

ФИЗИКА

 <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-47-2-117-128>

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 532.594



Образование капиллярно-гравитационных волн в потоке под воздействием системы состоящей из двух вихрей

*И. А. Пастухов^{*1}, А. И. Руденко²*

¹ Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта, 236041, г. Калининград, ул. А. Невского, 14, Россия

² Калининградский государственный технический университет, 236022, г. Калининград, пр. Советский, 1, Россия

Аннотация. На основании метода, предложенного Келдышем, изучен случай образования волновых движений на поверхности идеальной однородной бесконечной жидкости, когда под поверхностью жидкости на конечной глубине помещен вихревой симметричный диполь. В рамках двумерной задачи рассматривалась плоская бегущая волна синусоидальной формы, в которой каждая ее частица будет двигаться по окружности, расположенной в вертикальной плоскости, то есть центр окружности будет совпадать с направлением распространения волны. В качестве источника возмущений выбран не одиночный вихрь, а волновой диполь. Получены два асимптотических решения для профиля волны на свободной поверхности: профиль капиллярно-гравитационных волн до источника возмущений, где ключевую роль в формировании волновых возмущений играет поверхностное натяжение; профиль капиллярно-гравитационных волн после источника возмущений, при формировании которого доминирующей является сила тяжести. Показано, что при разложении асимптотических решений в ряд Тейлора для профиля волны на свободной поверхности, для капиллярно-гравитационных волн характерны следующие закономерности: при сравнительно небольших расстояниях от источника возмущений профиль волны фактически линейный, приближения не вносят существенного влияния, то есть волна стремится к предельной форме; но, по мере удаления от волнового диполя начинает формироваться синусоидальный профиль волны. На формирование профиля волны оказывает влияние изменение глубины источника возмущения. Так, например, при уменьшении h в капиллярно-гравитационной волне преобладает капиллярная составляющая, а при увеличении h более весомый вклад вносит гравитационная составляющая.

Ключевые слова: капиллярно-гравитационные волны, след функции тока, потенциал скорости, профиль волны, вихревой диполь.

Получение: 29.06.2024; Исправление: 16.08.2024; Принятие: 18.08.2024; Публикация онлайн: 26.08.2024

Для цитирования. Пастухов И. А., Руденко А. И. Образование капиллярно-гравитационных волн в потоке под воздействием системы состоящей из двух вихрей // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 47. № 2. С. 117-128. EDN: IMNHVJ. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-47-2-117-128>.

Финансирование. Грант Российского научного фонда № 22-19-20157 (<https://rscf.ru/project/22-19-20157/>) и грант в форме субсидии из бюджета Калининградской области №14-С/2023.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** ✉ E-mail: paigor@stud.kantiana.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Пастухов И. А., Руденко А. И., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)



PHYSICS

 <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-47-2-117-128>

Research Article

Full text in Russian

MSC 76B15



Formation of capillary-gravity waves in the flow under the influence of a system consisting of two vortices

*I. A. Pastukhov^{*1}, A. I. Rudenko²*

¹ Immanuel Kant Baltic Federal University, 236041, Kaliningrad, st. A. Nevsky, 14, Russia

² Kaliningrad State Technical University, 236022, Kaliningrad, Sovetsky Ave., 1, Russia

Abstract. Capillary-gravity waves significantly change the general circulation of the water surface of the World Ocean: attenuation and collapse of longer waves, gas exchange and mixing in the upper layer, kinematics of surface suspensions, and, therefore, require additional study. In the framework of a two-dimensional problem, the paper considers surface capillary-gravity waves without taking into account wind effects, but taking into account the isobaric approximation. The approach proposed by Keldysh is chosen as a quantitative basis. The object of perturbation located at a finite depth is a vortex dipole with constant curl. Two asymptotic solutions were obtained on the basis of analytical calculations: the first solution describes the profile of capillary-gravity waves located behind the vortex dipole; the second solution is the profile of capillary-gravity waves in front of the perturbation source. It is shown that the capillary component of the wave dominates in the formation of waves in front of the perturbation source, and the gravitational component dominates behind the obstacle. The relations between isobaric and barotropic effects on the free surface are qualitatively analyzed. The case for the gravitational component is considered; for this purpose, the technique of representing the wave profile using a Taylor polynomial was used.

Key words: capillary-gravity waves, current function trace, velocity potential, wave profile, vortex dipole

Received: 29.06.2024; Revised: 16.08.2024; Accepted: 18.08.2024; First online: 26.08.2024

For citation. Pastukhov I. A., Rudenko A. I. Formation of capillary-gravity waves in the flow under the influence of a system consisting of two vortices. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 47: 2, 117-128. EDN: IMNHVJ. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-47-2-117-128>.

Funding. The grant of the Russian Science Foundation No. 22-19-20157 (<https://rscf.ru/project/22-19-20157>) and the grant in the form of a subsidy from the budget of the Kaliningrad region No. 14-C/2023.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:**  E-mail: paigor@stud.kantiana.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Pastukhov I. A., Rudenko A. I., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



Введение

Волны на поверхности жидкости являются наиболее распространенным видом волновых движений, встречающимся в природных условиях. Классификация поверхностных волн представляет собой широкий спектр [1, 2], среди которого выделим поверхностные гравитационные и капиллярные волны, которым присуща, главным образом, нелинейность [3–5]. Свободные поверхностные на поверхности жидкости образуются под воздействием силы тяжести, деформирующей поверхность жидкости, с учетом поверхностного натяжения, причем эти две причины действуют одновременно; при $\lambda \geq 10$ см преобладает сила тяжести, а в обратном случае существенный вклад вносит поверхностное натяжение. В формировании капиллярной волны ключевым параметром является поверхностное натяжение; так, например, для воды, находящейся при температуре 20°C коэффициент поверхностного натяжения составляет $\sigma = 74$ в единицах системы CGS.

Механизм эволюции волновых движений на свободной поверхности может быть упрощен за счет того, что динамическое воздействие ветра отсутствует, что и было, в первую очередь, выполнено работе.

Необходимо заметить, что в отличие от капиллярных и гравитационных волн, капиллярно-гравитационные волны, которые стали объектом изучения, имеют минимальную скорость, зависящую от параметров жидкости, плотности и коэффициента поверхностного натяжения. Особый интерес в изучении капиллярно-гравитационных волн связан с влиянием гравитации на их предельную форму. Так в [6–8] показано, что на вершине предельной волны скорость постоянна и равна фазовой скорости; данное свойство позволяет применить условие квазистатического приближения для определения профиля капиллярно-гравитационной волны.

Предположим, что на некоторой глубине, под свободным уровнем, находится баротропная стационарная вихревая структура (вихревой диполь) с постоянной завихренностью, которая взаимодействует с набегающим на нее течением; жидкость имеет бесконечную глубину. Такое взаимодействие может вносить определенный вклад в формирование волновых движений на поверхности жидкости, поскольку вихревой диполь будет являться преградой [2, 9, 10], которая может влиять на энергетический спектр волнового потока до преграды и после нее.

В качестве метода исследования выбран метод, предложенный М. В. Келдышем [11], для определения волновых движений жидкости бесконечной глубины. В [1] рассмотрен случай формы волновых движений свободной поверхности, когда в поток погружен одиночный точечный вихрь; отличительной особенностью нашей статьи является то, что в поток жидкости погружен вихревой симметричный диполь, скорости вращения которого являются противоположно направленными.

Физическая постановка и решение двумерной задачи

Задача. Рассмотрим идеальную однородную несжимаемую жидкость бесконечной глубины. Модельное пространство будем считать двумерным, при этом ось Ox направим горизонтально, а ось Oy направим вертикально вверх, ускорение свободного падения g направлено вниз. Предположим, что на некоторой глубине h под невозмущенной поверхностью жидкости находится источник возмущения, который представляет собой систему состоящую из двух точечных вихрей, расположенных симметрично относительно начала координат. На данную систему вихрей набегают поток, необходимо установить форму волн, профили волн, на невозмущенной поверхности. Примем, что при $h \rightarrow -\infty$ скорость потока принимает постоянное значение равное некоторой величине c .

Первоначально рассмотрим волновые движения, в котором присутствуют капиллярные волны. В качестве исходных уравнений используем интеграл Бернулли-Коши. Уравнение, связывающее профиль волны с потенциалом будет иметь следующий вид:

$$\eta = \frac{c}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\sigma}{\rho g} \frac{d^2 \eta}{dx^2}, \quad c \frac{d\eta}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

где $\varphi(x, y)$ — потенциал скорости, $\eta(x, y)$ — профиль волновой поверхности, ρ — плотность среды, c — базовая основная, фазовая, скорость потока, g — ускорение свободного падения.

Далее введем соотношения между потенциалом скорости $\varphi(x, y)$ и следом функции тока $\psi(x, y)$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2)$$

С учетом данных соотношений (2) второе уравнение в (1) для случая свободной поверхности $y = 0$ примет вид: $c \frac{d\eta}{dx} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$.

Откуда следует, что

$$\psi(x) = c\eta(x). \quad (3)$$

Формула (3) представляет собой одномерный случай, связывающий след функции тока $\psi(x)$ с профилем свободной поверхности $\eta(x)$, что в дальнейшем упрощает математические расчеты решаемой задачи. Подставляя последнее равенство в первое уравнение системы (1), получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка, связывающее потенциал скорости и след функции тока:

$$\frac{\sigma}{\rho g} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi = 0. \quad (4)$$

Далее введем характеристическую функцию $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, выраженную в комплексных переменных, и продифференцируем ее дважды по

переменной x , а затем перепишем (4) таким образом, чтобы получить равенство, которое имеет смысл для действительных значений комплексного переменного:

$$\frac{i\sigma}{\rho g} \frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{c^2}{g} \frac{dw}{dz} - iw = 0. \quad (5)$$

Формула (5) представляет собой однородное дифференциальное уравнение второго порядка применительно к характеристической функции.

С другой стороны характеристическую функцию, описывающую систему двух точечных вихрей в комплексных переменных, центр тяжести которых имеет координаты $(0, -h)$, введем следующим образом:

$$w(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} [\ln|z - ih| - \ln|z + ih|], \quad (6)$$

где $z = x + iy$ — алгебраическая форма комплексного числа, Γ — общая завихренность системы двух точечных вихрей (вихревой диполь). Введем выражение для вспомогательной функции $W(z)$ с учетом (5):

$$W(z) = \frac{i\sigma}{\rho g} \frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{c^2}{g} \frac{dw}{dz} - iw, \quad (7)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения, ρ — плотность жидкости. С учетом формулы (6) преобразуем формулу (7):

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} [\ln|z - ih| - \ln|z + ih|] + \frac{ic^2\Gamma}{2\pi g} \left[\frac{1}{z + ih} - \frac{1}{z - ih} \right] + \frac{\sigma\Gamma}{2\pi\rho g} \left[\frac{1}{(z - ih)^2} - \frac{1}{(z + ih)^2} \right]. \quad (8)$$

Будем считать, что внутри области потока жидкости существует только одно возмущение — система двух точечных вихрей, а, следовательно, функция

$$G(z) = \frac{i\sigma}{\rho g} \frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{c^2}{g} \frac{dw}{dz} - iw - \left\langle \frac{\Gamma}{2\pi} [\ln|z - ih| - \ln|z + ih|] + \frac{ic^2\Gamma}{2\pi g} \left[\frac{1}{z + ih} - \frac{1}{z - ih} \right] + \frac{\sigma\Gamma}{2\pi\rho g} \left[\frac{1}{(z - ih)^2} - \frac{1}{(z + ih)^2} \right] \right\rangle \quad (9)$$

будет голоморфной как внутри потока, так и внутри его области, при этом действительная часть функции (8) равна нулю для действительных значений z , а действительная часть функции $G(z)$ не будет равна нулю для действительных значений комплексного числа. Тогда, на основании (9), получим дифференциальное уравнение со специальной частью правого вида в комплексных переменных:

$$\frac{i\sigma}{\rho g} \frac{d^2 w}{dz^2} - \frac{c^2}{g} \frac{dw}{dz} - iw = \frac{\Gamma}{\pi} \ln \left| \frac{z - ih}{z + ih} \right| + i \frac{4\sigma h \Gamma}{\pi \rho g} \frac{z}{(z^2 + h^2)^2}. \quad (10)$$

Решение (10) дает следующий результат:

$$w(z) = \frac{i\Gamma}{\pi\sigma(\gamma_1 - \gamma_2)} \left\{ \rho g \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2} \ln \left| \frac{z - ih}{z + ih} \right| + \frac{\rho g - \sigma\gamma_1^2}{\gamma_1} \int \left(\frac{1}{z + ih} - \frac{1}{z - ih} \right) e^{\gamma_1(z-\xi)} d\xi + \frac{\sigma\gamma_2^2 - \rho g}{\gamma_2} \left(\frac{1}{z + ih} - \frac{1}{z - ih} \right) e^{\gamma_2(z-\xi)} d\xi \right\}, \quad (11)$$

где $\gamma_1 = -\frac{i\rho c^2}{2\sigma} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\sigma g}{\rho c^4}} \right)$, $\gamma_2 = -\frac{i\rho c^2}{2\sigma} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\sigma g}{\rho c^4}} \right)$, $\gamma_1 - \gamma_2 = -\frac{i\rho c^4}{\sigma} \sqrt{1 - \frac{4\sigma g}{\rho c^4}}$. Коэффициент γ_1 относится к волновым движениям, где ключевую роль играет капиллярность; натурные наблюдения показывают, что капиллярные волны формируются навстречу потоку перед препятствием, поэтому пределы интегрирования в первом интеграле, стоящем в фигурной скобке (11), примем от ∞ до z . Коэффициент γ_2 относится к волновым движениям за формирование которых отвечает сила тяжести, тогда пределы интегрирования во втором интеграле, стоящем в (11), следует взять от $-\infty$ до z . Следовательно, формула (10) с учетом пределов интегрирования может быть записана:

$$w(z) = \frac{i\Gamma}{\pi\sigma(\gamma_1 - \gamma_2)} \left\{ \rho g \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2} \ln \left| \frac{z - ih}{z + ih} \right| + \frac{\rho g - \sigma\gamma_1^2}{\gamma_1} \int_{\infty}^z \left(\frac{1}{z + ih} - \frac{1}{z - ih} \right) e^{\gamma_1(z-\xi)} d\xi + \frac{\sigma\gamma_2^2 - \rho g}{\gamma_2} \int_{-\infty}^z \left(\frac{1}{z + ih} - \frac{1}{z - ih} \right) e^{\gamma_2(z-\xi)} d\xi \right\}. \quad (12)$$

Затем введем обозначения: $\gamma_1 = -i\omega_1$, $\gamma_2 = -i\omega_2$; $\omega_1 = \frac{2\pi c}{\lambda_1}$, $\omega_2 = \frac{2\pi c}{\lambda_2}$ — действительные и положительные числа. Используя формулы теории интегральных вычетов [12, 13], получим асимптотические формулы решения (12) с учетом (3) для профиля свободной волновой поверхности.

Если $z = \infty$, тогда:

$$\eta(x) = \frac{2\Gamma(\rho g - \sigma\gamma_2^2)}{\sigma c(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_2} e^{-h\omega_2} \sin \omega_2 x. \quad (13)$$

Если $z = -\infty$, тогда:

$$\eta(x) = \frac{2\Gamma(\rho g - \sigma\gamma_1^2)}{\sigma c(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_1} e^{-h\omega_1} \sin \omega_1 x. \quad (14)$$

Формула (13) показывает то, что за вихревым симметричным дуплетом на свободной поверхности формируются синусоидальные волны, порождаемые силой тяжести; формула (14) показывает, что перед источником возмущений формируются волны короткого диапазона капиллярной природы.

Анализ численного решения поставленной задачи

Анализ численного решения проведем, опираясь на асимптотические решения (13), (14). На рис. 1 представлены графики зависимости профиля волн (13), формирующихся на свободной поверхности, за источником возмущения в зависимости от глубины погруженного волнового диполя.

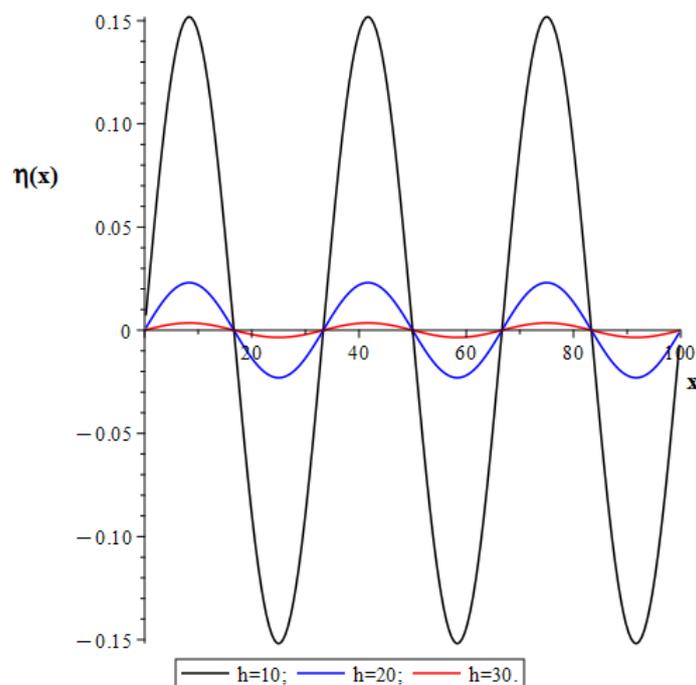


Рис. 1. Зависимость профиля гравитационных волн, формирующихся за преградой, в зависимости от глубины погружения волнового диполя. Линия черного цвета - для глубины $h = 10$; линия синего цвета - для глубины $h = 20$; линия красного цвета - для глубины $h = 30$.

[Figure 1. Dependence of the profile of gravitational waves formed behind an obstacle, depending on the depth of immersion of the wave dipole. Black line - for depth $h = 10$; blue line - for depth $h = 20$; red line - for depth $h = 30$.]

Из рис. 1 видно, что с уменьшением глубины погружения источника возмущения, форма волны, возникающей за источником, стремится к некоторому предельному значению, при этом гребень волны заостряется. Данное явление можно объяснить тем, что баротропное возмущение преобладает над суммарным давлением, атмосферным и гидродинамическим. С увеличением глубины погружения вихревого диполя наблюдается обратное явление: суммарное давление, атмосферное и гидродинамическое, начинает преобладать над баротропным давлением; гребни волн становятся более пологими. Необходимо отметить, что волны были рассмотрены одного и того же периода, чтобы было проще провести сравнение. На перепад давления на свободной поверхности оказывает влияние физико-химический состав среды жидкости; так же необходимо

отметить, что перепад давления влияет на изменение кинетической энергии волновых возмущений на поверхности жидкости.

На рис. 2 представлены графики зависимости профиля волн (14), формирующихся на свободной поверхности, перед источником возмущения в зависимости от глубины погруженного волнового диполя.

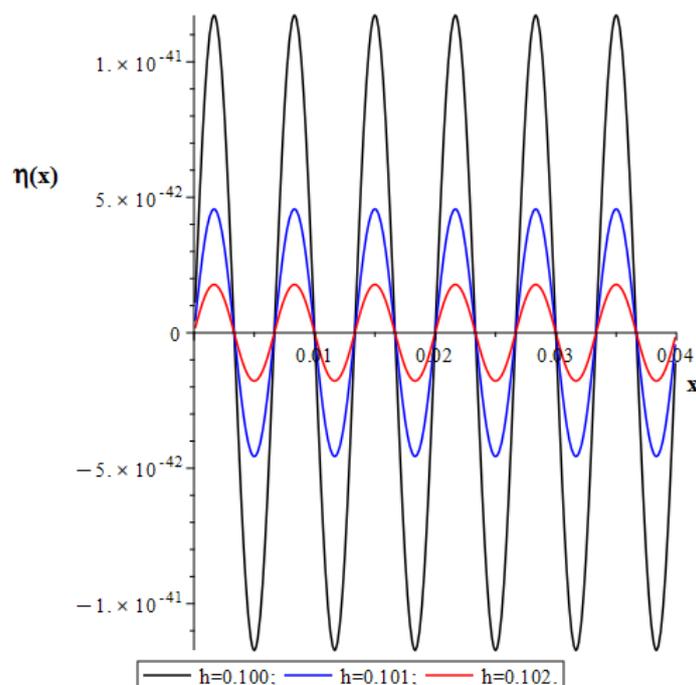


Рис. 2. Зависимость профиля капиллярных волн, формирующихся перед преградой, в зависимости от глубины погружения волнового диполя. Линия черного цвета - для глубины $h = 0.100$; линия синего цвета - для глубины $h = 0.101$; линия красного цвета - для глубины $h = 0.102$.

[Figure 2. Dependence of the profile of capillary waves formed in front of the barrier, depending on the depth of immersion of the wave dipole. Black line - for depth $h = 0.100$; blue line - for depth $h = 0.101$; red line - for depth $h = 0.102$.]

Рис. 2 демонстрирует образование капиллярных волн на свободной поверхности перед источником волнового возмущения, волновой диполь, в зависимости от глубины погружения диполя. Необходимо отметить, что перепад глубин для диполя хоть и весьма незначительный, но он оказывает огромную роль на амплитуду капиллярных волн. Так, например, уменьшение глубины погружения ведет к увеличению амплитуды капиллярных волн, при уменьшении глубины на $\Delta h \approx 0.001$ амплитуда капиллярных волн увеличивается примерно в 50 раз. Ключевым моментом при формировании капиллярных волн является динамическая составляющая, возникающая от диполя. Обилие капиллярных волн на свободной поверхности перед источником возмущения напоминает некоторое подобие суоя, то есть вода начинает “закипать”.

На рис. 3 представлены графики зависимости профиля гравитационных волн (13), формирующихся на свободной поверхности, за источником возмущения; профиль волны $\eta(x)$ представим в виде многочлена Тейлора до пятого порядка по параметру ω_2 . Глубину погружения волнового источника считаем фиксированной и равной $h = 10$.

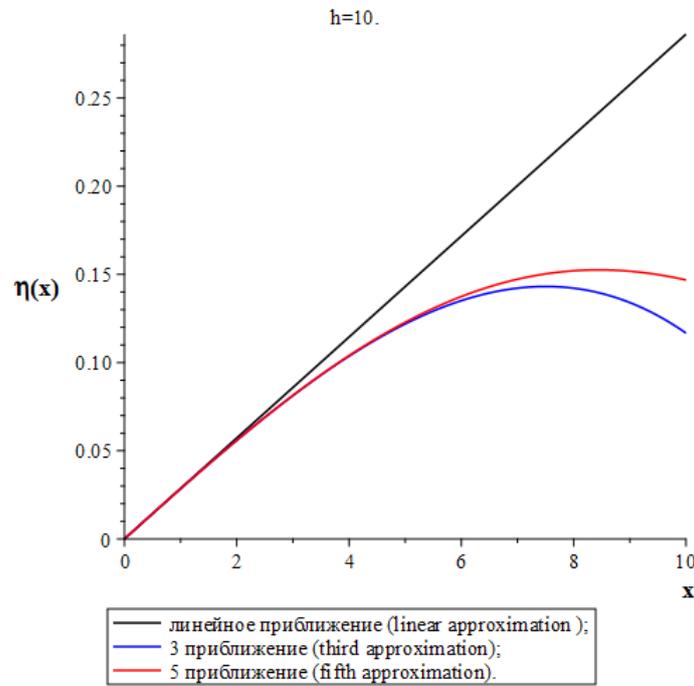


Рис. 3. Зависимость профиля гравитационных волн, формирующихся за преградой, в зависимости от глубины погружения волнового диполя. Линия черного цвета – линейное приближение; линия синего цвета – третье приближение; линия красного цвета – пятое приближение.

[Figure 3. Dependence of the profile of gravitational waves formed behind an obstacle, depending on the depth of immersion of the wave dipole. Black line - linear approximation; blue line - third approximation; red line - fifth approximation.]

Рассмотрим (13), используя ее разложение в ряд Тейлора, но ограничимся многочленом Тейлора до пятого порядка малости (если $\lambda_2 \rightarrow \infty$, то $\omega_2 \rightarrow 0$):

$$\eta(x) = \frac{2\Gamma(\rho g - \sigma\gamma_2^2)}{\sigma c(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_2} e^{-h\omega_2} \left(\omega_2 x - \frac{(\omega_2 x)^3}{3!} + \frac{(\omega_2 x)^5}{5!} \right). \quad (15)$$

Фактически рис. 3 построен на основании последней формулы, а, следовательно, опираясь на разложение, можно сделать следующие ключевые выводы: во-первых, при малых расстояниях от источника возмущений профиль волны фактически линейный, приближения не вносят существенного влияния, то есть волна якобы стремится к предельной форме; во-вторых, по мере удаления от волнового диполя начинает формироваться синусоидальный профиль волны-для третьего приближения (синяя линия) гребень является более пологим, чем для

пятого приближения (красная линия). Черная линия (линейное приближение) представляет собой асимптоту для гребней синусоидальных гравитационных волн.

Заключение

Если рассматривать плоскую бегущую волну синусоидальной формы, то каждая ее частица будет двигаться по окружности, расположенной в вертикальной плоскости, центр которой будет совпадать с направлением распространения волны. Поскольку радиус окружности гораздо меньше по сравнению с длиной волны, следовательно, он должен экспоненциально убывать при удалении от поверхности жидкости, что соответствует случаю (13). Анализ асимптотического решения (14) показывает, что для капиллярной составляющей волны возникает неустойчивость, обусловленная увеличением глубины погружения волнового диполя и увеличением коэффициента поверхностного натяжения жидкости, что согласуется с результатами, отраженными в работах [4, 14, 15]. Очевидно, что капиллярно-гравитационные волны играют важную роль в общей циркуляции водной поверхности, затухание и обрушение более длинных волн, газообмен и перемешивание в верхнем слое, кинематике поверхностных взвесей, а следовательно, требуют дополнительного изучения.

Список литературы

1. Сретенский Л. Н. *Теория волновых движений жидкости*. М.: Наука, 1977. 816 с.
2. Гилл А. *Динамика атмосферы и океана*, В 2-х томах, Т. 1. М.: Мир, 1986. 399 с.
3. Уизем Дж. *Линейные и нелинейные волны*. М.: Мир, 1977. 638 с.
4. Бабенко К. И. Несколько замечаний к теории поверхностных волн конечной амплитуды, *ДАН СССР*, 1987. Т. 294, № 5, С. 1033–1037.
5. Зайцев А. А., Руденко А. И. К теории стационарных волн на горизонтальном течении с линейным профилем скорости, *ПМТФ*, 2006. Т. 47, № 3, С. 43–49.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986. 736 с.
7. Овсянников Л. В. *Задача о нестационарном движении жидкости со свободной границей*. Новосибирск: Наука, 1967. 108 с.
8. Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С. *Синоптические вихри в океане*, 2-е издание. Л.: Гидрометеоздат, 1987. 510 с.
9. Ламб Г. *Гидродинамика*. М.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
10. Габов С. Л. *Введение в теорию нелинейных волн*. М.: Изд-во МГУ, 1988. 287 с.
11. Келдыш М. В. *Избранные труды. Механика*. М.: Наука, 1985. 568 с.
12. Владимиров В. С., Жаринов В. В. *Уравнение математической физики*. М.: Физико-математическая литература, 2000. 400 с.
13. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1965. 716 с.
14. Красовский Ю. П. Теория установившихся волн конечной амплитуды, *Журнал вычислит. математ. и математ. физики*, 1961. Т. 1, С. 836–855.
15. Монин А. С., Красицкий В. П. *Явления на поверхности океана*. Л.: Гидрометеоздат, 1985. 375 с.

Информация об авторах



Пастухов Игорь Андреевич ✉ – аспирант по направлению "Физика конденсированного состояния", младший научный сотрудник, БФУ имени И. Канта, Калининград, Россия,  ORCID 0009-0006-0925-9686.



Руденко Алексей Иванович ✉ – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий, КГТУ, Калининград, Россия,  ORCID 0000-0002-5666-9841.

References

- [1] Sretensky L. N. Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti [Theory of wave motions of liquid]. Moscow: Nauka, 1977. 816 p. (In Russian)
- [2] Gill A. Dinamika atmosfery i okeana [Dynamics of the Atmosphere and Ocean]. In 2 volumes, Vol. 1. M: Mir, 1986. 399 p. (In Russian)
- [3] Wisem J. Lineynyye i nelineynyye volny [Linear and nonlinear waves]. Moscow: Mir, 1977. 638 p. (In Russian)
- [4] Babenko K. I. Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow: Nauka, 1965. 716 p. (In Russian)
- [5] Zaitsev A. A., Rudenko A. I. To the theory of stationary waves on a horizontal flow with a linear velocity profile. PMTF, 2006. vol. 47, no. 3, pp. 43-49. (In Russian)
- [6] Landau L. D., Lifshits E. M. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. Moscow: Nauka, 1986. 736 p. (In Russian)
- [7] Ovsyannikov L. V. Zadacha o neustanovivshemsya dvizhenii zhidkosti so svobodnoy granitsey [Problem of unsteady motion of a liquid with a free boundary]. Novosibirsk: Nauka, 1967. 108 p. (In Russian)
- [8] Kamenkovich V. M., Koshlyakov M. N., Monin A. C. Sinopticheskiye vikhri v okeane [Synoptic eddies in the ocean]. 2nd edition. Leningrad: Gidrometeoizdat, 1987. 510 p. (In Russian)
- [9] Lamb G. Gidrodinamika [Hydrodynamics]. Moscow: Gostekhizdat. 1947. 928 p. (In Russian)
- [10] Gabov S. L. Vvedeniye v teoriyu nelineynykh voln [Introduction to the theory of nonlinear waves]. Moscow State University, 1988. 287 p. (In Russian)
- [11] Keldysh M. V. Izbrannyye trudy. Mekhanika [Selected Works. Mechanics]. Moscow: Nauka, 1985. 568 p. (In Russian)
- [12] Vladimirov V. S., Zharinov V. V. Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of Mathematical Physics]. Moscow: Physico-mathematical literature, 2000. 400 p. (In Russian)
- [13] Lavrentiev M. A., Shabat B. V. Metody teorii funktsiy kompleksnogo peremennogo [Methods of the theory of functions of a complex variable]. Moscow: Nauka, 1965. 716 p. (In Russian)
- [14] Krasovskiy Y. P. Theory of steady-state waves of finite amplitude. Zhurnal Computat.matemat. i matemat. fizika. 1961. V. 1, pp. 836–855. (In Russian)
- [15] Monin A. S., Krasitsky V. P. Yavleniya na poverkhnosti okeana [Phenomena on the ocean surface]. Leningrad: Gidrometeoizda, 1985. 375 p. (In Russian)

Information about the authors



Pastukhov Igor Andreevich ✉ – Postgraduate student in the field of "Physics of Condensed Matter", research assistant, Immanuel Kant Baltic Federal University, Kaliningrad, Russia ,
 ORCID 0009-0006-0925-9686.



Rudenko Aleksey Ivanovich ✉ – Ph.D.(Phys. and Math.), Associate Professor, Dep. of Applied Mathematics and Information Technology, Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad, Russia,
 ORCID 0000-0002-5666-9841.