

О скрытых аттракторах нелинейных систем дифференциальных уравнений с бесконечным числом особых точек*

Н.А. Магницкий

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление»
Российской академии наук, Москва, Россия

Аннотация. В работе проведен аналитический и численный анализ бифуркаций циклов двух систем уравнений, содержащих по утверждениям авторов, как бесконечное число неустойчивых особых точек, так и «скрытые» хаотические аттракторы. Показано, что переход к хаосу в системах происходит, как и в любых других нелинейных хаотических системах дифференциальных уравнений, в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого. При этом вследствие отсутствия гомоклинических и гетероклинических сепаратрисных контуров, в системах реализуются неполные ФШМ-каскады бифуркаций, заканчивающиеся полным субгармоническим каскадом и неполным гомоклиническим каскадом бифуркаций. Доказано, что в обеих системах, так называемые «скрытые» аттракторы, являются, на самом деле, сложными сингулярными аттракторами систем в смысле теории ФШМ.

Ключевые слова: диссипативные системы, бифуркации, динамический хаос, скрытый аттрактор, теория ФШМ.

DOI: 10.14357/20790279240203 **EDN:** FCNENC

Введение

Настоящая статья продолжает серию работ автора по анализу структуры особого вида нерегулярных аттракторов автономных нелинейных систем дифференциальных уравнений – так называемых «скрытых» аттракторов. В современной литературе по нелинейной и хаотической динамике скрытым аттрактором называется нерегулярный (хаотический) аттрактор нелинейной системы дифференциальных уравнений в том случае, если вместе с ним система имеет устойчивые особые точки (см. [1-3]), либо система вообще не имеет особых точек (см. [4-6]), либо имеет бесконечное число особых точек (см. [7-9]). Во всех перечисленных случаях хаотический аттрактор существует вне окрестности неустойчивой особой точки. Заметим, что существование хаотического нерегулярного аттрактора в окрестности неустойчивой особой точки означает его рождение из особой точки каскадом бифуркаций, первой из которых является бифуркация Андронова-Хопфа рождения устойчивого цикла.

Авторы термина «скрытый аттрактор» характеризуют его вычислением одного или нескольких положительных показателей Ляпунова, вычислением размерности Каплана-Йорке или доказательством существования подковы Смейла. Однако, как неоднократно показано в работах автора и продемонстрировано на многочисленных примерах [10-13], положительность численного показателя Ляпунова является всего лишь ошибкой вычислений, и даже бесконечное число подков Смейла не в состоянии описать всю сложность структуры нерегулярного аттрактора в окрестности гомоклинического или гетероклинического сепаратрисного контура.

В работах автора показано, что системы с устойчивой особой точкой [13] также как и системы без особых точек [14] имеют единый универсальный бифуркационный сценарий Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого перехода к хаосу, характерный для всех без исключения систем нелинейных дифференциальных уравнений: автономных и неавтономных, диссипативных и консервативных, обыкновенных, с частными производными и с запаздывающим аргументом. Сценарий ФШМ начинается

* Работа поддержана Российским Научным Фондом (грант 23-21-00095).

каскадом бифуркаций Фейгенбаума удвоения периода цикла или тора и продолжается субгармоническим каскадом бифуркаций Шарковского и гомоклиническим (или гетероклиническим) каскадом бифуркаций Магницкого. Особенность «скрытого» аттрактора заключается лишь в том, что начальный цикл каскада Фейгенбаума рождается не из особой точки в результате бифуркации Андронова-Хопфа, а в результате седло-узловой бифуркации, то есть наличие в системе каскада бифуркаций ФШМ может быть не связано с наличием или отсутствием в системе особых точек. Все рождающиеся в ходе реализации такого сценария нерегулярные аттракторы являются исключительно сингулярными аттракторами, то есть непериодическими ограниченными почти устойчивыми траекториями в конечномерном или бесконечномерном фазовом пространстве, являющимися пределами каскадов бифуркаций удвоения периода каких-либо циклов (торов), и в любой окрестности которых содержится бесконечное число неустойчивых периодических траекторий.

Целью настоящей статьи является показать, что «скрытые» аттракторы систем с бесконечным числом особых точек, рассмотренные в работах [7,8], также являются обычными сложными сингулярными аттракторами, порожденными каскадами бифуркаций по сценарию ФШМ.

1. Система с хаотическим аттрактором и линией особых точек

В работе [7] рассмотрены девять трехмерных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих наряду с нерегулярным (хаотическим) аттрактором линию (координатную ось) неустойчивых особых точек. Одна из таких систем имеет вид:

$$\dot{x} = z, \quad \dot{y} = -x - yz, \quad \dot{z} = -ax^2 - xy + bxz, \quad (1)$$

Авторы работы [7] утверждают, что при $a = 3$, $b = 1$ в системе (1) существует «скрытый» хаотиче-

ский аттрактор, изображенный на рис. 2,в, так как вместе с аттрактором система имеет координатную ось y ($x = 0, z = 0$) неустойчивых особых точек. При этом «хаотичность» аттрактора характеризуется авторами работы [7] найденным численно положительным показателем Ляпунова, равным 0.0521, что, как указано выше, является не характеристикой аттрактора, а характеристикой области его существования вместе со всеми неустойчивыми циклами, лежащими в его окрестности.

1.1. Аналитическое исследование

То, что система (1) должна иметь какой-либо аттрактор в области $z > bx$ следует из ее диссипативности в этой области, так как для дивергенции ее правой части $F(x,y,z)$ имеет место:

$$\operatorname{div} F = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) = -z + bx < 0.$$

Характеристическое уравнение для вычисления собственных значений матрицы линеаризации в особой точке $(0, y_*, 0)$ имеет вид: $\lambda(\lambda^2 + y_*) = 0$. Поэтому при любых a и b все особые точки при любом y_* не являются асимптотически устойчивыми по Ляпунову и, следовательно, не являются аттракторами. А точки с $y_* < 0$ имеют к тому же седловое двумерное многообразие. Следовательно, чтобы траектория сходилась к некоторому нерегулярному аттрактору желательно использовать начальное условие с $y_0 > 0$. Покажем численно, что найденный в системе (1) при $a = 3$, $b = 1$ «скрытый» аттрактор является сложным сингулярным аттрактором ФШМ-каскада бифуркаций по параметру b некоторого изначально устойчивого предельного цикла системы (1), рожденного в результате седло-узловой бифуркации, аналитическое исследование которой является весьма сложной задачей и в настоящей работе не рассматривается.

1.2. Численный анализ

Исследование динамики решений системы (1) проведем численными методами при $a = 3$ и при уменьшении значений бифуркационного параметра $b < 1.51$ Интегрирование системы (1) ме-

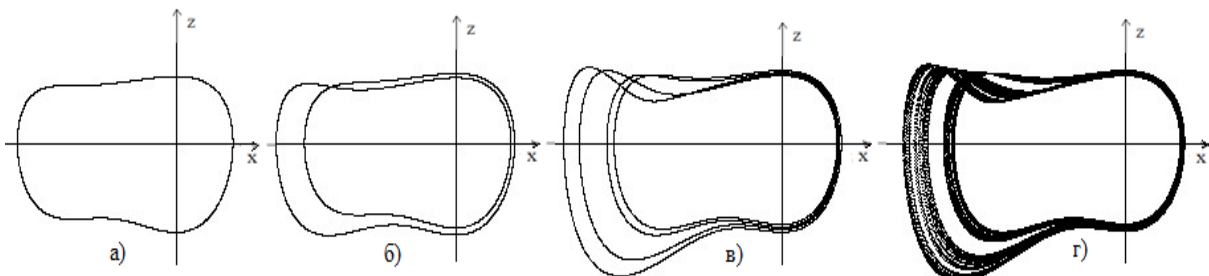


Рис.1. Проекция на плоскость (x,z) устойчивых циклов периодов один, два, четыре системы (1) при $b = 1.4$ (а), $b = 1.33$ (б), $b = 1.11$ (в) и аттрактора Фейгенбаума при $b = 1.079$ (г)

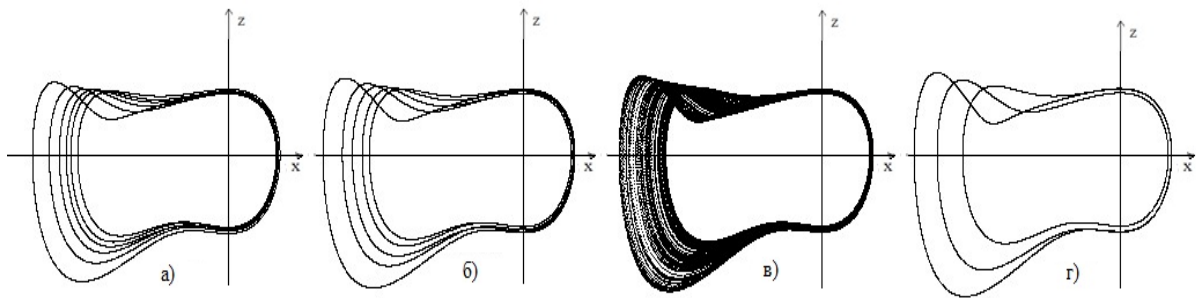


Рис.2. Проекция на плоскость (x, z) устойчивых циклов периодов шесть, пять, три системы (1) при $b = 1.062$ (а), $b = 1.022$ (б), $b = 0.975$ (г) и сингулярного аттрактора при $b = 1$ (в)

тодом Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0.01$ показывает, что при $b \approx 1.503$ в системе рождается устойчивый предельный цикл в результате седло-узловой бифуркации. На рис. 1, а показана проекция этого цикла на плоскость (x, z) при значении бифуркационного параметра $b = 1.4$. При уменьшении значений параметра b родившийся предельный цикл претерпевает каскад бифуркаций в полном соответствии с теорией ФШМ. Так, устойчивый цикл периода два наблюдается при $b = 1.33$, периода четыре – при $b = 1.11$, периода восемь – при $b = 1.088$, первый простейший сингулярный аттрактор Фейгенбаума – при $b = 1.079$.

Дальнейшее усложнение динамики решений системы (1) при уменьшении значений бифуркационного параметра b происходит, как и во многих других нелинейных системах дифференциальных уравнений, через субгармонический каскад бифуркаций Шарковского. Так, устойчивый цикл периода шесть наблюдается при $b = 1.062$, периода пять – при $b = 1.022$, периода три – при $b = 0.975$. Следовательно, найденный авторами работы [7] в системе (1) при $b = 1$ «скрытый» аттрактор, является на самом деле одним из сложных сингулярных аттракторов универсального бифуркационного сценария ФШМ, расположенным между циклами периода пять и периода три, завершающего субгармонический каскад бифуркаций Шарковского.

Таким образом, так называемый «скрытый» аттрактор, найденный в системе (1) при $a = 3, b = 1$, не является каким-то особенным видом нерегулярных аттракторов, но точно так же, как и в любых других трехмерных и многомерных нелинейных диссипативных системах дифференциальных уравнений, он является одним из бесконечного числа сингулярных аттракторов системы, существующих в ней в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием ФШМ.

Интерес также представляет динамика системы (1) при значениях параметра $b < 0.975$. Так, при значении $b = 0.906$ в системе (1) существует устойчивый цикл периода четыре, который начинает бифурцировать в соответствии со сценарием ФШМ как при увеличении, так и при уменьшении значений параметра b . Так, например, устойчивые циклы периода пять существуют в системе (1) при $b = 0.936$ и при $b = 0.882$. Последний цикл принадлежит субгармоническому каскаду бифуркаций при росте значений параметра b , начинающемуся циклом периода один при $b = 0.85$. Этому же каскаду бифуркаций принадлежит устойчивый цикл периода шесть, существующий в системе (1) при $b = 0.869$. А уменьшение значений параметра $b < 0.85$ порождает новый субгармонический каскад бифуркаций.

2. Система с хаотическим аттрактором и замкнутой кривой особых точек

В работе [8] рассмотрена трехмерная нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющая наряду с нерегулярным (хаотическим) аттрактором замкнутую кривую неустойчивых особых точек. Система имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= z, \quad \dot{y} = -z(ay + by^2 + xz), \\ \dot{z} &= x^4 - 0.1x^2y^2 + y^2 - 0.5.\end{aligned}\quad (2)$$

Следуя работе [8], в системе (2) при $a = 3, b = 4$ существует «скрытый» хаотический аттрактор, изображенный на рис. 4, г, так как вместе с аттрактором система имеет замкнутую кривую неустойчивых особых точек, лежащую в плоскости (x, y) :

$$S = \{(x, y, z) \in R^3, \quad z = 0, \\ x^4 - 0.1x^2y^2 + y^2 - 0.5 = 0\}.$$

При этом, как и в случае с системой (1), «хаотичность» аттрактора характеризуется авторами работы [8] найденным численно положительным пока-

зателем Ляпунова, что, как указано выше, является характеристикой не аттрактора, а области его существования вместе со всеми неустойчивыми циклами, лежащими в его окрестности.

2.1. Аналитическое исследование

То, что система (2) должна иметь какой-либо аттрактор при любых a и b следует из ее диссипативности в области трехмерного пространства, в которой дивергенция ее правой части $F(x, y, z)$ отрицательна:

$$\operatorname{div} F = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) = -z(a + 2by) < 0.$$

Характеристическое уравнение для вычисления собственных значений матрицы линеаризации в особой точке $(x_*, y_*, 0)$, $(x_*, y_*) \in S$ имеет вид: $\lambda(\lambda^2 - 4x_*^3 + 0.2x_*y_*^2) = 0$. Поэтому при любых a и b все особые точки при любых $(x_*, y_*) \in S$ не являются асимптотически устойчивыми по Ляпунову и, следовательно, не являются аттракторами. А точки с $4x_*^3 - 0.2x_*y_*^2 > 0$ имеют к тому же седловое двумерное многообразие. Покажем численно, что найденный в системе (2) при $a = 3$, $b = 4$ «скрытый» аттрактор является сложным сингулярным аттрактором ФШМ-каскада бифуркаций по параметру b некоторого изначально устойчивого предельного цикла, существующего в системе (2) при $a = 3$, $b = 7$.

2.2. Численный анализ

Исследование динамики решений системы (2) проведем численными методами при $a = 3$ и

при уменьшении значений бифуркационного параметра $b = 7$. Интегрирование системы (2) методом Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом $h = 0.01$ показывает, что при $b = 7$ в системе (2) существует устойчивый предельный цикл, проекция которого на плоскость (x, z) показана на рис. 3, а. При уменьшении значений параметра b исходный предельный цикл претерпевает каскад бифуркаций в полном соответствии с теорией ФШМ. Так, устойчивый цикл периода два наблюдается при $b = 5.5$, периода четыре – при $b = 5.2$, периода восемь – при $b = 5.13$, первый простейший сингулярный аттрактор Фейгенбаума – при $b = 5.1$.

Дальнейшее усложнение динамики решений системы (2) при уменьшении значений бифуркационного параметра b происходит, как и во многих других нелинейных системах дифференциальных уравнений, через субгармонический каскад бифуркаций Шарковского. Так, устойчивый цикл периода шесть наблюдается в системе при $b = 5.03$, периода пять – при $b = 4.9$, периода три – при $b = 4.85$. Цикл периода три завершает субгармонический каскад бифуркаций. Однако в системе (2) удалось также обнаружить первые устойчивые циклы гомоклинического каскада бифуркаций (циклы периодов четыре и пять), являющегося продолжением субгармонического каскада бифуркаций Шарковского. Проекция устойчивого гомоклинического цикла периода пять, существующего в системе (2) при $b = 4.517$ представлена на рис. 4, в.

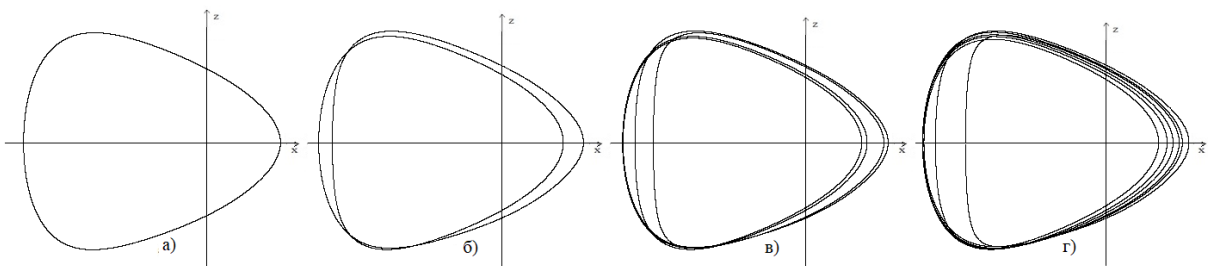


Рис.3. Проекции на плоскость (x, z) устойчивых циклов периодов один, два, четыре и шесть системы (2) при $b = 6$ (а), $b = 5.5$ (б), $b = 5.2$ (в) и $b = 5.03$ (г)

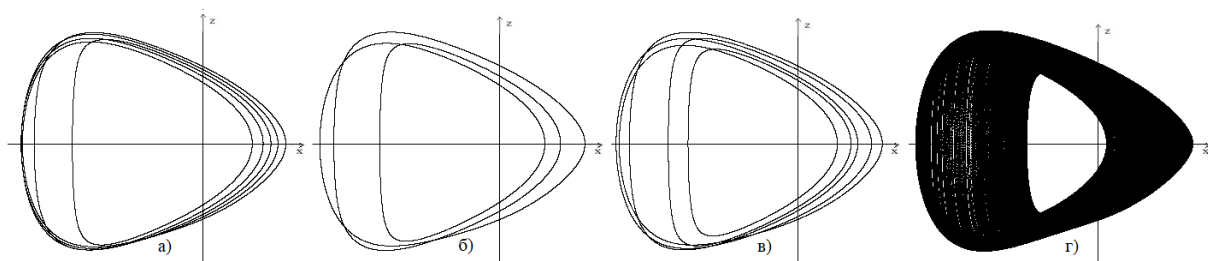


Рис.4. Проекции на плоскость (x, z) устойчивых циклов периодов пять, три субгармонического каскада, периода пять гомоклинического каскада и сложного сингулярного аттрактора системы (2) при $b = 4.9$ (а), $b = 4.85$ (б), $b = 4.517$ (в) и $b = 4$ (г)

Следовательно, «скрытый» аттрактор системы (2), существующий в ней при $a = 3$, $b = 4$ и представленный на рис.4,г, является на самом деле одним из сложных сингулярных аттракторов универсального бифуркационного сценария ФШМ, расположенным между циклами периодов пять и шесть гомоклинического каскада бифуркаций.

Заключение

В работе проведено численное исследование природы «скрытых» аттракторов нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений на примере двух систем с бесконечным числом неустойчивых особых точек. Показано, что переход к аттракторам в обеих нелинейных системах дифференциальных уравнений происходит, как и в любых других нелинейных хаотических системах дифференциальных уравнений, в соответствии с универсальным бифуркационным сценарием Фейгенбаума-Шарковского-Магницкого. При этом вследствие отсутствия гомоклинических и гетероклинических сепаратрисных контуров, в системах реализуются неполные ФШМ-каскады бифуркаций, являющиеся в одном случае полным субгармоническим каскадом бифуркаций Шарковского, а в другом – неполным гомоклиническим каскадом бифуркаций. Все нерегулярные хаотические аттракторы обеих систем являются сингулярными аттракторами в смысле теории ФШМ. Старший характеристический показатель Ляпунова на любом сингулярном аттракторе любой системы является нулевым, а его найденные численно авторами обеих предложенных систем положительные значения являются лишь результатом ошибок вычислений и характеризуют не сам сингулярный аттрактор, а область его существования вместе со всеми неустойчивыми циклами, лежащими в его окрестности.

Литература

1. Wang X., Chen G.R. A chaotic system with only one stable equilibrium // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2012. No. 17. P. 1264-1272.
2. Huan S., Li Q., Yang X.-S. Horseshoes in a chaotic system with only one stable equilibrium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2013. Vol. 23. No. 1. 1350002.
3. Wei Z., Zhang W. Hidden hyperchaotic attractors in a modified lorenz-stenflo system with only one stable equilibrium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2014. V. 24, No. 10. 1450127.
4. Pham V. T., Volos Ch. K., Jafari S. and Kapitaniak T. Coexistence of hidden chaotic attractors in a novel no-equilibrium system // Nonlinear Dynamics 2017. Vol. 87. No.3. P. 2001–2010.
5. Zuo Z. L. and Li C. Multiple attractors and dynamic analysis of a no-equilibrium chaotic system // Optik. 2016. Vol. 127. No. 19. P. 7952–7957.
6. Sambas I. A., Mamat M., Vaidyanathan S., Mohamed M. A. and MadaSanjaya W. S. A New 4-D Chaotic System with Hidden Attractor and its Circuit Implementation // Int. J. Eng. & Tech. 2018. Vol. 7. No.3. P. 1245-1250
7. Jafari S., Sprott J.C. Simple chaotic flows with a line equilibrium // Chaos, Solitons & Fractals. 2013. 57. P. 79–84.
8. Mohamed M.A., Bonny T., Sambas A. et al. A Speech Cryptosystem Using the New Chaotic System with a Capsule-Shaped Equilibrium Curve // Computers, Materials & Continua. 2023. Vol. 75. 3. P. 5987-6006
9. Sambas I. A., Vaidyanathan S., Sen Zhang S. et al. A New Double-Wing Chaotic System with Coexisting Attractors and Line Equilibrium: Bifurcation Analysis and Electronic Circuit Simulation // IEEE Access. 2017. 7. 115454 – 115462. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2933456
10. Magnitskii N.A. Universal Bifurcation Chaos Theory and Its New Applications // Mathematics, 2023. 11 (11). 2536. <https://doi.org/10.3390/math11112536>
11. Магницкий Н.А. Теория динамического хаоса. М.: Ленанд. 2011. 320 с.
12. Magnitskii N.A. Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos – Theory and Applications. Rijeca: InTech. 2012. P. 133-174.
13. Magnitskii N.A. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. Rijeca: InTech. 2018. P.197-215
14. Magnitskii N.A. On the nature of hidden attractors in nonlinear autonomous systems of differential equations // Proceedings of ISA RAS. 2023. 73. 3. P.16-20. DOI: 10.14357/20790279230302

Магницкий Николай Александрович. Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук», г. Москва, Россия. Главный научный сотрудник. Доктор физико-математических наук, профессор. Область научных интересов: нелинейные дифференциальные уравнения, хаотическая динамика, математическая физика, нейронные сети, интегральные уравнения, математическое моделирование. E-mail: nikmagn@gmail.com

On hidden attractors of nonlinear systems of differential equations with an infinite number of singular points

N.A. Magnitskii

Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. The work carries out an analytical and numerical analysis of the bifurcations of cycles of two systems of equations, which, according to the authors of the systems, contain both an infinite number of unstable singular points and “hidden” chaotic attractors. It is shown that the transition to chaos in systems occurs, as in any other nonlinear chaotic systems of differential equations, in accordance with the universal bifurcation scenario of Feigenbaum-Sharkovsky-Magnitskii. In this case, due to the absence of homoclinic and heteroclinic separatrix contours, incomplete FShM bifurcation cascades are realized in the systems, ending with a complete subharmonic cascade and an incomplete homoclinic cascade of bifurcations. It has been proven that in both systems the so-called “hidden” attractors are in fact complex singular attractors of systems in the sense of the FShM theory.

Keywords: *dissipative systems, bifurcations, dynamic chaos, “hidden” attractor, FShM theory.*

DOI: 10.14357/20790279240203 **EDN:** FCHEHC

References

1. Wang X., Chen G.R. A chaotic system with only one stable equilibrium // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2012. No. 17. P.1264-1272.
2. Huan S., Li Q., Yang X.-S. Horseshoes in a chaotic system with only one stable equilibrium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2013. Vol. 23. No. 1. 1350002.
3. Wei Z., Zhang W. Hidden hyperchaotic attractors in a modified lorenz-stenflo system with only one stable equilibrium // Int. J. Bifurc. Chaos. 2014. Vol. 24, No. 10. 1450127.
4. Pham V. T., Volos Ch. K., Jafari S. and Kapitaniak T. Coexistence of hidden chaotic attractors in a novel no-equilibrium system // Nonlinear Dynamics 2017. Vol. 87. No. 3. P. 2001–2010.
5. Zuo Z. L. and Li C. Multiple attractors and dynamic analysis of a no-equilibrium chaotic system // Optik. 2016. Vol. 127. No. 19. P. 7952–7957.
6. Sambas I. A., Mamat M., Vaidyanathan S., Mohamed M. A. and MadaSanjaya W. S. A New 4-D Chaotic System with Hidden Attractor and its Circuit Implementation // Int. J. Eng. & Tech. 2018. Vol. 7. No.3. P. 1245-1250
7. Jafari S., Sprott J.C. Simple chaotic flows with a line equilibrium // Chaos, Solitons & Fractals. 2013. 57. P. 79–84.
8. Mohamed M.A., Bonny T., Sambas A. et al. A Speech Cryptosystem Using the New Chaotic System with a Capsule-Shaped Equilibrium Curve // Computers, Materials & Continua. 2023. Vol. 75. 3. P.5987-6006
9. Sambas I. A., Vaidyanathan S., Sen Zhang S. et al. A New Double-Wing Chaotic System with Coexisting Attractors and Line Equilibrium: Bifurcation Analysis and Electronic Circuit Simulation // IEEE Access. 2017. 7. 115454 – 115462. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2933456
10. Magnitskii N.A. Universal Bifurcation Chaos Theory and Its New Applications // Mathematics, 2023, 11 (11), 2536. <https://doi.org/10.3390/math11112536>
11. Magnitskiy N.A. Teoriya dinamicheskogo khaosa. M.: Lenand. 2011. 320 p.
12. Magnitskii N.A. Universality of Transition to Chaos in All Kinds of Nonlinear Differential Equations. Chapter in Nonlinearity, Bifurcation and Chaos – Theory and Applications. Rijeca: InTech. 2012. P. 133-174.
13. Magnitskii N.A. Bifurcation Theory of Dynamical Chaos. Chapter in Chaos Theory. Rijeca: InTech. 2018. P.197-215
14. Magnitskii N.A. On the nature of hidden attractors in nonlinear autonomous systems of differential equations // Proceedings of ISA RAS. 2023. 73. 3. P.16-20. DOI: 10.14357/20790279230302

Magnitskii N.A. Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Federal Research Center “Computer Science and Control” of Russian Academy of Sciences, 44/2 Vavilova Str., Moscow, 119333. Number of publications: more than 250. Research interests: nonlinear differential equations, chaotic dynamics, mathematical physics, neural networks, integral equations, mathematical modeling. E-mail: nikmagn@gmail.com