
$$=\frac{c_1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=0}^{k}(x_{k-i+1}^{1-\alpha}-x_{k-i}^{1-\alpha})\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y\|_0^2 \le \frac{l^{1-\alpha}c_1}{\Gamma(2-\alpha)}\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y\|_0^2.$$

После подстановки полученной оценки, неравенство (26) примет вид:

$$\|y_t\|_0^2 + \Delta_{0x}^{\alpha}\|y_{\bar{x}}]|_0^2 \le \Delta_{0x_k}^{\alpha}\|U\|_0^2 +$$
$$+M_5(\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y\|_0^2 + \|y\|_{C(0,l)}^2) + M_3(\mu_1^2+\mu_2^2+\|\varphi\|_0^2),$$
$$\text{где } \|y\|_{C(0,l)}^2 = \|y_{\bar{x}}]|_0^2 + \|y\|_0^2. \quad (27)$$

Просуммируем (27) по s от 0 до j;

$$\sum_{s=0}^{j}\|y_t^s\|_0^2 + \sum_{s=0}^{j}\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y_{\bar{x}}^s]|_0^2 \le$$
$$\le \sum_{s=0}^{j}\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|U^s\|_0^2 + M_5\sum_{s=0}^{j}(\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y\|_0^2 + \|y\|_{C(0,l)}^2) +$$
$$+M_3\sum_{s=0}^{j}(\mu_1^2+\mu_2^2+\|\varphi^s\|_0^2). \quad (28)$$

Оценим первое слагаемое правой части неравенства (28):

$$\sum_{s=0}^{j}\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|U^s\|_0^2 = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h}\sum_{s=0}^{j}\sum_{k=0}^{m}(x_{m-k+1}^{1-\alpha}-x_{m-k}^{1-\alpha})\|\Delta U_k^s\|_0^2 =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)h}\sum_{s=0}^{j}(x_{m-s+1}^{1-\alpha}-x_{m-s}^{1-\alpha})\sum_{k=0}^{m}\|\Delta U_k^s\|_0^2 \le$$
$$\le \frac{l^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)h}\sum_{k=0}^{m}\|\Delta U_k^s\|_0^2.$$

Пользуясь известным неравенством $\|y_{k+1}-y_k\|_0^2 \le 2\|y_{k+1}\|_0^2 + 2\|y_k\|_0^2$, имеем:

$$\frac{l^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)h}\sum_{k=0}^{m}\|\Delta U_k^s\|_0^2 \le$$
$$\le \frac{2l^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)h}\left(\sum_{k=0}^{m}\|U_{k+1}^s\|_0^2 + \sum_{k=0}^{m}\|U_k^s\|_0^2\right) \le$$
$$\le \frac{2l^{1-\alpha}c_1}{\Gamma(2-\alpha)h}\left(\sum_{k=0}^{m}\|\Delta_{0x_{k+1}}^{\alpha}y^s\|_0^2 + \sum_{k=0}^{m}\|\Delta_{0x_k}^{\alpha}y^s\|_0^2\right). \quad (29)$$

Следовательно, после подстановки (29) в (28) получим:

$$\sum_{s=0}^{j}\|y_t^s\|_0^2 + \sum_{s=0}^{j}\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y_{\bar{x}}^s]|_0^2 \le$$
$$\le \frac{2l^{1-\alpha}c_1}{\Gamma(2-\alpha)h}\left(\sum_{k=0}^{m}\|\Delta_{0x_{k+1}}^{\alpha}y^s\|_0^2 + \right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{m}\|\Delta_{0x_k}^{\alpha}y^s\|_0^2\right) + M_5\sum_{s=0}^{j}(\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y\|_0^2 + \|y\|_{C(0,l)}^2) +$$
$$+M_3\sum_{s=0}^{j}(\mu_1^2+\mu_2^2+\|\varphi^s\|_0^2). \quad (30)$$

Оценим теперь первые выражения правой части (30):

$$\frac{2l^{1-\alpha}c_1}{\Gamma(2-\alpha)h}\sum_{k=0}^{m}\|\Delta_{0x_{k+1}}^{\alpha}y^s\|^2 = \frac{2l^{1-\alpha}c_1}{\Gamma(2-\alpha)h}\sum_{k=0}^{m}\left[\sum_{s=0}^{N-1}\left(\Delta_{0x_{k+1}}^{\alpha}y^s\right)^2\right]h =$$
$$=\frac{2l^{1-\alpha}c_1}{\Gamma(2-\alpha)h}\sum_{k=0}^{m}\left[\sum_{s=0}^{N-1}\left(\sum_{i=0}^{k+1}(x_{k-i+2}^{1-\alpha}-x_{k-i+1}^{1-\alpha})(y_{i+1}^s-y_i^s)\right)^2\right]h \le$$
$$\le\frac{2l^{1-\alpha}c_1}{\Gamma(2-\alpha)h}\sum_{k=0}^{m}\left[\sum_{i=0}^{k+1}(x_{k-i+2}^{1-\alpha}-x_{k-i+1}^{1-\alpha})\sum_{i=0}^{k+1}(x_{k-i+2}^{1-\alpha}-x_{k-i+1}^{1-\alpha})\sum_{s=0}^{N-1}(y_{i+1}^s-y_i^s)^2\right]h \le$$
$$\le 2l^{1-\alpha}c_1\sum_{k=0}^{m}\sum_{i=0}^{k+1}(x_{k-i+2}^{1-\alpha}-x_{k-i+1}^{1-\alpha})\Delta_{0x_{k+1}}^{\alpha}\|y^s\|_0^2 =$$
$$=2l^{1-\alpha}c_1\sum_{i=0}^{m}\Delta_{0x_{k+1}}^{\alpha}\|y^s\|_0^2\sum_{k=i+1}^{m}(x_{k-i+2}^{1-\alpha}-x_{k-i+1}^{1-\alpha}) \le 2l^{1-\alpha}c_1x_{m+1}^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{m}\Delta_{0x_{k+1}}^{\alpha}\|y^s\|_0^2.$$

По аналогии для выражения

$$\frac{2l^{1-\alpha}c_1}{\Gamma(2-\alpha)h}\sum_{k=0}^{m}\|\Delta_{0x_k}^{\alpha}y^s\|_0^2 \le 2l^{1-\alpha}c_1x_m^{1-\alpha}\sum_{i=0}^{m}\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y^s\|_0^2,$$

тогда учитывая полученные оценки, после несложных преобразований из (30) имеем:

$$\|y_*^j\|_0^2 + \tau\sum_{s=1}^{j}\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y_{\bar{x}}^s]|_0^2 \le$$
$$\le \tau M_6\left(\sum_{i=0}^{m}\Delta_{0x_{k+1}}^{\alpha}\|y^s\|_0^2 + \sum_{i=0}^{m}\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y^s\|_0^2\right) +$$
$$+\tau M_5\sum_{s=0}^{j}(\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y^s\|_0^2 + \Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y^s\|_0^2 + \|y^s\|_{C(0,l)}^2) +$$
$$+\tau M_3\sum_{s=0}^{j}(\mu_1^2+\mu_2^2+\|\varphi^s\|_0^2) + \|y^0\|_0^2, \quad (31)$$

где $\|y_*\|_0^2 = \|\hat{y}\|_0^2 + \|y\|_0^2$.

Из (30) на основании леммы [20, с. 171] при $\tau_0 = \frac{1}{2M_6}$ получим, что для всех $\tau \le \tau_0$ имеет место неравенство:

$$\|y_*^j\|_0^2 \le \tau M\left(\sum_{s=0}^{j}(\Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y^s\|_0^2 + \Delta_{0x_k}^{\alpha}\|y^s\|_0^2 + \|y^s\|_{C(0,l)}^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \|\varphi^s\|_0^2\right) + \|y^0\|_0^2, \quad (32)$$

где M – константа, которая не зависит от τ и h.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (3), тогда для решения разностной задачи (16), (17), при достаточно малом $\tau \le \tau_0$, справедлива априорная оценка (32).

Из априорной оценки (32) следует единственность и устойчивость решения разностной задачи (16), (17) по начальным данным и правой части.

Рассмотрим погрешность разностной схемы (16), (17). Пусть $u(x,t)$ решение задачи (1), (2), а $y(x_n, t_m) = y_n^m$ решение разностной задачи (16), (17). Обозначим через $z_n^m = y_n^m - u_n^m$ погрешность аппроксимации. Подставим $y_n^m = z_n^m + u_n^m$ в (16), (17) получим для z_n^m задачу:

$$z_t = \Delta_{0t}^{\alpha} U + R z_x - Qz + \psi \tag{33}$$

$$\begin{cases} U_0 = \beta_1 z_0 - v_1; \\ -U_N = \beta_2 z_N - v_2; \\ z(x,0) = z_0(x_m), \end{cases} \tag{34}$$

где $\psi = O(\tau + h)$, $v_1 = O(\tau + h)$, $v_2 = O(\tau + h)$ – погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1), (2) разностной схемой (16), (17).

Применяя априорную оценку к решению задачи (33), (34), получим неравенство:

$$\|z_*^j\|_0^2 \le \tau M \left(\sum_{s=0}^{j} (\Delta_{0x_k}^{\alpha} \|z^s\|_0^2 + \Delta_{0x_k}^{\alpha} \|z^s\|_0^2 + \|z^s\|_{C(0,l)}^2 + v_1^2 + v_2^2 + \|\psi^s\|_0^2 \right) + \|z^0\|_0^2, \tag{35}$$

где $\|z_*\|_0^2 = \|\hat{z}\|_0^2 + \|z\|_0^2$, M-констант, которая не зависит от τ и h.

Из априорной оценки (35) следует сходимость решения разностной задачи (16), (17) к решению дифференциальной задачи (1), (2). Существует такое τ_0, что при $\tau \le \tau_0$ справедлива оценка:

$$\|z^j\| = \|y^j - u^j\| \le M(\tau + h).$$

Заключение

Исследована нелокальная краевая задача для уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто. Методом энергетических неравенств получена априорная оценка в дифференциальной форме, из которой следует единственность и непрерывная зависимость решения задачи от входных данных. Построена разностная схема, аппроксимирующая краевую задачу с первым порядком аппроксимации. Доказана устойчивость решения по начальным данным и правой части, используя метод энергетических неравенств. Также доказана сходимость разностной схемы к решению исходной задачи.

Литература

1. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и Техника. 1987.688 с.
2. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик. 1989.430 с.
3. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Academic Press. 1999. 339 p.
4. *Oldman K.B.,Spanier J.* The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. N.Y.:Academic Press. 1974. 234p.
5. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа. 1995.304 с.
6. *Бейбалаев В.Д., Ибавов Т.И., Омарова А.Г.* Численное исследование нелинейного уравнения теплопроводности с производной дробного порядка //Вестник ДГУ.2021. Вып.2. С.47-53.
7. *Бештоков М.Х.* Краевые задачи для вырождающихся и невырождающихся дифференциальных уравнений дробного порядка с нелокальным линейным источником и разностные методы их численной реализации// Уфимский математический журнал.2019. Т.11. №2. С.36-55.
8. *Бештоков М.Х, Худалов М.З.* Третья краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто// Математика и математическое моделирование. 2020. №3. С. 52-64.
9. *Бештокова З.В.* Численный метод решения нелокальных краевых задач для многомерного уравнения параболического типа//Вычислительные методы и программирование. 2022. Т.23. №2. С. 153-171.
10. *Шогенова Е.М.* Априорные оценки решения краевых задач для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.2018.№4(24).С. 54-60.
11. *Алиханов А.А.* Априорные оценки решений краевых задач для уравнений дробного порядка //Дифференциальные уравнения. 2010. Т.46. №5. С. 658–664
12. *Алиханов А.А.* Разностные методы решения краевых задач для волнового уравнения с дробной производной по времени // Вестн.Сам.гос.техн.ун-та.Сер.Физ-мат.науки. 2008.№2(17).С.13-20.
13. *Казакова Е.М.* Разностная схема для уравнения конвекции-диффузии дробного порядка.//Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат.науки. 2021.Т.36.№3.С.146-154.
14. *Алиханов А.А.* Устойчивость и сходимость разностных схем для краевых задач уравнения

диффузии дробного порядка.//Журнал вычислительной математики и математической физикпи.2016. Т.56.№4.С.572-586.
15. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.:Наука. 1973. 409 с.
16. *Омарова А.Г.* Об устойчивости и сходимости разностной схемы, аппроксимирующей краевую задачу для одного дифференциального уравнения с дробной производной Капуто. // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2022.№1.С.23-27.
17. *Самарский А.А.,Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.:Наука. 1973.415с.
18. *Alikhanov A.A.* Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation // Applied Mathematics and Computation. 2015. No. 268, P. 12-22.
19. *Андреев В.Б.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Ж. вычис. матем. и матем. физ. 1968. Т. 8. №6. 1218-1231.
20. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука. 1977.656 с.

Омарова Асият Гамзатовна. Дагестанский государственный университет, г. Махачкала, Россия. Аспирант. Область научных интересов: вычислительная математика, дифференциальные уравнения с дробными производными. E-mail: asya89.89@mail.ru

Numerical solution of the boundary value problem for the heat equation with a fractional Caputo derivative

A.G. Omarova
Dagestan State University, Makhachkala, Russia

Abstract. In a rectangular domain, a nonlocal boundary value problem is studied for the heat equation with a fractional Caputo derivative with variable coefficients. An a priori estimate in differential form is obtained by the method of energy inequalities. A difference scheme is constructed that approximates the boundary value problem with the first order. An analog of the a priori estimate in difference form is obtained. The obtained a priori estimates imply the uniqueness and stability of the solution with respect to the initial data and the right-hand side. The convergence of the difference scheme to the solution of the original problem is proved.
Keywords: *fractional Caputo derivative, boundary value problem, a priori estimate, difference scheme, method of energy inequalities, numerical methods.*
DOI: 10.14357/20790279240201 **EDN: CAZNDM**

References

1. *Samko S.G., Kilbas A.A., and Marichev O.I.* Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Application. Gordon and Breach: Yverdon;1993. 976 p.
2. *Nakhushev A.M.* Elements of fractional calculus and their application. Nalchik: 1989. 430 p (In Russ)
3. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Academic Press; 1999. 339 p.
4. *Oldman K.B.,Spanier J.* The fractional calculus: theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. N.Y.:Academic Press; 1974. 234p.
5. *Nakhushev A.M.* Equations of mathematical biology. Moscow: Vysshaya shkola; 1995. 304 p. (In Russ)
6. *Beybalaev V.D., Ibavov T.I., Omarova A.G.* Numerical study of the nonlinear heat equation with a fractional order derivative Vestnik Dagestanskogo gosudarstvennogo universiteta. 2021;(2):47-53 (In Russ). DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-47-53
7. *Beshtokov M.H.* Boundary value problems for degenerate and non-degenerate differential cases with nonlocal linear kernel and difference methods for their numerical implementation. Ufimskiy matematicheskiy zhurnal. 2019;11(2): 36-55 (In Russ).
8. *Beshtokov M.H, Hudalov M.Z.* The third boundary value problem for a loaded heat equation with a fractional Caputo derivative. Matematika i

matematicheskoye modelirovaniye. 2020;(3):52-64 (In Russ). doi.org/10.24108/mathm.0320.0000222

9. *Beshtokova Z.V.* Numerical method for solving non-local boundary value problems for a multidimensional parabolic equation. Vychislitel'nyye metody i programmirovani ye.2022;23(2):153-171 (In Russ). Doi 10.26089/NumMet.v23r210.
10. *Shogenova E.M.* A priori estimates for the solution of boundary value problems for the fractional order convection-diffusion equation. Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. Nauki.2018;24(4)**:**54-60 (In Russ). Doi: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-54-60
11. *Alikhanov A.A.* A priori estimates of solutions to boundary value problems for equations of fractional order. Differentsial'nyye uravneniya.2010;**46**(5): 658-664 (In Russ).
12. *Alikhanov A.A.* Difference methods for solving boundary value problems for a wave equation with a fractional time derivative. Vestn.Sam.gos. tekhn.un-ta.Ser.Fiz-mat.nauki.2008;**17**(2): 13-20 (In Russ).
13. *Kazakova E.M.* Difference scheme for fractional-order convection-diffusion equation. Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat.nauki. 2021;**36**(3):146-154 (In Russ).
14. *Alikhanov A.A.* Stability and convergence of difference schemes for boundary value problems of the diffusion equation of fractional . Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki.2016;**56**(4):572-586 (In Russ). Doi: 10.7868/S0044466916040049.
15. *Ladyzhenskaya O.A.* Boundary Value Problems of Mathematical Physics. NewYork: Springer; 1985.409p.
16. *Omarova A.G.* On the stability and convergence of a difference scheme approximating a boundary value problem for a single differential equation with a fractional Caputo derivative. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Yestestvennyye nauki. 2022;(1):23-27 (In Russ). Doi: 10.18522/1026-2237-2022-1-23-27
17. *Samarsky A.A., Gulin A.V.* Stability of Difference Schemes. Moscow: Nauka; 1973.415p. (In Russ)
18. *Alikhanov A.A.* Numerical methods of solutions of boundary value problems for the multi-term variable-distributed order diffusion equation. Applied Mathematics and Computation.2015;(268):12-22.
19. *Andreev V.B.* On the Convergence of Difference Schemes Approximating the Second and Third Boundary Value Problems for Elliptic Equations. Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz..1968;**8**(6):1218–1231 (In Russ).
20. *Samarsky A.A.* Theory of difference schemes Moscow: Nauka; 1977.656p (In Russ).

Omarova Asiyat Gamzatovna. Post-graduate Student, Department of Applied Mathematics, Faculty of Mathematics and Computer Science, Dagestan State University, Russia, 367025, Makhachkala, st. Magomed-Gadzhiev 43 "A". Email address: asya89.89@mail.ru