



Стохастическая двумодовая эредитарная модель космического динамо

Е. А. Казаков, Г. М. Водинчар*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, с. Паратунка, Елизовский район, Камчатский край, ул. Мирная, д. 7, Россия

Аннотация. Работа посвящена классу стохастических двумодовых эредитарных моделей космического динамо. Модели включают в себя два генератора магнитного поля — крупномасштабный и турбулентный (α -эффект). Влияние магнитного поля на движения среды представлено через подавление α -эффекта функционалом от компонент поля, что вводит в модель память (эредитарность). Модель описывает динамику только крупномасштабных компонент, однако учитывает возможное воздействие мелкомасштабных мод с помощью стохастического члена. Это член моделирует влияние возможной спонтанной синхронизации мелкомасштабных мод. Так же в работе представлена численная схема для решения интегро-дифференциальных уравнений модели. Численная схема состоит из двух частей: для дифференциальной части используется метод «предиктор-корректор» Адамса четвертого порядка, а для интегральной части — метод Симпсона. Основным результатом работы является обобщенная модель динамо-системы, с аддитивным добавлением случайной поправки в α -генератор. Учет такой поправки существенно разнообразит динамические режимы в модели.

Ключевые слова: гидромагнитное динамо, системы с памятью, эредитарность, интегро-дифференциальные уравнения, стохастическая модель, α -эффект, когерентные структуры.

Получение: 11.11.2024; Исправление: 13.11.2024; Принятие: 15.11.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Казаков Е. А., Водинчар Г. М. Стохастическая двумодовая эредитарная модель космического динамо // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 70-82. EDN: YFWFOR. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-70-82>.

Финансирование. Работа выполнена за счет Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № НИОКТР 124012300245-2).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция: ✉ E-mail: Kazakov@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Казаков Е. А., Водинчар Г. М., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)





Stochastic Two-Mode Hereditary Model of a Cosmic Dynamo

E. A. Kazakov, G. M. Vodinchar*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034,
Paratunka, Mirnaya str. 7, Russia

Abstract. The paper is devoted to a class of stochastic two-mode hereditary models of the cosmic dynamo. The models include two magnetic field generators — large-scale and turbulent (α -effect). The influence of the magnetic field on the motion of the medium is presented through the suppression of the α -effect by a functional of the field components, which introduces memory (hereditary) into the model. The model describes the dynamics of only large-scale components, but takes into account the possible impact of small-scale modes using a stochastic term. This term models the influence of possible spontaneous synchronization of small-scale modes. The paper also presents a numerical scheme for solving the integro-differential equations of the model. The numerical scheme consists of two parts, for the differential part the Adams «predictor-corrector» method of the fourth order is used, and for the integral part the Simpson method. The main result of the work is a generalized model of a dynamo system, with an additive addition of a random correction to the α -generator. Taking into account such a correction significantly diversifies the dynamic modes in the model.

Key words: hydromagnetic dynamo, memory, heredity, integro-differential equations, stochastic model, α -effect, coherent structures.

Received: 11.11.2024; Revised: 13.11.2024; Accepted: 15.11.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Kazakov E. A., Vodinchar G. M. Stochastic two-mode hereditary model of a cosmic dynamo. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 48: 3, 70–82. EDN: YFWFOR. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-70-82>

Funding. The work was supported by IKIR FEB RAS State Task (Reg. No. NIOKTR 124012300245-2).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*Correspondence:  E-mail: Kazakov@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Kazakov E. A., Vodinchar G. M., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



Введение

Теория гидромагнитного динамо успешно описывает существование крупномасштабных магнитных полей космических объектов (планет, звезд и галактик) [1, 2]. В простейшей форме этот механизм для космических динамо-систем представляет собой взаимную генерацию тороидальной и полоидальной компонент поля друг из друга с помощью крупномасштабных движений проводящей среды и мелкомасштабных турбулентных пульсаций [1, 3]. Работа динамо-системы носит самосогласованный характер с обратной связью.

Одним из направлений работ по динамо-системам является учет в моделях памяти (эредитарности). Обычно эта обратная связь считается мгновенной во времени и локальной в пространстве. Однако правильное описание турбулентного переноса включает свертку интегральных ядер со средним полем [4]. В работе [5] показано, что эффект памяти также сильно влияет на действие динамо.

Прямое численное моделирование для уравнений динамо требует очень больших вычислительных ресурсов. Для воспроизведения в моделях реализаций поля, сравнимых по длительности со временем существования космических объектов, приходится ограничиваться маломодовыми приближениями. Предельно возможное усечение числа мод приводит к двумодовым моделям. Даже при таком сильном пространственном усечении в моделях с памятью удается воспроизводить динамические режимы, подобные реальным, включая такие свойства, как фрактальность шкалы полярности магнитного поля и степенное распределение времени ожидания инверсии.

Авторами разработана двумодовая эредитарная модель динамо в виде следующей интегро-дифференциальной системы [6–8], в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\eta x + y \left[\eta - ps^2 \int_0^t K(t-\tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right], \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x \left[D - \int_0^T K(t-\tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right].\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ представляют собой амплитуды тороидальной и полоидальной компонент поля, положительные коэффициенты η, s, p, D являются управляющими параметрами модели. При $p = 0$ получим $\alpha\omega$ -динамо, при $p \neq 0$ получим $\alpha^2\omega$.

Физический смысл интегрального члена – это память в обратной связи динамо-системы, когда подавление генерации магнитного поля обеспечивается взвешенной по прошлым состояниям функцией $Q(x, y)$ от компонент поля. В реальной физической динамо-системе обратная связь обеспечивается силой Лоренца, которая квадратична по полю. Поэтому функция $Q(x, y)$ будем считать некоторой квадратичной формой своих аргументов, т.е. $Q(x, y) = Ax^2 + 2Cxy + Ay^2$, где A, C – некоторые постоянные коэффициенты, не равные нулю одновременно. При $A = 0$ подавление генератора спиральностью поля, при $C = 0$ подавление генератора энергией поля.

Доказательство существования и единственности решения системы (1) при произвольных начальных условиях приведено в работе [8].

В работе будем использовать компактную форму записи системы (1), которая имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\eta - ps^2z)y - \eta x, \\ \frac{dy}{dt} &= (D - z)x - y, \\ z &= \int_0^t K(t - \tau)Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau.\end{aligned}\tag{2}$$

Как показано в работе [9], интегральный член в системе (2) для одного класса ядер $K(t - \tau)$ с экспоненциальной асимптотикой можно устранить, введя дополнительные фазовые переменные. Система (2) при этом заменяется на систему дифференциальных уравнений с некоторыми начальными условиями на дополнительные переменные. Примером такого ядра может быть функция $K(t) = e^{-bt}$. В этом случае интегральное равенство в (2) заменится равносильным соотношением $\frac{dz}{dt} = Q(x, y) - bz$, $z(0) = 0$. Тогда при значении $p = 0$ и функции $Q(x, y) = xy$ получим классическую систему Лоренца [10]. Её динамические режимы при $\eta = 10$, $b = \frac{8}{3}$ прекрасно известны.

Стохастическая двумодовая модель

Использование маломодовых приближений всегда предполагает, что общий эффект от отброшенных мелкомасштабных мод равен нулю. Однако в действительности эти моды могут самопроизвольно синхронизироваться и их влиянием уже нельзя пренебречь. Образование таких когерентных структур хорошо известно в теории турбулентности. Эти структуры спонтанно возникают и спонтанно разрушаются [11].

Введем в систему 2 стохастический член $\xi(t)$, который описывает случайное влияние когерентных структур, которые спонтанно образуются мелкомасштабными пульсациями скорости и магнитного поля, на интенсивность α -эффекта. В зависимости от амплитуды каждой такой структуры, влияние может усиливаться или ослабевать. Введем этот член в систему, как аддитивную поправку для $z(t)$, в результате получим:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\eta - ps^2(z + \xi_1))y - \eta x, \\ \frac{dy}{dt} &= (D - z - \xi_2)x - y, \\ z &= \int_0^t K(t - \tau)Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau,\end{aligned}\tag{3}$$

здесь ξ_1 и ξ_2 импульсные случайные процессы, описывающие влияние синхронизировавшихся мод на генерацию α -эффектом тороидальной и полоидальной компонент.

Опишем модельную структуру этих процессов [12]. Предполагается, что k -я структура спонтанно образуется в случайный момент ϕ_k и существует случайное время θ_k . Мы пренебрегаем возможностью одновременного существования двух и более структур. Следовательно, мы имеем стохастическую возрастающую последовательность моментов времени:

$$0 < \phi_1 < \theta_1 < \phi_2 < \theta_2 < \dots < \phi_k < \theta_k < \dots \quad (4)$$

Тогда $\tau_k^W = \phi_k - \theta_{k-1}$ - случайное время ожидания формирования k -ой структуры, а $\tau_k^E = \theta_k - \phi_k$ случайное время ее существования. Синхронизация мод происходит довольно редко и существуют они недолго. Поэтому мы будем предполагать, что переменные τ_k^W имеют степенное распределение с некоторым медианным значением T_w :

$$\tau_k^W = c T_w \left(R^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1 \right), \quad (5)$$

где $c = \left(2^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1 \right)^{-1}$. А переменные τ_k^E имеют показательное распределение с медианным значением T_E :

$$\tau_k^E = -\frac{T_E}{\ln 2} \ln R. \quad (6)$$

Параметры T_w и T_E имеют смысл характерных времен ожидания и существования структур.

Пусть случайные величины ξ_{1k} и ξ_{2k} описывают интенсивность влияния k -ой структуры на генерацию тороидальной и полоидальной компонент. Эти интенсивности предполагаются одинаково распределенными гауссовскими случайными величинами $N(0, \sigma^2)$.

Все случайные величины τ_k^W , τ_k^E , ξ_{1k} и ξ_{2k} предполагаются независимыми между собой и при различных k .

Теперь определим процессы $\xi_i(t)$ следующим образом:

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{ik} [H(t - \tau_k) - H(t - \theta_k)], \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

где $H(\cdot)$ - ступенчатая функция Хевисайда.

Один из возможных примеров реализации такого случайного процесса со значениями $T_w = 1$ и $T_E = 1$ представлена на рис. 1.

Реальные динамо-системы демонстрируют большое разнообразие динамических режимов: стационарные, осциллирующие, хаотические, всплески генерации (dynamo bursts). Однако, в двумодовых моделях типа (2) при фиксированных значениях управляющих параметров проблематично получать смены режимов. Но процессы ξ_i в стохастическом варианте двумодовой модели (3) являются случайными возмущениями двух из этих параметров.

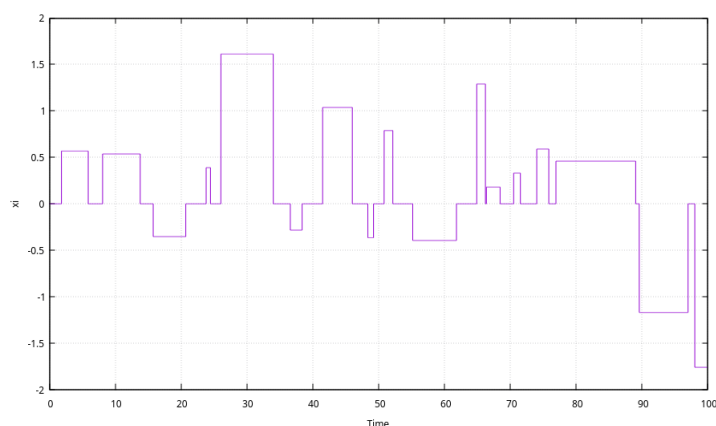


Рис. 1. Пример случайного процесса $\xi(t)$.

Figure 1. Example of a random process $\xi(t)$.

Поэтому, если выбрать значения параметров модели вблизи критических (соответствующих смене режимов), то в модели можно воспроизводить разнообразие динамики, присущее реальным динамо-системам.

Численный метод

Для численного исследования модели (2) необходимо совмещение разностных схем для дифференциальной части и квадратурной формы для интегральной части.

В качестве разностной схемы для дифференциальной части мы будем использовать схему «предиктор–корректор» на основе явной и неявной схем Адамса 4 порядка [13–15]:

$$x^p = x_n + \frac{h}{24} [55f(x_n, z_n) - 59f(x_{n-1}, z_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, z_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, z_{n-3})],$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24} [9f(x^p, z^p) + 19f(x_n, z_n) - 5f(x_{n-1}, z_{n-1}) + 1f(x_{n-2}, z_{n-2})]$$

В качестве квадратурной формулы для интегрального члена используем формулу Симпсона [16], которую представим в виде:

$$z_{n+1} = L + \frac{h}{3} K_0 Q(x_{n+1}), \quad (8)$$

где L в случае четного n :

$$L = \frac{h}{3} K_n Q(x_1) + \frac{h}{6} \left(K_{n+1} Q(x_0) + K_n Q(x_1) + 4K_{n+\frac{1}{2}} Q(x_{\frac{1}{2}}) \right) + \frac{4h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} K_{n+1-2i} Q(x_{2i}) + \frac{2h}{3} \sum_{i=1}^{n/2-1} K_{n+1-(2i+1)} Q(x_{2i+1}), \quad (9)$$

а в случае нечетного n :

$$L = \frac{h}{3} K_{n+1} Q(x_0) + \frac{4h}{3} \sum_{i=0}^{n/2} K_{n-2i+1} Q(x_{2i+1}) + \frac{2h}{3} \sum_{i=1}^{n/2-1} K_{n-2i} Q(x_{2i}). \quad (10)$$

Поскольку, семейство методов Адамса являются многошаговыми, нам необходимо для запуска итерационной процедуры начальное приближение. В частности, нам необходимо знать значения функций $f(x)$ в точках $t = 0, h, 2h, 3h$ и значения функций $Q(x)$ в точках $t = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$.

Один из возможных способов получения этих значений в следующем. Заменим ядро $K(t)$ на аппроксимирующее $J(t)$, для которого интегральный член можно исключить и перейти к дифференциальной системе. В работе [9] показано, что это можно сделать для некоторых ядер с экспоненциальной асимптотикой, в том числе, для ядер вида $Ae^{-\tilde{b}t}$ и $te^{-\tilde{b}t}$. Поэтому, при $K(0) \neq 0$ берем первый тип ядра $J(t)$, полагая $A = K(0)$, а при $K(0) = 0$ берем второй тип ядра $J(t)$. В обоих случаях, получим совпадение ядер $K(t)$ и $J(t)$ в нулевой точке. Далее легко определить $\tilde{b}$, чтобы исходное и аппроксимирующее ядра совпадали в точке $t = 3h$.

Для таких систем мы можем получить решение в точках $t = 0, \frac{1}{2}, h, 2h, 3h$ численным методом Рунге-Кутты 4 порядка. Решение системы в точках $t = 0, h, 2h, 3h$ необходимы для дифференциальной части численной схемы, а значение в точке $\frac{1}{2}$ требуется для квадратурной формы.

В зависимости от вида ядра $J(t)$ динамическая система будет иметь следующий вид:

Для ядра $J(t) = K(0)e^{-\tilde{b}t}$.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (\eta - ps^2x_3)x_2 - \eta x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= (D - x_3)x_1 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= Q(x_1, x_2) - \tilde{b}x_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Для ядра $J(t) = te^{-\tilde{b}t}$.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (\eta - ps^2x_3)x_2 - \eta x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= (D - x_3)x_1 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4(t) \\ \frac{dx_4}{dt} &= Q(x_1, x_2) - 2\tilde{b}x_4 - \tilde{b}^2x_3 \end{aligned} \quad (12)$$

Получаем алгоритм поиска начального приближения для многошагового метода:

1. Находим значения функций $f(x)$ и $Q(x)$ в точке $t = 0$.

2. С шагом $\frac{h}{2}$ находим значения $x_{\frac{1}{2}}$. Находим значение функции $Q(x_{\frac{1}{2}})$.
3. С шагом $\frac{h}{2}$ находим значения x_1 . Находим значения функций $f(x)$ и $Q(x)$ в точке $t = h$.
4. С шагом h находим значения x_1 . Находим значения функций $f(x)$ и $Q(x)$ в точке $t = 2h$.
5. С шагом h находим значения x_1 . Находим значения функций $f(x)$ и $Q(x)$ в точке $t = 3h$.

После нахождения значений всех необходимых функций, мы можем запустить вычислительную процедуру методом Адамса.

Вычислительные эксперименты

Была проведена серия вычислительных экспериментов в модели (3). Далее на рисунках представлены результаты моделирования. Вычисления проводились на системе (3) со следующими значениями управляющих параметров:

$$\eta = 10, \quad D = 24, \quad b = \frac{8}{3}, \quad ps^2 = 0,$$

$$K(t) = e^{-bt}, \quad Q(x, y) = xy.$$

На рис. 2б. показано решение $x(t)$ системы (3) без случайного воздействия ξ .

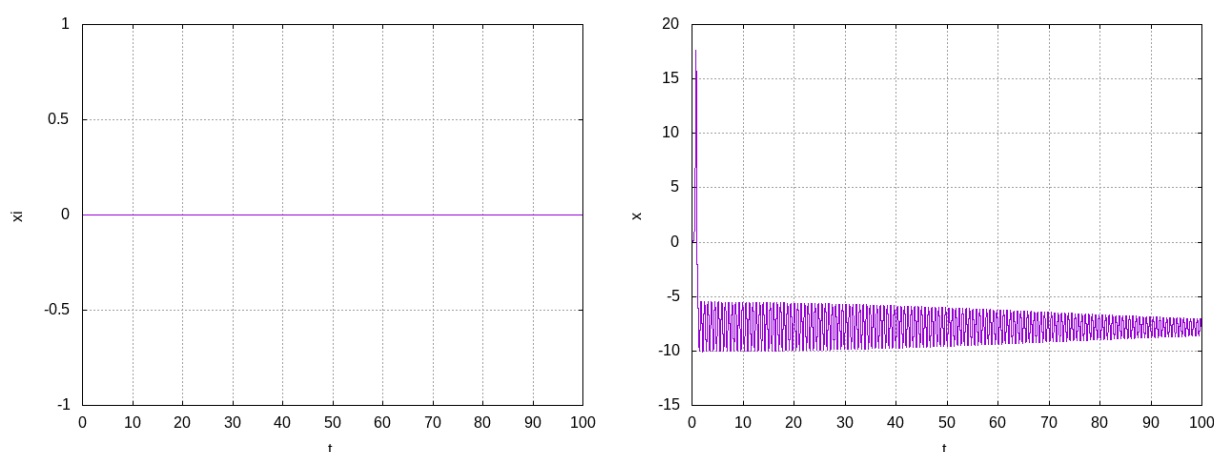
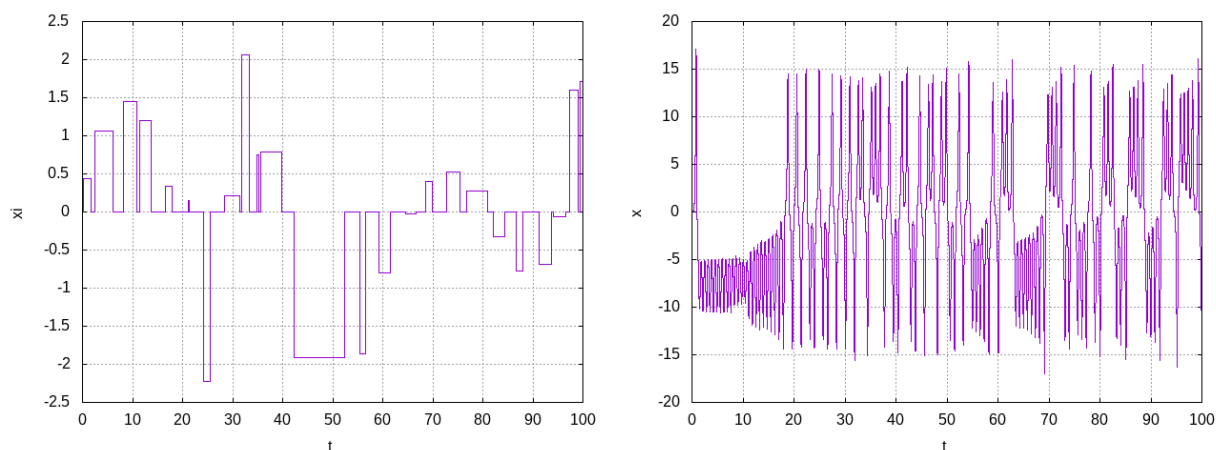
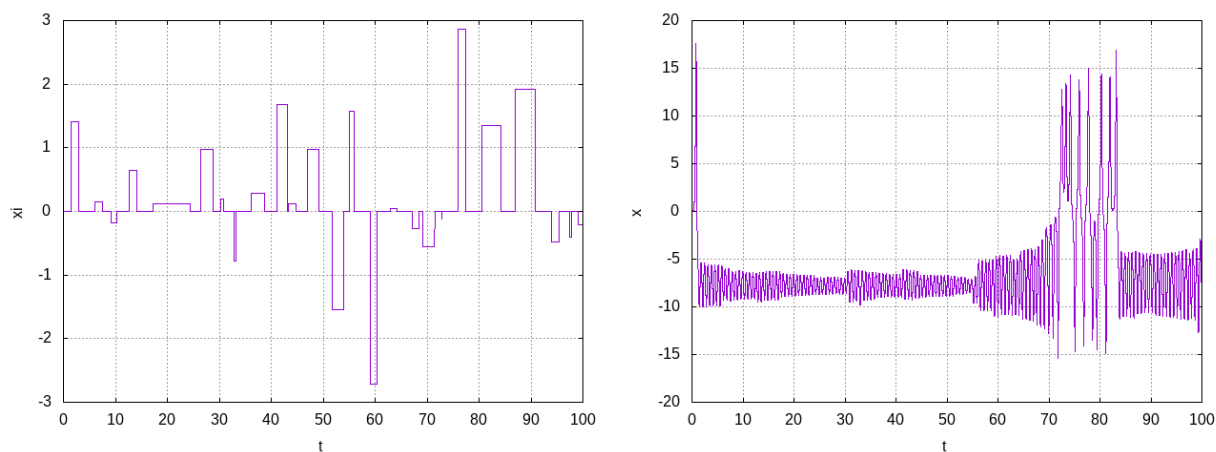


Рис. 2. Случайный процесс $\xi(t)$ (а) и фазовая координата $x(t)$ (б).

Figure 2. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $x(t)$ (b).

На рис. 3б изображено решение $x(t)$ системы (3) с случайным воздействием $\xi(t)$ приведенным на рис. 3а.

Рис. 3. Случайный процесс $\xi(t)$ (a) и фазовая координата $\chi(t)$ (b).Figure 3. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $\chi(t)$ (b).Рис. 4. Случайный процесс $\xi(t)$ (a) и фазовая координата $\chi(t)$ (b).Figure 4. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $\chi(t)$ (b).

Еще одна реализация случайного процесса и его влияния на систему (3) представлены на рис. 4.

Теперь рассмотрим случай, когда система (2) без случайного воздействия имеет хаотический режим динамики рис. 5b. Для этого зафиксируем значения управляющих параметров следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta &= 10, \quad D = 21, \quad b = 2, \quad ps^2 = 0, \\ K(t) &= e^{-bt}, \quad Q(x, y) = xy. \end{aligned} \quad (13)$$

На рис. 6 представлен результат моделирования системы (3) со значениями управляющих параметров (13) и влиянием случайного процесса.

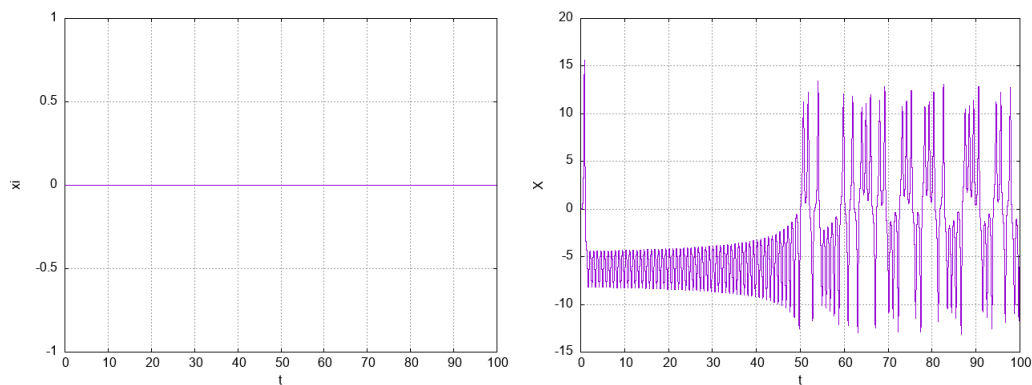


Рис. 5. Случайный процесс $\xi(t)$ (a) и фазовая координата $\chi(t)$ (b).

Figure 5. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $\chi(t)$ (b).

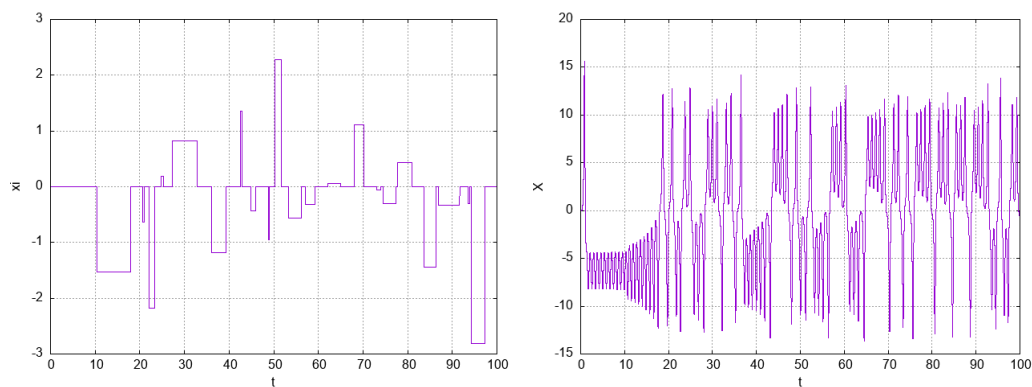


Рис. 6. Случайный процесс $\xi(t)$ (a) и фазовая координата $\chi(t)$ (b).

Figure 6. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $\chi(t)$ (b).

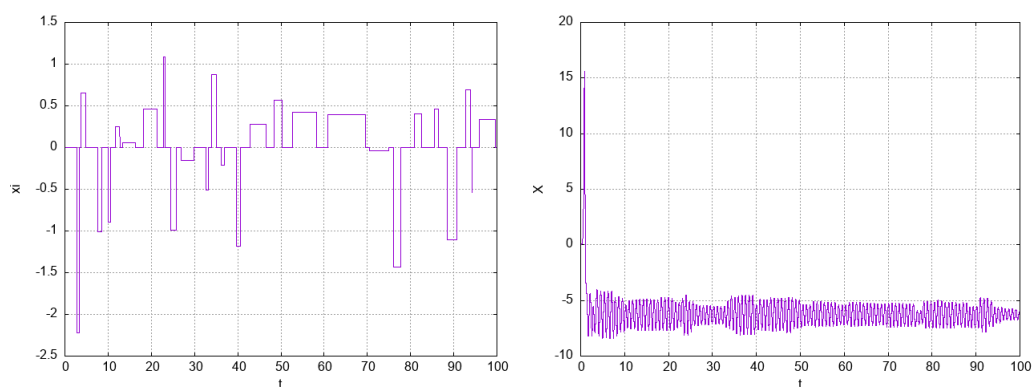


Рис. 7. Случайный процесс $\xi(t)$ (a) и фазовая координата $\chi(t)$ (b).

Figure 7. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $\chi(t)$ (b).

На рис. 7 представлена еще одна реализация случайного процесса и его влияния на систему (3) с управляющими параметрами (13). На данном примере видно, что случайное воздействие на хаотическую систему может подавлять хаотическое поведение.

Заключение

В данной работе был представлен метод генерации случайного процесса моделирующий влияния спонтанно возникающих и спонтанно разрушающихся структур. Реализован этот метод в виде случайного процесса, включающий в себя набор случайных величин распределенных по разным законам распределения, так например интенсивность влияния когерентных структур описывается гауссовским распределением, а время ожидания k -ой структуры описывается степенным распределением, в свою очередь, время существования структуры, показательным.

В работе была обобщена модель космических динамо-систем, аддитивным образом добавлена случайная поправка в α -генератор, что позволило получить, при статично заданных значениях управляющих параметров, резкие смены режимов динамики, включая появление промежутков прекращения генерации – остановки динамо.

Список литературы

1. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. *Магнитные поля в астрофизике*. М.: Ижевск: НИЦ «РХД», 2006.
2. Krause F., Rädler K.-H. *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. New York: PergamonPress, 1980.
3. Merrill R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*. London: Academic Press, 1996.
4. Brandenburg A. Memory effects in turbulent transport, *Astrophys. J*, 2009. vol. 706, pp. 712–726.
5. Hori K., Yoshida S. Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity, *Geophys. Astro. Fluid.*, 2008. vol. 102, pp. 601–632.
6. Vodinchar G. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale $\alpha\omega$ -Dynamo, *Mathematics*, 2020. vol. 8(11), pp. 2065 DOI: 10.3390/math8112065.
7. Казаков Е. А. Эредитарная маломодовая модель динамо, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2021. Т. 35(2), С. 40-47 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47.
8. Казаков Е.А. Двухмодовая модель гидромагнитного динамо с памятью, *Вычислительные технологии*, 2022. Т. 27(6), С. 19-32 DOI: 10.25743/ICT.2022.27.6.003.
9. Водинчар Г. М., Казаков Е.А. Исключение интегрального члена в уравнениях одной эредитарной системы, связанной с задачей гидромагнитного динамо, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2023. Т. 42(1), С. 180-190 DOI: doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190.
10. Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory, *E3S Web of Conf*, 2018. vol. 62 DOI: 10.1051/e3sconf/20186202011.
11. Колесниченко А. В., Маров М. Я. *Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред*. М.: БИНОМ, 2009.
12. Vodinchar G., Feshchenko L. Fractal Properties of the Magnetic Polarity Scale in the Stochastic Hereditary $\alpha\omega$ -Dynamo Model, *Fractal Fract*, 2022. vol. 6(6), pp. 328 DOI: 10.3390/math8112065.
13. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. М.: Наука, 1968.
14. Калиткин Н. Н. *Численные методы*. М.: Наука, 1978.

15. Тутуева А. В., Бутусов Д. Н., Копец Е. Е., Рыбин В. Г., Давидчук А. Г. Полужавные многошаговые методы Адамса-Башфорта-Мултона при решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*, 2021. Т. 64, № 8, С. 599-607..
16. Moheuddin M.M., Titu M.A.S., Hossai S.A New Analysis of Approximate Solutions for Numerical Integration Problems with Quadrature-based Methods, *Pure and Applied Mathematics Journal*, 2020. vol. 9, no. 3, pp. 46-54, DOI: 0.11648/j.pamj.20200903.11.

Информация об авторах



Казakov Евгений Анатольевич ✉ – младший научный сотрудник лаборатории электромагнитных излучений Института космofизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0001-7235-4148.



Водинchar Глеб Михайлович ✉ – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов Института космofизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0002-5516-1931.

References

- [1] Zeldovich Ya. B., Ruzmaikin A. A., Sokolov D. D. Magnitie polay v astrofizike [Magnetic fields in astrophysics] Moscow-Izhevsk: SIC «RHD», 2006. (In Russian).
- [2] Krause F., Rädler K.-H. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. - New York: Pergamon Press, 1980.
- [3] Merrill R. T., McElhinny M. W., McFadden P. L. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle. London: Academic Press, 1996.
- [4] Brandenburg A. Memory effects in turbulent transport, *Astrophys. J.*, 2009. vol. 706. P. 712–726.
- [5] Hori K., Yoshida S. Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity. *Geophys. Astro. Fluid.* 2008. vol. 102. P. 601–632.
- [6] Vodinchar G. M. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale $\alpha\omega$ -Dynamo, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 11, p. 2065. DOI: 10.3390/math8112065.
- [7] Kazakov E. A. Hereditary low-mode dynamo model. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021. vol. 35. no. 2. P. 40–47. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47 (In Russian).
- [8] Kazakov E. A. Two-mode model of a hydromagnetic dynamo with memory. *Computational Technologies.* 2022. vol. 27. no. 6. P. 19–32. DOI: 10.25743/ICT.2022.27.6.003. (In Russian).
- [9] Vodinchar G. M., Kazakov E. A. Elimination of the integral term in the equations of one hereditary system related to the hydromagnetic dynamo. *Vest. KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023. vol. 42. no. 1. P. 180–190. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190. (In Russian).
- [10] Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory. *E3S Web of Conf.* 2018, vol. 62. 02011. DOI: 10.1051/e3sconf/20186202011.
- [11] Kolisnichenko A. V., Marov M. Ya. Turbulence and self-organization. Problems of modeling space and natural environments. Moscow. Binom, 2009. (In Russian).
- [12] Vodinchar G., Feshchenko L. Fractal Properties of the Magnetic Polarity Scale in the Stochastic Hereditary $\alpha\omega$ -Dynamo Model, *Fractal Fract.*, 2022. vol. 6, no. 6, p. 328. DOI: 10.3390/math8112065.
- [13] Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnih rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of mathematics for scientists and engineers]. Moscow. Nauka. 1968. (In Russian).
- [14] Kalitkin N. N. Numerical methods Moscow: Science. 1978. 512. (In Russian).
- [15] Tutueva A. V., et al. G. Semi-explicit multistep Adams-Bashforth-Moulton methods for solving stiff systems of ordinary differential equations. *Jour. of Instrum. Enginer.* 2021. vol. 64, no. 8. P. 599–607 (in Russian).
- [16] Moheuddin M. M., Titu M. A. S., Hossain S. A New Analysis of Approximate Solutions for Numerical Integration Problems with Quadrature-based Methods. *Pure and Applied Mathem. Jour.* 2020. vol. 9. no. 3. P. 46–54. DOI: 10.11648/j.pamj.20200903.11.

Information about the authors



Kazakov Evgeny Anatolevich ✉ – Junior Researcher, Lab. of electromagnetic propagation, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia,
 ORCID 0000-0001-7235-4148.



Vodinchar Gleb Mikhailovich ✉ – Ph. D. (Phys. & Math.), Leading Researcher, Lab. for Simulation of Physical Processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia,
 ORCID 0000-0002-5516-1931.